

پیش‌بینی آسیب ناشی از ضربه سرعت آهسته بر ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای

عیسی احمدی*، داریوش کوه‌بر و رویا تقی‌لو
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۸/۱۵)

چکیده - در این پژوهش، یک مدل المان محدود برای تحلیل ضربه سرعت پایین بر ورق کامپوزیتی ارائه شده است و با استفاده از آن آسیب ایجاد شده ناشی از برخورد یک ضربه‌زننده، با ورق کامپوزیتی لایه‌ای با سرعت پایین، مورد بررسی قرار گرفته است. برای پیش‌بینی آسیب از تئوری پیشنهاد شده توسط چویی - چانگ و همچنین معیار سای-هیل استفاده شده است. برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار ورق از تئوری مرتبه اول برشی و تئوری المان محدود ریتز و برای مدل‌سازی تماس از قانون تماس اصلاح شده هرتز استفاده شده است. برای حل زمانی معادلات حرکت ورق و ضربه‌زننده از روش انتگرال‌گیری نیومارک استفاده شده است. در قسمت نتایج عددی شرایط مرزی مختلف، ابعاد مختلف و لایه‌گذاری متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است و به بررسی آسیب ناشی از ضربه سرعت پایین در ورق کامپوزیتی لایه‌ای پرداخته شده است. پارامتر آسیب و ناحیه آسیب ناشی از ضربه، مورد بررسی قرار گرفته است و اثر پارامترهای مختلف بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی آسیب ناشی از ضربه، ضربه سرعت آهسته، روش المان محدود ریتز، قانون اصلاح شده هرتز، تئوری میندلین.

Low Velocity Impact Damage Prediction in Laminated Composite Plates

I. Ahmadi*, D. Kouhbor and R. Taghiloo

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

Abstract: *In this paper, a finite element model is presented for the transient analysis of low velocity impact, and the impact induced damage in the composite plate subjected to low velocity impact is studied. The failure criteria suggested by Choi and Chang and the Tsai-Hill failure criteria are used for the prediction of the damage in the composite plate; then the effect of various parameters on the impact induced damage is investigated. The first order shear deformation plate theory and the Ritz finite element method are employed for modeling the behavior of plate, and the modified Hertz contact law is used for the prediction of the contact force through the impact. In the numerical results, the time history of indentation, contact force and stress during the impact and the impact induced damage is investigated. The matrix cracking and delamination in the plies of the laminated composite plate subjected to low velocity impact are studied and the effects of various parameters are investigated.*

Keywords: *Impact Damage Prediction, Low Velocity Impact, Finite Element Analysis, Modified Hertz Contact Law, Mindlin Plate Theory.*

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: i_ahmadi@znu.ac.ir

[T]	ماتریس انتقال	[B],[D],[A]	ماتریس سفتی کششی، سفتی خمشی، کوپلینگ خمشی - کششی
u, v, w	مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی (m)	E_i	مدول الاستیسیته (GPa)
V	سرعت ضربه‌زننده (ms^{-1})	F	نیروی فشاری در تماس (N)
w_i	مکان ضربه‌زننده	[F]	ماتریس نیرو
\ddot{w}_i	شتاب ضربه‌زننده	F_m	بیشینه نیرو در بارگذاری (N)
α	میزان نفوذ ضربه‌زننده (m)	G_{ij}	مدول برشی (GPa)
α_m	بیشینه نفوذ ضربه‌زننده (m)	h	ضخامت ورق (m)
α_{cr}	مقدار نفوذ بحرانی (m)	I_0, I_1, I_2	ممان اینرسی جرم
α_0	میزان فرورفتگی دائم (m)	[K]	ماتریس سفتی
α_{ij}	ضریب اصلاح برشی	$\{g\}, \{k\}, \{e_0\}$	کرنش‌های درون‌صفحه‌ای، انحناهای صفحه میانی، کرنش‌های برشی برون‌صفحه‌ای
θ	زاویه جهت‌گیری الیاف	[M]	ماتریس جرم
v_{ij}	ضریب پواسون	m_i	جرم ضربه‌زننده (kg)
ρ	جرم واحد حجم (kgm^{-3})	N_i	توابع درونیابی لاگرانژی
σ_{ij}	تنش‌های عمودی	Q_{ij}	ماتریس سفتی کاهش یافته
τ_{ij}	تنش‌های برشی	$[\bar{Q}]_{ij}$	ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته
ψ_x و ψ_y	دوران حول محور x و y	r	شعاع ضربه‌زننده (m)
		t	زمان (s)

۱- مقدمه

برای تحلیل و طراحی سازه‌های کامپوزیتی ضروری به‌نظر می‌رسد. بررسی رفتار مکانیکی ورق‌های چندلایه تقویت شده با الیاف تحت بارگذاری‌های مختلف، توسط پژوهشگران مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. بوس و ردی [۱ و ۲] رفتار صفحات مرکب چندلایه را بر اساس روش نویر، لوی و مدل اجزای محدود و با به‌کارگیری تئوری‌های کلاسیک ورق^۱، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۲ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه^۳ مورد مطالعه قرار داده‌اند. حل تحلیلی آنها برای لایه‌گذاری‌های خاص بوده و شرایط مرزی در مورد روش ناویر محدود به تکیه‌گاه ساده در چهار طرف ورق و در مورد روش لوی محدود به تکیه‌گاه ساده در دو طرف ورق می‌شود. سولداتوس و واتسون [۳ و ۴] یک روش جدید برای تحلیل دقیق خمش المان‌های سازه‌ای مرکب چندلایه در

امکان حصول نسبت مقاومت به وزن و سفتی به وزن بالا در مواد مرکب تقویت‌شده با الیاف، باعث ایجاد قابلیت‌های بسیاری در طراحی سازه‌های پیشرفته شده و همچنین باعث افزایش کاربردهای آنها در صنایع مختلف شده است. افزایش کاربرد سازه‌های کامپوزیتی در صنایعی مانند خودروسازی، صنایع دریایی و صنایع هوافضا باعث شده است که امکان ایجاد برخورد‌های ضربه‌ای سرعت پایین بر این سازه‌های کامپوزیتی در حین عملکرد آنها افزایش یابد. از طرف دیگر سازه‌های کامپوزیتی و به‌خصوص کامپوزیت‌های لایه‌ای مستعد خرابی و ایجاد ترک و جدایش لایه‌ای در اثر بارهای ضربه‌ای هستند. لذا مدل‌سازی رفتار و همچنین پیش‌بینی خرابی در چندلایه‌های کامپوزیتی در اثر ضربه سرعت پایین

حالت تکیه‌گاه ساده، با استفاده از ویژگی توابع شکل^۴ ارائه کردند. کار مشابهی توسط شو و سولداتوس [۵] در مورد خمش استوانه‌ای چندلایه‌های مرکب با چیدمان زاویه‌دار^۵ و چند شرط مرزی مختلف صورت گرفته است. مطالعات عددی و تجربی متعددی برای بررسی رفتار ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای در اثر ضربه سرعت پایین انجام شده است که مروری بر آنها در مقالات ابریت [۶ و ۷] و کانتول و مورتون [۸] انجام شده است. پیرسون و وزیری [۹] یک مدل تحلیلی بر اساس ترکیب از تغییر شکل برشی، ممان اینرسی چرخشی و قانون تماس غیرخطی هرتز با هدف مطالعه پاسخ ضربه سرعت پایین در صفحات کامپوزیتی ارائه دادند. میشل و همکاران [۱۰] یک مدل جرم و فنر یک درجه و دو درجه آزادی را برای پیش‌بینی آسیب حاصل از ضربه با سرعت پایین روی پانل‌های ساندویچی ارائه دادند. خلیلی و همکاران [۱۱] با استفاده از سری‌های فوریه، برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت در حالت غشایی، رفتار ورق‌های چندلایه مرکب را مورد تحلیل قرار داده‌اند. چوی و لیم [۱۲] به تحلیل رفتار ورق در اثر ضربه سرعت پایین با انواع تئوری‌های تماس پرداخته و پاسخ تئوری‌های مختلف تماس را با یکدیگر مقایسه کردند. روی و چاکرابورتی [۱۳] با روش المان محدود به بررسی لایه‌لایه‌شدگی^۶ ناشی از ضربه سرعت پایین در ورق‌های کامپوزیتی هیبریدی پرداختند و نتیجه گرفتند که با وجود کم‌بودن نیروی تماس در ورق‌های کامپوزیتی کولار اپوکسی، لایه‌لایه‌شدگی در این ورق‌ها بیشتر از ورق‌های گرافیت-اپوکسی است. آنها نشان دادند که ورق‌های هیبریدی از لحاظ لایه‌لایه‌شدن مقاوم‌تر هستند. ژانگ و همکاران [۱۴] مدل آسیب ناشی از ضربه سرعت پایین را برای ورق‌های چندلایه کربن-اپوکسی به روش المان محدود در نرم‌افزار ابکوس انجام دادند و با نتایج تجربی مقایسه کردند. تیرکاک و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری میندلین برای صفحات کامپوزیتی و روش المان محدود رفتار ورق کامپوزیتی تحت اثر ضربه سرعت پایین را بررسی کردند.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۸

چوی [۱۶] اثر وجود پیش کشش اولیه درون صفحه‌ای بر خرابی ورق کامپوزیتی در اثر ضربه سرعت پایین را مورد مطالعه قرار داد. چودھاری و تونگیکار [۱۷] رفتار غیرخطی هندسی از صفحات کامپوزیتی چندلایه را با استفاده از تجزیه و تحلیل المان محدود مورد بررسی قرار دادند. صبوری و احمدی [۱۸] مقاومت سوراخ‌شوندگی پانل‌های کامپوزیتی الیاف شیشه-زمینه اپوکسی در برابر ضربه پرتابه با سرعت بالا را بر اساس مطالعه آزمایشگاهی و مدل‌سازی در نرم‌افزار المان محدود انسیس^۷ بررسی کردند. آنها با قرار دادن فلز آلومینیوم با ضخامت‌های متفاوت در لایه‌های مختلف کامپوزیت میزان جذب انرژی ضربه را در ورق‌ها تحقیق کردند و به نتایج قابل قبولی بین حل عددی و نتایج آزمایشگاهی دست یافتند. خلیلی و همکاران [۱۹] ضربه سرعت پایین روی ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را با استفاده از نرم‌افزار ابکوس مدل‌سازی کردند و تأثیرات انتخاب تعداد و نوع المان‌ها را برای تکیه‌گاه ساده مطالعه کردند. زیو و همکاران [۲۰] با استفاده از یک روش تقریبی به بررسی ناحیه خرابی در ورق‌های کامپوزیتی تحت ضربه سرعت پایین پرداختند. حسن و همکاران [۲۱] خرابی ناشی از ضربه سرعت پایین بر کامپوزیت بافته شده را با مدل المان محدود و روش آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار دادند. یانگ و همکاران [۲۲] با استفاده از نرم‌افزار المان محدود اباکوس^۸ و روش تجربی اثر هیبریدکردن کامپوزیت بر رفتار ورق کامپوزیتی در ضربه با سرعت‌های پایین را بررسی کردند. پاتیل و همکاران [۲۳] با ارائه یک مقاله مروری به بررسی انواع مدل‌ها و روش‌های ارائه شده برای مدل‌سازی و مطالعه خرابی ناشی از ضربه سرعت پایین بر سازه‌های کامپوزیتی پرداختند.

آنچه باید به آن اشاره شود آن است که اغلب مقالات ارائه شده در زمینه حل‌های تحلیلی ورق‌های مرکب، محدود به شرایط تکیه‌گاهی و لایه‌گذاری خاص بوده و مقالات انگشت‌شماری نیز که با عنوان شرایط مرزی و یا لایه‌گذاری‌های مختلف ارائه شده‌اند در عمل دارای محدودیت‌هایی هستند. از طرف

دیگر روش المان محدود در دهه‌های اخیر توانایی خود را در عرصه‌های مختلف محاسباتی نشان داده و به‌همین دلیل به‌عنوان یکی از متداول‌ترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده پژوهشگران و متخصصین مختلف قرار گرفته است. از طرف دیگر اکثر مقالات ارائه شده در مورد تحلیل ضربه که با استفاده از روش‌های المان محدود در سال‌های اخیر ارائه شده‌اند از نرم‌افزارهای تجاری المان محدود و از المان‌های سه‌بعدی استفاده کرده‌اند که از لحاظ حجم محاسباتی بسیار سنگین و پرهزینه هستند و حتی تحلیل نتایج در این مدل‌ها به‌علت پیچیدگی توزیع تنش‌ها دشوار است. لذا هدف این مقاله ارائه یک مدل المان محدود با حجم محاسبات پایین‌تر و بدون استفاده از نرم‌افزارهای تجاری برای تحلیل ضربه و بررسی خرابی در اثر ضربه سرعت پایین در کامپوزیت‌ها با استفاده از معیارهای غیر از معیارهای متداول که در نرم‌افزارهای المان محدود وجود دارد (مانند معیار شکست سای-هیل^۴) است. در این مقاله یک فرمول‌بندی المان محدود برای تحلیل ضربه سرعت پایین ارائه شده است و ایجاد خرابی در ورق کامپوزیتی در اثر ضربه سرعت پایین مورد بررسی قرار گرفته است. یک مدل المان محدود دوبعدی بر اساس روش ریتز و با استفاده از المان ایزوپارامتریک برای مدل‌سازی رفتار ورق کامپوزیتی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی استخراج شده است. برای مدل کردن رفتار مربوط به تماس ضربه‌زننده با ورق از قانون اصلاح شده هرتز استفاده شده است. جرم ضربه‌زننده در معادلات در نظر گرفته شده است ولی به‌علت سفتی خیلی بالاتر ضربه‌زننده نسبت به ورق کامپوزیتی از تغییر شکل ضربه‌زننده در حین ضربه صرف‌نظر شده است و لذا از مدل صلب برای ضربه‌زننده استفاده شده است. معادلات گسسته شده ورق به‌صورت کوپل با معادله ضربه‌زننده در حوزه زمان انتگرال‌گیری شده است تا جابه‌جایی ضربه‌زننده و ورق برحسب زمان استخراج شود و سپس کرنش‌ها و تنش‌ها در لایه‌های مختلف ورق استخراج شده است. با محاسبه تاریخچه زمانی جابه‌جایی و تنش در

