نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

# تحلیل اثر سرعت سیال روی ناپایداری لوله‌های بتنی مسلح شده با نانوذرات حاوی جریان سیال

علیرضا زمانی نوری[۱*] و پیمان ابراهیمی[۲]

۱. گروه مهندسی عمران، واحد شهرقدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲. گروه مهندسی عمران، واحد رودهن، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱/۲ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۱/۲۸)

**چکیده**– با توجه به کاربرد فراوان لوله‌های حاوی جریان سیال در مهندسی عمران، ارائه یک مدل ریاضی مناسب برای تحلیل پایداری آنها ضروری است. بدین منظور یک لوله بتنی تقویت شده با با نانوذرات سیلیس و حاوی جریان سیال درنظر گرفته می‌شود. هدف این تحقیق بررسی تحلیل پایداری سازه و نشان دادن اثر نانوذرات و سیال درون آن است. سازه با المان پوسته استوانه‌ای و با تئوری ردی مدل‌سازی می‌شود. برای به‌دست آوردن نیروی ناشی از سیال درونی از معادله ناویر– استوکس استفاده می‌شود. برای درنظر گرفتن اثر نانوذرات در لوله از مدل موری– تاناکا استفاده شده به‌طوری که اثرات انباشتگی نانوذرات لحاظ شده است. درنهایت با استفاده روش انرژی و اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سازه استخراج می‌شود. برای تحلیل پایداری سازه از روش تفاضلات مربعی استفاده می‌شود و اثر پارامترهای مختلف همچون درصد حجمی نانوذرات، انباشتگی نانوذرات، سیال درون لوله و پارامترهای هندسی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که وجود نانوذرات به‌عنوان تقویت‌کننده لوله، منجر به تأخیر ناپایداری سازه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** لوله بتنی، نانوذرات، تئوری ردی، روش عددی تفاضلات مربعی، معادله ناویر– استوکس.

# Analysis of the Effect of Fluid Velocity on the Instability of Concrete Pipes Reinforced with Nanoparticles Conveying the Fluid Flow

**A. Zamani Nouri[1*] and P. Ebrahimi[2]**

1. Department of Civil Engineering, Shar-e-Qods Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
2. Department of Civil Engineering, Roudehen Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

**Abstract**: ***With respect to the great application of pipes conveying fluid in civil engineering, presenting a mathematical model for their stability analysis is essential. For this purpose, a concrete pipe, reinforced by iron oxide ($Fe_2O_3$) nanoparticles, conveying fluid***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: dr.zamani.ar@gmail.com

*is considered. The goal of this study is to investigate the structural stability to show the effects of the inside fluid and the nanoparticles. The structure was modeled by a cylindrical shell and using Reddy theory. To obtain the force induced by the inside fluid, the Navier-Stokes equation was used. To assume the effect of the nanoparticles in the pipe, the Mori-Tanaka model was utilized so that the effects of agglomeration of nanoparticles could be considered. Finally, by applying energy method and the Hamilton's principle, the governing equations were derived. For the stability analysis of the structure, differential quadrature method (DQM) was proposed and the effects of different parameters such as volume fraction of the nanoparticles and agglomeration of the nanoparticles inside fluid and geometrical parameters were investigated. The results showed that the existence of the nanoparticles as the reinforcement for the pipe led to the delay in the pipe instability.*

**Keywords:** *Concrete pipe; Nanoparticles; Reddy theory; DQM; Navier-Stokes equation.*



## فهرست علائم

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_{ij}^{(1)}, B_{ij}^{(1)}$ | ضرایب وزنی | $[M]$ | ماتریس جرم |
| $a$ | طول لوله | $M_{ij}, N_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$ | منتجه‌های تنش |
| $[C]$ | ماتریس میرایی | $P$ | فشار سیال |
| $C_{ij}$ | ثوابت الاستیک | $R$ | شعاع میانگین لوله |
| $c_r$ | کسر حجمی میانگین نانوذرات | $R_{fluid}$ | نیروی خارجی ناشی از سیال |
| $\{d_b\}$ | بردار دامنه مربوط به مرز | $U$ | انرژی پتانسیل |
| $\{d_d\}$ | بردار دامنه مربوط به میدان | $u_1, u_2, u_3$ | جابه‌جایی کلی لوله |
| $E$ | مدول یانگ نانوکامپوزیت | $u, v, w$ | جابه‌جایی لایه میانی لوله |
| $E_m$ | مدول یانگ زمینه | $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_\theta, v_z)$ | سرعت سیال در مختصات استوانه‌ای |
| $F_{body}$ | نیروی حجمی | $V_r^m$ | حجمی از نانوذرات در بتن |
| $G$ | مدول برشی | $V_r$ | ذرات حجم نهایی نانو |
| $G_m$ | مدول برشی فاز پایه | $V_r^{inclusion}$ | حجمی از نانوذرات در گنجایش |
| $h$ | ضخامت لوله | $\omega$ | فرکانس سازه |
| $h_f$ | عمق سیال درون لوله | $\delta$ | تغییرات |
| $[I]$ | ماتریس یکه | $\mu$ | ویسکوزیته سیال |
| $K$ | مدول حجمی | $\nu$ | ضریب پواسون نانوکامپوزیت |
| $K_{in}$ | مدول حجمی گنجایش | $\nu_m$ | ضریب پواسون زمینه |
| $K_{out}$ | مدول حجمی کامپوزیت منهای گنجایش | $\rho$ | دانسیته معادل لوله نانوکامپوزیتی |
| $K_m$ | مدول حجمی فاز پایه | $\rho_f$ | چگالی سیال |
| $[K]$ | ماتریس سختی | $\sigma_{ij}$ | مؤلفه‌های تنش |
| $k, l, m, n, p$ | مدول‌های الاستیک هیل | $\varepsilon_{ij}$ | مؤلفه‌های کرنش |
| $k_r, l_r, m_r, n_r, p_r$ | مدول الاستیک هیل برای فاز تقویت | $\phi_x, \phi_\theta$ | شیب‌های لایه میانی |

## ۱- مقدمه

تاکنون تحقیقات تجربی زیادی برای مدل‌سازی لوله‌های حاوی جریان سیال انجام شده است. این مدل‌سازی‌ها به دو دسته مدل‌سازی اتمی و مدل‌سازی مکانیک محیط پیوسته تقسیم می شوند. برای سیستم‌های دارای اتم‌های زیاد، این مدل‌سازی‌ها بسیار وقت‌گیر و دارای محاسبات پیچیده است و علاوه بر این

کاربردهای عملی این مدل‌سازی بسیار محدود است. از طرف دیگر با پیشرفت تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته می‌توان بر محدودیت‌های مدل‌سازی اتمی غلبه کرد. امروزه مدل‌های مکانیک پیوسته، به‌طور وسیعی برای مدل‌سازی سازه‌ها کاربرد دارد. مقایسه نتایج مدل‌سازی اتمی و مکانیک محیط پیوسته، نشان‌دهنده این مطلب است که مدل‌سازی مکانیک پیوسته، نتایج قابل قبولی در پیشگویی رفتار دینامیکی سیستم‌ها دارد.

پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای وسیعی در بسیاری از رشته‌های مهندسی مانند مکانیک، شیمی، هوافضا، عمران، هسته‌ای و ... دارند. برای مثال در صنعت نفت و گاز از پوسته‌های استوانه‌ای به‌عنوان مخازن تحت فشار استفاده می‌شود. اولین مطالعات در زمینه کمانش پوسته‌های استوانه‌ای توسط گوپتا [۱] انجام شد. او با استفاده از روش ریتز، درجه حرارت بحرانی کمانشی را برای پوسته ارتوتروپیک به‌دست آورد. دینگا و همکاران [۲] پس‌کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای نازک را بررسی کردند. آنها از تئوری کلاسیک برای مدل‌سازی ریاضی مسئله استفاده و به کمک یک روش تحلیلی، بار کمانشی سازه را محاسبه کردند. تحقیق در زمینه تنش‌های الاستیک دیسک‌های با ضخامت متغیر توسط ردی و سریناث [۳] صورت پذیرفت. بثت یک مطالعه کلی در مورد مخازن استوانه‌ای و کروی انجام داد [۴]. اوباتا و نودا [۵] به مطالعه مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی، برای تحلیل تنش‌های حرارتی در دماهای بالا پرداختند. هورگان و چان [۶] حل استاتیکی دقیقی برای مخزن تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه کردند. آنها از مدل توانی برای تغییر مدول الاستیک استفاده کردند و از تغییرات ضریب پواسون صرف‌نظر کردند. سالزار [۷] به ارائه یک روش عددی برای بررسی تحلیل تنش در مخازن استوانه‌ای پرداخت. دلیل استفاده از روش عددی در کار این محققان انتخاب یک تابع خاص برای توصیف غیرهمگن بودن ماده بود. کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه ای کامپوزیتی لایه‌ای توسط پاتل و همکاران [۸] انجام شد. آنها با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا، سازه را مدل‌سازی ریاضی کرده و به‌کمک روش اجزای محدود به محاسبه بار کمانشی حرارتی پرداختند. شن [۹] کمانش پیچشی و پس-کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت درجه حرارت را انجام دادند. آنها از روش انرژی و اصل همیلتون برای به‌دست آوردن معادلات حاکم استفاده و روش تحلیلی را برای محاسبه بار کمانشی سازه انتخاب کردند. ردی و لیو [۱۰] در یک مطالعه جامع به مقایسه تئوری‌های مختلف در تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای پرداختند. آنها از روش انرژی و لاگرانژ برای به‌دست‌آوردن معادلات حرکت استفاده کردند و به‌کمک روش عددی به آنالیز سیستم پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که تئوری برشی مرتبه بالای ردی برای پوسته‌های نازک و ضخیم قابلیت استفاده داشته و منجر به نتایج بسیار دقیقی خواهد شد. داک و تانگ [۱۱] به تحلیل دینامیکی و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی پرداختند. آنها از مدل پاسترناک برای شبیه‌سازی پوسته متکی بر بستر ارتجاعی استفاده کردند. کمانش پوسته های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار فشاری و درجه حرارت توسط سان و همکاران [۱۲] بررسی شد. آنها از تئوری ردی استفاده کردند و خواص پوسته را تابعی از دما درنظر گرفتند. در این کار از روش گالرکین برای محاسبه بار کمانشی استفاده شد و اثر پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی، نوع ماده، درجه حرارت و اندیس غیرهمگنی روی رفتار کمانشی سازه بررسی شد.

