نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

المان‌های جدید DKFT برای تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک

سیدعلی قاضی میرسعید* و وحیدرضا کلات جاری

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۳/۲۸ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۸/۲۷)

چکیده– در این مقاله، به‌منظور تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک المان‌های جدیدی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه تحت عنوان المان ورق کیرشهف فوریه (DKFT) پیشنهاد شده است. به‌منظور ساختن المان‌های ورق DKFT میدان توابع چندجمله‌ای در یک المان مثلثی مرتبه دوم شش‌گرهی با میدان توابع پایه شعاعی مختلط فوریه غنی‌سازی شده است. برای بررسی صحت و دقت روش پیشنهادی و کارامدی المان‌های پیشنهادی، تحلیل اجزای محدود ورق‌های چهارضلعی و بیضوی نازک ویسکوالاستیک با استفاده از این المان‌ها صورت گرفته است و نتایج آن با حل تحلیلی و نتایج حاصل از المان‌های کیرشهف (DKT) و حل با کَمک نرم‌افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که المان‌های DKFT در مقایسه با المان‌های کلاسیک ورق و المان‌های DKT بسیار کارامدتر و توانمندتر هستند، چرا که نسبت به آنها از دقت بالایی برخوردارند و هزینه محاسباتی را نیز به‌میزان قابل توجهی کاهش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود، خمش ورق‌های نازک، ویسکوالاستیسیته، المان ورق DKFT، توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، توابع شکل مختلط فوریه.

New DKFT Elements for the Finite Element Analysis of Thin Viscoelastic Plates

S. A. Ghazi Mirsaeed* and V. Kalatjari

Civil Engineering Department, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Abstract: ***In this paper, finite element analysis of thin viscoelastic plates is performed by proposing new plate elements using complex Fourier shape functions. New discrete Kirchhoff Fourier Theory (DKFT) plate elements are constructed by the enrichment of quadratic function fields in a six-noded triangular plate element with complex Fourier radial basis functions. In order to illustrate the validity and accuracy of the presented approach and robustness of the proposed elements in viscoelasticity, finite element analysis of square and elliptical viscoelastic thin plates is performed and the results are compared to those of analytical solutions and with those obtained by discrete Kirchhoff Theory (DKT) elements and the commercial software ABAQUS. The results show that FE solutions using DKFT elements have an excellent agreement with***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: alighazi@shahroodut.ac.ir

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

the analytical solutions and ABAQUS solutions, even though noticeably fewer elements, in comparison to DKT and classic plate elements, are employed, which means that the computational costs are reduced effectively.

Keywords: *Finite element method, Bending of thin plates, Viscoelasticity, DKFT plate element, Complex Fourier radial basis functions, Complex Fourier shape functions.*

فهرست علائم

A	مساحت صفحه میانی ورق	$\mathbf{R}(r)$	بردار توابع پایه شعاعی
$\mathbf{a}$	بردار ضرایب مجهول توابع پایه شعاعی	$\mathbf{R}_{۰}$	ماتریس تناوب
$\mathbf{B}$	ماتریس تبدیل انحنا- جابه‌جایی	R_{ε}	نرخ تغییرات کرنش در یک گام زمانی
$\mathbf{b}$	بردار ضرایب میدان توابع چندجمله‌ای	R_{κ}	نرخ تغییرات انحنا در یک گام زمانی
C_q	ثابت فنر در المان qام ماکسول	r	نُرم اقلیدسی
C_{ijkl}	تانسور مرتبه چهار مدول استراحت	w, v, u	جابه‌جایی در راستای z, y, x
$\mathbf{d}$	بردار درجات آزادی گرهی	$\boldsymbol{\alpha}$	پارامتر شکل
$\mathbf{F}$	بردار نیروی کلی	β_y, β_x	زاویه بین نرمال صفحه قبل و بعد از خمش
$\mathbf{f}_{۱}^{e}$	بردار نیروی المان ناشی از نیروی حجمی	$\Gamma_{۲}$	مرز سازه تحت بردار تنش سطحی
$\mathbf{f}_{۲}^{e}$	بردار نیروی المان ناشی از بردار تنش سطحی	$\Delta\mathbf{d}$	بردار تغییرات جابه‌جایی گرهی در یک المان
$\mathbf{f}_{۳}^{e}$	بردار نیروی المان ناشی از لنگر در ابتدای بازه زمانی	Δt	گام زمانی
$\mathbf{f}_{۴}^{e}$	بردار نیروی المان ناشی از تغییرات لنگر در طول بازه زمانی	$\Delta\mathbf{U}$	بردار تغییرات جابه‌جایی کلی
$\mathbf{H}_y, \mathbf{H}_x$	بردارهای ۹ مؤلفه‌ای توابع شکل جدید	ε_{kl}	تانسور کرنش
$H(t)$	تابع هویساید	ε_{kl}	ضریب میراگر در المان m ام ماکسول
h	ضخامت ورق	θ_y, θ_x	دوران نرمال صفحه xz و yz
$\mathbf{J}$	ماتریس ژاکوبین	$\boldsymbol{\kappa}$	بردار انحنا
$\mathbf{K}^{e}$	ماتریس سختی المان ورق DKFT	υ	نسبت پوآسون
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی کلی	ρ_m	زمان استراحت در المان m ام ماکسول
M_{xy}, M_y, M_x	لنگر خمشی و پیچشی	σ_{ij}	تانسور تنش
m	تعداد جملات پایه چندجمله‌ای	ϕ_k	تابع شکل متناظر با گره k ام
$\mathbf{N}_i$	توابع شکل مختلط فوریه	$\boldsymbol{\varphi}$	ماتریس توابع شکل
n	تعداد گره‌ها در یک المان	Ω	دامنه سازه
P	بار متمرکز	ω	پارامتر شکل
$\mathbf{P}(x, y)$	بردار میدان توابع چندجمله‌ای	∂	ماتریس اپراتور مشتق
$\mathbf{P}_{۰}$	ماتریس واندرموند		