نقاط مختلف ورق در اثر ضربه، امکان ایجاد خرابی در قسمت‌های مختلف ورق در اثر ضربه با استفاده از معیار سای-هیل و چویی-چانگ^۱ بررسی و پیش‌بینی شده است. با توجه به اینکه امکان ایجاد پدیده قفل‌شدگی برشی در مدل‌سازی ورق‌های نازک با استفاده از تئوری‌های برشی وجود دارد، برای اجتناب از این مسئله جمله مربوط به کرنش برشی در انتگرال‌گیری‌های عددی با نقاط گوسی به‌صورت جداگانه در نظر گرفته شده است تا پدیده قفل‌شدگی برشی حذف شود. با حذف پدیده قفل‌شدگی برشی دقت نتایج روش ارائه شده برای ورق‌های ضخیم و نازک افزایش می‌یابد. اگرچه مدل ارائه شده مدل ساده‌تری نسبت به روش مدل‌سازی سه‌بعدی المان محدود بوده و حجم محاسبات آن بسیار پایین‌تر از روش المان محدود سه‌بعدی متداول است اما رفتار ورق در اثر ضربه سرعت پایین را با دقت به‌نسبت بالایی پیش‌بینی می‌کند و برای همه شرایط مرزی و موقعیت‌های بارگذاری قابل استفاده است. مقایسه نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج موجود در منابع نشان می‌دهد که روش حاضر از دقت بالایی در پیش‌بینی رفتار ورق‌های کامپوزیتی در اثر ضربه سرعت پایین برخوردار است. روش ارائه شده روشی کم‌هزینه و سریع برای بررسی خرابی ایجاد شده در ورق‌های کامپوزیتی در اثر ضربه سرعت پایین است.

۲- معادلات ساختاری

یک ورق که از ماده مرکب چندلایه با لایه‌های ارتوتروپیک ساخته شده و دارای طول a ، عرض b و ضخامت h است در نظر گرفته می‌شود. محورهای مختصات متعامد xyz به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده است که محور x و y به‌ترتیب در راستای طول و عرض و محور z در راستای ضخامت ورق قرار گرفته است. مبدأ مختصه ضخامت بر روی سطح میانی ورق قرار دارد و سطح بالایی و پایینی ورق در $z=h/2$ و $z=-h/2$ قرار گرفته است. برای این ورق متوجه‌های نیرو و ممان به‌صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

آن است. حال ماتریس‌های $\{e_o\}$ و $\{k\}$ که به ترتیب بیان‌کننده کرنش‌های درون‌صفحه‌ای ورق و انحنای صفحه میانی ورق و ماتریس $\{g\}$ که بیان‌کننده کرنش‌های برشی برون‌صفحه‌ای ورق هستند با توجه به میدان جابه‌جایی ورق در رابطه (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \{e\}^T &= \{\varepsilon_{x_o}, \varepsilon_{y_o}, \gamma_{xy_o}\} = \\ &\quad \{u_{o,x}, v_{o,y}, u_{o,y} + v_{o,x}\} \\ \{k\}^T &= \{k_x, k_y, k_{xy}\} = \\ &\quad \{\psi_{x,x}, \psi_{y,y}, \psi_{x,y} + \psi_{y,x}\} \\ \{g\}^T &= \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\} = \\ &\quad \{w_{o,y} + \psi_y, w_{o,x} + \psi_x\} \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط بالا اندیسی که بعد از علامت کاما می‌آید نشان‌دهنده مشتق پاره‌ای نسبت به آن مختصه است. با استفاده از رابطه تنش-کرنش، رابطه ساختاری که ارتباط بین متجه‌های نیرو و ممان (رابطه ۱) با کرنش‌ها و انحنای صفحه (رابطه ۳) را نشان می‌دهد به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \{e_o\} \\ \{k\} \\ \{g\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که ماتریس $[C]$ در رابطه (۴) یک ماتریس 8×8 بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [o] \\ [B] & [D] & [o] \\ [o] & [o] & [F] \end{bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه فوق $[A]$ سفتی کششی، $[D]$ سفتی خمشی و $[B]$ کوپلینگ خمشی-کششی صفحه هستند که هر کدام ماتریس‌های 3×3 بوده و مؤلفه‌های آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} ((A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})) = \\ \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k (z) dz, \quad i, j=1, 2, 6 \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، n تعداد کل لایه‌های ورق و z_k و z_{k+1} به ترتیب مختصه ضخامت سطح پایین و بالای لایه k ام ورق است، همچنین $[F]$ ماتریس سختی برشی عرضی ورق است که از رابطه (۷)، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \{N\}^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} dz \\ \{M\}^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} z dz \\ \{Q\}^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{yz}, \sigma_{xz}\} dz \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ و $\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T$ به ترتیب متجه‌های نیرو و ممان و $\{Q\} = \{Q_y, Q_x\}^T$ نیز متجه نیروی برشی نامیده می‌شود. بالانویس T نشان‌دهنده ترانزاده ماتریس است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود $\{N\}$ و $\{M\}$ هر کدام دارای سه مؤلفه و $\{Q\}$ دارای دو مؤلفه است. برای ادامه فرمول‌بندی مسئله باید متجه‌های نیرو، ممان و متجه نیروی برشی برحسب کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های ورق نوشته شود. برای این کار از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است. در این تئوری فرض می‌شود که خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل نیز مستقیم باقی می‌مانند و همچنین خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل دچار تغییر طول نمی‌شوند. در این تئوری بر خلاف فرضیات تئوری کلاسیک ورق‌ها، صفحات عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل بر سطح میانی عمود باقی نمی‌مانند و در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه‌های کرنش عمودی شامل ε_{xx} و ε_{yy} مؤلفه‌های کرنش برشی شامل ε_{xz} ، ε_{yz} و ε_{xy} در ورق وجود خواهد داشت و تنها مؤلفه کرنش نرمال برون‌صفحه‌ای ε_{zz} در این تئوری صرف‌نظر شده و برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. لذا در این تئوری میدان جابه‌جایی ورق به صورت رابطه (۲) ارائه می‌شود که در آن u ، v و w جابه‌جایی ورق به ترتیب در راستای محورهای x ، y و z است:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_o(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_o(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_o(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق (u_o, v_o, w_o) تغییر مکان‌های صفحه میانی در راستای x ، y و z بوده و ψ_x و ψ_y دوران بردار واحد عمود بر سطح مقطع ورق حول محور y و حول محور x در جهت منفی

محدود المان‌های متعددی برای این کار معرفی شده است. در این تحقیق از المان مستطیلی چهارگره‌ای که یکی از انواع المان‌های چهاروجهی است استفاده می‌شود. در المان مستطیلی استفاده شده برای مدل‌سازی ورق، در مجموع چهار گره وجود دارد که هر گره دارای پنج درجه آزادی بوده که سه درجه مربوط به جابه‌جایی در سه راستای x ، y و z ، و دو درجه دیگر دوران سطوح جانبی المان حول محورهای x و y را نشان می‌دهد. ماتریس جابه‌جایی برای این المان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{a\}^e = \left\{ \{a_i\}^T \quad \{a_j\}^T \quad \{a_k\}^T \quad \{a_l\}^T \right\}^T$$

$$\{a_i\}^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}\} \quad (12)$$

برای فرمول‌بندی مسئله و استخراج ماتریس‌های سفتی، جرم و نیرو از المان ایزوپارامتریک چهار گره استفاده شده است که هر گره طبق رابطه (۱۲) دارای پنج درجه آزادی است. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر ورق مقادیر جابه‌جایی‌ها با استفاده از توابع شکل به صورت رابطه (۱۳) قابل بیان است.

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^p u_j(t) \psi_j^e(x, y)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{j=1}^p v_j(t) \psi_j^e(x, y)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^p w_j(t) \psi_j^e(x, y)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{j=1}^p S_j^x(t) \psi_j^e(x, y)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{j=1}^p S_j^y(t) \psi_j^e(x, y) \quad (13)$$

که در آن w, v, u بیان‌کننده جابه‌جایی در راستای x ، y و z و S_j^x, S_j^y بیانگر چرخش حول محورهای x و y است، به طور مثال u جابه‌جایی u برای گره j ام است و ψ_j^e تابع شکل المان مربوط به گره j ام است و p تعداد گره المان است که با در نظر گرفتن المان مستطیلی با چهارگره، $p=4$ خواهد بود. توابع شکل مربوط به المان ایزوپارامتریک بر حسب مختصات ایزوپارامتریک ξ و η به صورت رابطه (۱۴) قابل بیان است:

$$F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (7)$$

در روابط فوق α_{ij} ضریب اصلاح برشی بوده و $[\bar{Q}_{ij}]$ بیان‌کننده ماتریس سفتی انتقال یافته ماده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\bar{Q}] = [T][Q]\{T\}^T \quad (8)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در آن $[Q]$ ماتریس سفتی کاهش یافته بوده و درایه‌های آن طبق تئوری مذکور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad (10)$$

$$Q_{44} = G_{13}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

در روابط فوق E_i مدول یانگ، G_{ij} مدول برشی و ν_{ij} ضریب پواسون هستند ($i, j = 1, 2, 3$). $[T]$ در روابط فوق، ماتریس انتقال بین سیستم مختصات اصلی لایه‌ها و مختصات محلی ورق بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، θ زاویه جهت‌گیری الیاف لایه‌ها نسبت به محور x ورق است. در این مقاله زاویه θ دو مقدار صفر درجه و 90° درجه را اختیار کرده است.

۳- روابط المان محدود ورق

در این مقاله برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر ورق از تئوری المان محدود استفاده شده است. در تئوری المان

$$[J]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_4^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_2^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_3^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ماتریس سفتی و جرم برای المان به صورت زیر به دست می آید:

$$[K]^e = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (23)$$

$$[M]^e = \int [N]^T [\bar{m}] [N] dV$$

که در آن $[B]$ ماتریس مشتقات توابع شکل است و $[\bar{m}]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} I_1 & \circ & \circ & I_2 & I_3 \\ \circ & I_1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & I_1 & \circ & \circ \\ I_3 & \circ & \circ & I_2 & \circ \\ \circ & I_2 & \circ & \circ & I_1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2) dz \quad (25)$$

همچنین از روش انتگرال گیری عددی گوسی برای انتگرال گیری از معادلات به صورت زیر استفاده می شود:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N f(\xi_I, \eta_J) W_I W_J \quad (26)$$

که W_I و W_J ضرایب وزن گوسی هستند (ξ_I, η_J) نقاط انتگرال گیری گوسی و N تعداد نقاط گوسی استفاده شده برای انتگرال گیری عددی در راستای ξ و η است.

۴- معادلات دینامیکی حرکت

معادله حرکت ورق بر اساس تئوری المان محدود بعد از گسسته سازی و برهم گذاری ماتریس های جرم، سفتی و نیرو به صورت رابطه زیر به دست می آید:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (27)$$

که در اینجا $\{u\}$ و $\{\ddot{u}\}$ به ترتیب بیان کننده بردار- جابه جایی و بردار شتاب گره ها هستند. $\{F\}$ نیز معادل بار خارجی است که در مسئله ضربه شامل نیروی ضربه است و $[M]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس های جرم و سفتی برای صفحه کامپوزیتی بعد از برهم گذاری ماتریس های المان هستند. با فرض عدم وجود اصطکاک بین صفحه و ضربه زننده

$$\psi_j^e(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = [-1, 1, 1, -1],$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] = [-1, -1, 1, 1] \quad (14)$$

همچنین مشتقات توابع شکل به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i \eta), \quad \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_i \xi) \quad (15)$$

و همچنین روابط انتقال بین محورهای ایزوپارامتریک ξ و η و محورهای فیزیکی x و y به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^e \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (16)$$

که $[J]^e$ در رابطه فوق به صورت زیر بیان می شود:

$$[J]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

همچنین معکوس رابطه (17) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^* \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن

$$[J]^* = [J]^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

که ژاکوبی ماتریس انتقال به صورت رابطه (20) به دست می آید:

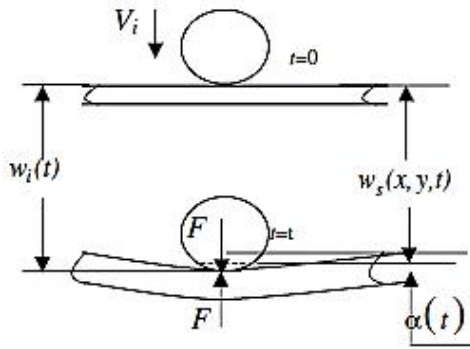
$$j = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (20)$$

با استفاده از مدل المان محدود ارائه شده مشتقات x و y نسبت به مختصات ایزوپارامتریک به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 x_j \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 y_j \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 x_j \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 y_j \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \eta} \quad (21)$$

بنابراین می توان چنین نتیجه گرفت که:



شکل ۱- توصیف روند ضربه

که در رابطه (۳۱) β ثابت تجربی و α_p مقدار نفوذ دائم است و w_i و w_s به ترتیب جابه‌جایی ضربه‌زننده و جابه‌جایی نقطه‌ای از صفحه است که ضربه به آن نقطه اصابت می‌کند. به‌منظور حل زمانی معادله (۲۸) روش انتگرال‌گیری نیومارک اتخاذ شده است. روش انتگرال‌گیری نیومارک برای انتگرال‌گیری زمانی و حل معادلات دینامیکی ورق و ضربه‌زننده برای هر گام زمان استفاده می‌شود که رابطه آن به‌صورت رابطه (۳۳) بیان می‌شود که جزئیات بیشتر برای این روش در مرجع [۲۵] آمده است:

$$(w_i)_{n+1} = (w_i)_n + \Delta t \dot{w}_i + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)(\ddot{w}_i)_n - \left(\frac{\Delta t}{2}\right)(F_c)_{n+1} \quad (33)$$

که در آن Δt گام زمانی انتگرال‌گیری عددی است.

