

تحلیل نحوه پخش نانوذرات در جریان جابه‌جایی مختلط آشفته نانوسیال آب و اکسید مس

فرزاد بازدیدي طهراني*، سيد ايمان واصفي و اميرمسعود انواري
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۰۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۵/۲۷)

چکیده- در این پژوهش، جریان جابه‌جایی آشفته نانوسیال آب و اکسید مس در یک کانال قائم به صورت عددی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. جهت مدل‌سازی جریان فاز سیال به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود، در حالی که نانوذرات به صورت فاز گسسته در سیال پایه پخش شده‌اند. نحوه پخش نانوذرات اکسید مس در سیال پایه در شرایط جریانی مختلف مطالعه می‌شود تا مکانیزم‌های مؤثر بر توزیع نانوذرات در مقطع کانال مشخص شود. نتایج مبین این نکته است که در شرایط جریان جابه‌جایی آشفته و در ناحیه کاملاً توسعه یافته اثر پدیده ترموفورسیس بر حرکت براونسی نانوذرات غلبه کرده و از این رو تجمع ذرات در نواحی مرکزی کانال بیشتر است. اما در ناحیه ورودی که لایه مرزی به طور کامل شکل نگرفته است، توزیع نانوذرات یکنواخت تر است. همچنین افزایش کسر حجمی نانوذرات به افزایش نوسانات سرعت آشفتنگی در نواحی نزدیک به دیواره کمک کرده و این اثر متقابل موجب بهبود بیشتر انتقال حرارت در جریان آشفته نسبت به جریان آرام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نانوسیال، جابه‌جایی آشفته، پخش ذرات.

Analysis of Particle Dispersion in Turbulent Mixed Convection of CuO-water Nanofluid

F. Bazdidi Tehrani*, S. I. Vasefi, and A. M. Anvari

Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract: In the present paper, turbulent convection of CuO-Water Nanofluid in a vertical channel is investigated numerically. In order to simulate the flow, the fluid is considered as a continuous phase while the discrete nanoparticles are dispersed through it. The dispersion of CuO nanoparticles in different flow conditions are studied in order to find the effective

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: bazdid@iust.ac.ir

mechanisms of particles dispersion in the channel. The results show that in the fully developed turbulent convection flow, thermophoresis is more dominant than Brownian motion of nanoparticles and therefore the nanoparticles aggregation are more in the central areas of the channel. While in entrance region, where the boundary layer is not fully formed, the particles dispersion are more uniform. Also, an increase in the nanoparticles concentration will increase the turbulent velocity fluctuations in regions near the wall and this two-sided effect will cause improvement in turbulent flow thermal transmittance than the laminar flow.

Keywords: Nanofluid, Turbulent convection, Dispersion of particles.

فهرست علائم

عدد ثابت	β_r	ضریب تصحیح کانینگهام	C_c
عدد ثابت	β	گرمای ویژه در فشار ثابت ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	c_p
عدد ثابت	β^*	ضریب پخش براونی	D_B
عدد ثابت	ϕ	قطر هیدرولیکی	D_h
عدد ثابت	σ	قطر نانوذرات (m)	d_p
عدد ثابت	σ_k	فاکتور اصطکاک	f
عدد ثابت	σ_{k1}	عدد گراشف	G_r
عدد ثابت	σ_{k2}	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی ($W.m^{-2}.K^{-1}$)	h
عدد ثابت	$\sigma_{\omega1}$	هدایت گرمایی ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	k
عدد ثابت	$\sigma_{\omega2}$	ضریب پخش براونی به ترموفورسیس	N_{BT}
دلتای کرونیگر	δ_{ij}	عدد ناسلت (hD_h/k)	Nu
اعداد تصادفی گوس با واریانس مستقل واحد	ζ_j	فشار ($kg.m^{-1}.s^{-2}$)	P
لزجت دینامیکی ($N.s.m^{-2}$)	μ	عدد پراوتل (v/α)	Pr
چگالی ($kg.m^{-3}$)	ρ	شار گرما ($W.m^{-2}$)	q''
کسر حجمی	ϕ	عدد رایلی (Gr.Pr)	Ra
نرخ اضمحلال ویژه ($kg.m^{-3}$)	ω	عدد رینولدز (vD_h/ν)	Re
زیرنویس		دما (K)	T
بالک	b	سرعت ($m.s^{-1}$)	v
نسبی	d	جهات مختصات	x,y,z
سیال پایه	f	علائم یونانی	
نانو ذره	p	عدد ثابت	α_1
آشفتگی	t	عدد ثابت	α_2
		عدد ثابت	β_1

است. برای تهیه نانوسیال از دو روش مختلف استفاده می‌شود؛ روش یک مرحله‌ای و روش دو مرحله‌ای. در روش یک مرحله‌ای، نانوذرات به‌صورت هم‌زمان تولید و در سیال پایه معلق می‌شوند. در روش دو مرحله‌ای ابتدا نانوذرات توسط یکی از روش‌های تولید نانوذره تهیه شده و سپس در مرحله بعد در سیال پایه پراکنده می‌شوند. یک مزیت روش دو مرحله‌ای این است که در این روش تهیه نانوذرات به تولید انبوه می‌رسد. یکی از

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۶، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶

۱- مقدمه

پژوهشگران در طی سال‌های گذشته تلاش‌های فراوانی برای افزایش انتقال حرارت انجام داده‌اند. روش‌های متعددی نیز به کار گرفته شد. یکی از این روش‌ها، پخش کردن ذرات جامد ریز از مقیاس نانو در سیال است. به این مخلوط، نانوسیال گفته می‌شود. تحقیق‌های بسیاری در زمینه نانوسیالات مانند بررسی نوع و اندازه ذرات و همچنین رژیم‌های جریان‌های مختلف صورت گرفته