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

۱- مقدمه

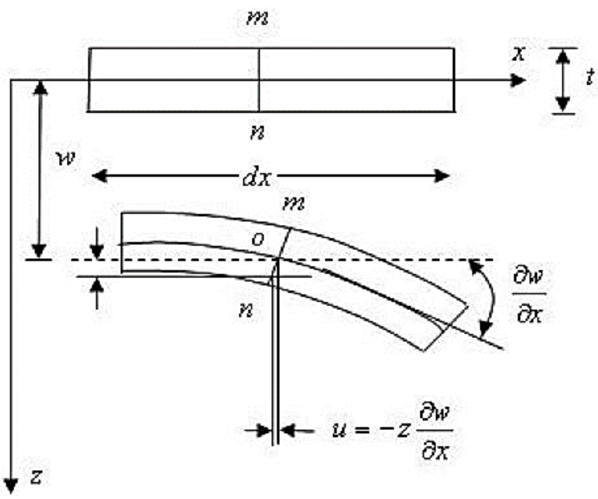
صفحه‌ها یا ورق‌ها[۱] یکی از پرکاربردترین المان‌های سازه‌ای در بسیاری از سازه‌های متداول مورد بحث در مهندسی عمران، مکانیک و هوا فضا هستند [۱]. از این‌رو مطالعات زیادی در زمینه تحلیل مسائل ورق تاکنون صورت گرفته است [۲]. بر اساس نوع مواد تشکیل‌دهنده و ضخامت ورق، تئوری‌های مختلفی برای خمش ورق‌ها پیشنهاد شده است. در تئوری ورق کیرشهف[۲] که در مورد ورق‌های نازکی که تحت تغییر شکل‌های کوچک قرار دارند صادق است، از تغییر شکل برشی جانبی[۳] ورق صرف‌نظر می‌شود. فرض اساسی در این تئوری آن است که یک خط صاف و عمود بر صفحه میانی ورق پیش از خمش، پس از خمش نیز به‌صورت خط صاف و نرمال بر صفحه میانی ورقِ تغییر شکل یافته باقی می ماند. درحالی که در تئوری ورق میندلین[۴] تغییر شکل برشی جانبی ورق در نظر گرفته می‌شود، بنابراین فرض می‌شود که هر نقطه دلخواه بر روی خط صاف و عمود بر صفحه میانی ورق پیش از خمش، پس از خمش نیز بر روی خط صاف باقی می‌ماند ولی آن خط لزوماً عمود بر صفحه میانی ورق تغییر شکل‌یافته باقی نمانده است [۳]. نشان داده شده است که نتایج تئوری الاستیسیته [۴] به‌تنهایی و بدون درنظر گرفتن اصطکاک داخلی با واقعیت سازگار نیست، چرا که اکثر مواد مهندسی به‌دلیل وجود اصطکاک داخلی، رفتار وابسته به زمان قابل توجهی از خود نشان می‌دهند. درنتیجه به‌منظور شبیه‌سازی دقیق‌تر رفتار سازه، به‌جای استفاده از معادلات متشکله[۵] الاستیک بایستی از معادلات متشکله ویسکوالاستیک استفاده شود. به‌علاوه از میرایی داخلی موجود در مواد ویسکوالاستیک می‌توان به‌منظور کاهش ارتعاش سازه‌ها بهره برد [۵]. فلسفه و ایده اصلی رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک در ادبیات فنی به‌طور کامل توضیح داده شده است [۶-۹] در تحلیل سازه‌های ساخته شده از مواد وابسته به زمان، تئوری ویسکوالاستیسیته خطی برای مدت زیادی است که کاربرد دارد. اکثر تلاش‌هایی که در حل تحلیلی معادلات حاکم بر ورق ویسکوالاستیک انجام شده است، بر اساس تئوری ورق کیرشهف بوده است. با مرور ادبیات فنی پیشین می‌توان دریافت که برای حل معادلات حاکم[۶] بر ورق ویسکوالاستیک از روش‌های مختلفی از جمله تبدیل لاپلاس[۷] [۱۰-۱۴] ، تبدیل فوریه[۸] [۱۵]، اصل تطابق[۹] [۱۶] و اصل جمع آثار قوا[۱۰] [۱۷] استفاده شده است [۵]. اکثر مطالعات اشاره شده بر اساس این حقیقت است که معادلات حاکم بر ویسکوالاستیسیته با تبدیل‌های انتگرالی می‌توانند به معادلات حاکم بر الاستیسیته تبدیل شوند. این روش‌های مبتنی بر تبدیلات انتگرالی، محدود به حل مسائل ورق با خصوصیات ماده ساده، هندسه‌های متداول و ساده و شرایط بارگذاری ساده می‌شوند و برای حل این مسائل نیز به معکوس تبدیل‌های انتگرالی نیاز است که فرایندی کسل‌کننده و وقت‌گیر است. برای حل مسائل ویسکوالاستیک با شرایط پیچیده هندسی، بارگذاری و مادی از روش‌های عددی مانند روش المان محدود[۱۱] [۱۸] و روش المان مرزی[۱۲] [۱۹] استفاده می‌شود. استفاده از روش المان محدود در حل مسائل ویسکوالاستیک توسط محققان بسیاری ارائه شده است [۵ و ۲۰-۲۵].