پوسته‌های استوانه‌ای حاوی جریان سیال نیز کاربردهای فراوانی در صنعت و سیستم‌های بیومکانیکی دارند. به‌عنوان نمونه، محافظ حرارتی راکتورهای هسته‌ای و موتور احتراق داخلی هواپیما، مبدل‌های حرارتی، لوله‌های انتقال نفت و گاز، سیاهرگ‌ها، سیستم ریوی با پوسته‌استوانه‌ای حاوی جریان سیال مدل می‌شود. بیشترین بررسی و تحقیق در مورد پوسته های استوانه‌ای حاوی جریان سیال توسط آمابیلی [۱۳] انجام شده است. ونگ و نی [۱۴] پایداری دینامیکی لوله‌های


**شکل ۱- شماتیک لوله حاوی جریان سیال تقویت‌شده با نانوذرات**

حاوی جریان سیال را مورد بررسی قرار دادند. آنها از مدل تیر اویلر برای مدل‌سازی ریاضی سازه استفاده کردند و روش گالرکین را برای تحلیل سیستم به‌کار گرفتند. بحث اصلی این مقاله روی سرعت بحرانی سیال و بررسی پارامترهای مختلف روی آن بود. دایی و همکاران [۱۵] به مطالعه لوله‌های حاوی جریان سیال پرداختند. آنها از تئوری تیر اویلر- برنولی استفاده کردند و اثر میرایی سیال و جریان گردابی ایجاد شده در لوله را نیز درنظر گرفتند.

با توجه به مطالبی که بیان شده تاکنون تحقیقی درباره تحلیل پایداری و ارتعاشات لوله‌های بتنی تقویت شده با نانوذرات صورت نگرفته است. در این پژوهش، این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش کار به این صورت است که ابتدا روابط کرنش- تغییر مکان و سپس تنش- کرنش سازه محاسبه می‌شوند. با توجه به اینکه لوله با نانوذرات تقویت شده است، در ادامه مدل موری- تاناکا برای محاسبه خواص معادل نانوکامپوزیت و خاصیت انباشتگی استفاده می‌شود. سپس روش انرژی مطرح شده و به‌کمک اصل همیلتون، معادلات ریاضی حاکم بر سازه استخراج می‌شود. درنهایت، با استفاده از روش عددی تفاضلات مربعی، سرعت بحرانی سازه محاسبه شده و تأثیر پارامترهای مختلف مانند درصد حجمی و انباشتگی نانوذرات، سرعت سیال و پارامترهای هندسی لوله روی پایداری سیستم بررسی می‌شود.

## ۲- بیان هندسی مسئله

شکل (۱) یک لوله نانوکامپوزیتی حاوی جریان سیال با شعاع میانگین R، ضخامت h و طول a با سیستم مختصات استوانه‌ای $(x, \theta, \rho=R+z)$ را نشان می‌دهد.

## ۳- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی

در این بخش به بررسی میدان جابه‌جایی مرتبه سوم برشی ارائه شده توسط ردی پرداخته می‌شود. در این تئوری [۱۰]:

$$u_1(x,\theta,z,t)=u(x,\theta,t)+z\phi_x(x,\theta,t)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_x(x,\theta,t)+\frac{\partial}{\partial x}w(x,\theta,t)\right), \qquad (۱)$$

$$u_2(x,\theta,z,t)=v(x,\theta,t)+z\phi_\theta(x,\theta,t)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_\theta(x,\theta,t)+\frac{\partial}{R\partial\theta}w(x,\theta,t)\right), \qquad (۲)$$

$$u_3(x,\theta,z,t)=w(x,\theta,t), \qquad (۳)$$

که در آن u، v و w جابه‌جایی‌های سطح میانی هستند. همچنین $\phi_x$ و $\phi_\theta$ در این تئوری شیب‌های صفحهٔ عمود بر سطح میانی در $z=0$ هستند. روابط کرنش به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{x\theta}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{\theta z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{\theta\theta}\\ \varepsilon^0_{x\theta}\\ \varepsilon^0_{xz}\\ \varepsilon^0_{\theta z}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{\theta\theta}\\ \varepsilon^1_{x\theta}\\ \varepsilon^1_{xz}\\ \varepsilon^1_{\theta z}\end{Bmatrix}+z^2\begin{Bmatrix}\varepsilon^2_{xx}\\ \varepsilon^2_{\theta\theta}\\ \varepsilon^2_{x\theta}\\ \varepsilon^2_{xz}\\ \varepsilon^2_{\theta z}\end{Bmatrix}+z^3\begin{Bmatrix}\varepsilon^3_{xx}\\ \varepsilon^3_{\theta\theta}\\ \varepsilon^3_{x\theta}\\ \varepsilon^3_{xz}\\ \varepsilon^3_{\theta z}\end{Bmatrix}, \qquad (۴)$$

که در آن:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{0}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{0}\\ \varepsilon_{x\theta}^{0}\\ \varepsilon_{xz}^{0}\\ \varepsilon_{\theta z}^{0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}\\ \dfrac{\partial v}{R\partial\theta}+\dfrac{w}{R}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^{2}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{R\partial\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{R\partial\theta}\\ \phi_{x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \phi_{\theta}+\dfrac{\partial w}{R\partial\theta}\end{Bmatrix},\qquad(5)$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{1}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{1}\\ \varepsilon_{x\theta}^{1}\\ \varepsilon_{xz}^{1}\\ \varepsilon_{\theta z}^{1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \phi_{x}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \phi_{\theta}}{R\partial\theta}\\ \dfrac{\partial \phi_{x}}{R\partial\theta}+\dfrac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix},\qquad(6)$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{2}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{2}\\ \varepsilon_{x\theta}^{2}\\ \varepsilon_{xz}^{2}\\ \varepsilon_{\theta z}^{2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{-4}{h^{2}}\left(\phi_{x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{-4}{h^{2}}\left(\phi_{\theta}+\dfrac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\end{Bmatrix},\qquad(7)$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{3}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{3}\\ \varepsilon_{x\theta}^{3}\\ \varepsilon_{xz}^{3}\\ \varepsilon_{\theta z}^{3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{-4}{3h^{2}}\left(\dfrac{\partial \phi_{x}}{\partial x}+\dfrac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}\right)\\ \dfrac{-4}{3h^{2}}\left(\dfrac{\partial \phi_{\theta}}{R\partial\theta}+\dfrac{\partial^{2} w}{R^{2}\partial\theta^{2}}\right)\\ \dfrac{-4}{3h^{2}}\left(\dfrac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x}+\dfrac{\partial \phi_{x}}{R\partial\theta}+2\dfrac{\partial^{2} w}{R\partial x\partial\theta}\right)\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}.\qquad(8)$$

## ۴- رابطه تنش- کرنش

در این تحقیق جنس لوله از قانون هوک پیروی می‌کند. بنابراین روابط تنش- کرنش برای سازه، با توجه به تئوری ردی و با درنظر گرفتن خصوصیات ماده به‌صورت وابسته به دما، عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{\theta z}\\ \sigma_{zx}\\ \sigma_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{\theta z}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{x\theta}\end{Bmatrix},\qquad(9)$$

جایی که $C_{ij}$ ثابت‌های الاستیک هستند.