مشکلات اصلی در استفاده از روش دو مرحله‌ای، غلبه بر مشکل ناپایداری نانوسیال است به این معنی که باید با استفاده از تکنیک‌هایی، از ته‌نشینی ذرات در اثر تجمع و به هم چسبیدن نانوذرات جلوگیری کرد [۱]. جهت افزایش پایداری نانوسیال روش‌های مختلفی وجود دارد. تغییر pH سوسپانسیون، استفاده از مواد فعال کننده یا پخش کننده سطحی و همچنین ارتعاشات فرا صوت نانوسیال از جمله این روش‌ها است [۲]. یکی از معیارهای بررسی میزان پایداری نانوسیال معیار زتای است. پتانسیل زتای یک پتانسیل الکتریکی است که بیان کننده اختلاف پتانسیل بین نانوذره و لایه سیال چسبیده به آن می باشد. پتانسیل زتای نشان دهنده میزان دفعه بین ذرات مشابه مجاور است. بنابراین سوسپانسیون‌هایی با پتانسیل زتای بالا از لحاظ الکتریکی به شرایط پایداری رسیده‌اند در حالی که سوسپانسیون‌هایی با پتانسیل زتای پایین تمایل بیشتری به کلوخه شدن دارند. نانوسیال‌هایی با پتانسیل زتای ۴۰ تا ۶۰ mV دارای میزان پایداری قابل قبول هستند [۳]. کیم و همکاران [۴]، با استفاده از تحلیل پتانسیل زتای نانوسیال طلا و آب پایداری این نانوسیال را تا مدت یک ماه بدون ته‌نشینی قابل توجهی حفظ کردند. همت اسفه و همکاران [۵] به بررسی انتقال حرارت جریان آشفته آب و اکسید منیزیم در یک لوله دایره‌ای و با کسرهای حجمی متفاوت به صورت آزمایشگاهی پرداختند. آنها متوجه شدند که روابط ستی در پیش‌بینی ضریب هدایت حرارتی و ویسکوزیته دینامیکی نانوسیال آب و اکسید منیزیم ناتوان است. به همین دلیل از روابطی که از طریق آزمایشگاهی به دست آمد، استفاده کردند. نتایج آنها، افزایش ۲۱/۸ درصد ناسلت را در کسر حجمی ۰/۵ درصد و در عدد رینولدز ۶۷۰۰ نشان می‌دهد. سوهل و همکاران [۶] نیز به صورت تحلیلی انتقال حرارت و خواص ترموفیزیکی چند نانوسیال را در رژیم جریان آرام و میکروکانال دایره‌ای بررسی کردند. آنها از نانوسیال‌های آب و اکسید آلومینیم، آب و اکسید تیتانیوم و آب و اکسید مس استفاده کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که بیشترین افزایش انتقال حرارت مربوط به نانوسیال آب و اکسید مس با ۱۳/۱۵ درصد افزایش برای ۴

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۶، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶

درصد کسر حجمی است و کمترین انتقال حرارت را نانوسیال آب و اکسید تیتانیوم با ۶/۲ درصد افزایش دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش انتقال حرارت در جریان آشفته بیشتر از جریان آرام است. لذا اهمیت و لزوم بررسی نانوسیال در جریان آشفته و انتقال حرارت مربوط به آن امکان‌ناپذیر است. آنوپ و همکاران [۷] ویژگی‌های انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیال آب و آلومینا را در یک جریان آشفته به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. قطر نانوذرات کمتر از ۱۰۰ نانومتر در نظر گرفته شد. آزمایشات در چهار کسر حجمی انجام شده است و بیشترین افزایش انتقال حرارت در بیشترین کسر حجمی یعنی ۴ درصد مشاهده شده است. مهرجو و همکاران [۸] انتقال حرارت نانوسیال آب و اکسید مس را در یک کانال مربعی در یک تحقیق آزمایشگاهی بررسی کردند. آنها نشان دادند که با افزایش کسر حجمی از ۰/۲ تا ۰/۵ درصد و در پکلت ۳۷۵۰۰ ضریب انتقال حرارت ۱۰/۳۴ درصد افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج آزمایشگاهی ذکر شده، مشخص می‌شود که تفاوت در میزان بهبود انتقال حرارت گزارش شده در تحقیقات مختلف قابل توجه است. به همین منظور تحقیقات عددی توسعه یافته‌اند تا مکانیزم‌های حاکم بر جریان و انتقال حرارت نانوسیال را مشخص سازند. سلمان و همکاران [۹] انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیال‌های مختلف را در کسرهای حجمی متفاوت در جریان آرام و در میکرو لوله به صورت عددی بررسی کردند. آنها همچنین قطر ذرات را تغییر دادند و مشاهده کردند که با افزایش عدد رینولدز و افزایش کسر حجمی، عدد ناسلت افزایش پیدا می‌کند. بیشترین افزایش مربوط به نانوسیال اتیلن گلیکول و اکسید سیلیسیوم و کمترین ناسلت مربوط به نانوسیال اتیلن گلیکول و اکسید آلومینیم است. همچنین آنها نتیجه گرفتند که با افزایش قطر نانوذرات، عدد ناسلت کاهش پیدا می‌کند. نامورو و همکاران [۱۰] انتقال حرارت و جریان آشفته نانوسیال را با در نظر گرفتن خواص متغیر به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. آنها از سه نانوذره مختلف (اکسید مس، اکسید آلومینیم و اکسید سیلیکون) و دو مایع پایه مختلف (آب و اتیلن گلیکول) استفاده

کردند. هندسه مورد استفاده لوله دایره‌ای با شرط مرزی شار حرارتی ثابت بود. در این مطالعه از خواص وابسته به دما استفاده شد. نتایج نشان داد که ذرات ریزتر باعث افزایش بیشتری در عدد ناسلت و لزجت نانوسیال می‌شوند. نانوسیالات شامل نانوذرات با جنس‌های مختلف با هم مقایسه شد. نانوسیال شامل نانوذرات اکسید مس با غلظت ۶ درصد، در مقایسه با آب در یک عدد رینولدز ثابت، ۳۵ درصد افزایش نشان می‌دهد. لطفی و همکاران [۱۱] انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیالات را با نگرش‌های مختلف به صورت عددی حل و با هم مقایسه کردند. از مدل ترکیبی دو فازی و مدل اوپلری و همچنین از حل به روش تک فاز در این مطالعه استفاده و نتایج مقایسه شدند. اثر غلظت نانوذرات بر پارامترهای حرارتی ارزیابی شد. با مقایسه نتایج با کارهای آزمایشگاهی، مشخص شد که مدل ترکیبی، جواب‌های بهتری در مقایسه با حل‌های دیگر ارائه می‌دهد. نانوسیال مورد استفاده، آب و اکسید آلومینیوم بود. بیانکو و همکاران [۱۲] انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری نانوسیال آب و اکسید آلومینیوم را در لوله دایره‌ای با شرایط مرزی شار حرارتی ثابت و دمای سطح ثابت در یک مطالعه عددی بررسی کردند. در این مطالعه هم از روش تک فاز و هم از روش دو فاز برای حل استفاده شد. برای انجام حل، هم از خواص ثابت و هم از خواص وابسته به دما استفاده شد. بررسی‌ها برای اندازه ذرات ۱۰۰ نانومتری انجام شد. اختلاف بین نتایج حل با دو نگرش مختلف (دو فاز و تک فاز) حدود ۱۱ درصد بود. ضریب انتقال حرارت با افزایش غلظت، افزایش می‌یافت که همراه با افزایش تنش برشی دیوار بود. وقتی از مدل‌های خواص وابسته به دما در حل استفاده می‌شد، بیشترین ضریب انتقال حرارت و کمترین تنش برشی به دست می‌آمد. با افزایش عدد رینولدز ضریب انتقال حرارت، افزایش بیشتری می‌یافت که آن هم همراه با افزایش در تنش برشی بود. بازدیدی پهرانی و همکاران [۱۳] انتقال حرارت تک فاز و دو فاز جابه‌جایی مختلط آرام نانوسیال را در کانال قائم مستطیلی به صورت عددی بررسی کردند. آنها از نانوسیال آب و اکسید تیتانیوم استفاده کردند و دریافتند که در مدل دو فاز نتایج دقیق