با الهام از روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی[۱۳] [۲۶] با غنی‌سازی توابع پایه شعاعی مختلط فوریه[۱۴] توسط میدان توابع چندجمله‌ای، توابع شکل مختلط فوریه حاصل می‌شوند [۲۷ و ۲۸]. در این مقاله المان ورق خمشی مثلثی جدیدی با ۹ درجه آزادی شامل جابه‌جایی w، و دوران‌های θ_x و θ_y در سه گوشه المان به‌منظور تحلیل ورق‌های ویسکوالاستیک نازک ارائه می‌شود. المان‌های ورق مثلثی جدید پیشنهادی در این مقاله، بر اساس تئوری ورق‌ها با درنظر گرفتن تغییر شکل برشی و با بهره‌گیری از توابع شکل مختلط فوریه به‌دست می‌آیند. به‌عبارت دیگر، به‌منظور تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک، المان‌های ورق DKT [۱۵] [۲۹] جدیدی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه پیشنهاد شده است که المان DKFT [۱۶] نامگذاری می‌شوند. به‌منظور تحلیل اجزای محدود ورق ویسکوالاستیک از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر [۳۰] در این مقاله استفاده شده است. در بخش بعد، ابتدا روش ساختن المان ورق DKT به‌طور خلاصه بیان می‌شود، سپس ماتریس گرادیان **B**، که انحنا را به جابه‌جایی‌های گرهی مرتبط می‌کند، برای المان DKFT در بخش سوم به‌دست

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]

[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۱- خمش در ورق براساس تئوری کیرشهف [۳۱]

می‌آید. در بخش چهارم توابع شکل المان مثلثی شش‌گرهی مختلط فوریه به‌دست می‌آید که از آن برای تقویت المان ورق DKT استفاده می‌شود که المان DKFT نامگذاری می‌شود. در بخش پنجم بیان نموی رابطه لنگر-انحنا در یک ورق نازک ویسکوالاستیک به‌دست می‌آید. در بخش ششم، فرمولاسیون اجزای محدود برای یک ورق نازک ویسکوالاستیک با استفاده از روش پیشنهادی زوکر ارائه شده است. در بخش هفتم مثال‌هایی به‌منظور صحت‌سنجی کد نوشته شده و روش پیشنهادی و همین‌طور بررسی دقت روش پیشنهادی حل شده است. در بخش هشتم نیز نتیجه‌گیری‌های به‌دست آمده از این مطالعه بیان شده است.

۲- المان ورق DKT (تئوری کیرشهف گسسته)

در ابتدا از تئوری ورق شامل تغییر شکل‌های برشی (تئوری ورق میندلین) در به‌دست آوردن فرمول مربوط به المان DKT برای خمش ورق‌های نازک استفاده می‌شود. در این حالت کمیت‌های مستقل شامل خیز[۱۷] w و دوران‌های[۱۸] β_x و β_y است و فقط الزامات پیوستگی[۱۹] c^0 بایستی براورده شود. سپس از انرژی کرنشی برشی[۲۰] صرف‌نظر می‌شود و نظریه کیرشهف در طول لبه‌های المان به‌منظور مرتبط‌کردن دوران‌ها و جابه‌جایی‌های به‌صورت گسسته[۲۱] اعمال می‌شود. با این روش المان خمشی مثلثی مؤثری با ۹ درجه آزادی فرمول‌بندی می‌شود که به حل ورق نازک کلاسیک به‌خوبی همگرا می‌شود و المان DKT نامیده می‌شود. در تئوری خمش ورق‌ها با تغییر شکل‌های کوچک، مؤلفه‌های جابه‌جایی هر نقطه با مختصات (x,y,z) از رابطه (۱) به‌دست می‌آید:

$$u=z\beta_x(x,y),\ v=z\beta_y(x,y),\ w=w(x,y) \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، w جابه‌جایی جانبی در راستای z، β_x و β_y دوران نرمال صفحه میانی ورق تغییر شکل نیافته در صفحات x-z و z-y است. گفتنی است که در تئوری ورق کیرشهف همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، مقادیر β_x و β_y وابسته به w است و از رابطه (۲) به‌دست می‌آید:

$$\beta_x=-w_{,x}\ ,\ \beta_y=-w_{,y} \qquad (۲)$$

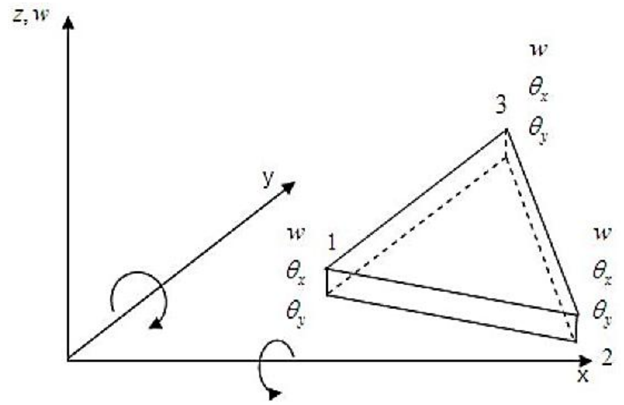
۳- ماتریس گرادیان[۲۲] B (انحنا- جابه‌جایی) در المان ورق DKFT