## ۵- مدل موری- تاناکا

در این بخش خواص و ضرایب الاستیک کامپوزیت تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره از دیدگاه میکرومکانیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که زمینه همسانگرد بوده و مدول یانگ و ضریب پواسون آن به‌ترتیب $E_m$ و $\nu_m$ باشد. نانوذرات دارای خواص الاستیک عرضی هستند، درنتیجه نانوکامپوزیت مورد نظر دارای خواص الاستیک عرضی است. رابطه تنش– کرنش در مختصات محلی یک المان اولیه در این حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K+m & l & K-m & 0 & 0 & 0\\ l & n & l & 0 & 0 & 0\\ K-m & l & K+m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix},\qquad(10)$$

در رابطه (۱۰) K، l، m، n و p مدول‌های الاستیک هیل هستند که K مدول حجمی کرنش صفحه‌ای عمود بر جهت الیاف، n مدول کششی غیرمحوری در جهت طولی الیاف‌ها، l مدول وابسته به سطح مقطع، m و p به‌ترتیب مدول برشی در صفحات موازی و قائم بر جهت الیاف‌ها هستند. مدول‌های الاستیک هیل با استفاده از روش موری- تاناکا به‌صورت رابطه زیر به‌دست می‌آیند [۱۶]:

$$K=\frac{E_m\{E_m c_m+2k_r(1+\nu_m)[1+c_r(1-2\nu_m)]\}}{2(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m)+2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^{2})]},$$

$$l=\frac{E_m\{c_m\nu_m[E_m+2k_r(1+\nu_m)]+2c_r l_r(1-\nu_m^{2})]\}}{(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m)+2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^{2})]},$$

$$n=\frac{E_m^{2}c_m(1+c_r-c_m\nu_m)+2c_m c_r(k_r n_r-l_r^{2})(1+\nu_m)^{2}(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)[E_m(1+c_r-2\nu_m)+2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^{2})]}+$$

$$\frac{E_m[2c_m^{2}k_r(1-\nu_m)+c_r n_r(1+c_r-2\nu_m)-4c_m l_r\nu_m]}{E_m(1+c_r-2\nu_m)+2c_m k_r(1-\nu_m-2\nu_m^{2})},$$

$$p=\frac{E_m[E_m c_m+2p_r(1+\nu_m)(1+c_r)]}{2(1+\nu_m)[E_m(1+c_r)+2c_m p_r(1+\nu_m)]},$$

$$m=\frac{E_m[E_m c_m+2m_r(1+\nu_m)(3+c_r-4\nu_m)]}{2(1+\nu_m)\{E_m[c_m+4c_r(1-\nu_m)]+2c_m m_r(3-\nu_m-4\nu_m^2)\}},$$
(۱۱)

در رابطه (۱۱) $k_r$، $l_r$، $n_r$، $p_r$ و $m_r$ مدول الاستیسیته هیل برای فاز تقویت شده هستند. درنهایت با محاسبه پارامترهای $K$، $l$، $m$، $n$ و $p$، ماتریس سختی از رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید.

نتایج تجربی نشان می‌دهد که بیشتر نانوذرات به‌صورت نامنظم در بتن جای می‌گیرند. مشاهده شده قسمت زیادی از نانوذرات درون کامپوزیت در یک ناحیه متمرکز می‌شوند [۱۶]. فرض می‌شود این ناحیه کروی بوده و به‌اصطلاح گنجایش نامیده می‌شود. $V_r$ حجم نهایی نانوذرات است:

$$V_r=V_r^{inclusion}+V_r^m \tag{۱۲}$$

که در آن به‌ترتیب $V_r^{inclusion}$ و $V_r^m$ حجمی از نانوذرات در گنجایش و بتن هستند. از دو پارامتر زیر برای نشان دادن اثر انباشتگی در مدل میکرومکانیک استفاده می‌شوند:

$$\xi=\frac{V_{inclusion}}{V}, \tag{۱۳}$$

$$\zeta=\frac{V_r^{inclusion}}{V_r}. \tag{۱۴}$$

کسر حجمی میانگین نانوذرات در کامپوزیت ($c_r$) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_r=\frac{V_r}{V}. \tag{۱۵}$$

رابطه کسر حجمی نانوذرات در گنجایش و بتن با استفاده از روابط بالا به‌صورت زیر است:

$$\frac{V_r^{inclusion}}{V_{inclusion}}=\frac{c_r\zeta}{\xi}, \tag{۱۶}$$

$$\frac{V_r^m}{V-V_{inclusion}}=\frac{c_r(1-\zeta)}{1-\xi}. \tag{۱۷}$$

با فرض اینکه نانوذرات همسانگرد عرضی باشند و به‌طور کاملاً تصادفی در گنجایش قرار گرفته باشند، گنجایش همسانگرد فرض می‌شود و با استفاده از روش موری- تاناکا برای مواد همسانگرد، مدول حجمی $K$ و مدول برشی $G$ به‌صورت زیر هستند:

$$K=K_{out}\left[1+\frac{\xi\left(\frac{K_{in}}{K_{out}}-1\right)}{1+\alpha(1-\xi)\left(\frac{K_{in}}{K_{out}}-1\right)}\right], \tag{۱۸}$$

$$G=G_{out}\left[1+\frac{\xi\left(\frac{G_{in}}{G_{out}}-1\right)}{1+\beta(1-\xi)\left(\frac{G_{in}}{G_{out}}-1\right)}\right], \tag{۱۹}$$

که در روابط بالا $K_{in}$ و $K_{out}$ به‌ترتیب مدول حجمی گنجایش و کامپوزیت منهای گنجایش بوده و به‌همین ترتیب $G_{in}$ و $G_{out}$ به‌ترتیب مدول حجمی گنجایش و کامپوزیت منهای گنجایش هستند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$K_{in}=K_m+\frac{(\delta_r-3K_m\chi_r)C_r\zeta}{3(\xi-C_r\zeta+C_r\zeta\chi_r)}, \tag{۲۰}$$

$$K_{out}=K_m+\frac{C_r(\delta_r-3K_m\chi_r)(1-\zeta)}{3[1-\xi-C_r(1-\zeta)+C_r\chi_r(1-\zeta)]}, \tag{۲۱}$$

$$G_{in}=G_m+\frac{(\eta_r-3G_m\beta_r)C_r\zeta}{2(\xi-C_r\zeta+C_r\zeta\beta_r)}, \tag{۲۲}$$

$$G_{out}=G_m+\frac{C_r(\eta_r-3G_m\beta_r)(1-\zeta)}{2[1-\xi-C_r(1-\zeta)+C_r\beta_r(1-\zeta)]}, \tag{۲۳}$$

جایی که $\chi_r$، $\beta_r$، $\delta_r$ و $\eta_r$ عبارتند از:

$$\chi_r=\frac{3(K_m+G_m)+k_r-l_r}{3(k_r+G_m)}, \tag{۲۴}$$

$$\beta_r=\frac{1}{5}\left\{\begin{array}{l}\frac{4G_m+2k_r+l_r}{3(k_r+G_m)}+\frac{4G_m}{(p_r+G_m)}\\+\frac{2[G_m(3K_m+G_m)+G_m(3K_m+7G_m)]}{G_m(3K_m+G_m)+m_r(3K_m+7G_m)}\end{array}\right\}, \tag{۲۵}$$

$$\delta_r=\frac{1}{3}\left[n_r+2l_r+\frac{(2k_r-l_r)(3K_m+2G_m-l_r)}{k_r+G_m}\right], \tag{۲۶}$$

$$\eta_r=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}(n_r-l_r)+\frac{4G_m p_r}{(p_r+G_m)}\\+\frac{8G_m m_r(3K_m+4G_m)}{3K_m(m_r+G_m)+G_m(7m_r+G_m)}+\\\frac{2(k_r-l_r)(2G_m+l_r)}{3(k_r+G_m)}\end{array}\right]. \tag{۲۷}$$

همچنین $K_m$ ، $G_m$ مدول حجمی و برشی فاز پایه هستند که عبارتند از:

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}, \tag{۲۸}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}. \tag{۲۹}$$

به‌علاوه $\alpha$ و $\beta$ در روابط (۱۸) و (۱۹) از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha = \frac{(1+\nu_{out})}{3(1-\nu_{out})}, \tag{۳۰}$$

$$\beta = \frac{2(4-5\nu_{out})}{15(1-\nu_{out})}, \tag{۳۱}$$

$$\nu_{out} = \frac{3K_{out}-2G_{out}}{6K_{out}+2G_{out}}. \tag{۳۲}$$

با به‌دست آوردن مدول حجمی K و مدول برشی G نانوکامپوزیت با استفاده از روابط بالا، E و $\nu$ برای ماده نانوکامپوزیت همسانگرد از رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \tag{۳۳}$$

$$\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}. \tag{۳۴}$$

درنهایت با داشتن E و $\nu$، ماتریس سختی سازه محاسبه می‌شود.

## ۶- روش انرژی

در این قسمت، انرژی پتانسیل و جنبشی سازه به‌همراه کار خارجی ناشی از سیال ارائه می‌شوند:

### ۶-۱- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{x\theta}\varepsilon_{x\theta}+ \\ \sigma_{xz}\varepsilon_{xz}+\sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z}\end{pmatrix} dV \tag{۳۵}$$

با جایگذاری کرنش‌ها در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Bigg( & N_{xx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+ \\
& N_{\theta\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial \theta}\right)^2\right)+Q_\theta\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\phi_\theta\right)+ \\
& Q_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right)+N_{x\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{R\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)+ \\
& M_{xx}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+M_{\theta\theta}\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+M_{x\theta}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+ \\
& L_\theta\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_\theta+\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\right)+L_x\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)+ \\
& R_{xx}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+ \\
& R_{\theta\theta}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)+ \\
& R_{x\theta}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta}\right)\Bigg)dx d\theta
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

جایی که منتجه‌های تنش عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & M_{xx} & R_{xx} \\ N_{\theta\theta} & M_{\theta\theta} & R_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} & R_{x\theta}\end{bmatrix} = \int_{h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xx}z & \sigma_{xx}z^3 \\ \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\theta}z & \sigma_{\theta\theta}z^3 \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{x\theta}z & \sigma_{x\theta}z^3\end{bmatrix}dz, \tag{۳۷}$$

$$\begin{bmatrix} Q & R_x \\ Q_\theta & R_\theta\end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}\sigma_{xz} & \sigma_{xz}z^2 \\ \sigma_{\theta z} & \sigma_{\theta z}z^2\end{bmatrix}dz. \tag{۳۸}$$

### ۶-۲- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2}\left((\dot{u}_1)^2+(\dot{u}_2)^2+(\dot{u}_3)^2\right)dV \tag{۳۹}$$

جایی که $\rho$ دانسیته معادل لوله نانوکامپوزیتی است.