۵- نتایج عددی

در این قسمت ابتدا نتایج حاصل از روش ارائه شده، با نتایج عددی و حل تحلیلی پژوهشگران دیگر مقایسه شده است. مقایسه بین نتایج تحقیق حاضر با تحقیقات قبلی در شکل‌های (۲) تا (۶) آورده شده است. خواص مربوط به ورق کامپوزیتی و مشخصات ضربه‌زننده همانند مرجع [۷] انتخاب شده است و در جدول (۱) بیان شده است و فرض شده است که ضربه در مرکز صفحه اعمال شده است. ابعاد ورق 200×200 میلی‌متر در نظر گرفته شده است و ضخامت کل ورق برابر با 0.296 میلی‌متر است. همچنین جرم ضربه‌زننده برابر با $8/537$ گرم، شعاع ضربه‌زننده برابر با $12/7$ میلی‌متر و سرعت ضربه‌زننده برابر با 3 متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است.

و نیز با فرض صلب بودن جسم ضربه‌زننده، معادله دینامیکی ضربه‌زننده به‌صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شود:

$$m_i \ddot{w}_i = -F_c \quad (28)$$

که m_i جرم ضربه‌زننده، w_i مکان ضربه‌زننده، \ddot{w}_i شتاب ضربه‌زننده و F_c نیروی تماسی بین ضربه‌زننده و صفحه است.

تماس و فرورفتگی بین یک جسم با دماغه کروی با خواص ایزوتروپیک و صفحه کامپوزیتی طبق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. نیروی تماس بین جسم ضربه‌زننده و صفحه کامپوزیتی طبق قانون فرورفتگی اصلاح‌شده غیرخطی هرتز که توسط تام و سان [۲۴] ارائه شده است مطابق روابط (۲۹) و (۳۰)، محاسبه شده است:

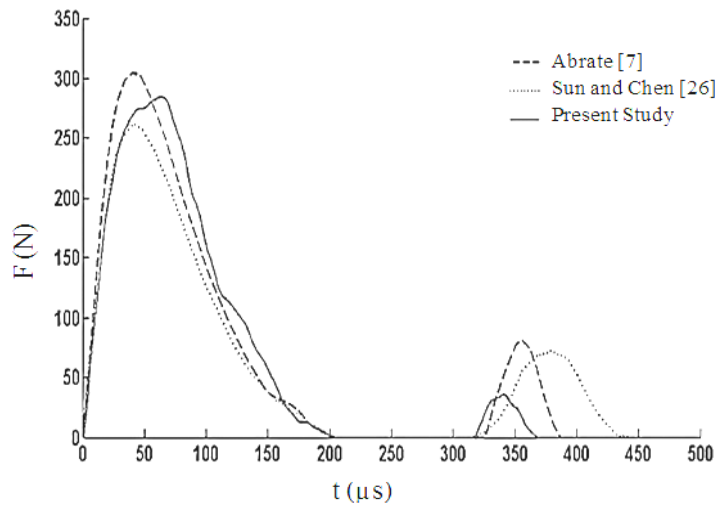
$$F = k\alpha^{3/2} \quad (29)$$

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q \quad (30)$$

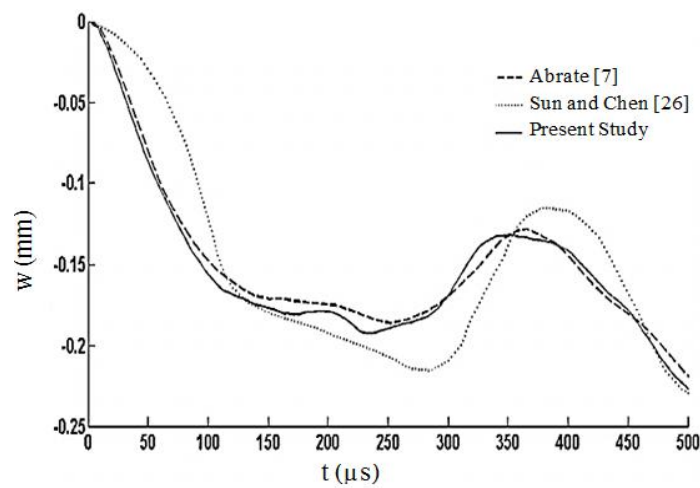
که α مقدار نفوذ ضربه‌زننده در ورق است و k ضریب سفتی تماس است. رابطه (۲۹) برای بارگذاری و رابطه (۳۰) برای باربرداری در حین ضربه هستند. در رابطه (۳۰)، q ثابت تجربی و F_m بزرگ‌ترین نیروی تماسی به‌وجود آمده قبل از باربرداری است و α_m حداکثر عمق فرورفتگی و α عمق فرورفتگی دائم در هدف (صفحه) است که مقدار آن در رابطه (۳۱) بیان شده است، α مقدار نفوذ است که به‌صورت تفاضل بین جابه‌جایی ضربه‌زننده و جابه‌جایی صفحه در رابطه (۳۲) تعریف شده است:

$$\alpha_0 = \begin{cases} \beta(\alpha_m - \alpha_p) & \alpha_m > \alpha_p \\ 0 & \alpha_m < \alpha_p \end{cases} \quad (31)$$

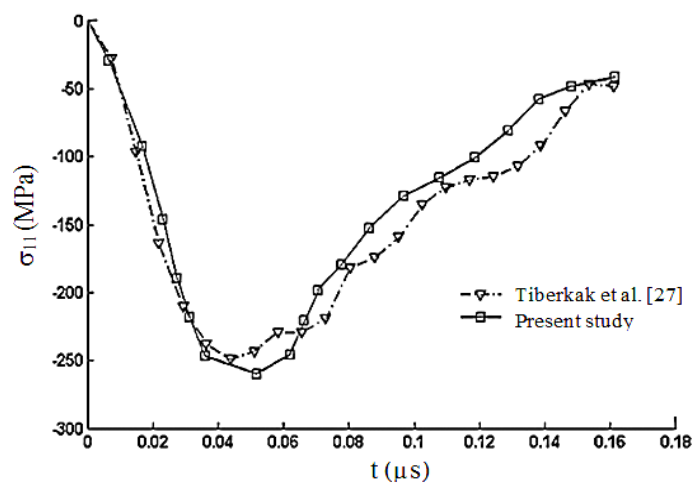
$$\alpha(t) = w_i(t) - w_s(t) \quad (32)$$



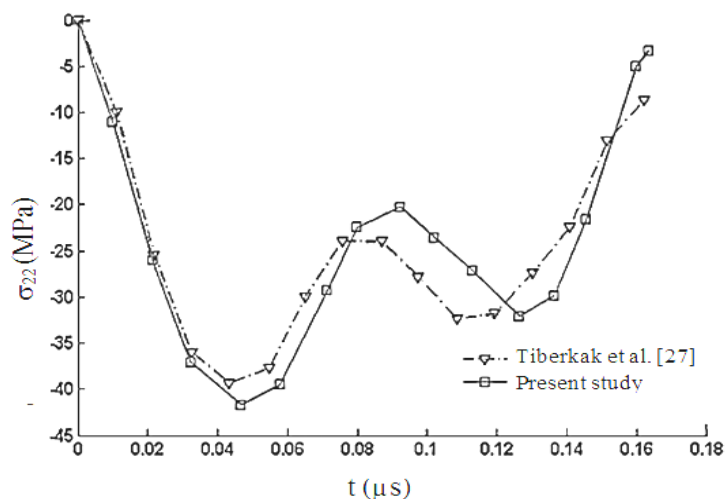
شکل ۲- مقایسه تغییرات نیرو بر حسب زمان



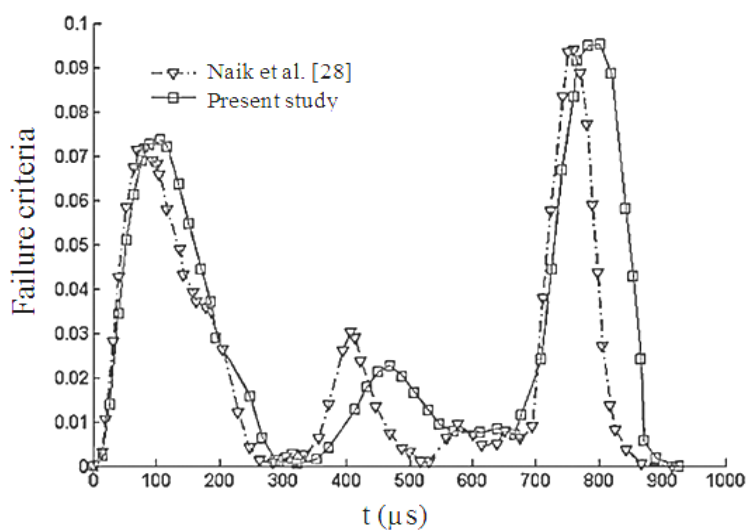
شکل ۳- مقایسه تغییرات زمانی جابه‌جایی محل برخورد



شکل ۴- تغییرات تنش σ_{11} در المان مرکزی لایه بالایی ورق



شکل ۵ - تغییرات تنش σ_{22} درالمان مرکزی لایه بالایی ورق



شکل ۶- توزیع عدد شکست در محل برخورد در طی زمان برخورد

جدول ۱- خواص مکانیکی صفحه کامپوزیتی و جسم ضربه زننده

خواص مکانیکی	جنس
$E_1=141/2$ (GPa)	صفحه (گرافیت-اپوکسی)
$E_2=9/72$ (GPa)	
$G_{12}=5/33$ (GPa)	
$G_{23}=3/74$ (GPa)	
$\nu_{12}=0/3$	
$\rho=1536$ (kg/m ³)	ضربه زننده
سرعت $V=3$ m/s	

جدول ۲- خواص مکانیکی صفحه و ضربه‌زننده در صحت‌سنجی تنش [۲۷]

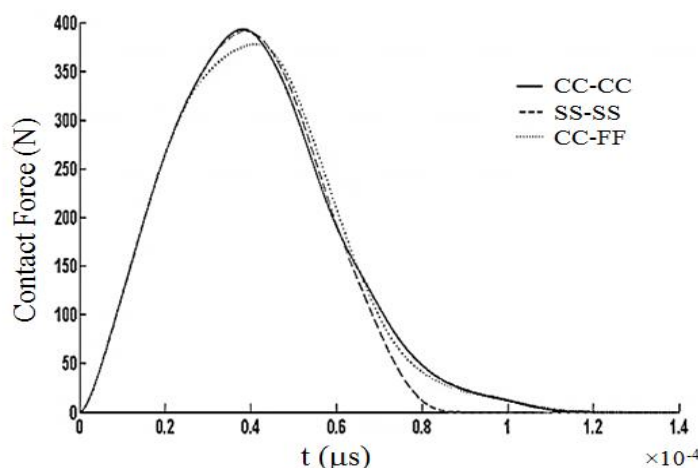
خواص مکانیکی	جنس
$E_1=144/8$ (GPa)	
$E_2=E_3=9/65$ (GPa)	
$G_{12}=G_{13}=7/1$ (GPa)	صفحه کامپوزیتی
$G_{23}=5/92$ (GPa)	(گرافیت-اپوکسی)
$\nu_{12}=\nu_{13}=0/3$	
$\nu_{23}=0/49$	
$\rho=1389$ (kg/m ³)	
$E=200$ (GPa)	ضربه‌زننده
$\nu=0/3, \rho=7870$ (kg/m ³)	

از مدل ارائه شده تطابق خوبی با نتایج کارهای صورت گرفته قبلی دارد و می‌توان به دقت و صحت کد المان محدود نوشته شده پی برد. همچنین برای اطمینان از صحت کد ارائه شده در پیش‌بینی مقدار تنش، در ادامه به صحت‌سنجی تنش‌های ناشی از ضربه پرداخته می‌شود. برای این کار از نتایج کار تیرکاک و همکاران [۲۷] استفاده می‌شود. خواص مواد استفاده شده در بررسی صحت سنجی تنش‌ها در جدول (۲) بیان شده است.