در ورق‌های نازک، بردار انحنا $\boldsymbol{\kappa}$ از رابطه (۳) به‌دست می‌آید:

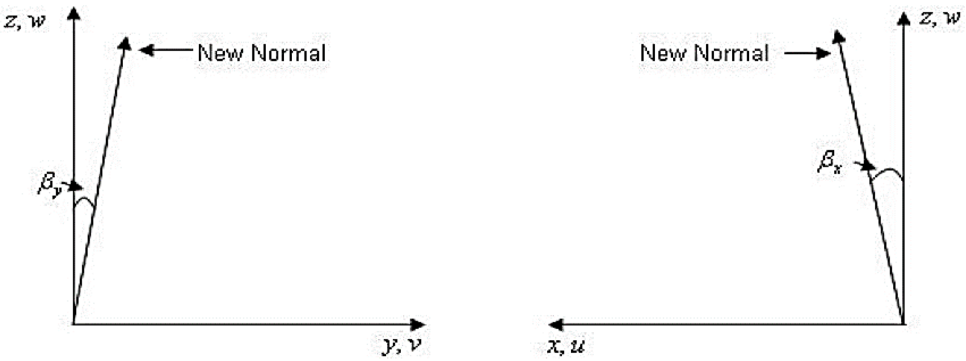
$$\boldsymbol{\kappa}=\begin{bmatrix}\beta_{x,x}\\ \beta_{y,y}\\ \beta_{x,y}+\beta_{y,x}\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

رابطه (۳) تنها شامل مشتقات مرتبه اول β_x و β_y است، بنابراین یافتن توابع شکلی که الزامات سازگاری را براورده کند آسان است. با این حال، از آنجایی که β_x و β_y در رابطه (۳) متغیر هستند، ضروری است که دوران نرمال صفحه میانی به

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۲- المان DKT [۳۱]



شکل ۳- جهت‌های مثبت β_y,β_x [۳۱]

جابه‌جایی جانبی w (که در رابطه (۳) پدیدار نشده است) مرتبط شود. بدین منظور فرض‌های زیر درنظر گرفته می‌شود:

۱. المان‌های مثلثی بایستی ۹ درجه آزادی داشته باشد که عبارت‌اند از جابه‌جایی w و دوران‌های θ_x و θ_y در سه گره گوشه‌ای (شکل ۲).

۲. از آنجایی که به‌دنبال حل کیرشهف ورق نازک هستیم، دوران نقاط گرهی بایستی به‌صورت $\theta_y = -w_{,x}\,,\theta_x = +w_{,y}$ تعریف شود تا شرایط مرزی کیرشهف ارضا شود.

۳. از آنجایی که برای مدل کردن ورق‌های نازک، از المانی که تئوری ورق کیرشهف بر آن حاکم است استفاده شده است، فرض‌های تئوری ورق کیرشهف می‌تواند در هر نقطه به‌صورت گسسته اعمال شود.

۴. شرایط سازگاری[23] در دوران‌های β_x و β_y نباید از دست برود.

در المان پیشنهادی DKFT فرض‌های زیر درنظر گرفته می‌شود:

الف) دوران‌های β_x و β_y روی المان با توابع درون‌یابی مختلط فوریه تخمین زده می‌شود (شکل ۳):

$$\beta_x = \sum_{i=1}^{6} N_i\,\beta_{x_i}\,,\ \beta_y = \sum_{i=1}^{6} N_i\,\beta_{y_i} \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) β_x و β_y مقادیر گرهی در گره‌های میانی و گوشه المان است و $N_i(\xi,\eta)$ توابع شکل مختلط فوریه برای المان مثلثی شش‌گرهی است که در بخش (۵) به‌دست آمده است.

ب) نظریه کیرشهف در گره‌ها به‌صورت زیر اعمال می‌شود (شکل ۴):

ب-۱) گره‌های گوشه (در گره‌های ۱، ۲ و۳)

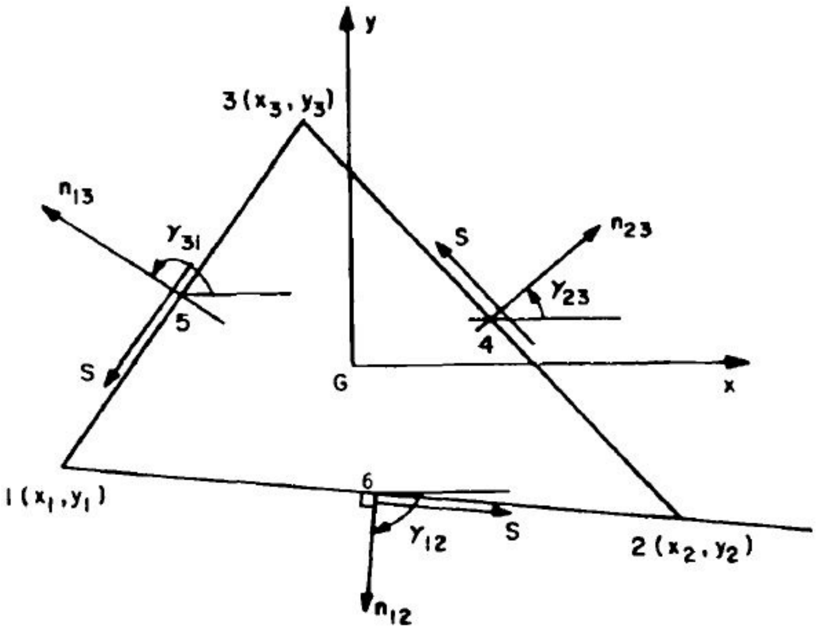
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