### ۶-۳- کار خارجی ناشی از سیال

اصل اساسی که از آن در مکانیک سیالات استفاده می‌شود اصل بقای جرم است. این اصل بیان می‌دارد که جرم نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود و توسط معادله پیوستگی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \tag{۴۰}$$

در رابطه فوق $\mathbf{v}\equiv(v_x, v_\theta, v_z)$ سرعت سیال در مختصات استوانه‌ای به‌ترتیب در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی هستند. مکانیک سیالات تنها با داشتن معادله پیوستگی مشخص نمی‌شود بلکه باید اصل بقای اندازه حرکت یا قانون دوم نیوتن

را درباره آن بیـان کـرد. انـدازه حرکـت حاصلضـرب جـرم در سرعت است. قانون دوم نیوتن بیان می‌کند که براینـد نیروهـایی که بر یک جسم اثر مـی‌کنـد برابـر اسـت بـا تغییـرات خـالص مومنتوم. با درنظر گرفتن سیال ویسکوز و غیرقابل تراکم معادلـه حاکم بر رفتار سیال به‌صورت زیر است کـه بـه معادلـه نـاویر- استوکس مشهور است [۱۴]:

$$\rho_f \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + f_{body}, \tag{۴۱}$$

همچنین $p$، $\mu$ و $\rho_f$ به‌ترتیب فشار، ویسکوزیته و چگـالی سـیال بوده و $f_{body}$ نیروی حجمی هسـتند. در رابطـه نـاویر-اسـتوکس عملگر مشتق کامل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{۴۲}$$

در نقطه تماس بین سیال و داخل پوسته، سرعت نسبی و شتاب در جهت جابه‌جایی شعاعی برابر می‌شود. بنابراین [۱۴]:

$$v_z = \frac{dw}{dt} \tag{۴۳}$$

با فرض حرکت طـولی سـیال، ترکیـب روابـط (۴۱) تـا (۴۳) و ضرب کردن دو طرف تساوی رابطه (۴۱) در عمق سـیال درون لوله ($h_f$)، نیروی شعاعی ناشی از سـیال محاسـبه مـی‌شـود کـه عبارت است از:

$$\begin{aligned} R_{fluid} &= h_f \frac{\partial p_z}{\partial z} = \\ &- \left( \underbrace{\rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{Kinetic}} + 2 \underbrace{v_x \rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}_{\text{Gyroscopic}} + \underbrace{v_x{}^2 \rho_f h_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{Potential}} \right) + \\ &\underbrace{\mu h_f \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial t} + v_x \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^2 \partial x} \right) \right)}_{\text{Vis cos ity}} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

درنهایت کار خارجی ناشی از نیروی سیال به‌صورت زیر است:

$$W = \int R_{fluid} W dA \tag{۴۵}$$

### ۶-۴- اصل همیلتون

حال با اعمال اصل همیلتون مطابق رابطه (۴۶):

$$\int_0^t (\delta U - \delta W - \delta T) dt = 0 \tag{۴۶}$$

و استفاده از انتگرال جـزء بـه جـزء و مرتـب کـردن روابـط در راستای جابه‌جایی‌های مکانیکی، معادله‌هـای حـاکم بـه‌صـورت درگیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u : &\frac{\partial}{\partial x} (A_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ &A_{12} \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right) + \\ &B_{11} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)) + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\ &\frac{\partial}{R \partial \theta} (A_{66} \left( \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) + \ldots + \\ &E_{66} \left( \frac{-4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \right)) = \\ &I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{4 I_3}{h^2} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \end{aligned} \tag{۴۷}$$

$$\begin{aligned} \delta v : &\frac{\partial}{\partial x} (A_{66} \left( \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) + \\ &B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) + \\ &E_{66} \left( \frac{-4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{R \partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \right)) + \\ &\frac{\partial}{R \partial \theta} (A_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ &A_{22} \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right) + B_{12} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \\ &B_{22} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \right) + E_{12} \left( \frac{-4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \\ &E_{22} \left( \frac{-4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \right)) = \\ &I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} - \frac{4 I_3}{h^2} \frac{\partial^3 w}{R \partial t^2 \partial \theta} \end{aligned} \tag{۴۸}$$

$$\begin{aligned} \delta w : &\frac{\partial}{\partial x} (A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + D_{44} \left( \frac{-4}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)) + \\ &\frac{\partial}{R \partial \theta} (A_{55} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \psi_\theta \right) + D_{55} \left( \frac{-4}{h^2} \left( \psi_\theta + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right)) - \\ &\frac{4}{h^2} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (D_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + F_{44} \left( \frac{-4}{h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)) \\ + \frac{\partial}{R \partial \theta} (D_{55} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \phi_\theta \right) + F_{55} \left( \frac{-4}{h^2} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right)) \end{array} \right) + \end{aligned}$$

$$
\frac{4}{3h^2}\left[\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigg(E_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+\\
&E_{12}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+F_{11}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+\\
&F_{12}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{11}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)+\\
&2\frac{\partial^2}{R\partial x\partial\theta}\Bigg(E_{66}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)+\\
&F_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+\\
&H_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta}\right)\right)\Bigg)\\
&+\frac{\partial^2}{R^2\partial\theta^2}\Bigg(E_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+\\
&E_{22}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+F_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+\\
&F_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+\\
&H_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)
\end{aligned}\right]-
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R}\Bigg(A_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+A_{22}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+\\
&B_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+E_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+\\
&E_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)-\\
&\left(\rho_f h_f\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v_x\rho_f h_f\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v_x^2\rho_f h_f\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\\
&\mu h_f\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 w}{R^2\partial\theta^2\partial t}+v_x\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{R^2\partial\theta^2\partial x}\right)\right)=\\
&I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2 I_6\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{R^2\partial\theta^2\partial t^2}\right)+\\
&\frac{4}{3h^2}\left(I_3\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+I_3\frac{\partial^3 v}{R\partial t^2\partial\theta}+J_4\left(\frac{\partial^3\phi_x}{\partial t^2\partial x}+\frac{\partial^3\phi_\theta}{R\partial t^2\partial\theta}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(۴۹)

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_x :\ &\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(B_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+D_{11}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+\\
&B_{12}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+D_{12}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+\\
&F_{11}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+F_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)+\\
&\frac{\partial}{R\partial\theta}\Bigg(B_{66}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)+D_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+\\
&F_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta}\right)\right)\Bigg)-\\
&\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial R_{x\theta}}{R\partial\theta}\right)-Q_x+\frac{4}{h^2}L_x=\\
&J_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+K_2\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}-\frac{4}{3h^2}J_4\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}
\end{aligned}
$$

(۵۰)

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_\theta :\ &\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\Big(B_{66}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)+\\
&D_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)+F_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta}\right)\right)\Big)\Bigg)+\\
&\frac{\partial}{R\partial\theta}\Bigg(B_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+B_{22}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+\\
&D_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)+D_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+F_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+\\
&F_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)-
\end{aligned}
$$

$$
\frac{4}{3h^2}\left[\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(E_{66}\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)+F_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}\right)\\
&+H_{66}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_x}{R\partial\theta}+2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial\theta}\right)\right)\Bigg)\\
&+\frac{\partial}{R\partial\theta}\Bigg(E_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+\\
&E_{22}\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right)+F_{12}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right)\\
&+F_{22}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}\right)+H_{12}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)\\
&+H_{22}\left(\frac{-4}{3h^2}\left(\frac{\partial\phi_\theta}{R\partial\theta}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)\right)\Bigg)
\end{aligned}\right]-
$$

$$
\left(A_{55}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\phi_\theta\right)+D_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_\theta+\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\right)\right)+
$$

$$\frac{4}{h^2}\left(D_{55}\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\phi_\theta\right)+F_{55}\left(\frac{-4}{h^2}\left(\phi_\theta+\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)\right)\right)=$$
$$J_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+K_2\frac{\partial^2\phi_\theta}{\partial t^2}-\frac{4}{3h^2}J_4\frac{\partial^3 w}{R\partial t^2\partial\theta}$$
(۵۱)

جایی که

$$I_i=\int_{-h/2}^{h/2}\rho z^i dz \qquad (i=0,1,\dots,6), \qquad (۵۲)$$

$$J_i=I_i-\frac{4}{3h^2}I_{i+2} \qquad (i=1,4), \qquad (۵۳)$$

$$K_2=I_2-\frac{8}{3h^2}I_4+\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2 I_6 \qquad (۵۴)$$

معادلات فوق برای سه شرط مرزی زیر تحلیل خواهند شد:

**ساده- ساده**

$$x=0,a \Rightarrow u=v=w=\phi_x=M_x=0, \qquad (۵۵)$$

**گیردار- ساده**

$$\begin{aligned} &x=0 \Rightarrow u=v=w=\phi_x=\phi_\theta=0,\\ &x=a \Rightarrow u=v=w=\phi_x=M_x=0, \end{aligned} \qquad (۵۶)$$

**گیردار- گیردار**

$$x=0,a \Rightarrow u=v=w=\phi_x=\phi_\theta=0. \qquad (۵۷)$$

## ۷- معرفی روش تفاضلات مربعی

روش تفاضلات مربعی از جمله روش‌های عددی است که در آن با استفاده از ضرایب وزنی معادلات دیفرانسیلی حاکم، به دسته‌ای از معادلات جبری مرتبه اول تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق به‌صورت یک مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه و در جهت محورهای مختصات بیان خواهند شد. رابطه اصلی این روش به‌شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^n f_x(x_i,\theta_j)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{N_x}A_{ik}^{(n)}f(x_k,\theta_j) \qquad (۵۸)$$

$$\frac{d^m f_y(x_i,\theta_j)}{d\theta^m}=\sum_{l=1}^{N_\theta}B_{jl}^{(m)}f(x_i,\theta_l) \qquad (۵۹)$$

$$\frac{d^{n+m} f_{xy}(x_i,\theta_j)}{dx^n d\theta^m}=\sum_{k=1}^{N_x}\sum_{l=1}^{N_\theta}A_{ik}^{(n)}B_{jl}^{(m)}f(x_k,\theta_l) \qquad (۶۰)$$

بنابراین مشاهده می‌شود که دو عامل بسیار مهم و تعیین‌کننده در دقت روش تفاضلات مربعی، انتخاب نقاط نمونه و ضرایب وزنی هستند که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد.