تری نسبت به مدل تک فاز به دست می‌آید. آنها همچنین مشاهده کردند که در عدد ریچاردسون پایین تر که اثر جابه‌جایی اجباری بیشتر از جابه‌جایی آزاد است، بهبود انتقال حرارت بیشتر است به صورتی که برای کسر حجمی ۱ درصد و $Ri = 0.5$ برابر $6/5$ درصد و برای $Ri = 5$ کمتر از ۴ درصد است. از بررسی‌های به عمل آمده مشاهده می‌شود که دقت مدل دو فاز به مراتب بیشتر از تک فاز است. بنابراین لزوم بررسی نحوه پخش نانوذرات در یک نانوسیال جهت بررسی تأثیر آن بر نحوه انتقال حرارت احساس می‌شود. در مقاله حاضر به مدل‌سازی جریان جابه‌جایی آشفته آب و اکسید مس در کانال قائم مربعی پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی جریان، به روش دو فاز (اوپلری- لاگرانژین) و با استفاده از مدل $k-\omega(SST)$ صورت گرفته است. هدف از تحقیق حاضر بررسی نحوه پخش ذرات در یک جریان جابه‌جایی آشفته است و اینکه حضور نانوذرات چه تأثیری بر آشفستگی جریان می‌گذارد و به صورت متقابل، آشفستگی جریان چه تأثیری بر نحوه پخش ذرات خواهد داشت. به همین منظور در ابتدا تأثیر حضور نانوذرات بر عدد ناسلت و فاکتور اصطکاک بررسی می‌شود و در ادامه به عواملی که موجب تغییر عدد ناسلت و فاکتور اصطکاک می‌شود، پرداخته می‌شود. از نتایج این تحقیق می‌توان جهت هدایت نانوذرات با هدف به دست آوردن حداکثر انتقال حرارت و حداقل افت فشار استفاده کرد.

۲- معادلات حاکم بر جریان نانوسیال

در مدل اوپلر- لاگرانژ سیال به صورت پیوسته و نانوذرات به صورت گسسته تحلیل می‌شوند. به همین منظور معادلات ناویر استوکس برای سیال نوشته شده و اثر حضور ذرات به صورت دو بخش ترموفورتیک و براونی در معادله مومنتوم و معادله انرژی وارد می‌شود. بنابراین، برای فاز مایع معادلات بقا در حالت جریان پایا به صورت زیر بیان می‌شود:

معادله پیوستگی:

$$\nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f) = 0 \quad (1)$$

معادله مومنتوم:

$$\nabla \cdot (\rho_f c_{p,f} v_f T_f) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + V_p Q \quad (7)$$

که Q شار کلی حرارتی تبادل شده میان ذره و سیال است که به وسیله رابطه (۸) محاسبه می‌شود:

$$Q = h A_p (T_p - T_f) \quad (8)$$

که در آن A_p مساحت یک ذره است و h از رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$h = \frac{k_f Nu}{d_p} \quad (9)$$

که در آن Nu از طریق رابطه رنز و مارشال [۱۶] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Nu = 2 + 0.6 Re_d^{1/2} Pr^{1/3} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن یک حجم کنترل در اطراف ذره و نوشتن قانون بقای انرژی برای ذره، نتیجه می‌شود که:

$$m_p c_{p,p} \frac{dT_p}{dt} = Q \quad (11)$$

در شبیه‌سازی حاضر، از مدل آشفتگی دو معادله‌ای $SST/k-\omega$ استفاده شده است. معادلات انتقال برای این مدل آشفتگی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{2\rho(1-F_1)\sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (13)$$

$$F_1 = \tanh \left\{ \left[\text{Min} \left[\text{Max} \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_\omega k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^2 \right\} \quad (14)$$

$$CD_{k\omega} = \text{Max} \left[2\rho \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right] \quad (15)$$

ثوابت استفاده شده در روابط بالا مربوط به معادلات $SST/k-\omega$ در جدول (۱) نشان داده شده است. مقادیر β ، σ_k و γ از ثوابت مدل هستند که نحوه محاسبه آنها در مرجع [۱۹] به طور

$$\nabla \cdot (\rho_f v_f) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu_f \nabla v_f) + \rho (F_T + F_B) \quad (2)$$

که F_T و F_B به ترتیب بیان کننده نیروهای ترموفورتیک و براونی (در واحد جرم) است که بر ذره وارد می‌شود.

نیروی ترموفورتیک

نیروی ترموفورتیک در اثر گرادیان دما در فاز پیوسته اتفاق می‌افتد. سرعت مولکولی بیشتر در اثر دمای بیشتر در یک طرف ذره، تغییر مومنتوم بیشتری را موجب می‌شود و در نتیجه نیرویی در جهت کاهش دما ایجاد می‌شود.

نتایج اپستین [۱۴] بهترین تطابق را با نتایج آزمایشگاهی برای محدوده گسترده‌ای از عدد نادسن و نسبت ضریب هدایت گرمایی دارد:

$$F_T = \frac{-9\pi\mu_f d_p}{\rho_f} \times \frac{k_f}{2k_f + k_p} \times \frac{\nabla T}{T} \quad (3)$$

نیروی براونی

نیروی دیگری که بر ذرات ریز پخش شده در سیال وارد می‌شود، نیروی براونی است. برای ذرات زیر میکرون، تأثیر حرکت براونی در نیروی اضافی قرار می‌گیرد. اجزای نیروی براونی به وسیله فرایند طیف گاوسی با شدت طیف $S_{n,ij}$ مدل می‌شود که بر طبق آن [۱۵]:

$$S_{n,ij} = S_i \delta_{ij} \quad (4)$$

که δ_{ij} دلتای کرونیکر است و:

$$S_i = \frac{216\nu k_B T}{\pi^2 \rho d_p^3 \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^2 C_c} \quad (5)$$

که T دمای مطلق سیال، ν ویسکوزیته سینماتیکی، و k_B ثابت بولتزمن است. بزرگی اجزای نیروی براونی به فرم زیر است که:

$$F_{b_i} = \zeta_i \sqrt{\frac{\pi S_i}{\Delta t}} \quad (6)$$

که ζ_i اعداد تصادفی گوس با واریانس مستقل واحد و متوسط صفر است. به این ترتیب مقادیر نیروی براونی در هر بازه زمانی ارزیابی می‌شود.