ابعاد ورق برابر با 150×150 میلی‌متر بوده و لایه‌گذاری آن به صورت [۰،۰،۹۰،۹۰،۰،۰] است و ضخامت هر لایه کامپوزیتی برابر با ۱ میلی‌متر است. شرایط مرزی ورق به صورت ساده و سرعت ضربه‌زننده برابر با $6/37$ متر بر ثانیه و شعاع دماغه ضربه زننده برابر با $6/35$ میلی‌متر است. در شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب مقادیر تنش‌های σ_{11} و σ_{22} در المان واقع در وسط ورق لایه اول نشان داده شده است و با نتایج حاصل از تحقیق تیرکاک و همکاران [۲۷] مقایسه شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است تنش‌ها انطباق خوبی با یکدیگر دارند و صحت مطالعه صورت گرفته تأیید می‌شود. به صحت‌سنجی مقدار آسیب در ورق در اثر ضربه نیز پرداخته شده است. برای این کار از نتایج کار نایک و همکاران [۲۸] استفاده شده است. ورق مورد بررسی از جنس گرافیت-اپوکسی با شرایط مرزی ساده و تک لایه با ضخامت شش میلی‌متر است. ضربه‌زننده نیز با جرم 50 گرم و با سرعت سه

در شکل (۲) تغییرات نیرو در طول زمان برخورد در محل تماس (مرکز صفحه) با نتایج کار ابریت [۷] و سان و چن [۲۶] مقایسه شده است. با توجه به شکل (۲) همان‌طور که مشاهده می‌شود نیروی تماس پیش‌بینی شده تطابق خوبی در ضربه اول با نتایج کارهای صورت گرفته دارد ولی در ضربه دوم اختلاف بین سه روش قابل توجه است. علت این اختلاف تفاوت مدل‌های استفاده شده در این سه روش است. سان و چن [۲۶] از یک روش المان محدود ولی تعداد المان بسیار کمتر برای به دست آوردن جواب‌های مسئله استفاده کردند و ابریت [۷] از یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل مسئله استفاده کرد. در مطالعه حاضر برای دستیابی به نتایج دقیق‌تر اثر پدیده فغل شدگی برشی در نظر گرفته شده است که برای برطرف کردن آن در روش انتگرال‌گیری گوسی جملات مربوط به کرنش‌های برشی به صورت جداگانه با تعداد کمتر نقطه گوسی انتگرال‌گیری شده است تا اثر فغل شدگی برشی که در مدل کردن صفحات نازک با تئوری‌های برشی مانند تئوری مرتبه اول برشی به وجود می‌آید حذف شود و نتایج حل دقیق‌تر باشد. در شکل (۳) تغییرات زمانی مربوط به جابه‌جایی در نقطه تماس (مرکز صفحه) با نتایج کار ابریت [۷] و سان و چن [۲۶] مقایسه شده است. همان‌گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود بیشترین خطا مربوط به روش ارائه شده توسط سان و چن است. با توجه به شکل (۲) و شکل (۳) ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۸



شکل ۷- تغییرات نیروی تماس در مرکز صفحه ۱۰×۱۰ mm

مطالعه تأثیر شرایط مرزی بر میزان آسیب، شرایط مرزی مختلف برای ورق در نظر گرفته شده است که شامل شرایط مرزی چهار لبه ساده، چهار لبه گیردار، دو لبه آزاد و دو لبه گیردار است.

تأثیر شرایط مرزی روی دو صفحه با ابعاد ۱۰×۱۰ سانتی متر و ۵۰×۵۰ سانتی متر و لایه گذاری [۰،۰،۹۰،۰،۰] بررسی شده و نتایج در شکل (۷) و شکل (۸) نشان داده شده است. ضخامت هر لایه در ورق کامپوزیتی برابر با یک میلی متر است و شعاع ضربه زننده برابر با پنج میلی متر است. خواص صفحه هدف و ضربه زننده مطابق جدول (۳) است. پارامترهای مورد نیاز در قانون فرورفتگی بین ضربه زننده و صفحه به صورت زیر مورد استفاده قرار گرفته است [۷]:

$$q = 2/5, \quad \beta = 0/094, \quad \alpha_{cr} = 1/7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

نیروی تماس حاصل از ضربه برای شرایط مرزی مختلف در شکل (۷) و شکل (۸) ترسیم شده است. همان طور که در شکل (۷) قابل مشاهده است، با تغییرات شرایط مرزی در ورق با ابعاد ۱۰×۱۰ سانتی متر نیروی تماس حاصل از ضربه با یکدیگر متفاوت می شود. درحالتی که تکیه گاه چهار لبه ساده هستند نیروی تماس در مدت زمان کمتری به صفر می رسد. در شرایط مرزی چهار لبه گیردار مقدار نیروی تماسی دارای ماکزیمم مقدار خود بوده است. این درحالی است که طبق شکل (۸) در ورق با ابعاد ۵۰×۵۰ سانتی متر با توجه به مشخصات ضربه زننده

متر بر ثانیه به مرکز ورق با ابعاد ۱۵×۱۵ سانتی متر برخورد می کند. شکل (۶) مقدار ضریب شکست را در طول برخورد در مرکز ورق در سطح بالایی ورق مطابق رابطه ساین- هیل تنش صفحه ای نشان می دهد. رابطه شکست ساین- هیل در حالت تنش صفحه ای (دوبعدی) به صورت رابطه (۳۵) بیان می شود:

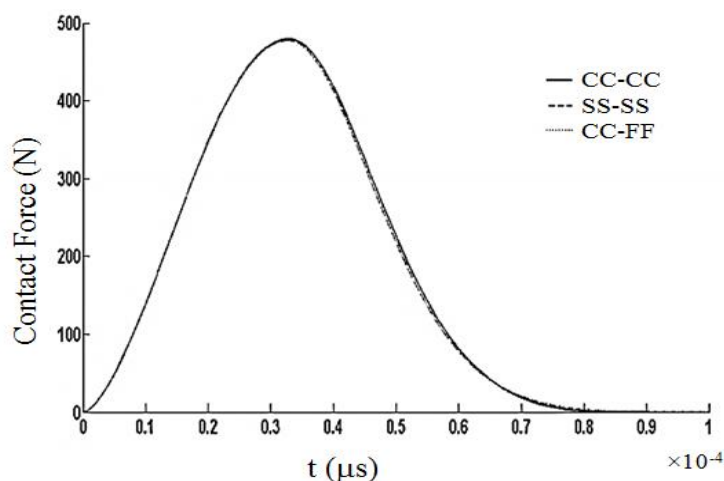
$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)\left(\frac{\sigma_2}{Y_T}\right) = 1 \quad (35)$$

در رابطه فوق σ_1 ، σ_2 و σ_{12} ، به ترتیب تنش های نرمال و برشی درون صفحه ای، X_T مقاومت نهایی کششی در راستای طولی، Y_T مقاومت نهایی کششی در راستای عرضی و S_{12} مقاومت نهایی برشی درون صفحه ای لایه کامپوزیتی است. طبق رابطه (۳۵) شکست زمانی آغاز می شود که حاصل عبارت برابر عدد یک باشد و با افزایش این مقدار آسیب تشدید می یابد. عدد شکست به دست آمده در این مطالعه با نتایج حاصل از نایک و همکاران [۲۸] در شکل (۶) مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می شود انطباق مناسبی در طول زمان بین نتایج این مطالعه با نتایج نایک و همکاران [۲۸] وجود دارد.

۱-۵- مطالعه پارامتری

۱-۱-۱- بررسی تأثیر شرایط مرزی ورق

ضربه با سرعت آهسته سه متر بر ثانیه برای نشان دادن اثر شرایط مرزی در رفتار دینامیکی صفحات کامپوزیتی استفاده می شود. برای



شکل ۸- تغییرات نیروی تماس در مرکز صفحه 50×50 mm

جدول ۳- خواص مکانیکی صفحه کامپوزیتی گرافیت- اپوکسی و جسم ضربه‌زننده

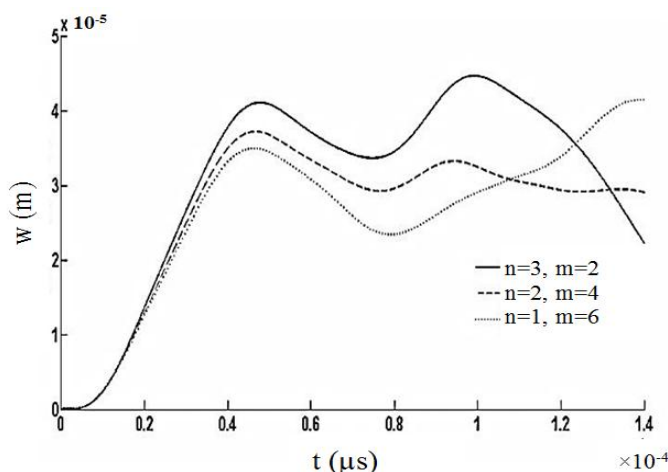
خواص مکانیکی	جنس
$E_1 = 181$ (GPa)	صفحه کامپوزیتی (گرافیت-اپوکسی)
$E_2 = E_3 = 10/34$ (GPa)	
$G_{12} = G_{13} = 6/895$ (GPa)	
$G_{23} = 6/205$ (GPa)	
$\nu_{12} = \nu_{13} = 0/22$	
$\nu_{23} = 0/49$	
$\rho = 1637$ (kg/m ³)	
$E = 210$ (GPa)	ضربه‌زننده
$\nu = 0/3, \rho = 7850$ (kg/m ³)	

مرزی بر پاسخ ضربه ورق در محل ضربه تقریباً بی‌اثر می‌شود. ولی برای ابعاد کوچک ورق، موج‌های ناشی از ضربه قبل از اتمام فرایند برخورد به لبه‌ها رسیده و منعکس شده و اثر خود را در پاسخ زمانی ضربه‌زننده و ورق در نقطه برخورد نشان می‌دهد و مقدار نیروی تماس و سایر پارامترهای را متأثر می‌کند.

۵-۱-۲- تأثیر لایه‌گذاری‌های متفاوت

در این قسمت اثر لایه‌گذاری‌های متفاوت بر نیروی تماس مورد

یکسان تغییرات زیادی روی نیروی تماس در شرایط مرزی مختلف ایجاد نشده است. علت این پدیده را می‌توان به این صورت توصیف کرد که با بزرگ‌تر شدن ابعاد ورق زمان لازم برای رسیدن موج ناشی از ضربه به لبه‌های ورق افزایش می‌یابد و اگر ابعاد ورق به اندازه کافی بزرگ باشد در این صورت در حین پدیده ضربه موج‌های ضربه به لبه‌های ورق نرسیده است و یا اگر رسیده است هنوز موج‌های بازگشتی از لبه به محل ضربه نزدیک نشده است و لذا در حین ضربه اثر شرط مرزی ورق در محل ضربه مشاهده و حس نمی‌شود لذا نوع شرط



شکل ۹- تغییرات جابه‌جایی در مرکز صفحه

۵-۱-۳- تأثیر ابعاد ورق

اثرات ابعاد ورق در نیروی تماس در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است. سه اندازه برای لایه‌گذاری ارائه شده در جدول (۲) در نظر گرفته شده است که شامل ورق $0.1 \times 0.1 \times 0.1$ متر، $0.4 \times 0.4 \times 0.4$ متر و $1 \times 1 \times 1$ متر است. شرایط مرزی صفحه کامپوزیتی به صورت چهار طرف گیردار در نظر گرفته و سرعت برخورد چهار متر بر ثانیه فرض شده است. همان‌طور که در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود ماکزیمم جابه‌جایی مرکز ورق در مدت زمان گفته شده برای ورق با ابعاد کوچک‌تر اتفاق افتاده است. مطابق شکل (۱۲) مشاهده می‌شود با افزایش ابعاد ورق مقدار بیشینه نیروی تماس افزایش می‌یابد.

۶- بررسی آسیب

۶-۱- تئوری شکست سای-هیل

اساس این تئوری بر مبنای تئوری شکست فون میززا^{۱۱}، (انرژی واپیچش برای مواد همسانگرد) شکل گرفته است که برای مواد ناهمسانگرد باز تعریف شده است. در واقع انرژی واپیچش بخشی از انرژی کرنشی کل در یک جسم است. انرژی کرنشی یک جسم از دو قسمت تشکیل شده است. یکی مربوط به تغییر حجم جسم است که انرژی اتساعی^{۱۲} نام دارد و دیگری مربوط به تغییر شکل است که انرژی واپیچش^{۱۳} نام دارد. فرض

بررسی قرار گرفته است. آزمون‌های عددی روی یک صفحه چندلایه کامپوزیت که در تمام لبه‌ها گیردار است انجام شده است. سرعت ضربه پنج متر بر ثانیه و مشخصات ضربه‌زننده و صفحه کامپوزیتی مطابق جدول (۲) ارائه شده است.

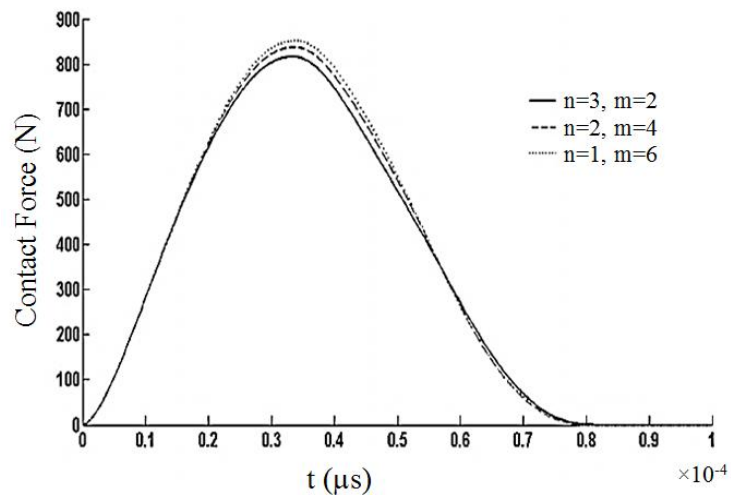
لایه‌گذاری به صورت $[0_n/90_m/0_n]$ که $n=1, 3, 5$ و $m=2, 4, 6$ است که n ، تعداد لایه‌های لایه صفر درجه (لایه‌های راستای طول) و m تعداد لایه‌های 90° درجه (لایه‌های در راستای عرض ورق) را نشان می‌دهد. ضخامت کل برابر پنج میلی‌متر است. برای مطالعه، سه نوع از صفحات کامپوزیتی با تغییر تعداد (درصد) الیاف 90° در نظر گرفته شده است:

- صفحه کامپوزیت حاوی دو لایه 90° و شش لایه صفر به صورت $[0_3/90_2/0_3]$ است که ۲۵ درصد از الیاف 90° درجه هستند.