ب-۲) در گره‌های میانی (در جهت پاد ساعتگرد حول مرز

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]

[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۴- هندسه المان مثلثی [۲۹]

المان تعریف می‌شود):

$$\beta_{s_k} + w_{,s_k} = 0 \qquad k = 4,5,6 \qquad (6)$$

ج) تغییرات w در طول اضلاع المان، درجه سه است:

$$w_{,s_k} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,s_i} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,s_j} = 0 \qquad (7)$$

در روابط (۶) و (۷)، k گره میانی ضلع ij را نمایش می‌دهد و l_{ij} طول ضلع ij است.

د) تغییرات β_n در طول اضلاع به‌صورت خطی درنظر گرفته می‌شود:

$$\beta_{n_k} = \frac{1}{2}\left(\beta_{n_i} + \beta_{n_j}\right) \qquad (8)$$

در رابطه (۸)، $k = 1,2,3$ به‌ترتیب نشان‌دهنده گره‌های میانی اضلاع ۱۲، ۳۱ و ۲۳ است.

به‌منظور محاسبه β_x و β_y بر اساس درجات آزادی گرهی که به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود، در هر ضلع روابط هندسی (۱۰) و (۱۱) بایستی برقرار باشد:

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x_1} & \theta_{y_1} & w_2 & \theta_{x_2} & \theta_{y_2} & w_3 & \theta_{x_3} & \theta_{y_3} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{,s} \\ \omega_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \qquad (11)$$

در روابط (۱۰) و (۱۱)، c و s با استفاده از رابطه (۱۲) تعریف می‌شوند:

$$c = \cos(\vec{x}, \vec{n}_{ij}), \;\; s = \sin(\vec{x}, \vec{n}_{ij}) \qquad (12)$$

با استفاده از روابط (۵) تا (۱۲)، عبارت‌های زیر برای β_x و β_y به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \mathbf{H}_x^T(\xi,\eta)\mathbf{d} \\ \beta_y &= \mathbf{H}_y^T(\xi,\eta)\mathbf{d} \end{aligned} \qquad (13)$$

در رابطه (۱۳)، $\mathbf{H}_x$ و $\mathbf{H}_y$ بردارهای ۹ مولفه‌ای توابع شکل جدید هستند. مولفه‌های $\mathbf{H}_x$ و $\mathbf{H}_y$ همان‌طور که در رابطه (۱۴) نشان داده شده است وابسته به مختصات گره‌ها و توابع شکل مختلط فوریه در المان شش گرهی مثلثی $N_i, (i = 1,2,\ldots,6)$ است که این توابع شکل از رابطه (۳۲) به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{H}_x(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 1.5(a_6 N_6 - a_5 N_5) \\ b_5 N_5 + b_6 N_6 \\ N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \\ 1.5(a_4 N_4 - a_6 N_6) \\ b_6 N_6 + b_4 N_4 \\ N_2 - c_6 N_6 - c_4 N_4 \\ 1.5(a_5 N_5 - a_4 N_4) \\ b_4 N_4 + b_5 N_5 \\ N_3 - c_4 N_4 - c_5 N_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_y(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 1.5(d_6 N_6 - d_5 N_5) \\ -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6 \\ -b_5 N_5 - b_6 N_6 \\ 1.5(d_4 N_4 - d_6 N_6) \\ -N_2 + e_6 N_6 + e_4 N_4 \\ -b_6 N_6 - b_4 N_4 \\ 1.5(d_5 N_5 - d_4 N_4) \\ -N_3 + e_4 N_4 + e_5 N_5 \\ -b_4 N_4 - b_5 N_5 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

پارامترهای مرتبط با مختصات گرهی در رابطه (۱۴) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_k=\frac{-x_{ij}}{l_{ij}^{۲}},\ b_k=\frac{۰/۷۵\,x_{ij}\,y_{ij}}{l_{ij}^{۲}},$$
$$c_k=\frac{\left(۰/۲۵\,x_{ij}^{۲}-۰/۵\,y_{ij}^{۲}\right)}{l_{ij}^{۲}}$$
$$d_k=\frac{-y_{ij}}{l_{ij}^{۲}},\ e_k=\frac{\left(۰/۲۵\,y_{ij}^{۲}-۰/۵\,x_{ij}^{۲}\right)}{l_{ij}^{۲}},$$
$$l_{ij}^{۲}=\left(x_{ij}^{۲}+y_{ij}^{۲}\right)$$
$$x_{ij}=x_i-x_j,\ y_{ij}=y_i-y_j \qquad (۱۵)$$