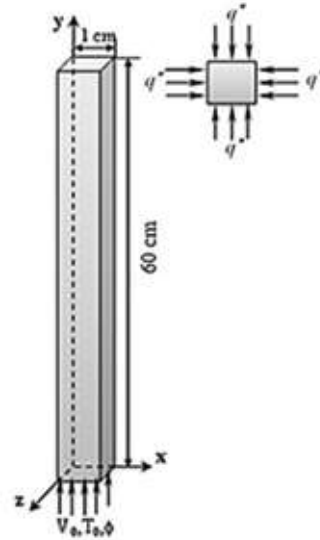
معادله انرژی:

جدول ۱- ضرایب موجود در مدل $k-\omega$ (SST) [۱۹]

α_1	α_2	β_1	β_2	β^*	σ_{k1}	σ_{k2}	$\sigma_{\omega1}$	$\sigma_{\omega2}$
۵/۹	۰/۴۴	۳/۴	۰/۰۸۲۸	۰/۰۹	۰/۸۵	۱	۰/۵	۰/۸۵۶

۳- هندسه جریان و شرایط مرزی

جهت شبیه‌سازی جریان نانوسیال آب و اکسید مس کانالی قائم با سطح مقطع مربعی به ضلع ۱ سانتی‌متر و طول ۶۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. در ورودی کانال شرایط مرزی سرعت و دمای ثابت و کسر حجمی معلوم نانوذره اکسید مس در نظر گرفته می‌شود و در دیواره‌ها نیز شرط مرزی عدم لغزش و شار حرارتی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در خروجی کانال نیز شرط مرزی فشار خروجی اعمال شده است. شکل (۱) شمایی از هندسه در نظر گرفته شده و شرایط مرزی اعمال شده را نشان می‌دهد. نانوذرات اکسید مس به صورت کروی در نظر گرفته می‌شوند. قطر همه نانوذرات از ثابت و برابر با ۴۰ نانومتر در نظر گرفته می‌شود. این نانوذرات از صفحه ورودی به طور یکنواخت به جریان سیال به صورت پایا تزریق می‌شوند. همچنین شرایط مرزی دیواره‌ها برای نانوذره‌ها از نوع انعکاسی و برخورد الاستیک منظور می‌شود.



شکل ۱- هندسه مسئله مورد بررسی و شرایط مرزی

کامل ذکر شده است. با توجه به آنکه انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی مختلط است، اثر جابه‌جایی طبیعی نیز در کنار جابه‌جایی اجباری لحاظ خواهد شد. بدین منظور پارامتر جابه‌جایی مختلط^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MCP = \frac{Ra_{D_h}^{1/4}}{Re_{D_h}^{1/2} Pr^{1/3}} \quad (16)$$

این پارامتر بیان‌کننده اثرات اعداد بدون بعد رینولدز، پراتل و رایلی است و نشان‌دهنده مکانیزم انتقال حرارت جابه‌جایی مختلط است.

هر اندازه که اثر مکانیزم جابه‌جایی طبیعی در جریان بیشتر شود، عدد رایلی نیز افزایش یافته و مقدار این پارامتر بیشتر می‌شود. بجان [۱۷] نشان داده است برای زمانی که پارامتر جابه‌جایی مختلط از درجه واحد است، هر دو مکانیزم جابه‌جایی طبیعی و اجباری حائز اهمیت خواهند بود، اما برای مقادیر خیلی کوچک‌تر از یک، جابه‌جایی اجباری و برای مقادیر خیلی بزرگ‌تر از یک، جابه‌جایی طبیعی مکانیزم اصلی انتقال حرارت خواهد بود.

۴- تحلیل عددی

برای گسسته‌سازی معادلات غیرخطی بیان شده از روش حجم کنترل استفاده شده است. برای تقریب جملات پخش و جابه‌جایی از طرح بالادستی مرتبه دو و جهت حفظ اثر متقابل میدان‌های سرعت و فشار از روش سیمپل (SIMPLE) استفاده شده است. شبکه حل در تمامی جهات به صورت غیریکنواخت تنظیم شده است. با توجه به ماهیت تکرار روش حل، از معیار همگرایی زیر استفاده شده است:

$$|\psi^n - \psi^{n-1}| \leq 10^{-6} \quad (17)$$

که n شماره تکرار و ψ نماینده متغیرهای وابسته (u, v, w, T) در معادلات غیرخطی جریان است. به منظور حصول اطمینان از عدم وابستگی نتایج به شبکه حل عددی، شبکه‌ای مختلفی در نظر گرفته شده است. وابسته نبودن نتایج

جدول ۲- شبکه‌بندی حل عددی و فاصله اولین گره محاسباتی از دیواره

عدد ناسلت	فاصله اولیه از دیواره	تعداد سلول محاسباتی در جهت y	تعداد سلول محاسباتی در جهت x و z
۳۴/۷۸	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۲
۳۳/۶۵	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۶
۲۹/۶۶	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۸
۲۷/۳۱	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۵۸
۲۶/۴۸	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۶۰
۲۶/۲۵	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۶۲
۲۶/۱۳	۰/۰۰۰۰۲	۸۰۰	۶۲
۲۶/۲۷	۰/۰۰۰۰۲	۱۰۰۰	۶۲
۲۶/۳۶	۰/۰۰۰۰۲	۱۰۰۰	۶۶

جدول ۳- شبکه‌بندی حل عددی و فاصله اولین گره محاسباتی از دیواره

فاکتور اصطکاک	فاصله اولیه از دیواره	تعداد سلول محاسباتی در جهت y	تعداد سلول محاسباتی در جهت x و z
۰/۰۱۰۸۹	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۲
۰/۰۱۰۷۸	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۶
۰/۰۱۰۴۶	۰/۰۰۰۲۵	۸۰۰	۵۸
۰/۰۱۰۳۵	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۵۸
۰/۰۱۰۲۷	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۶۰
۰/۰۱۰۳	۰/۰۰۰۲۶	۸۰۰	۶۲
۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۰۰۲	۸۰۰	۶۲
۰/۰۱۰۲۸	۰/۰۰۰۰۲	۱۰۰۰	۶۲
۰/۰۱۰۳۱	۰/۰۰۰۰۲	۱۰۰۰	۶۶

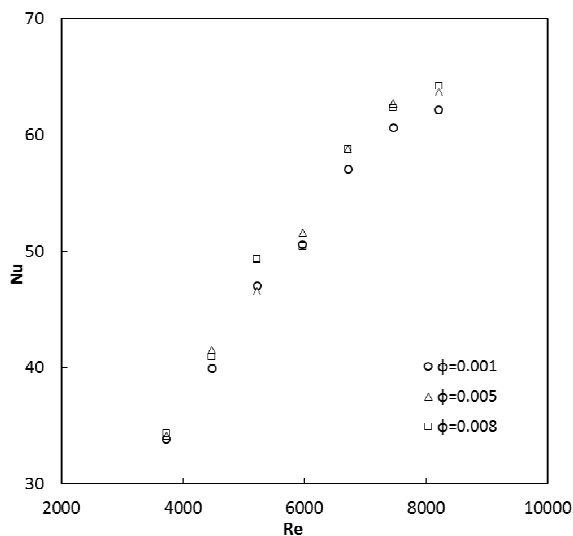
پایین قرار می‌گیرد، اولین گره محاسباتی باید در زیر لایه آرام قرار بگیرد و از استفاده از توابع دیواره اجتناب شود که این امر نیز در شبکه‌بندی مورد توجه قرار گرفته است. جدول‌های (۲) و (۳) استقلال نتایج محاسبه شده با معیار عدد ناسلت، که نماینده پارامتر توزیعی دما است، و همین‌طور با فاکتور اصطکاک، که نماینده پارامتر توزیعی سرعت و فشار است، را از شبکه محاسباتی نشان می‌دهد.