ریشه‌های چندجمله‌های متعامد در این مورد خوب عمل می‌کند. مثلاً ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف در حل مسائل مهندسی زیاد استفاده می‌شود و نتایج خوبی به بار می‌آورد. این فاصله‌گذار به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_i=\frac{a}{2}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N_x-1}\right)\pi\right] \qquad i=1,\dots,N_x, \qquad (۶۱)$$

$$\theta_i=\frac{2\pi}{2}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N_\theta-1}\right)\pi\right] \qquad i=1,\dots,N_\theta. \qquad (۶۲)$$

ضرایب وزنی برای حالت دو بعدی به‌شکل زیر تعمیم می‌یابند:

الف) برای مشتق مرتبه اول:

$$A_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{M(x_i)}{(x_i-x_j)M(x_j)} & \text{for} \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,\dots,N_x\\ -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N_x}A_{ij}^{(1)} & \text{for} \quad i=j, \quad i,j=1,2,\dots,N_x\end{cases}$$
(۶۳)

$$B_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{P(\theta_i)}{(\theta_i-\theta_j)P(\theta_j)} & \text{for} \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,\dots,N_\theta\\ -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N_\theta}B_{ij}^{(1)} & \text{for} \quad i=j, \quad i,j=1,2,\dots,N_\theta\end{cases}$$
(۶۴)

که در روابط فوق:

$$M(x_i)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_x}(x_i-x_j), \qquad (۶۵)$$

$$P(\theta_i)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_\theta}(\theta_i-\theta_j). \qquad (۶۶)$$

ب) برای مشتق بالاتر:

$$A_{ij}^{(n)}=n\left(A_{ii}^{(n-1)}A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{(n-1)}}{(x_i-x_j)}\right) \qquad (۶۷)$$

$$B_{ij}^{(m)} = m\left(B_{ii}^{(m-1)}B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(m-1)}}{(\theta_i - \theta_j)}\right). \quad (۶۸)$$

بنابراین معادلات حاکم و شرط مرزی در فرم ماتریسی با حذف جملات غیرخطی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left([K]\begin{Bmatrix}\{d_b\}\\ \{d_d\}\end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix}\{\dot d_b\}\\ \{\dot d_d\}\end{Bmatrix} + [M]\begin{Bmatrix}\{\ddot d_b\}\\ \{\ddot d_d\}\end{Bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \quad (۶۹)$$

در رابطه فوق $[K]$ ، $[C]$ و $[M]$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس سختی، ماتریس میرایی و ماتریس جرم هستند. همچنین $\{d_b\}$ و $\{d_d\}$ به‌ترتیب بردار دامنه دینامیکی مربوط به نقاط شرط مرزی و میدان هستند. حال با استفاده از رابطه زیر:

$$d(x,\theta,t) = d_0(x,\theta)e^{\omega t}, \quad (۷۰)$$

معادله (۶۹) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left[[K]+[C]\omega+[M]\omega^2\right][d] = [0], \quad (۷۱)$$

جایی که $[d]=[u\ v\ w\ \phi_x\ \phi_\theta]^T$ و $\omega$ به‌ترتیب دامنه و فرکانس سازه هستند. معادله فوق فرم کلی یک مسئله مقدارویژه را دارد. برای حل باید به حالت استاندارد یک مسئله مقدارویژه تبدیل شود. برای این منظور با تعریف تغییر متغیر $\bar{Y} = \omega d$ ، معادله (۷۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[A]\{Z\} = \Omega\{Z\}, \quad (۷۲)$$

که در آن:

$$[A] = \begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -\left[M_{eq}^{-1}K_{eq}\right] & -\left[M_{eq}^{-1}C_{eq}\right]\end{bmatrix}, \quad (۷۳)$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix}\{(d)_b\}\\ \{(d)_d\}\\ \{(d')_b\}\\ \{(d')_b\}\end{Bmatrix} \quad (۷۴)$$

در روابط فوق، $[I]$ بیانگر ماتریس یکه و $\{d'\}$ معرف مشتق بردارهای جابه‌جایی یا دامنه ارتعاشی هستند.

## ۸- نتایج و نمودارها

در این قسمت به بررسی نتایج عددی پایداری و ارتعاشات لوله‌های بتنی تقویت شده با نانوذرات سیلیس پرداخته می‌شود.

بدین منظور یک لوله با طول $a = 1\ m$ و شعاع $h = 15\ cm$ ، مدول الاستیک $E_m = 20\ GPa$ و ضریب پواسون $\nu_m = 0/3$ درنظر گرفته شده که با نانوذرات سیلیس با مدول الاستیک $E_r = 66\ GPa$ و ضریب پواسون $\nu_r = 0/2$ تقویت شده است. لازم به‌ذکر است که فرکانس‌های محاسبه شده در این قسمت خطی هستند.

### ۸-۱- صحت‌سنجی

به‌منظور اعتبارسنجی، با صرف‌نظر کردن از ترم‌های سیال، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای لوله نانوکامپوزیتی با شرایط $T = 400\ K$ ، $h/R = 0/02$ و $V_{CNT} = 0/17$ محاسبه شده و برحسب دامنه بی‌بعد در شکل (۲) برای نسبت‌های مختلف $L^2/Rh$ ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می شود نتایج کار حاضر با نتایج شن و ژیانگ [۱۷] مقایسه شده که نشان از تطابق کار حاضر با مقاله اشاره شده دارد.

لازم به‌ذکر است که برای حل مسئله غیرخطی از رابطه زیر استفاده شده است:

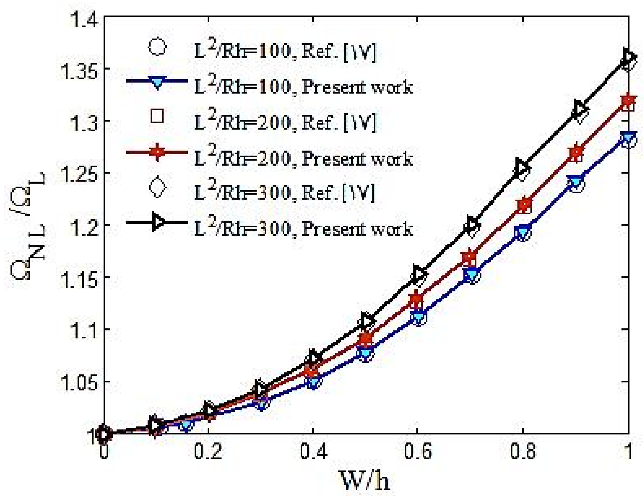
$$\left[[K_L + K_{NL}]+[C]\omega+[M]\omega^2\right][d] = [0] \quad (۷۵)$$

جایی که $[K_L]$ و $[K_{NL}]$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس سختی خطی و غیرخطی هستند. برای محاسبه فرکانس غیر خطی از رابطه بالا، از روش تکرار به‌ترتیب زیر استفاده شده است:

- از ترم‌های غیرخطی در ماتریس سختی صرف‌نظر شده و بردار ویژه ( بردار جابه‌جایی $[d]$) و مقدار ویژه ( $\Omega_L$) در حالت خطی محاسبه می‌شود.
- بردار جابه‌جایی مرحله قبل در ترم‌های غیرخطی ماتریس سختی جایگذاری می‌شود و دوباره بردار ویژه و مقدار ویژه ( $\Omega_{NL}$) مربوط به‌حالت غیرخطی محاسبه می‌شود.
- این فرایند تا جایی ادامه پیدا می‌کند تا نسبت همگرایی زیر ارضا شود:

$$\frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{\alpha_{i-1}} < 0/01\% \quad (۷۶)$$

لازم به‌ذکر است که منظور از $\alpha$ همان فرکانس سیستم است.