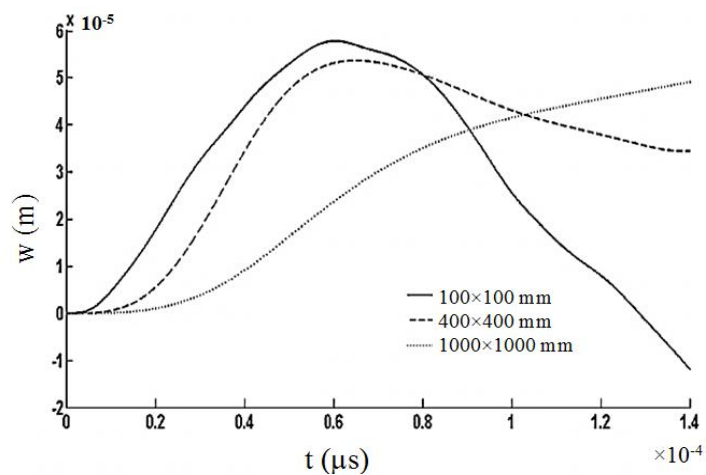
- صفحه کامپوزیت حاوی ۴ لایه 90° و چهار لایه صفر به صورت $[0_2/90_4/0_2]$ که ۵۰ درصد از الیاف 90° درجه هستند.

- صفحه کامپوزیت حاوی شش لایه 90° درجه و دو لایه صفر درجه به صورت $[0/90_6/0]$ است که ۷۵ درصد از الیاف 90° درجه هستند.

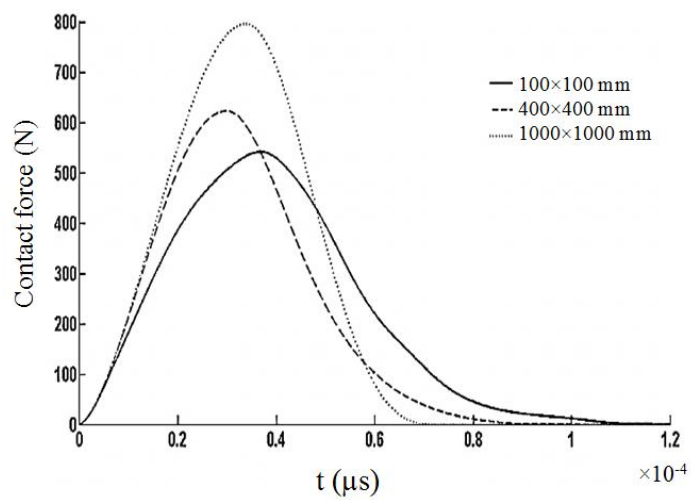
با توجه به شکل‌های (۹) و (۱۰)، مشاهده می‌شود نیروی تماس با افزایش لایه‌هایی با الیاف 90° درجه افزایش می‌یابد.



شکل ۱۰- تغییرات نیروی تماس در مرکز صفحه



شکل ۱۱- تغییرات جابه‌جایی در مرکز صفحه



شکل ۱۲- تغییرات نیروی تماس در مرکز صفحه

در رابطه (۳۷)، Y_T و Y_c به ترتیب استحکام کششی و فشاری عرضی در لایه‌ها هستند همچنین S_T و S_L به ترتیب استحکام برشی طولی و جانبی ماده کامپوزیت هستند. $\bar{\sigma}_{T2}$ و $\bar{\tau}_{T3}$ به ترتیب تنش نرمال و تنش برشی عرضی درون صفحه‌ای متوسط در لایه مربوطه هستند و علامت بار روی تنش‌ها نشان دهنده مقدار متوسط آن تنش در لایه مربوطه است.

در رابطه (۳۸) D_a ثابتی است که از طریق آزمایش‌های تجربی به دست می‌آید. همچنین علامت بار روی تنش‌ها نشان دهنده متوسط آن تنش در لایه مورد نظر و نیز n و $n+1$ مربوط به لایه n ام و لایه بالای لایه n ام است. مقدار D_a برای ماده مورد نظر برابر با $1/8$ استفاده شده است [۳۲]. جزئیات بیشتر در مورد نحوه استفاده از روابط (۳۷) و (۳۸) در مرجع [۳۲] آمده است.

در شکل‌های (۱۳)، (۱۴) توزیع تنش نرمال و در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) توزیع تنش‌های برشی برای لایه‌گذاری [۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰] در لحظه‌ای که نیروی تماسی بیشترین مقدار خود را دارد نشان داده شده است. در این مثال ابعاد ورق 15×15 سانتی‌متر با شرایط مرزی گیردار در چهار لبه ورق فرض شده است. ضخامت کل ورق برابر با سه میلی‌متر و ضخامت هر لایه برابر با $0/6$ میلی‌متر است. سرعت ضربه‌زننده نیز برابر با پنج متر بر ثانیه است. همچنین جرم ضربه‌زننده $32/1$ گرم فرض شده است. خواص مکانیکی ورق و ضربه‌زننده در جدول (۴) آورده شده است.

توزیع تنش‌های برشی در ورق در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) آمده است. تنش برشی τ_{xy} در اطراف نقطه تماس در لحظه‌ای که نیروی تماس بیشترین مقدار خود را دارد دارای بیشینه و کمینه است. تنش‌های برشی τ_{yz} و τ_{xz} در طول ضخامت فقط به جنس و زاویه لایه‌گذاری بستگی دارند و در سطوح بالا و پایین هر لایه یکسان است. در شکل (۱۷) نحوه توزیع شکست با استفاده از تئوری سای-هیل نشان داده شده است. در شکل‌های (۱۸) و (۱۹) نحوه توزیع شکست با استفاده از تئوری ارائه شده توسط چوی-چانگ در سطح بالای لایه اول،

بر این است که وقتی شکست در ماده ایزوتروپ اتفاق می‌افتد که انرژی واپیچش ایجاد شده از انرژی واپیچش شکست ماده بزرگ‌تر شود. هیل، معیار تسلیم انرژی واپیچش فون میزر را برای مواد ناهمسان‌گرد تعمیم داد [۲۹]. سپس سای آن را برای یک لایه تک‌جهته به کار گرفت [۳۰]. او بر مبنای تئوری انرژی واپیچش، نشان داد که اگر شرط رابطه (۳۶) برآورده نشود تک لایه به شکست خواهد رسید:

$$\begin{aligned} & (G_T + G_P)\sigma_T^2 + (G_T + G_P)\sigma_P^2 + \\ & (G_T + G_P)\sigma_T^2 - 2G_P\sigma_T\sigma_P - 2G_T\sigma_T\sigma_P - \\ & 2G_T\sigma_T\sigma_P + 2G_P\tau_{T3}^2 + 2G_D\tau_{T3}^2 + 2G_E\tau_{T3}^2 < 1 \end{aligned} \quad (36)$$

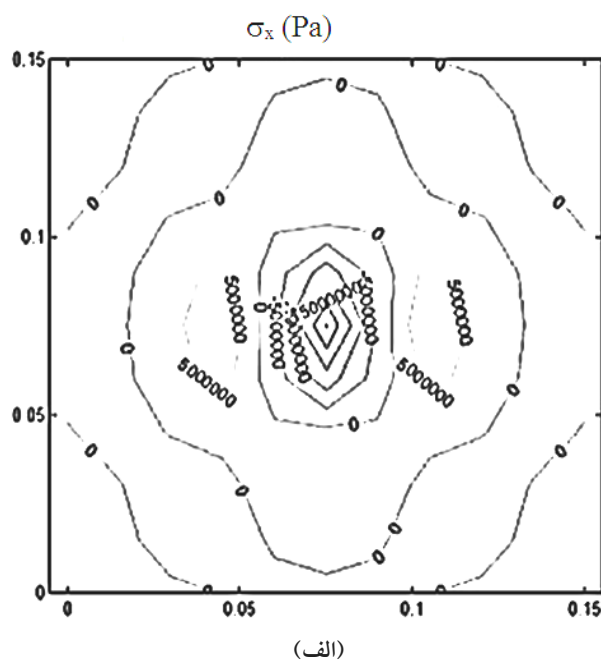
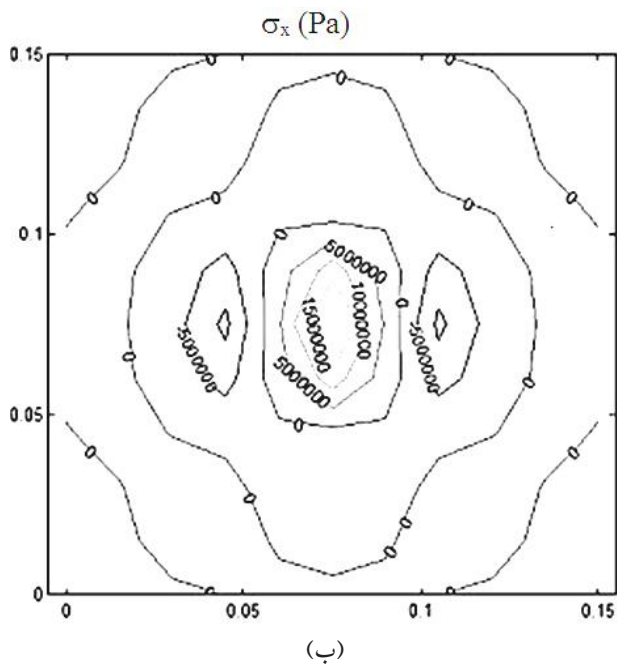
که در رابطه فوق پارامترهای G_T تا G_E ، به استحکام‌های شکست بستگی دارند و بر اساس استحکام‌های تست تک‌جهته ماده قابل محاسبه هستند [۳۰ و ۳۱].

۲-۶- تئوری شکست چوی-چانگ

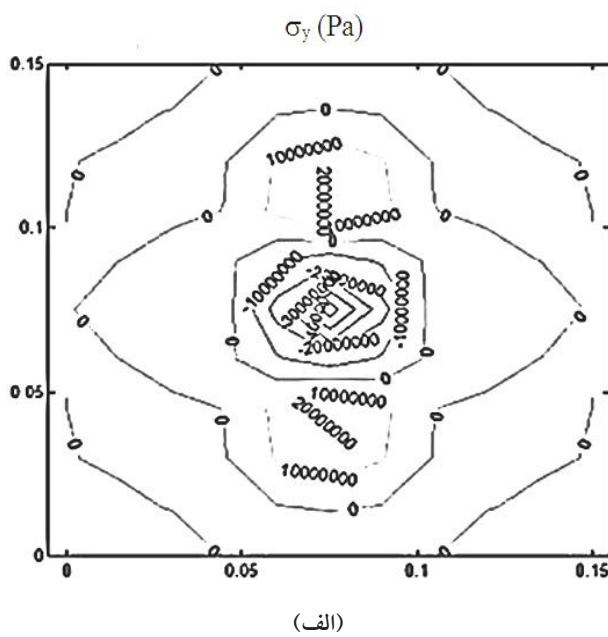
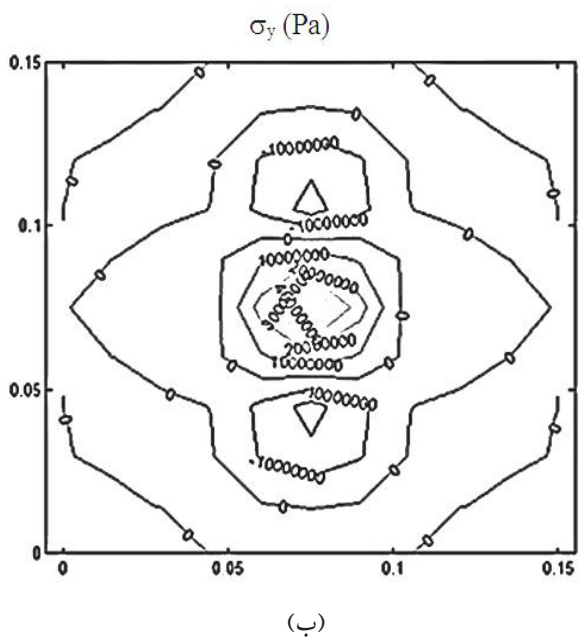
با استفاده از تئوری شکست چوی و چانگ [۳۲] می‌توان ترک خوردگی و همچنین لایه‌لایه شدن صفحات کامپوزیتی را پیش‌بینی کرد که جهت این امر از دو رابطه برای پیش‌بینی شکست استفاده می‌شود، ترک خوردگی ماتریس را می‌توان طبق رابطه (۳۷) با توجه به شرط‌های بیان شده پیش‌بینی کرد و همچنین با استفاده از رابطه (۳۸) می‌توان مود شکست لایه‌لایه شدن را پیش‌بینی کرد:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\sigma}_{T2}^n}{Y^n}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}_{T3}^n}{S_T^n}\right)^2 = e_M \\ & \text{if } e_M \geq 1 \quad \text{failure} \\ & \text{if } e_M < 1 \quad \text{no failure} \\ & \text{if } \bar{\sigma}_{T2} \geq 0 \quad Y^n = Y_T^n \\ & \text{if } \bar{\sigma}_{T2} < 0 \quad Y^n = Y_c^n \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & D_a \left(\left(\frac{\bar{\tau}_{T3}^n}{S_T^n}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}_{T3}^{n+1}}{S_L^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{T2}^{n+1}}{Y^{n+1}}\right)^2 \right) = e_D \\ & \text{if } e_D \geq 1 \quad \text{failure} \\ & \text{if } e_D < 1 \quad \text{No failure} \\ & \text{if } \bar{\sigma}_{T2} \geq 0 \quad Y^{n+1} = Y_T^{n+1} \\ & \text{if } \bar{\sigma}_{T2} < 0 \quad Y^{n+1} = Y_c^{n+1} \end{aligned} \quad (38)$$