در رابطه (۱۵) اندیس‌های $k=۴,۵,۶$ مربوط به اضلاع به‌ترتیب $ij=۲۳,۳۱,۱۲$ هستند (شکل ۴). با استفاده از روابط (۳) و (۱۳) رابطه بین بردار انحنا و بردار درجات آزادی گرهی به‌صورت رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{B}\mathbf{d} \qquad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶) ماتریس $\mathbf{B}$، ماتریس گرادیان یا تبدیل انحنا–جابه‌جایی است. از آنجایی که از فرمول‌بندی ایزوپارامتریک[۲۴] استفاده شده است، مشتقات در ماتریس $\mathbf{B}$ به‌واسطه درون‌یابی مختصات و استفاده از ماتریس ژاکوبین به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$X=N_۱x_۱+N_۲x_۲+N_۳x_۳+N_۴x_۴+N_۵x_۵+N_۶x_۶$$
$$Y=N_۱y_۱+N_۲y_۲+N_۳y_۳+N_۴y_۴+N_۵y_۵+N_۶y_۶ \qquad (۱۷)$$
$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

در رابطه (۱۷)، $\left(x_i,y_i\right)$ مختصات نقاط گرهی هر المان در دستگاه مختصات کلی است و $\mathbf{J}$ ماتریس ژاکوبین[۲۵] نامیده می‌شود که دستگاه مختصات سطحی[۲۶] را با دستگاه مختصات کلی مرتبط می‌کند. $N_i\left(i=۱,...,۶\right)$ توابع شکل مختلط فوریه هستند که از رابطه (۳۲) به‌دست می‌آیند و در دستگاه مختصات سطحی $\left(\xi,\eta\right)$ تعریف شده‌اند.

$$\mathbf{B}=\partial\left[\mathbf{H}_x \quad \mathbf{H}_y\right]^T \qquad (\text{۱۸- الف})$$

$$\partial=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & ۰\\ ۰ & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}=\frac{۱}{|\mathbf{J}|}\begin{bmatrix}\frac{\partial Y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} & ۰\\ ۰ & \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\end{bmatrix} \qquad (\text{۱۸- ب})$$

در رابطه (۱۸)، ∂ ماتریس اپراتور مشتق در دستگاه مختصات کلی است و بردارهای $\mathbf{H}_x\left(\xi,\eta\right)$ و $\mathbf{H}_y\left(\xi,\eta\right)$ در رابطه (۱۴) تعریف شده است. $|\mathbf{J}|$ دترمینان[۲۷] ماتریس ژاکوبین است. با استفاده از رابطه (۱۸) ماتریس $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آید و با قرار دادن در رابطه (۶۹) ماتریس سختی المان DKFT حاصل می‌شود.

۴- المان مثلثی شش‌گرهی مختلط فوریه

اگر تابع میدان جابه‌جایی با استفاده از یک ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی[۲۸] تقریب زده شود، رابطه (۱۹) حاصل می‌شود:

$$u\left(x,y\right)=\sum_{i=۱}^{n}R_i\left(r\right)a_i=\mathbf{R}^T\left(r\right)\mathbf{a} \qquad (۱۹)$$

در رابطه (۱۹)، $u\left(x,y\right)$ تابع میدان جابه‌جایی، n تعداد نقاط گرهی در دامنه $\left(x,y\right)$، $R_i\left(r\right)$ تابع پایه شعاعی متناظر با گره i ام، a_i ضریب مجهول متناظر با گره i ام است. همین‌طور $\mathbf{R}$ بردار توابع پایه شعاعی و $\mathbf{a}$ بردار ضرایب مجهول است. r نُرم اقلیدسی میان نقاط گرهی است که برای گره k در دامنه دوبعدی $\left(x,y\right)$ با رابطه (۲۰) تعریف می‌شود:

$$r_k=\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\right\|=\sqrt{\left(x-x_k\right)^{۲}+\left(y-y_k\right)^{۲}} \qquad (۲۰)$$

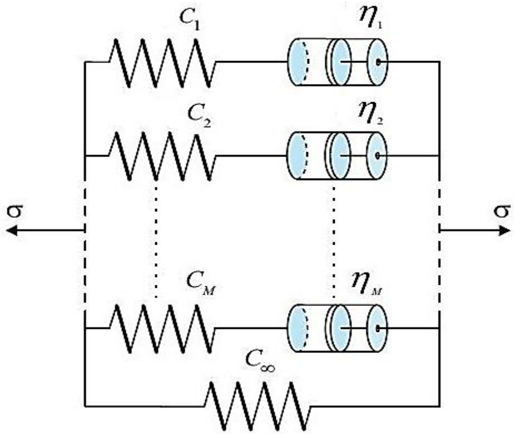
حال به‌منظور غنی‌سازی[۲۹] توابع پایه شعاعی، میدان توابع چندجمله‌ای[۳۰] به بسط تابعی[۳۱] که در آن فقط از توابع پایه شعاعی برای تقریب استفاده شده بود اضافه می‌شود:

$$u\left(x,y\right)=\sum_{i=۱}^{n}R_i\left(r\right)a_i+\sum_{j=۱}^{m}P_j\left(x,y\right)b_j=$$
$$\mathbf{R}^T\left(r\right)\mathbf{a}+\mathbf{P}^T\left(x,y\right)\mathbf{b} \qquad (۲۱)$$

در رابطه (۲۱)، m تعداد جملات پایه چندجمله‌ای است. b_j ضریب مجهول متناظر با چندجمله‌ای پایه j ام است. اگر

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۵- مدل ویچرت [۹]

مخصات نقاط گرهی را در رابطه (۲۱) قرار داده شود، معادله ماتریسی (۲۲) حاصل می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_{0}\,\mathbf{a} + \mathbf{P}_{0}\,\mathbf{b} \tag{۲۲}$$