**شکل ۲- نسبت فرکانس برحسب دامنه بی‌بعد برای $L^۲/Rh$ های مختلف**

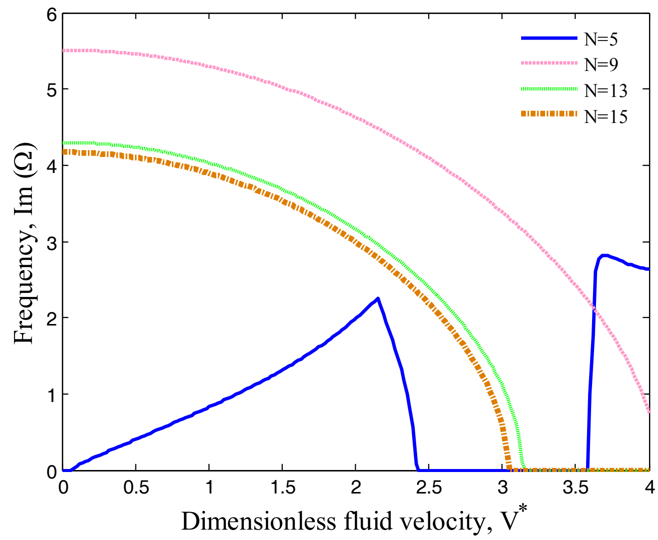
### ۸-۲- بررسی همگرایی روش عددی

همگرایی و صحت روش مربعات دیفرانسیلی در تخمین قسمت موهومی و حقیقی فرکانس بی‌بعد $(\Omega = \omega L^۲\sqrt{\rho / C_{۱۱}})$ برحسب سرعت سیال بی‌بعد $(V = \sqrt{\rho_f / C_{۱۱}}\, v_x)$ در شکل‌های (۳) و (۴) ارائه شده است. در این شکل‌ها نتایج برای مقادیر مختلف نقاط شبکه ارائه شده است. نقاط شبکه بر اساس فاصله‌گذار چبیشف (روابط (۶۱) و (۶۲)) در راستای طولی و محیطی درنظر گرفته شده است. بر اساس این فاصله‌گذار، نقاط در ابتدا و انتهای لوله (یا به‌عبارتی مکان‌های مرزی سازه) به یکدیگر نزدیک‌تر بوده تا شرایط مرزی به‌خوبی اعمال شوند. مشاهده می‌شود که به‌غیر از نقطه شبکه ۵ که نتایج غیرواقعی ارائه می‌دهد، با افزایش تعداد نقاط شبکه، فرکانس سازه کاهش می‌یابد. نرخ کاهش فرکانس در نقاط شبکه بالا کمتر شده تا جایی که در تعداد نقطه ۱۵، نتایج تغییر نمی‌کند. به‌عبارتی نتایج در ۱۵ نقطه شبکه همگرا می‌شوند. بنابراین در این پژوهش، برای دست‌یابی به نتایج با دقت بالا، ۱۵ نقطه شبکه درنظر گرفته شده است.

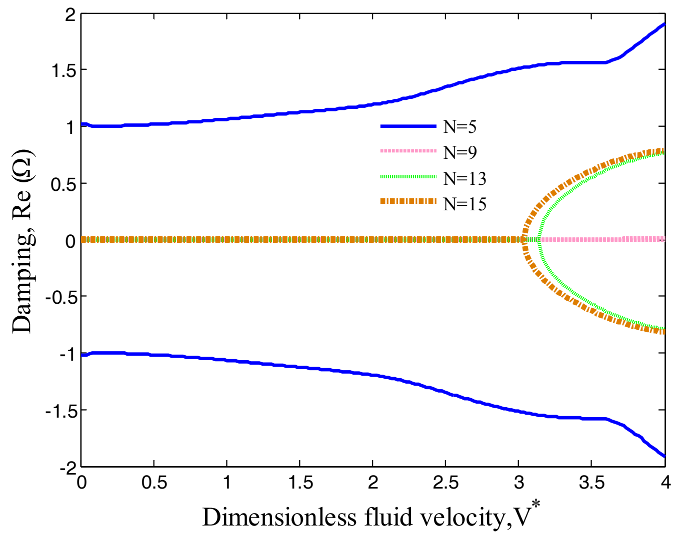
### ۸-۳- بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر ارتعاش سیستم

شکل‌های (۵) و (۶) به‌ترتیب تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر فرکانس بی‌بعد ( قسمت موهومی پاسخ) و میرایی (قسمت حقیقی پاسخ) لوله در برابر سرعت سیال بی‌بعد را نشان می‌دهند. همان‌طور که در این دو شکل نشان داده می‌شود فرکانس با افزایش سرعت سیال کاهش می‌یابد درحالی که مقدار میرایی در این محدوده برابر صفر است. در این محدوده سیستم پایدار است. با افزایش سرعت، درنهایت در یک سرعت مشخص هنگامی که فرکانس (قسمت موهومی) به‌مقدار صفر می‌رسد، سیستم به‌علت دو شاخگی و داشتن جواب حقیقی مثبت پایداری خود را از دست می‌دهد. سرعتی که سازه پایداری خود را از دست می‌دهد، سرعت بحرانی سیال نامیده می‌شود. در این قسمت مقادیر ویژه فرکانس دارای قسمت حقیقی مثبت هستند که سیستم ناپایدار می‌شود. لازم به‌ذکر است که انشعاب ایجاد شده در نمودار قسمت حقیقی فرکانس از نوع دوشاخگی فوق بحرانی[۱] است چرا که عدد ماخ بیشتر از یک است. با توجه به‌شکل مشخص است که هرچه درصد حجمی نانوذرات بیشتر می‌شود، فرکانس و سرعت بحرانی سیال افزایش می‌یابد به‌علت آنکه سختی سازه بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر، با افزودن هفت درصد نانوذرات سیلیس به لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب حدود ۶۳ و ۱۲۶ درصد افزایش می‌یابند. بنابراین، با افزایش درصد حجمی نانوذرات، لوله در سرعت سیال بالاتری ناپایدار خواهد شد. نتایج این نمودار اهمیت استفاده از نانوذرات در پروسه ساخت

[ DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.1.4 ]
[ DOI: 10.47176/jcme.38.2.6191 ]



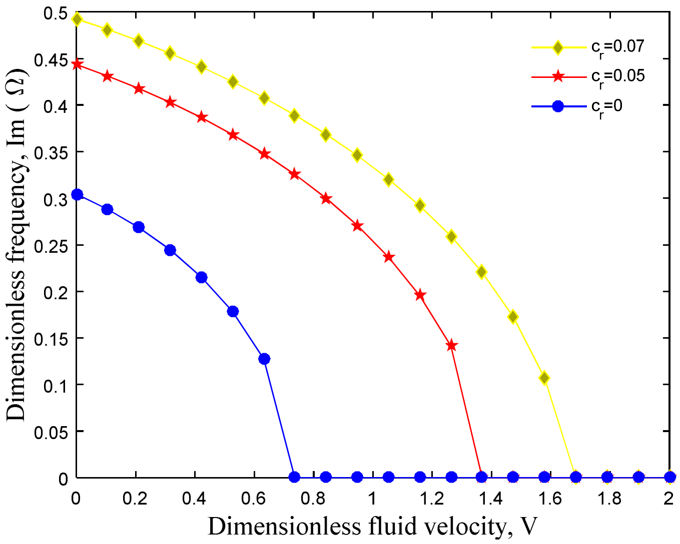

**شکل ۳- همگرایی روش عددی بر قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**



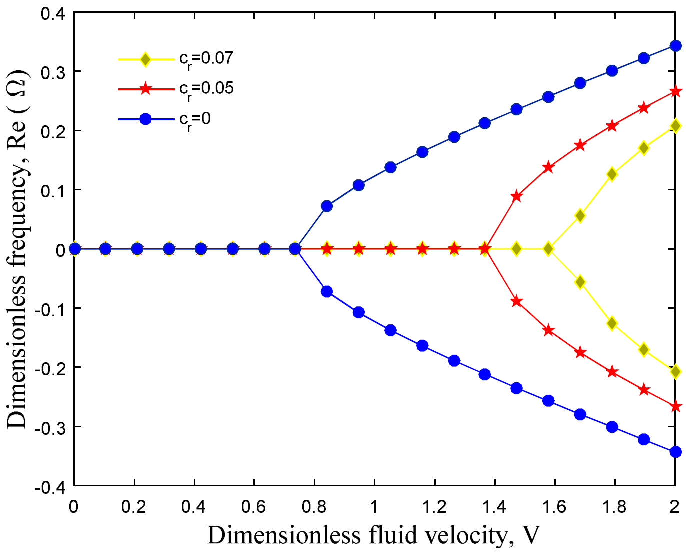

**شکل ۴- همگرایی روش عددی بر قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

لوله‌های بتنی را نشان می‌دهد که استفاده از آنها می‌تواند خواص مکانیکی سازه را بهبود ببخشد.

شکل‌های (۷) و (۸) تأثیر انباشتگی نانوذرات در یک منطقه خاص را روی قسمت موهومی و حقیقی فرکانس سازه بر حسب سرعت سیال بی‌بعد نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود درنظر گرفتن انباشتگی ($\xi<1$) منجر به کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود. دلیل این امر آن است که انباشتگی نانوذرات منجر به توزیع غیریکنواخت آنها در لوله شده و مقاومت در برابر شکل‌پذیری سازه کمتر می‌شود. بنابراین انباشتگی نانوذرات، سختی سازه را کاهش می‌دهد. به‌عبارت دیگر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال درحالتی که نانوذرات به‌صورت یکنواخت در لوله توزیع شده‌اند ($\xi=1$) به‌ترتیب ۱/۰۱۴ و ۱/۹۱۲ است درحالی که این مقادیر برای $\xi=0/5$ (وجود انباشتگی) به‌ترتیب ۰/۷۳۱۴ و ۱/۰۵۲۱ هستند.