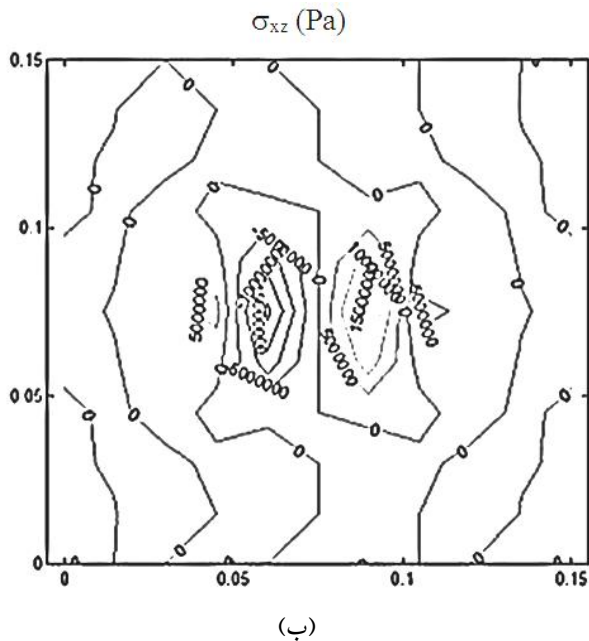
شکل ۱۳- نحوه توزیع تنش‌های نرمال σ_x در ورق $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$: الف) در سطح بالای لایه اول و ب) در سطح پایین لایه پنجم



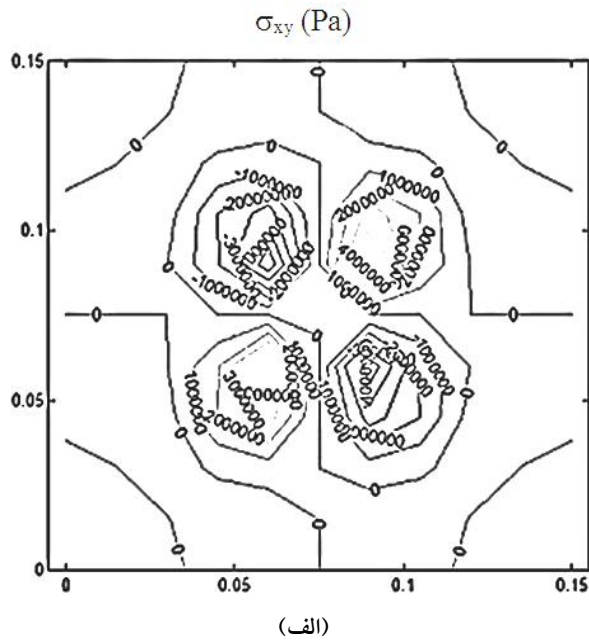
شکل ۱۴- نحوه توزیع تنش‌های نرمال σ_y در ورق $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$: الف) در سطح بالای لایه اول و ب) در سطح پایین لایه پنجم

(۱۹) نشان‌دهنده معیار مربوط به لایه‌لایه شدن است. در شکل (۱۹) همان‌طور که مشاهده می‌شود، با استفاده از معیار شکست

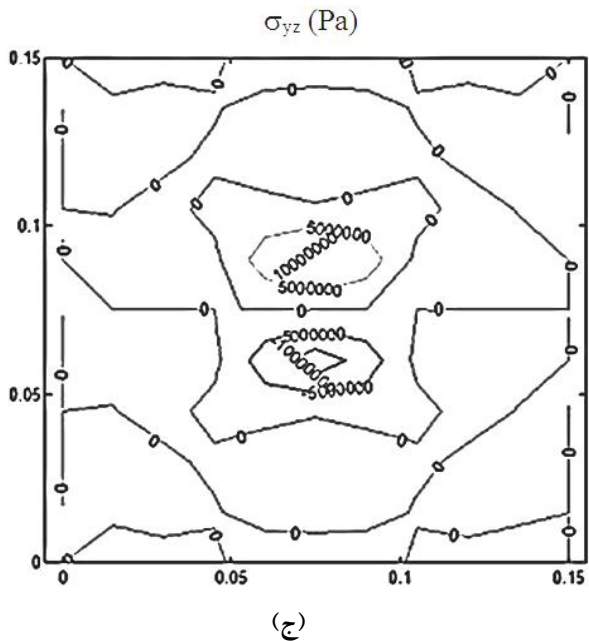
سطح پایین لایه چهارم و سطح پایین لایه پنجم نشان داده شده است. شکل (۱۸) نشان‌دهنده ترک‌خوردگی ماتریس و شکل



(ب)



(الف)

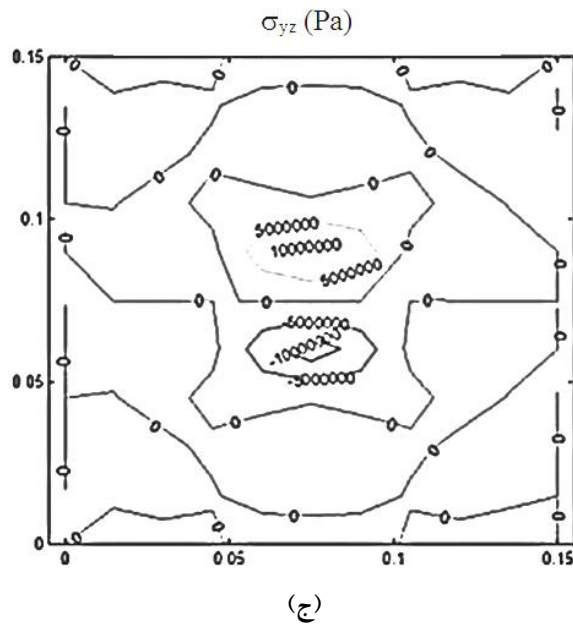
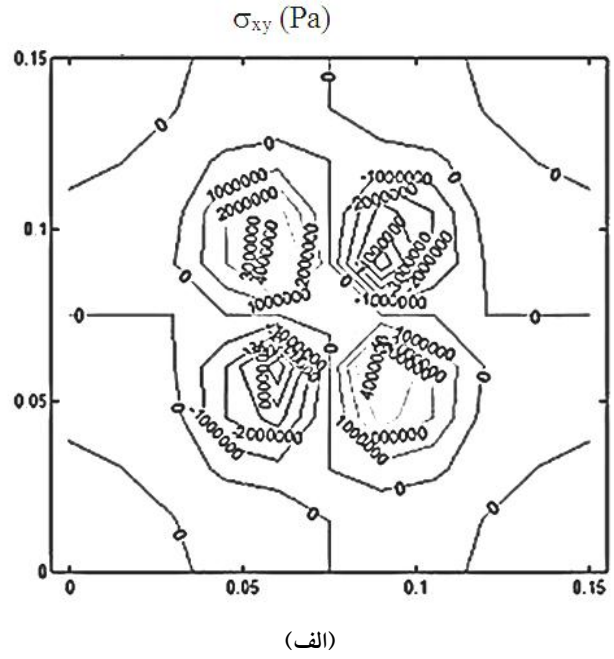
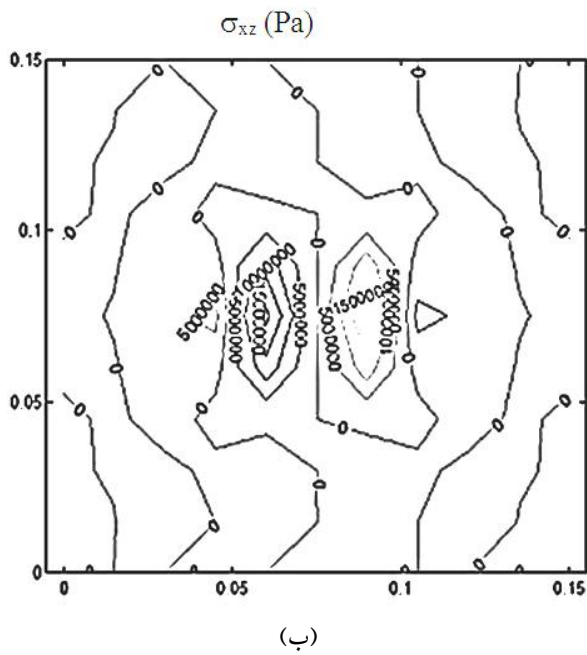


(ج)

شکل ۱۵- نحوه توزیع تنش‌های برشی در سطوح بالای لایه اول ورق در ورق [۹۰°/۰°/۹۰°/۰°/۹۰°] (الف) تنش σ_{xy} (ب) تنش σ_{xz} و (ج) تنش σ_{yz}

نرمال سطح بالای لایه‌های اول، دوم و سوم و سطح پایین لایه‌های چهارم و پنجم پرداخته شده است. همچنین شکست با استفاده از معیار سای- هیل و ترک‌خوردگی ماتریس و لایه‌لایه شدن با معیار چوی-چانگ به صورت نموداری بررسی شده

چوی-چانگ برای ورق کامپوزیتی با خواصی که در جدول (۴) مطرح شده است. لایه‌لایه شدن بین لایه‌های اول و دوم، سوم و چهارم و بین لایه‌های چهارم و پنجم رخ می‌دهد. برای بررسی بیشتر در مثال دیگری به بررسی تنش‌های



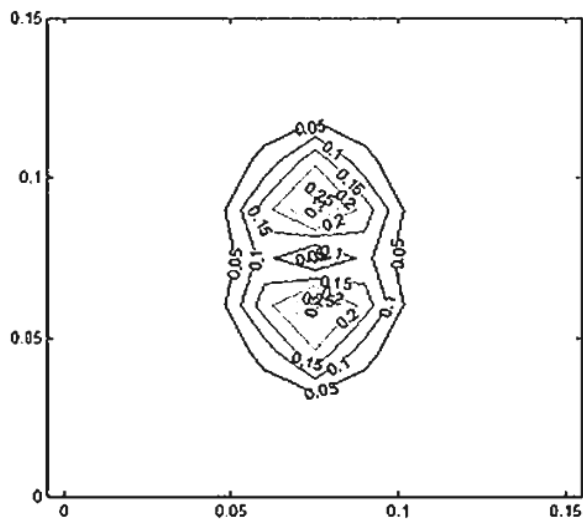
شکل ۱۶- نحوه توزیع تنش‌های برشی در سطوح پایین لایه- پنجم در ورق [۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]: الف) تنش σ_{xy} ، ب) تنش σ_{xz} و ج) تنش σ_{yz}

جدول (۴) آورده شده است. لایه‌گذاری برای ورق کامپوزیتی [۰/۰/۰/۰/۰] در نظر گرفته شده است. در شکل (۲۰) نحوه توزیع تنش‌های نرمال در سطح بالای لایه‌های اول، دوم و سوم و همچنین سطح پایین لایه‌های

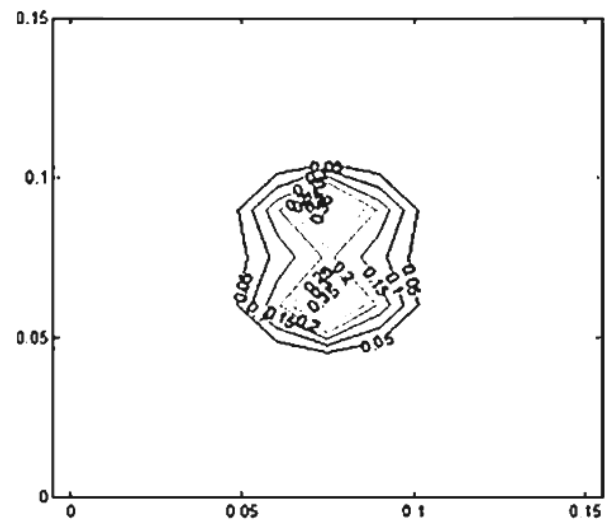
است. برای این امر سرعت ضربه‌زننده سه متر بر ثانیه با وزن ۲۲/۱ گرم و ابعاد ورق ۲۰×۲۰ سانتی‌متر فرض شده است. ضخامت کل ورق برابر با سه میلی‌متر و ضخامت هر لایه برابر با ۰/۶ میلی‌متر است. خواص مکانیکی ورق و ضربه‌زننده در