۵- اعتبارسنجی

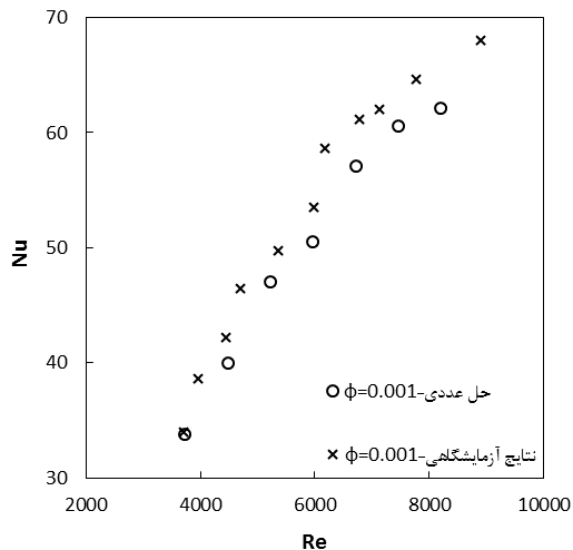
در نخستین گام نتایج به‌دست آمده با نتایج آزمایشگاهی مهرجو و

به شبکه‌بندی موضوع بسیار مهمی است که در صورت عدم برقراری، دلالت بر نادرستی نتایج به‌دست آمده دارد. نکته مهم در شبکه‌بندی، نحوه پخش ذرات است. با توجه به آنکه اندازه ذرات بسیار کوچک است، به شبکه‌بندی بسیار کوچکی نیاز است تا بتوان توزیع ذرات را به درستی تعیین کرد. به همین منظور و پس از بررسی شبکه‌های گوناگون، شبکه‌ای با اندازه ۶۰ سلول محاسباتی در جهت‌های x و z و ۸۰۰ سلول محاسباتی در جهت y به عنوان مبنای محاسبات در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه رژیم جریان آشفته بوده و در عین حال در محدوده اعداد رینولدز

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۶، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۶



شکل ۳- تأثیر تغییرات کسر حجمی بر عدد ناسلت در اعداد رینولدز مختلف



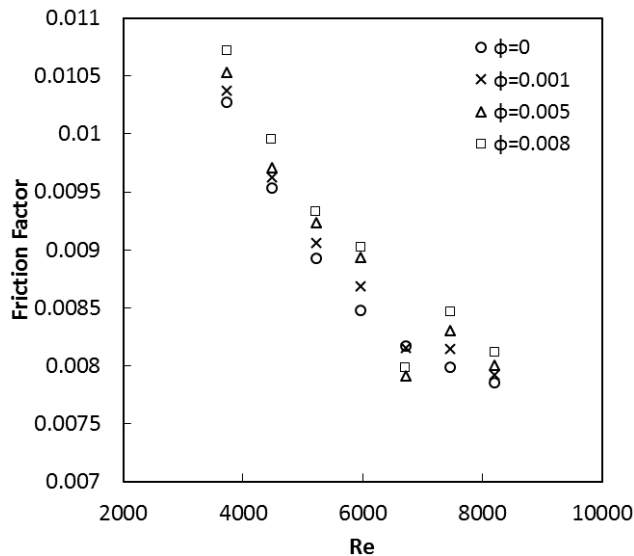
شکل ۲- اعتبار سنجی نتایج حل عددی با نتایج آزمایشگاهی مهرجو و همکاران [۸] در $\phi = 0.1\%$

همکاران [۸] در کسر حجمی ۰/۱ درصد و اعداد رینولدز مختلف بررسی می‌شود که در شکل (۲) نشان داده شده است. با بررسی شکل مشخص می‌شود که نتایج از دقت مناسبی برخوردار است به نحوی که بیشترین خطا ۷/۲۵ درصد و متوسط خطا ۵/۴۳ درصد است. بنابراین نتایج حل عددی معتبر بوده و می‌توان بر مبنای آن به تحلیل جریان آشفته نانوسیال آب و اکسید مس در یک کانال قائم پرداخت.

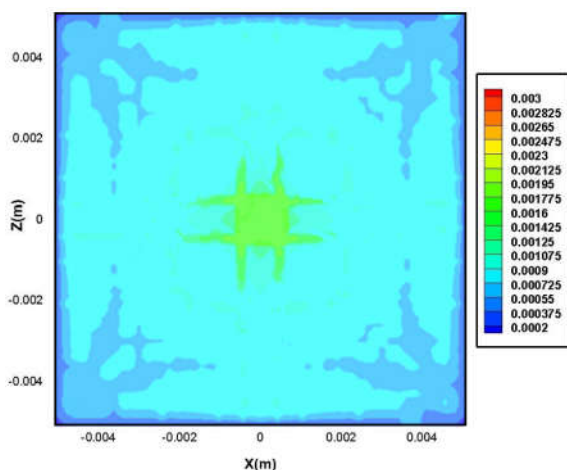
۶- نتایج و بحث

نتایج برای محدوده وسیعی از عدد رینولدز و کسرهای حجمی مختلف به دست آمده است. با توجه به آنکه نحوه توزیع نانوذرات تأثیر مهمی در بهبود انتقال حرارت دارد، در ابتدا تأثیر حضور نانوذرات بر انتقال حرارت و فاکتور اصطکاک بررسی می‌شود و سپس عواملی که موجب بهبود انتقال می‌شود، مورد توجه قرار می‌گیرد. شکل (۳) توزیع عدد ناسلت نانوسیال آب و اکسید مس را در کسرهای حجمی و اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد. مطابق شکل افزایش کسر حجمی موجب بهبود انتقال حرارت خواهد شد که این بهبود در اعداد رینولدز بالاتر مشهودتر است. تغییرات فاکتور اصطکاک با افزایش کسر