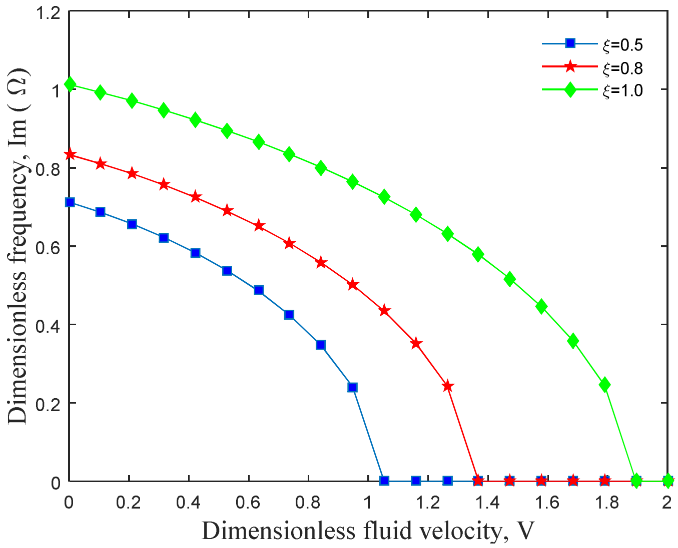

**شکل ۵- تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**



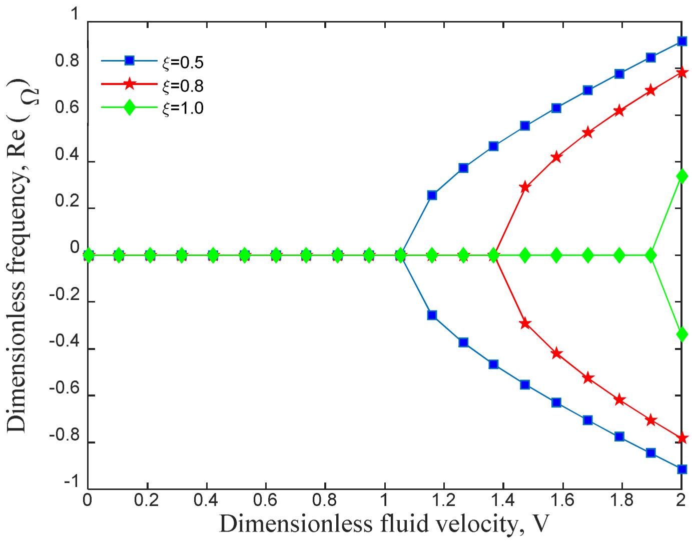

**شکل ۶- تأثیر درصد حجمی نانوذرات بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

با توجه به ارقام ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که وجود انباشتگی، فرکانس و سرعت بحرانی را به‌ترتیب ۳۹ و ۸۱ درصد کاهش می‌دهد. درنتیجه برای تقویت لوله با نانوذرات، هرچه انباشتگی در نقاط مختلف کمتر باشد، فرکانس و سرعت بحرانی سازه نیز افزایش خواهد یافت.

فرکانس و میرایی بی‌بعد سازه در مقابل سرعت سیال بدون بعد برای لوله با طول‌های مختلف در شکل‌های (۹) و (۱۰) نشان داده شده است. همان‌طور که استنباط می‌شود با افزایش طول لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال در لوله کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال، فرکانس و سرعت بحرانی سیال برای لوله با طول ۰/۶ متر به‌ترتیب ۱/۵۹۱ و ۱/۹۹۹ است و برای لوله با طول ۱/۵ متر این مقادیر به‌ترتیب به ۰/۹۵۶۷ و ۱/۶۹۸ می‌رسند. به‌عبارت دیگر، با افزایش طول از ۰/۶ متر به ۱/۵ متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب ۶۶ و ۱۸ درصد




**شکل ۷- تأثیر انباشتگی نانوذرات بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

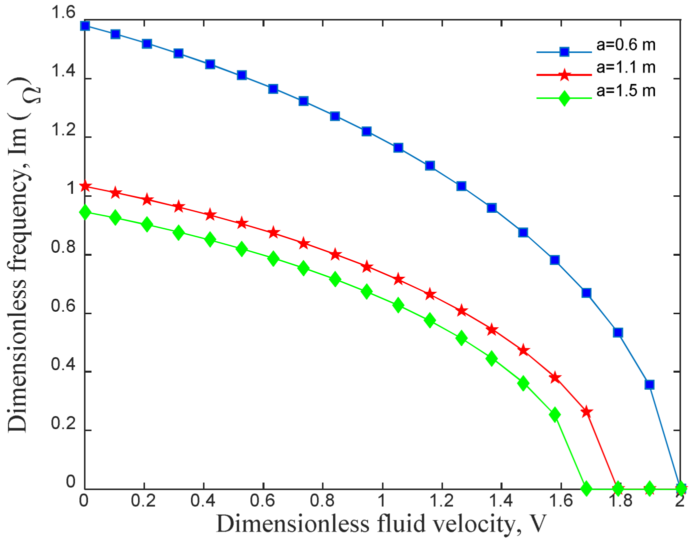



**شکل ۸- تأثیر انباشتگی نانوذرات بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

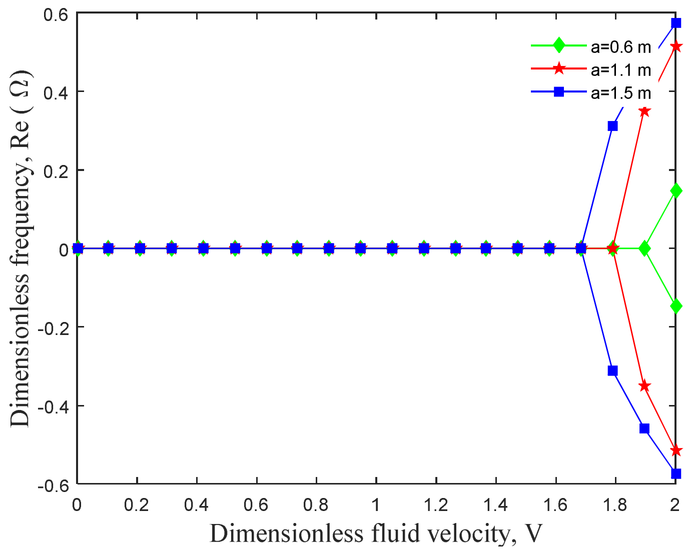
کاهش می‌یابند. دلیل کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال با افزایش طول لوله، کاهش سختی و مقاومت در برابر شکل پذیری سازه است.

شکل‌های (۱۱) و (۱۲) به‌ترتیب فرکانس و میرایی بی‌بعد سازه را در برابر سرعت سیال بی‌بعد برای شعاع‌های مختلف لوله بتنی نشان می‌دهند. مشخص است که افزایش شعاع منجر به کاهش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود که این به‌دلیل کاهش سختی سازه است. به‌عنوان نمونه، فرکانس و سرعت بحرانی سیال برای لوله‌ای با شعاع ۲۰ سانتی‌متر به‌ترتیب ۱/۰۱۰۳ و ۱/۸۵۵ است درحالی که این مقادیر برای لوله با شعاع ۴۰ سانتی‌متر به‌ترتیب ۰/۹۱۳۴ و ۱/۶۲۳ هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با دو برابر کردن شعاع لوله از ۲۰ به ۴۰ سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب ۱۰ و ۱۲ درصد کاهش دارند.

[ DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.1.4 ]
[ DOI: 10.47176/jcme.38.2.6191 ]




**شکل ۹- تأثیر طول لوله بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

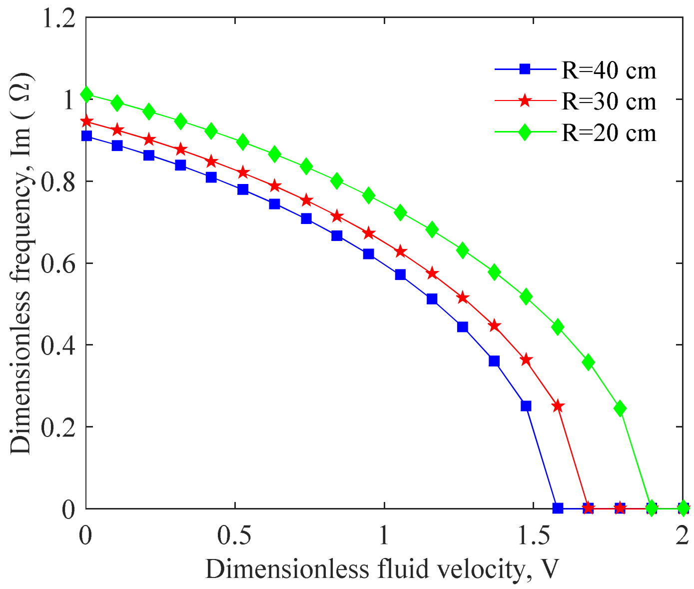



**شکل ۱۰- تأثیر طول لوله بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

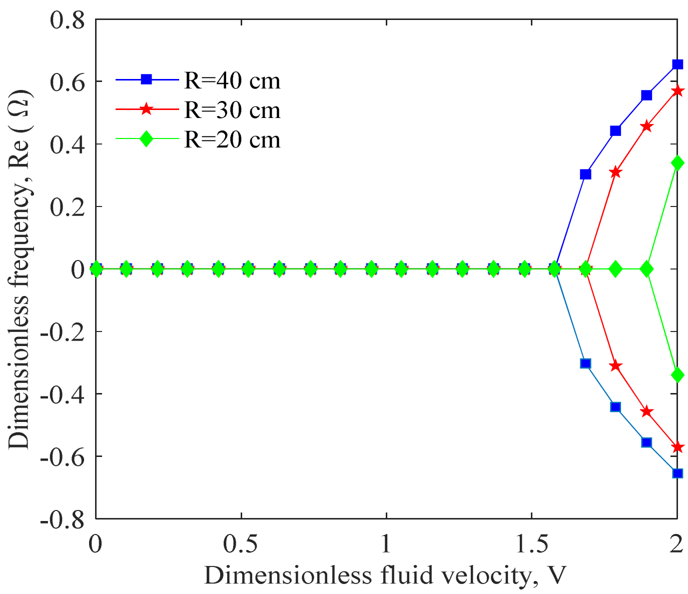
شکل‌های (۱۳) و (۱۴) اثر ضخامت لوله را بـه‌ترتیـب روی فرکانس و میرایی بی‌بعد سازه در برابـر سـرعت سـیال بـی‌بعـد نشان می‌دهند. مشاهده مـی‌شـود کـه افـزایش ضـخامت باعـث افزایش فرکانس و سرعت بحرانی سیال می‌شود. به‌عبارتی دیگر با ۳/۵ برابر کردن ضخامت لوله از ۱۰ به ۳۵ سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال بـه‌ترتیـب حـدود ۳ و ۲ برابـر افـزایش دارنـد. دلیـل ایـن امـر افـزایش سـختی و مقاومـت در برابـر شکل‌پذیری سازه با افزایش ضخامت است.