جدول ۴- خواص مکانیکی صفحه کامپوزیتی و جسم ضربه زننده

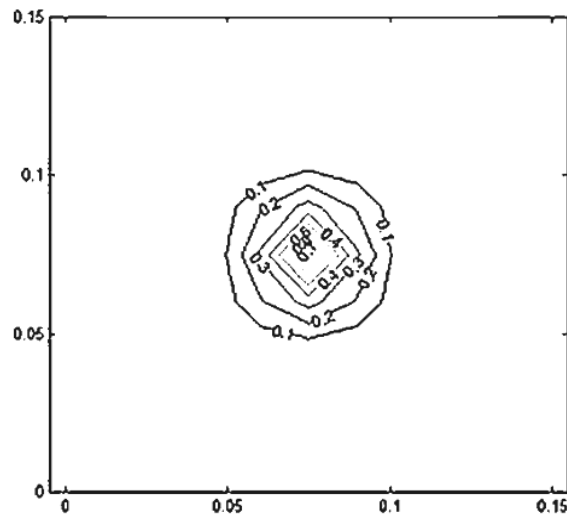
خواص مکانیکی	جنس
$E_1=48$ (GPa), $E_2=15/3$ (GPa), $G_{12}=G_{13}=5/1$ (GPa), $G_{23}=5/8$ (GPa), $\nu_{12}=\nu_{13}=0/315$, $\rho=2112$ (kg/m ³)	صفحه گرافیت-اپوکسی
$X_T=1297$ (MPa), $X_C=820$ (MPa), $Y_T=27/8$ (MPa), $Y_C=150$ (MPa), $S_{12}=S_{13}=39/2$ (MPa), $S_{23}=38$ (MPa)	
$E=207$ (GPa), $\nu=0/3$, $\rho=7800$ (kg/m ³), $r=0/004$ (m)	ضربه زننده



(ب)

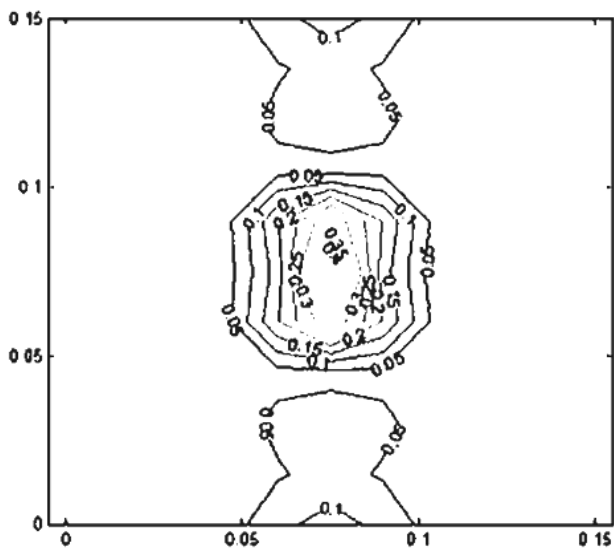


(الف)

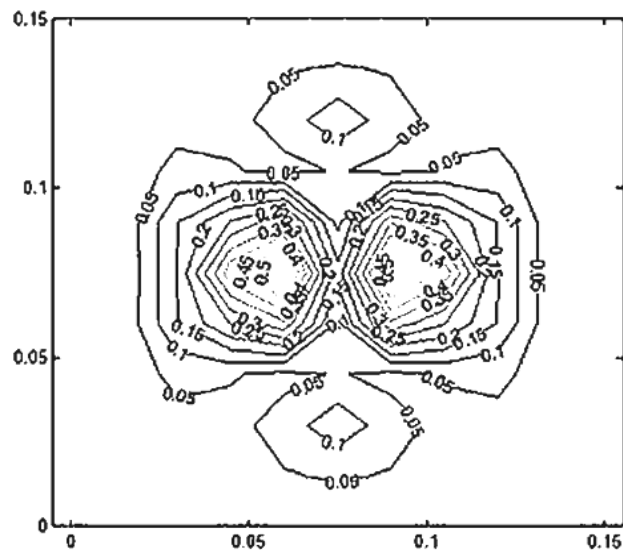


(ج)

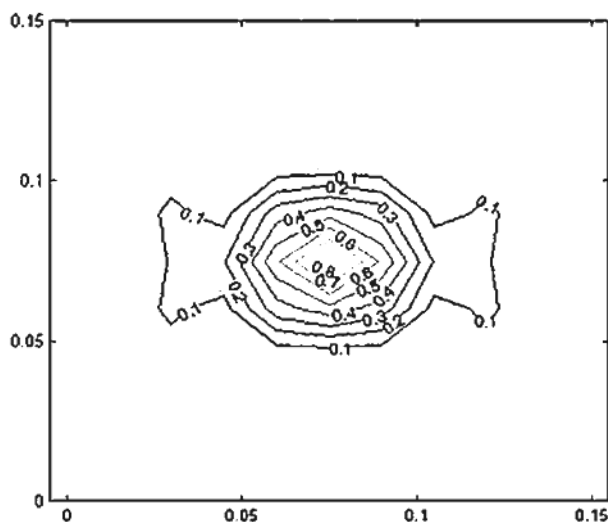
شکل ۱۷- نحوه توزیع عدد شکست در ورق [۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰] با معیار سای- هیل: (الف) سطح بالای لایه اول، (ب) سطح پایین لایه چهارم و (ج) سطح پایین لایه پنجم



(ب)



(الف)



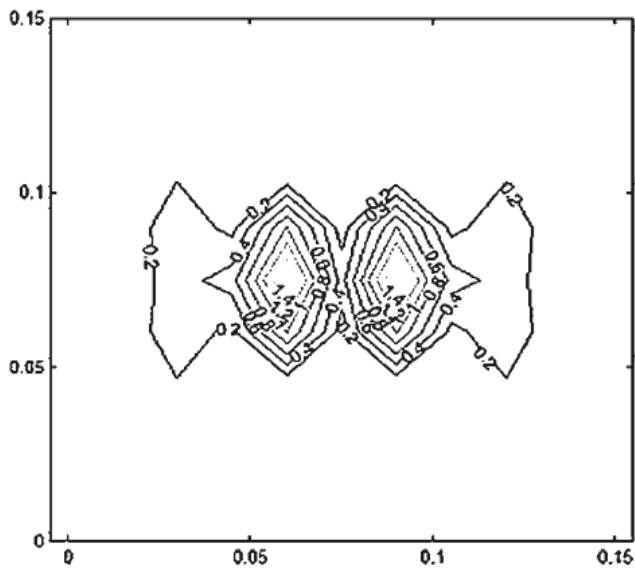
(ج)

شکل ۱۸- نحوه توزیع شکست با معیار چوی- چانگ در ورق [۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]: الف) در سطح بالای لایه اول، ب) سطح پایین لایه چهارم و ج) سطح پایین لایه پنجم

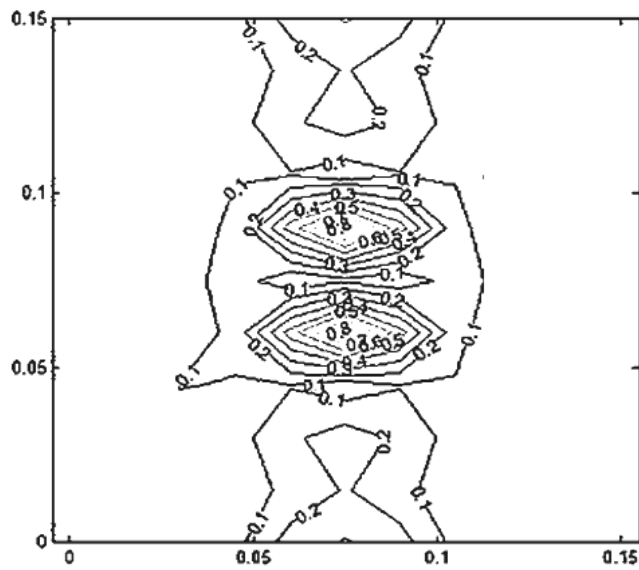
سای- هیل، ترک خوردگی و لایه‌لایه شدن با استفاده از معیار چوی-چانگ در وسط ورق در راستای طولی نشان داده شده است.

در این بخش مقادیر بیشینه شکست با استفاده از معیار چوی-چانگ و معیار سای-هیل برای دو لایه‌گذاری مختلف

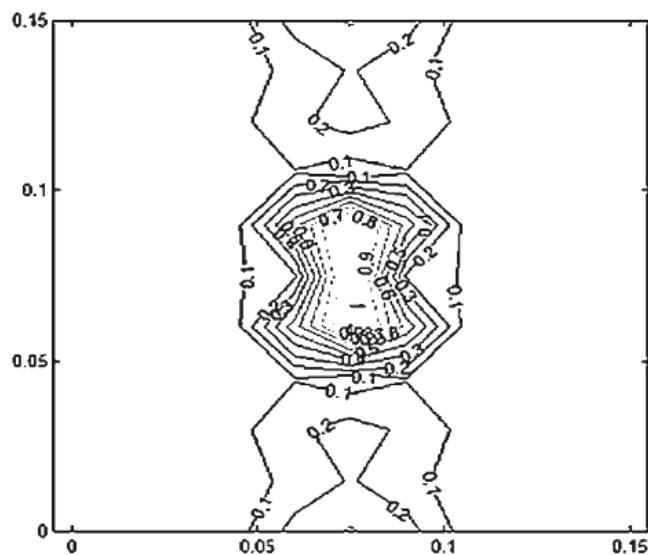
چهارم و پنجم در وسط ورق در راستای طولی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است به دلیل تقارن موجود در لایه‌گذاری نمونه مقادیر تنش‌های نرمال در سطح بالای لایه اول و سطح پایین لایه پنجم برابر و عکس هم هستند. همچنین در شکل (۲۱) نحوه توزیع شکست با معیار



(ب)



(الف)

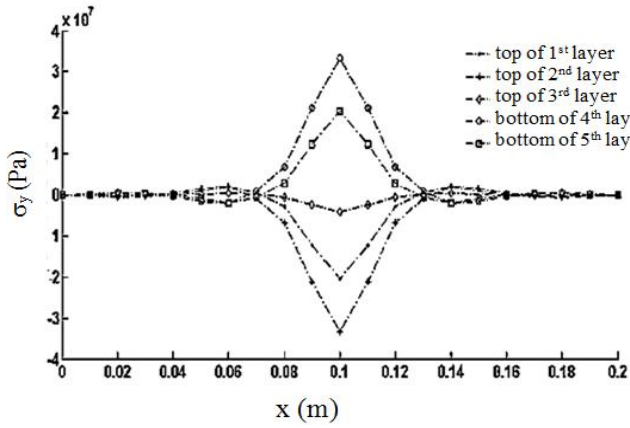


(ج)

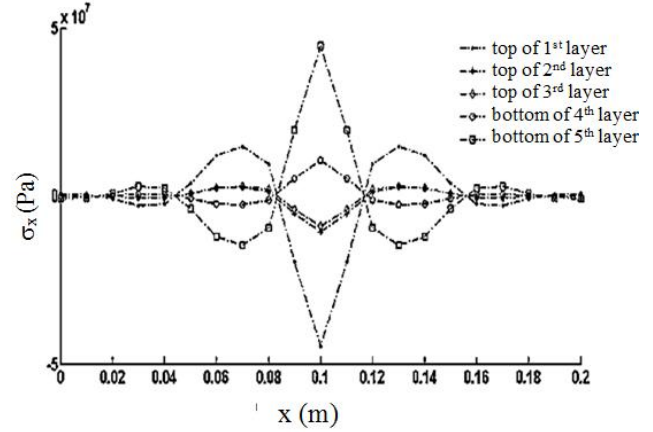
شکل ۱۹- نحوه توزیع شکست لایه لایه شدن با معیار چوی- چانگ بین لایه ها در ورق [۹۰/۰/۹۰/۰/۹۰]: (الف) بین لایه دوم و سوم، (ب) بین لایه سوم و چهارم و (ج) بین لایه چهارم و پنجم

متر بر ثانیه است. همچنین جرم ضربه زننده ۲۲/۱ گرم است. خواص مکانیکی ورق و ضربه زننده در جدول (۴) آورده شده است. مقادیر شکست در سه نوع شرایط مرزی مختلف شامل هر چهار طرف ساده، هر چهار طرف گیردار، دو لبه گیردار و

[۰/۰/۹۰/۰/۰] و لایه گذاری [۰/۹۰/۹۰/۰/۰] با یکدیگر مقایسه شده است. ابعاد ورق ۱۰×۱۰ سانتی متر فرض شده است. ضخامت کل ورق برابر با سه میلی متر و ضخامت هر لایه برابر با ۰/۶ میلی متر است. سرعت ضربه زننده نیز برابر با سه

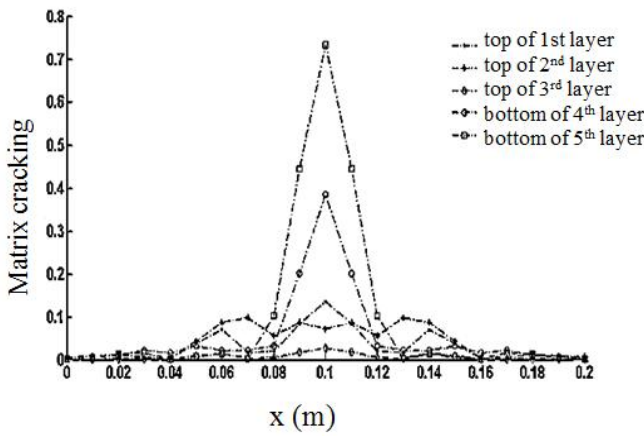


(ب)