در رابطه (۲۲) :

$$\mathbf{R}_{0} = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\mathbf{P}_{0} = \begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_m(x_1,y_1) \\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_m(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_m(x_n,y_n) \end{bmatrix}_{n\times m}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T \tag{۲۳}$$

$\hat{\mathbf{u}}$ بردار مقادیر تابع میدان جابه‌جایی در نقاط گرهی یا همان بردار جابه‌جایی گرهی است. در رابطه (۲۳) معمولاً $m < n$ فرض می‌شود تا همگرایی جواب تضمین شود [۲۶]. از آنجا که در معادله (۲۳) تعداد معادلات n و تعداد مجهولات $n+m$ است، معادله (۲۴) به‌عنوان الزامات اضافی بر جملات پایه چندجمله‌ای اعمال می‌شود تا یکتایی جواب تضمین شود:

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(x_i,y_i)\,a_i = 0, \quad \mathbf{P}_{0}^{T}\mathbf{a} = 0 \tag{۲۴}$$

با حل معادله ماتریسی (۲۵)، اگر معکوس ماتریس متقارن $\mathbf{R}_{0}$ موجود باشد، ضرایب مجهول‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با استفاده از رابطه (۲۶) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0} & \mathbf{P}_{0} \\ \mathbf{P}_{0}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۲۵}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۲۶}$$

درنهایت رابطه درون‌یابی [۳۲] تابع میدان جابه‌جایی به‌صورت معادله (۲۷) حاصل می‌شود:

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{T}(r) & \mathbf{P}^{T}(x,y) \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(x,y)\,\hat{\mathbf{u}} \tag{۲۷}$$

در رابطه (۲۷)، $\boldsymbol{\varphi}(x,y) = \begin{bmatrix} \phi_1(x,y) & \phi_2(x,y) & \cdots & \phi_n(x,y) \end{bmatrix}$ ماتریس توابع شکل است که میدان جابه‌جایی را به جابه‌جایی‌های گرهی مرتبط می‌سازد. این فرمولاسیون اولین بار برای استفاده در روش‌های بدون المان تحت عنوان روش بدون المان درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی [۲۶] ارائه شد.

توابع پایه شعاعی مختلط فوریه [۲۷] به‌صورت رابطه (۲۸) تعریف می‌شوند:

$$R(r) = \alpha\, e^{i\omega r} \tag{۲۸}$$

در رابطه (۲۸)، ω, α پارامتر شکل هستند. پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی، ثابت‌هایی هستند که به‌منظور افزایش دقت درون‌یابی انتخاب می‌شوند. به‌علاوه در این رابطه، i واحد موهومی‌است.

با اعمال روش RPIM [۳۳] پیشنهادی وانگ [۲۶] بر المان مثلثی شش‌گرهی نمایش داده شده در شکل (۵) در دستگاه مختصات سطحی و بهره گیری از توابع شکل مختلط فوریه [۲۷]

المان مثلثی شش‌گرهی مختلط فوریه[۳۴] در این مقاله ارائه می‌شود.

با استفاده از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه و میدان توابع چندجمله‌ای با پنج جمله ($m=5$) در یک المان مثلثی شش گرهی در دستگاه مختصات سطحی، روابط (۲۱-۲۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{R}(r)=\begin{Bmatrix} R_1(r)\\ R_2(r)\\ R_3(r)\\ R_4(r)\\ R_5(r)\\ R_6(r)\end{Bmatrix}=\alpha\begin{Bmatrix} e^{i\omega\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{\xi^2+(\eta-1)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-0.5)^2+(\eta-0.5)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{\xi^2+(\eta-0.5)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-0.5)^2+\eta^2}}\end{Bmatrix} \tag{۲۹}$$

$$\mathbf{P}(\xi,\eta)=\begin{Bmatrix} 1\\ \xi\\ \eta\\ \xi^2\\ \xi\eta\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{R_0}=\begin{bmatrix} 1 & \varsigma^2 & \varsigma^2 & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma & \varsigma\\ \varsigma^2 & 1 & 2\varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma\\ \varsigma^2 & 2\varsigma^{\sqrt{2}} & 1 & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}}\\ \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & 1 & \varsigma & \varsigma\\ \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma & \varsigma & 1 & \varsigma^{\sqrt{2}}\\ \varsigma & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

$$\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0/5 & 0/5 & 0/25 & 0/25\\ 1 & 0 & 0/5 & 0 & 0\\ 1 & 0/5 & 0 & 0/25 & 0\end{bmatrix}$$

در رابطه (۳۰)، پارامتر $\varsigma=e^{\omega/2}$ است. با قرار دادن روابط (۳۰) در رابطه (۳۱)، ماتریس $\mathbf{G}$ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \mathbf{R_0} & \mathbf{P_0}\\ \mathbf{P_0}^T & 0\end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

در نهایت با قرار دادن معکوس ماتریس $\mathbf{G}$ و روابط (۲۹) در رابطه (۳۲) توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان مثلثی شش‌گرهی در دستگاه مختصات سطحی (ξ,η) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(\xi,\eta)&=\left[N_1(\xi,\eta)\;\; N_2(\xi,\eta)\;\; N_3(\xi,\eta)\;\; N_4(\xi,\eta)\;\; N_5(\xi,\eta)\;\; N_6(\xi,\eta)\right]\\ \boldsymbol{\varphi}(\xi,\eta)&=\left[\mathbf{R}^T(\xi,\eta)\;\; \mathbf{P}^T(\xi,\eta)\right]\mathbf{G}^{-1}\end{aligned} \tag{۳۲}$$

که همان‌طور که در بخش (۳) بیان شد، با جایگذاری توابع شکل مختلط فوریه $N_i(\xi,\eta),(i=1,\dots,6)$ به‌دست آمده از رابطه (۳۲) در رابطه (۱۴)، توابع شکل جدیدی برای المان‌های ورق پیشنهاد می‌شود که در این مقاله المان ورق "تئوری کیرشهف گسسته مثلثی فوریه" یا به‌اختصار DKFT نامگذاری می‌شود.