حجمی نانوذرات اکسید مس در شکل (۴) بررسی شده است. با توجه به شکل مشخص می‌شود که با افزایش کسر حجمی فاکتور اصطکاک افزایش می‌یابد که این افزایش در مقابل بهبود انتقال حرارت چشمگیر نیست. سپس عوامل تأثیرگذار بر بهبود انتقال حرارت در طول کانال بررسی می‌شود. به همین منظور پخش نانوذرات در ناحیه کاملاً توسعه یافته جریان در دو عدد رینولدز مختلف بررسی شده است. شکل‌های (۵) و (۶) توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس را در یک مقطع از کانال و در $y = 5\text{ cm}$ و در دو عدد رینولدز $Re = 5230$ و $Re = 8208$ نمایش می‌دهد. با توجه به این دو شکل مشخص می‌شود که توزیع نانوذرات در سطح مقطع کانال یکنواخت نیست و کسر حجمی نانوذرات در نواحی مرکزی کانال بیشتر از دیواره‌ها است. در عین حال با افزایش عدد رینولدز نفوذ ذرات به نواحی نزدیک دیواره افزایش می‌یابد که یکی از مهم‌ترین دلایل افزایش انتقال حرارت با افزایش عدد رینولدز است. با توجه به معادله مومتموم، دو مکانیزم ترموفورسیس و حرکت براونی در کنار تأثیر گردابه‌های آشفته بر نحوه پخش نانوذرات اکسید مس تأثیرگذارند. ترموفورسیس در اثر گرادیان دما در سیال اتفاق می‌افتد. سرعت مولکولی بیشتر در اثر دمای

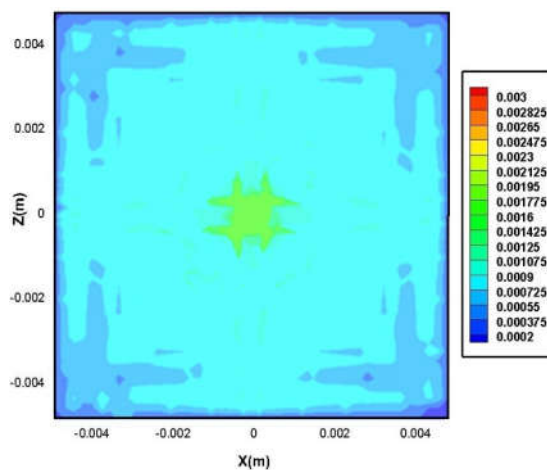


شکل ۴- تأثیر تغییرات کسر حجمی بر فاکتور اصطکاک در اعداد رینولدز مختلف



شکل ۶- توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس در در انتهای کانال (y = 5° cm) در کسر حجمی متوسط $\phi = 0/1\%$ و

$$Re = 8208$$

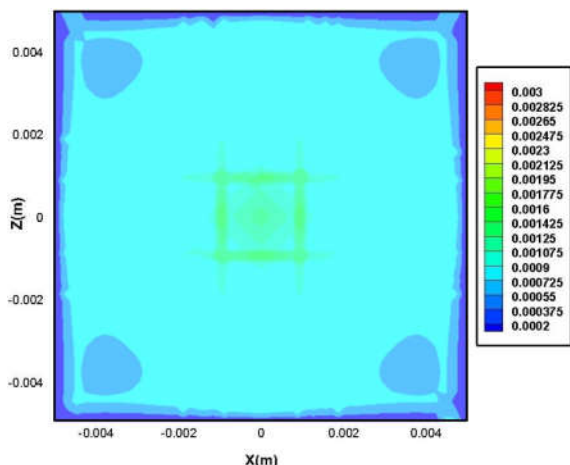


شکل ۵- توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس در انتهای کانال (y = 5° cm) در کسر حجمی متوسط $\phi = 0/1\%$ و

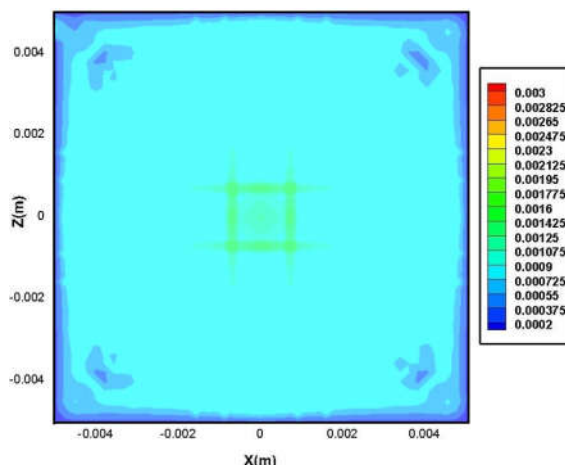
$$Re = 5230$$

نانوذرات در ناحیه‌ای بیشتر باشد، این برخوردها و به دنبال آن نیرویی که این ذرات را از همدیگر دور می‌کند (نیروی براونی) بیشتر می‌شود. این نیروی براونی باعث حرکت نانوذرات در خلاف جهت گرادیان غلظت آنها می‌شود (از غلظت بیشتر به غلظت کمتر). با توجه به آنکه این دو پدیده (ترموфорسیس و حرکت براونی) در خلاف یکدیگر اثر می‌کنند بنابراین در اینجا

بیشتر در یک طرف ذره، تغییر مومنتوم بیشتری را موجب می‌شود و در نتیجه نیرویی در جهت کاهش دما ایجاد می‌شود. به همین دلیل در طول کانال، نانوذرات گرم شده و به دلیل پدیده ترموفورسیس در خلاف جهت گرادیان دما حرکت می‌کنند. در مقابل، حرکت تصادفی و کاتوره‌ای نانوذرات موجب برخورد آنها با یکدیگر می‌شود. طبیعتاً هرچه غلظت



شکل ۸- توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس در ابتدای کانال (y = ۲۵cm) در کسر حجمی متوسط $\phi = 0/1\%$ و $Re = ۸۲۰۸$



شکل ۷- توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس در در ابتدای کانال (y = ۲۵cm) در کسر حجمی متوسط $\phi = 0/1\%$ و $Re = ۵۲۳۰$

در مقایسه با براونی قابل توجه است. این توزیع غیریکنواخت توضیح می‌دهد که چرا در عین حال که نانوذرات موجب بهبود ضریب انتقال حرارت و عدد ناسلت می‌شوند، اما ضریب اصطکاک خیلی دستخوش تغییر نمی‌شود.