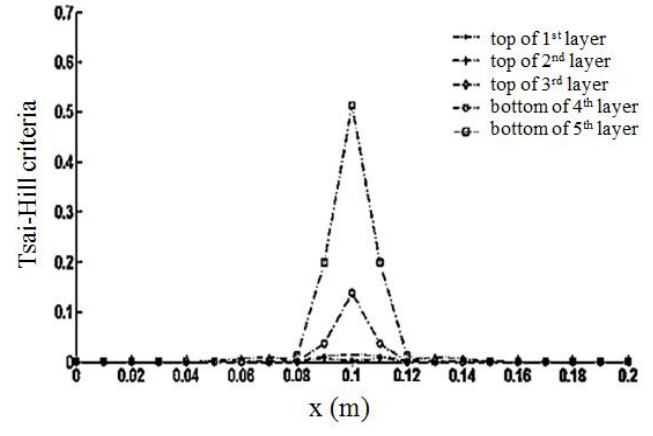


(الف)

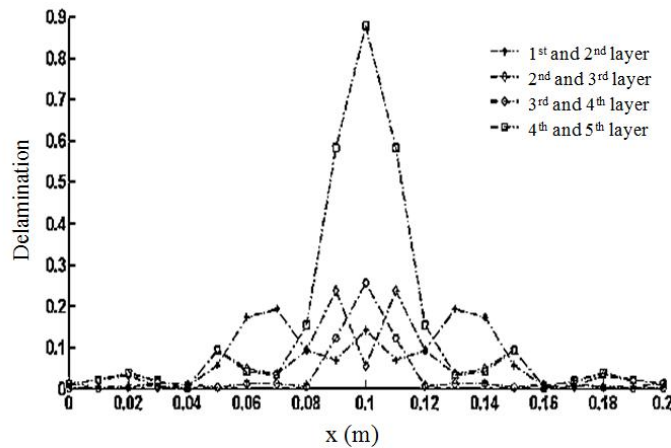
شکل ۲۰- نحوه توزیع تنش‌های نرمال: الف) σ_x و ب) σ_y در سطوح بالای لایه‌های اول، دوم، سوم و پایین لایه‌های چهارم و پنجم در ورق [۰/۰/۰/۰/۰]



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۲۱- نحوه توزیع عدد شکست، ترک خوردگی و لایه‌لایه شدن با معیار: الف) سای-هیل، ب) چوی-چانگ شکست ماتریس و

ج) چوی-چانگ لایه‌لایه شدن در ورق [۰/۰/۰/۰/۰]

جدول ۵- مقادیر بیشینه خرابی در معیار شکست چوی-چانگ برای لایه گذاری [۰/۰/۹۰/۰/۰]

مقادیر بیشینه خرابی	چهار طرف گیردار	چهار طرف تکیه گاه ساده	دو طرف گیردار و دو طرف آزاد
لایه لایه شدن بین لایه ۱-۲	۰/۳۴۳۶	۰/۳۴۴۴	۰/۳۲۴۵
لایه لایه شدن بین لایه ۲-۳	۰/۲۸۲۶	۰/۲۸۴۲	۰/۳۸۰۱
لایه لایه شدن بین لایه ۳-۴	۰/۵۱۰۳	۰/۵۰۱۲	۰/۴۸۰۸
لایه لایه شدن بین لایه ۴-۵	۱/۵۱۵۹	۱/۴۷۷۵	۱/۳۷۲۰

جدول ۶ - مقادیر بیشینه خرابی در معیار شکست چوی-چانگ برای لایه گذاری [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰]

مقادیر بیشینه خرابی	چهار طرف گیردار	چهار طرف تکیه گاه ساده	دو طرف گیردار و دو طرف آزاد
لایه لایه شدن بین لایه ۱-۲	۰/۲۴۴۳	۰/۲۴۹۰	۰/۳۶۰۸
لایه لایه شدن بین لایه ۲-۳	۰/۲۱۵۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۶۷۲
لایه لایه شدن بین لایه ۳-۴	۰/۳۷۹۵	۰/۳۷۶۲	۰/۳۵۵۳
لایه لایه شدن بین لایه ۴-۵	۱/۳۱۵۴	۱/۳۳۶۷	۱/۲۶۳۰

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، ضربه سرعت پایین روی ورق کامپوزیتی با استفاده از روش المان محدود و شکست ورق کامپوزیتی تحت نیروهای ناشی از ضربه سرعت پایین با استفاده از معیارهای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. به طور کلی نتایج زیر به دست آمده است:

- با توجه به نمایش تغییرات نیروی تماس ضربه برای شرایط مرزی و ابعاد مختلف ورق چنین نتیجه شد که برای ورق با ابعاد بزرگ تغییر شرایط مرزی از ساده به گیردار، دو طرف آزاد و دو طرف گیردار تغییر قابل توجهی در مقدار نیروی تماس ایجاد نمی کند. اما برای ورق با ابعاد کوچک تر تغییرات نیرو بیشتر از شرایط مرزی متأثر است که دلیل آن نیز انتشار امواج و بازخورد آن در ابعاد کوچک تر ورق است.

- از تغییرات نیروی تماس برای چینش مختلف الیاف نتیجه شد که نیروی تماس با افزایش درصد جهت گیری الیاف در راستای ۹۰ درجه افزایش می یابد.

- از بررسی تأثیر تغییرات ابعاد ورق روی نیروی تماس چنین نتیجه شد که با افزایش ابعاد ورق مقدار بیشینه نیروی تماس

دو لبه آزاد در جدول های (۵) و (۶) آورده شده است. با توجه به جدول (۵)، با مقایسه مقادیر ارائه شده در جدول برای لایه گذاری [۰/۰/۹۰/۰/۰] با اعمال هر سه نوع شرایط مرزی چهار طرف ساده، چهار طرف گیردار، دو طرف ساده و دو طرف گیردار مشاهده می شود که با استفاده از معیار پیشنهاد شده توسط چوی-چانگ برای پیش بینی شکست (لایه لایه شدن)، این نوع شکست بین دو لایه آخر (لایه چهارم و پنجم) اتفاق می افتد. همچنین مقدار بیشترین آسیب (لایه لایه شدن) بین لایه چهارم و پنجم متعلق به زمانی است که ورق تحت ضربه در شرایط مرزی چهار طرف گیردار قرار گرفته است.

با توجه به جدول (۶) برای لایه گذاری [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] نیز مشاهده می شود که با استفاده از معیار پیشنهاد شده توسط چوی-چانگ، لایه لایه شدگی بین لایه های چهارم و پنجم رخ می دهد به علاوه مقدار بیشینه شکست لایه لایه شدن در بین خروجی ها برای لایه گذاری [۰/۹۰/۹۰/۹۰/۰] بین لایه های چهارم و پنجم زمانی اتفاق می افتد که شرایط مرزی چهار طرف ساده است.

افزایش می‌یابد.

- افزایش سرعت ضربه‌زننده علاوه بر افزایش نیروی تماسی باعث کاهش زمان رسیدن به بیشینه نیرو می‌شود.

- هر دو نیروی تماس و جابه‌جایی مرکزی با افزایش جرم و سرعت ضربه‌زننده، افزایش می‌یابد.

- با توجه به تئوری‌های شکست سای- هیل و تئوری شکست چوی - چانگ و همچنین مطالعه تنش صورت گرفته در لایه‌های مختلف ورق کامپوزیتی چنین نتیجه شد تنش‌های کششی در لایه‌های پایین ورق بیشترین مقدار را دارند و همچنین میزان لایه‌لایه شدگی نیز در لایه‌های پایین بیشتر است

واژه‌نامه

- | | | |
|---|--------------------|-------------------------------|
| 1. classical laminated plate theory | 4. shape functions | 9. Tsai-Hill failure criteria |
| 2. first-order shear deformation theory | 5. angle-ply | 10. Choi and Chang |
| 3. third-order shear deformation theory | 6. delamination | 11. Von Mises |
| | 7. Ansys | 12. dilation energy |
| | 8. Abaqus | 13. distortion energy |

مراجع

1. Bose, P., and Reddy, J. N., "Analysis of Composite Plates using Various Plate Theories. Part 1: Formulation and Analytical Solutions", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 6, No. 6, pp. 583-612, 1998.
2. Bose, P., and Reddy, J. N., "Analysis of Composite Plates using Various Plate Theories. Part 2: Finite Element Model and Numerical Results", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 6, No. 7, pp. 727-746, 1998.
3. Soldatos, K. P., and Watson, P., "A Method for Improving the Stress Analysis Performance of Two-Dimensional Theories for Composite Laminates", *Acta Mechanica*, Vol. 123, pp. 163-186, 1997.
4. Soldatos, K. P., and Watson, P., "Accurate Stress Analysis of Laminated Plates Combining a Two-Dimensional Theory with the Exact Three-Dimensional Solution for Simply Supported Edges", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 2, pp. 459-489, 1997.
5. Shu, X. P., and Soldatos, K. P., "Cylindrical Bending of Angle-Ply Laminates Subjected to Different Sets of Edge Boundary Conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 4289-4307, 2000.
6. Abrate, S., "Impact on Laminated Composites, Recent Advances", *Applied Mechanics Review*, Vol. 47, pp. 517-544, 1994.
7. Abrate, S., *Impact on Composite Structures*, New York, Cambridge University Press, 1998.
8. Cantwell, W. J., and Morton, J., "The Impact Resistance of Composite Materials- A Review", *Journal of Composite Structures*, Vol. 22, pp. 347-362, 1991.
9. Pierson, M. O., and Vaziri, R., "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", *AIAA Journal*, Vol. 34, pp. 1633-1640, 1996.
10. Michelle, S., Fatt, H., and Park, S., "Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panel-Part B: Damage Initiation", *Journal of Composite Structures*, Vol. 52, No. 3, pp. 353-364, 2001
11. Khalili, M. R., Malekzadeh, K., and Mittal, R. K., "A New Approach to Static and Dynamic Analysis of Composite Plates with Different Boundary Conditions", *Journal of Composite Structures*, Vol. 69, pp. 149-155, 2005.
12. Choi, I. H., and Lim, C. H., "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates using Linearized Contact Law", *Journal of Composite Structures*, Vol. 66, pp. 125-132, 2004.
13. Roy, T., and Chakraborty, D., "Delamination in

- Hybrid FRP Laminates under Low Velocity Impact”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 25, pp. 1939-1956, 2006.
14. Zhang, Y., Zhu, P., and Lai, X., “Finite Element Analysis of Low-Velocity Impact Damage in Composite Laminated Plate”, *Materials and Design*, Vol. 27, pp. 513-519, 2006.
 15. Tiberkak, R., Bachene, M., Rechak, S., and Necib, B., “Damage Prediction in Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact”, *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 73-82, 2008.
 16. Choi, I., H., “Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates under Initial in-Plane Load”, *Composite Structures*, Vol. 86, pp. 251-257, 2008.
 17. Choudhary, S. S., and Tungikar, V. B., “A Simple Finite Element for Nonlinear Analysis of Composite Plates”, *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 3, No. 6, pp. 4897-4907, 2011.
 18. Sabouri, H., Ahmadi, H., and Liaghat, C. H., “Ballistic Impact Perforation Into Glare Target: Experiment, Numerical Modeling and Investigation of Aluminium Stacking Sequence”, *International Journal Vehicle Structures & Systems*, Vol. 3, pp. 178-183, 2011.
 19. Khalili, S. M. R., Soroush, M., Davar, A., and Rahmani, O., “Finite Element Modeling of Low-Velocity Impact on Laminated Composite Plates and Cylindrical Shells”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1363-1375, 2011.
 20. Xiao, Sh., Chen, P., Ye and Q., “Prediction of Damage Area in Laminated Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact”, *Composites Science and Technology*, Vol. 98, pp. 51-56, 2014.
 21. Hassan, M. A., Naderi, S., and Bushroa, A. R., “Low-Velocity Impact Damage of Woven Fabric Composites: Finite Element Simulation and Experimental Verification”, *Materials & Design*, Vol. 53, pp. 706-718, 2014.
 22. Yang, B., Wang, Z., Zhou, L., Zhang, J., and Liang, W., “Experimental and Numerical Investigation of Interply Hybrid Composites Based on Woven Fabrics and PCBT Resin Subjected to Low-Velocity Impact”, *Composite Structures*, Vol. 132, pp. 464-476, 2015.
 23. Patil, S., Reddy, D. M., and Reddy, M., “Low Velocity Impact Analysis on Composite Structures - A Review”, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1943, pp. 020009-1-9, 2018.
 24. Tam, T. M., and Sun, C. T., *Wave Propagation in Graphite/Epoxy Laminates Due to Impact*, NASA CR, 1982.
 25. Newmark, N. M., “A Method of Computation for Structural Dynamic”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp. 67-84, 1959.
 26. Sun, C. T., and Chen, J. K., “On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, pp. 490-504, 1985.
 27. Tiberkak, R., Bachene, M., Rechak, S., and Necib, B., “Damage Prediction in Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact”, *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 73-82, 2008.
 28. Naik, N. K., Chandra Sekher, Y., and Sailendra, M., “Damage in Woven Fabric Composites Subjected to Low-Velocity Impact”, *Aerospace Engineering Department*, Indian Institute of Technology, Vol. 400, pp. 731-744, 2000.
 29. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, 1950.
 30. Tsai, S. W., *Strength Theories of Filamentary Structures in Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites*, Wiley Interscience, New York, 1968.
 31. Autar, K., *Mechanics of Composite Material*, CRC Press, 2nd ed, 2006.
 32. Choi, H. Y., and Chang, F. K., “A Model for Predicting Damage in Graphite/ Epoxy Laminated Composites Resulting From Low-Velocity Point Impact”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 26, pp. 2134-2169, 1992.