## ۹- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات و ناپایـداری لولـه‌هـای بتنـی حـاوی جریان سیال تقویت شده با نانوذرات سیلیس تحلیل شد. لوله با مدل پوسته استوانه‌ای ردی مدل‌سازی شده است. خواص معادل لوله با استفاده از قانون موری- تاناکا با درنظر گـرفتن خاصـیت




**شکل ۱۱- تأثیر شعاع لوله بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

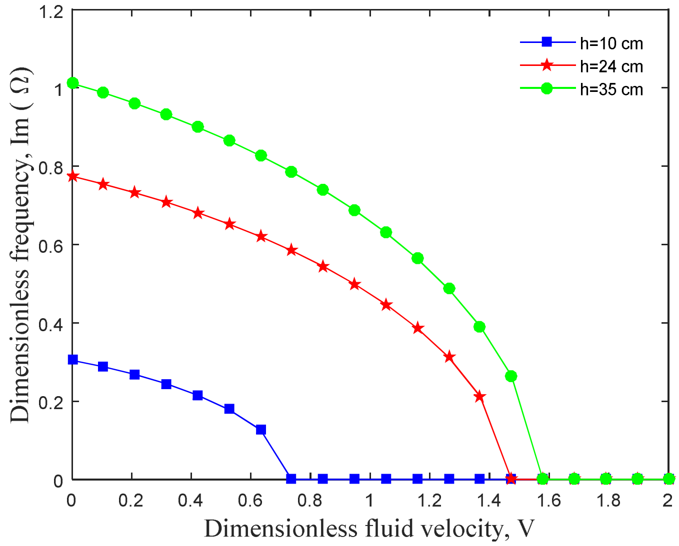



**شکل ۱۲- تأثیر شعاع لوله بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

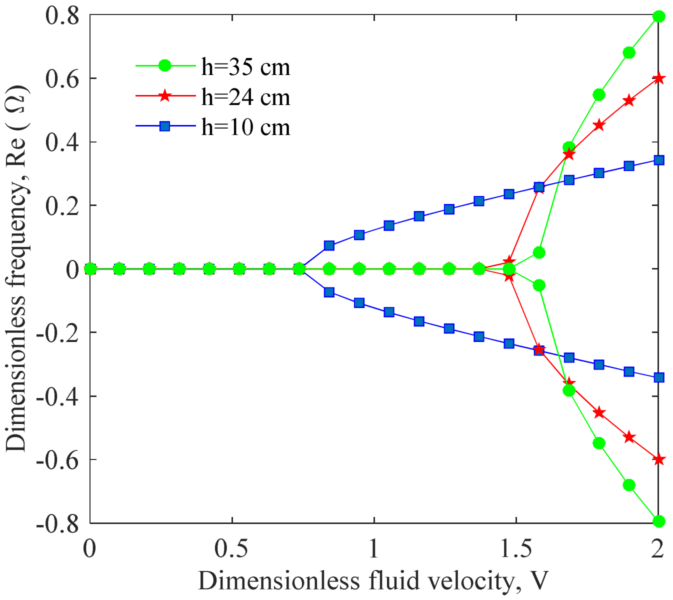
انباشتگی نانوذرات محاسبه شد و برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر سیستم، از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده شد. با به‌کارگیری روش عددی تفاضلات مربعی، به حل معادلات حاکم پرداخته و فرکانس و سرعت بحرانی سیال محاسبه شد. اثر پارامترهای مختلف از جمله درصد حجمی نانوذرات، انباشتگی نانوذرات، پارامترهای هندسی و سرعت سیال عبوری روی ارتعاشات و ناپایداری سازه بررسی شد. از مهم‌ترین نتایج این تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

– با ۱۵ نقطه شبکه نتایج همگرا می‌شوند.

– با افزایش سرعت، درنهایت در یک سرعت مشخص هنگامی‌که فرکانس (قسمت موهومی) به‌مقدار صفر می‌رسد، سیستم به‌علت دو شاخگی و داشتن جواب حقیقی مثبت




**شکل ۱۳- تأثیر ضخامت لوله بر فرکانس بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**




**شکل ۱۴- تأثیر ضخامت لوله بر میرایی بی‌بعد در مقابل سرعت سیال بی‌بعد**

پایداری خود را از دست می‌دهد.

- هرچه درصد حجمی نانوذرات سیلیس بیشتر می‌شود، فرکانس و سرعت بحرانی سیال افزایش می‌یابد. به‌عنوان نمونه، با افزودن هفت درصد نانوذرات سیلیس به لوله، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب حدود ۶۳ و ۱۲۶ درصد افزایش می‌یابند.

- درنظر گرفتن انباشتگی (ξ<۱) باعث کاهش سختی سازه شده و فرکانس و سرعت بحرانی سیال کاهش می‌یابد. به‌عبارتی، وجود انباشتگی نانوذرات فرکانس و سرعت بحرانی را به‌ترتیب ۳۹ و ۸۱ درصد کاهش می‌دهد.

- با افزایش طول از ۰/۶ متر به ۱/۵ متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب ۶۶ و ۱۸ درصد کاهش می‌یابند.




[ DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.1.4 ]
[ DOI: 10.47176/jcme.38.2.6191 ]

– با دو برابر کردن شعاع لوله از ۲۰ به ۴۰ سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب ۱۰ و ۱۲ درصد کاهش دارند.
با ۳/۵ برابر کردن ضخامت لوله از ۱۰ به ۳۵ سانتی‌متر، فرکانس و سرعت بحرانی سیال به‌ترتیب حدود ۳ و ۲ برابر افزایش دارند.

## واژه‌نامه

1. Pitchfork-supercritical

## مراجع


1. Gupta., S., “Thermal Buckling of Orthotropic Cylindrical Shells”, *Fibre Science and Technology*, Vol. 6, pp. 139-145, 1973.
2. Dinga, H., Wu, J., and Xu, B., “Theoretical Analyses of Thermal Post-Buckling Problems of Liner Shells”, *Nuclear Engineering Design*, Vol. 180, pp. 243-250, 1998.
3. Reddy, T. Y., and Srinath, H., “Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density”, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 16, pp. 85-89, 1974.
4. Basset, A. B., “On the Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical Thin Elastic Shells”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 181, pp. 433-480, 1990.
5. Obata, Y., and Noda, N., “Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material”, *Journal of Thermal Stress*, Vol. 17, No. 3, pp. 471-487, 1994.
6. Horgan, C. O., and Chan, A. M., “The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linear Elastic Materials”, *Journal of Elasticity*, Vol. 55, No. 1, pp. 43-59, 1999.
7. Salzar, R. S., “Functionally Graded Metal Matrix Composite Tubes”, *Composite Engineering*, Vol. 5, No. 7, pp. 891-900, 1995.
8. Patel, B. P., Shukla, K. K., and Nath, Y., “Thermal Buckling of Laminated Cross-ply Oval Cylindrical Shells”, *Composite Structures*, Vol. 65, pp. 217-229, 2004.
9. Shen, H. Sh., “Torsional Buckling and Postbuckling of FGM Cylindrical Shells in Thermal Environments”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44: pp. 644-657, 2009.
10. Reddy, J. N., and Liu, C. F., “Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells”, *International Journal of Engineering Sscience*, Vol. 23, pp. 319-330, 1985.
11. Duc, N., and Toan Than, P., “Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 40, pp. 115-127, 2015.
12. Sun, J., Xu, X., Lim, C. W., and Qiao, W., “Accurate Buckling Analysis for Shear Deformable FGM Cylindrical Shells under Axial Compression and Thermal Loads”, *Composite Structures*, Vol. 123, pp. 246-256, 2015.
13. Amabili, M., “A Comparison of Shell Theories for Large-Amplitude Vibrations of Circular Cylindrical Shells: Lagrangian Approach”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 1091-1125, 2003.
14. Wang, L., and Ni, Q., “A Reappraisal of the Computational Modelling of Carbon Nanotubes Conveying Viscous Fluid”, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 833-837, 2009.
15. Dai, H. L., Wang, L., Qian, Q., and Ni, Q., “Vortex-Induced Vibrations of Pipes Conveying Pulsating Fluid”, *Ocean Engineering*, Vol. 77, pp. 12-22, 2014.
16. Shi, D. L., and Feng, X. Q., “The Effect of Nanotube Waviness and Agglomeration on the Elastic Property of Carbon Nanotube-Reinforced Composties”, *Journal of Engineering Materials and Technology ASME*, Vol. 126, pp. 250-270, 2004.
17. Shen, H., and Xiang, Y., “Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments”, *Computational. Methods in Applied. Mechanics and. Engenering*, Vol. 213, pp. 196-211, 2011.



[ DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.1.4 ]
[ DOI: 10.47176/jcme.38.2.6191 ]