سپس نحوه پخش نانوذرات در ناحیه در حال توسعه بررسی می‌شود. شکل‌های (۷) و (۸) توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس را در یک مقطع از کانال و در $y = ۲۵\text{cm}$ و در دو عدد رینولدز $Re = ۵۲۳۰$ و $Re = ۸۲۰۸$ نمایش می‌دهد. همان‌طور که از مقایسه شکل‌ها مشاهده می‌شود، توزیع نانوذرات در ناحیه ورودی کانال یکنواخت‌تر است. در این ناحیه به دلیل آنکه هنوز لایه مرزی به‌طور کامل شکل نگرفته است، نرخ برش سیال اثر کمتری بر پخش نانوذرات دارد که سبب می‌شود توزیع آنها در مقطع کانال یکنواخت‌تر باشد. در عین حال، اثر نیروی ترموفورتیک در ابتدای کانال کمتر است و از این رو مقدار ضریب N_{BT} بیشتر است. به همین دلیل در نواحی نزدیک به ورودی، پخش نانوذرات یکنواخت‌تر است. برای مشخص‌تر شدن تغییرات کسر حجمی در عرض کانال، نتایج کانتورهای شکل‌های (۶) و (۸) در $Re = ۸۲۰۸$ در نمودار شکل (۹) نشان داده شده است. به این منظور توزیع

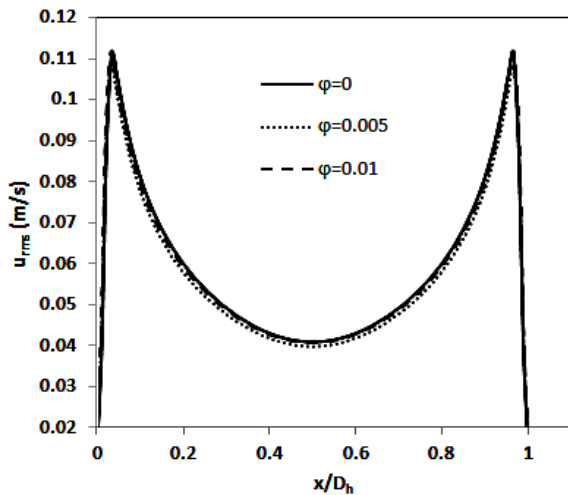
به معیاری نیاز است که نشان دهد تأثیر کدام یک از نیروهای ترموفورتیک و براونی بیشتر است. N_{BT} ضریب پخش براونی به ترموفورسیس است که به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$N_{BT} \equiv \frac{D_B T_b \rho}{\beta \mu \Delta T} \quad (17)$$

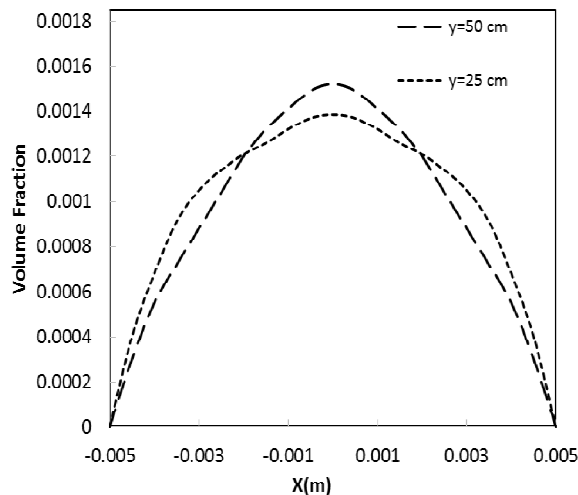
براونی است و از طریق رابطه (۱۸) به دست می‌آید [۱۸]:

$$D_B \sim 5 \cdot 10^{-10} d_p^2 \quad (18)$$

در نتیجه با توجه به N_{BT} مشخص می‌شود که تأثیر کدام یک از نیروهای براونی و ترموفورتیک بیشتر است. چنانچه $N_{BT} < 1$ باشد در آن صورت اثر نیروی ترموفورتیک مهم‌تر از نیروی براونی بوده و اگر $N_{BT} > 1$ باشد اثر نیروی براونی مهم‌تر از نیروی ترموفورتیک خواهد بود. در $Re = ۵۲۳۰$ مقدار $N_{BT} = 0/011$ به دست می‌آید. در $Re = ۸۲۰۸$ مقدار $N_{BT} = 0/00616$ محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه $N_{BT} > 1$ است، تأثیر نیروی ترموفورتیک بیشتر از نیروی براونی است، نتیجه توزیع ذرات در نواحی مرکزی کانال بیشتر است. نکته دیگر قابل ذکر، بیشتر بودن کسر حجمی نانوذرات در مرکز کانال در $Re = ۸۲۰۸$ در مقایسه با $Re = ۵۲۳۰$ است که به دلیل کمتر بودن N_{BT} و در نتیجه بیشتر بودن اثر ترموفورسیس



شکل ۸- تغییرات نوسانات سرعت آشفته‌گی با کسر حجمی در $Re = 3731$



شکل ۹- توزیع کسر حجمی نانوذرات اکسید مس در ناحیه ابتدای کانال ($y = 25 \text{ cm}$) و انتهای کانال ($y = 50 \text{ cm}$) در یک برش عرضی در $z = 0$ و در شرایط $\phi = 0.1\%$ و $Re = 8208$

جدول ۴- تغییرات عدد ناسلت در $MCP = 0.2$ و $\phi = 0.001$ برحسب عدد رینولدز

Re	Nu (در شدت آشفته‌گی ۵ درصد)	Nu (در شدت آشفته‌گی ۷ درصد)
3731	33/82	33/981
5223	47/0089	47/348
6716	57/0877	57/493
8208	62/1403	62/576

همان‌طور که از شکل پیداست افزایش کسر حجمی مقدار بیشترین نوسانات سرعت را در ناحیه نزدیک به دیواره افزایش می‌دهد اما مقدار کمترین نوسانات سرعت آشفته‌گی در مرکز کانال را کاهش می‌دهد. بنابراین حضور نانوذرات در ناحیه نزدیک دیواره (که بیشترین میزان تولید آشفته‌گی وجود دارد)، به افزایش میزان آشفته‌گی کمک می‌کند. این افزایش میزان آشفته‌گی همراه با افزایش کسر حجمی یکی از دلایل مهم برای بهبود بیشتر انتقال حرارت در جریان آشفته نسبت به جریان آرام است. در انتها نیز تأثیر شدت آشفته‌گی بر عدد ناسلت مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول (۴) تأثیر تغییر شدت آشفته‌گی بر عدد ناسلت را در $MCP = 0.2$ و $\phi = 0.001$ نشان می‌دهد. مطابق جدول با افزایش شدت آشفته‌گی و تأثیر متقابل

کسر حجمی در برشی عرضی در $z = 0$ در دو مقطع ابتدای کانال ($y = 25 \text{ cm}$) و انتهای کانال ($y = 50 \text{ cm}$) نشان داده شده است. مجدداً مشاهده می‌شود که توزیع کسر حجمی نانوذرات در ابتدای کانال یکنواخت‌تر است. اما در انتهای کانال، تمرکز حضور نانوذرات در مرکز کانال بیشتر است. با توجه به آنکه اثرات متقابل میان نانوذرات و سیال پایه به صورت دو راهه در نظر گرفته می‌شود، حضور نانوذرات نیز بر ویژگی‌های جریان از جمله نوسانات سرعت آشفته‌گی تأثیر دارد. تأثیر تغییر کسر حجمی بر نوسانات سرعت آشفته‌گی در شکل (۱۰) نشان داده شده است. در این شکل تغییرات نوسانات سرعت در خط عرضی که از مرکز کانال می‌گذرد در $Re = 3731$ و کسرهای حجمی مختلف نشان داده شده است.

گردابه‌های جریان و نانوذرات، حرکت و جنبش نانوذرات افزایش یافته که این امر موجب انتقال بهتر انرژی میان سیال پایه و نانوذرات می‌شود و در نتیجه باعث افزایش انتقال حرارت می‌شود.

۷- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر مدل‌سازی جریان جابه‌جایی آشفته نانو سیال آب اکسید مس در کانال قائم مربعی انجام گرفته است. شبیه سازی جریان به روش دو فاز اوپلر- لاگرانژ صورت پذیرفته است. نحوه پخش نانوذرات در نواحی ورودی و کاملاً توسعه یافته و همچنین اثر کسر حجمی نانوذرات بر نوسانات سرعت آشفستگی مورد بررسی قرار گرفته است. جمع‌بندی نتایج حاصل به صورت زیر است:

۱- در ناحیه کاملاً توسعه یافته توزیع نانوذرات در سطح مقطع کانال یکنواخت نیست و کسر حجمی نانوذرات در نواحی مرکزی کانال بیشتر از دیواره‌ها است. در عین حال با افزایش عدد رینولدز نفوذ ذرات به نواحی نزدیک دیواره افزایش می‌یابد که یکی از مهم‌ترین دلایل افزایش انتقال حرارت با افزایش عدد رینولدز است.

واژه‌نامه

- ۲- در جریان جابه‌جایی آشفته نانو سیال آب و اکسید مس، اثر ترموفورسیس مهم‌تر از حرکت براونی نانوذرات بوده و بنابراین تجمع نانوذرات در نواحی مرکزی کانال بیشتر است.
- ۳- در ناحیه ورودی کانال به دلیل آنکه هنوز لایه مرزی به طور کامل شکل نگرفته است، نرخ برش سیال اثر کمتری بر پخش نانوذرات دارد و بنابراین توزیع نانوذرات یکنواخت‌تر است.
- ۴- افزایش کسر حجمی نانوذرات مقدار بیشترین نوسانات سرعت آشفستگی را در ناحیه نزدیک به دیواره افزایش می‌دهد. از این رو حضور نانوذرات در ناحیه نزدیک دیواره (که بیشترین میزان تولید آشفستگی وجود دارد)، به افزایش میزان آشفستگی کمک می‌کند. این افزایش میزان آشفستگی همراه با افزایش کسر حجمی یکی از دلایل مهم برای بهبود بیشتر انتقال حرارت در جریان آشفته نسبت به جریان آرام است.
- ۵- با افزایش شدت آشفستگی و تأثیر متقابل گردابه‌های جریان و نانوذرات، حرکت و جنبش نانوذرات افزایش یافته که این امر موجب افزایش انتقال حرارت می‌شود.

1. mixed convection parameter

مراجع

1. Devendiran, D. K., and Amirtham, V. A., "A Review on Preparation, Characterization, Properties and Applications of Nanofluids, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 60, pp. 21-40, 2016.
2. Xuan, Y., and Li, Q., "Heat Transfer Enhancement of Nanofluids", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, No. 1, pp. 58-64, 2000.
3. Yu, W., and Xie, H., "A Review on Nanofluids: Preparation, Stability Mechanisms, and Applications", *Journal of Nanomaterials*, Vol. 2012, No. 1, 2012.
4. Kim, H. J., Bang, I. C., and Onoe, J., "Characteristic Stability of Bare Au-Water Nanofluids Fabricated by Pulsed Laser Ablation in Liquids", *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 47, No. 5, pp. 532-538, 2009.
5. Esfe, M. H., Saedodin, S., and Mahmoodi, M., "Experimental Studies on the Convective Heat Transfer Performance and Thermophysical Properties of MgO-Water Nanofluid under Turbulent Flow, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 52, pp. 68-78, 2014.
6. Sohel, M., Saidur, R., Sabri, M. F. M., Kamalisarvestani, M., Elias, M., and Ijam, A., "Investigating the Heat Transfer Performance and Thermophysical Properties of Nanofluids in a Circular Micro-Channel, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 75-81, 2013.
7. Anoop, K., Das, S. K., and Kabelac, S.,

- “Experimental Convective Heat Transfer Studies in a Turbulent Flow Regime using Alumina-Water Nanofluids”, *QScience Connect*, pp. 39, 2014.
8. Mehrjou, B., Heris, S. Z., and Mohamadifard, K., “Experimental Study of CuO/Water Nanofluid Turbulent Convective Heat Transfer in Square Cross-Section Duct”, *Experimental Heat Transfer*, Vol. 28, No. 3, pp. 282-297, 2015.
 9. Salman, B., Mohammed, H., and Kherbeet, A. S., “Numerical and Experimental Investigation of Heat Transfer Enhancement in a Microtube using Nanofluids”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 59, pp. 88-100, 2014.
 10. Namburu, P. K., Das, D. K., Tanguturi, K. M., and Vajjha, R. S., “Numerical Study of Turbulent Flow and Heat Transfer Characteristics of Nanofluids Considering Variable Properties”, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, No. 2, pp. 290-302, 2009.
 11. Lotfi, R., Saboohi, Y., and Rashidi, A., “Numerical Study of Forced Convective Heat Transfer of Nanofluids: Comparison of Different Approaches”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 1, pp. 74-78, 2010.
 12. Bianco, V., Chiacchio, F., Manca, O., and Nardini, S., “Numerical Investigation of Nanofluids Forced Convection in Circular Tubes”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 29, No. 17, pp. 3632-3642, 2009.
 13. Bazdidi-Tehrani, F., Sedaghatnejad, M., Ekrami, N., and Vasefi, I., “Single Phase and Two Phase Analysis of Mixed Convection of Nanofluid Flow in Vertical Rectangular Duct under an Asymmetric Thermal Boundary Condition”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, 2015.
 14. Epstein, P. S., “Zur Theorie Des Radiometers”, *Zeitschrift Für Physik*, Vol. 54, No. 7-8, pp. 537-563, 1929.
 15. Li, A., and Ahmadi, G., “Dispersion and Deposition of Spherical Particles from Point Sources in a Turbulent Channel Flow”, *Aerosol Science and Technology*, Vol. 16, No. 4, pp. 209-226, 1992.
 16. Ranz, W. E., and Marshall, W. R., “Evaporation from Drops, Part 1”, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 48, p. 7, 1952.
 17. Bejan, A., *Convection Heat Transfer*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2013.
 18. Buongiorno, J., Hu, L.-W., Kim, S. J., Hannink, R., Truong, B., and Forrest, E., “Nanofluids for Enhanced Economics and Safety of Nuclear Reactors: an Evaluation of the Potential Features, Issues, and Research Gaps”, *Nuclear Technology*, Vol. 162, No. 1, pp. 80-91, 2008.
 19. Menter, F. R., “Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications”, *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605, 1994.