در اینجا بیانِ سه نکته در مورد این المان‌ها ضروری است:

۱. توابع شکل در المان DKFT پیشنهادی، کلیه خواص لازم برای یک تابع شکل شامل: خاصیت دلتای کرونیکر[۳۵]، خاصیت افراز واحد[۳۶] و خاصیت پیوسته تکه‌ای از مرتبه بی‌نهایت[۳۷] که تضمین‌کننده مشتق‌پذیری آن است، را دارا هستند.

۲. المان DKFT پیشنهادی آزمون وصله جابه‌جایی[۳۸] را ارضا می‌کند پس قادر است پدیده‌هایی مانند جابه‌جایی جسم صلب و حالت کرنش ثابت[۳۹] را نشان دهد، و آزمون وصله نیرو[۴۰] را نیز با به‌دست آمدن لنگرهای خمشی ثابت M_x و M_y در هر المان با اعمال آزمون در راستاهای خمش حول محورهای x و y، و لنگر پیچشی ثابت[۴۱] M_{xy} با اعمال آزمون در راستای پیچش ارضا می‌کند، بنابراین همگرایی جواب در این المان‌ها تضمین می‌شود.

۳. توابع شکل در المان DKFT تنها دارای یک پارامتر شکل یعنی ω هستند، چرا که در فرایند غنی‌سازی توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، پارامتر شکل α حذف می‌شود.

۵- بیان نموی رابطه لنگر- انحنا در یک ورق نازک ویسکوالاستیک

رابطه تنش و کرنش در یک ماده همگن ایزوتروپیک ویسکوالاستیک خطی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

$$\sigma_{ij}(t)=\int_{0}^{t} C_{ijkl}(t-t')\frac{\partial\varepsilon_{kl}(t')}{\partial t'}dt' \qquad (۳۳)$$

در رابطه (۳۳)، σ_{ij} و ε_{kl} به‌ترتیب تانسورهای[۴۲] تنش و کرنش در لحظه t هستند و C_{ijkl} تانسور مرتبه چهار مدول استراحت[۴۳] است که تنش و کرنش را به‌هم مرتبط می‌کند.

با فرض حالت تنش صفحه‌ای، لنگر خمشی در یک ورق نازک ویسکوالاستیک از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$M_{ij}(t)=\int_{z}\sigma_{ij}(z,t)\,z\,dz \quad (i,j=1,2) \qquad (۳۴)$$

کرنش در هر نقطه دلخواه ورق نازک کیرشهف ویسکوالاستیک از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{kl}(z,t)=z\,\kappa_{kl}(t) \quad (k,l=1,2) \qquad (۳۵)$$

در رابطه (۳۵)، κ_{kl} تانسور انحنا است. با قرار دادن روابط (۳۳) و (۳۵) در رابطه (۳۴)، فرم انتگرالی رابطه لنگر- انحنا در یک ورق کیرشهف نازک ویسکوالاستیک با ضخامت h به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{kl}(z,t)=z\,\kappa_{kl}(t) \quad (k,l=1,2) \qquad (۳۶)$$

به‌منظور تبدیل رابطه (۳۶) به فرم نموی، خط زمانی t به بازه‌های زمانی مجزا مانند $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ تفکیک می‌شود و فرض می‌شود که لنگر در لحظه t_n مشخص است. با استفاده از رابطه (۳۶) لنگر در لحظه t_{n+1} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$M_{ij}(t_{n+1})=\frac{h^3}{12}\int_{0}^{t_{n+1}} C_{ijkl}(t_{n+1}-t')\frac{\partial\kappa_{kl}(t')}{\partial t'}dt' \qquad (۳۷)$$

رابطه (۳۷) را می‌توان به‌صورت (۳۸) بازنویسی کرد:

$$M_{ij}(t_{n+1})=\frac{h^3}{12}\left\{\begin{aligned}&\int_{0}^{t_n} C_{ijkl}(t_{n+1}-t')\frac{\partial\kappa_{kl}(t')}{\partial t'}dt'+\\&\int_{t_n}^{t_{n+1}} C_{ijkl}(t_{n+1}-t')\frac{\partial\kappa_{kl}(t')}{\partial t'}dt'\end{aligned}\right\} \qquad (۳۸)$$

با تعریف ΔC_{ijkl} و ΔM_{ij} به‌ترتیب با رابطه‌های (۳۹) و (۴۰) و با قرار دادن رابطه (۳۸) در (۴۰) و به‌کارگیری رابطه (۳۹)، ΔM_{ij} به‌صورت رابطه (۴۱) به‌دست می‌آید:

$$\Delta C_{ijkl}=C_{ijkl}(t_{n+1}-t')-C_{ijkl}(t_n-t') \qquad (۳۹)$$

$$\Delta M_{ij}=M_{ij}(t_{n+1})-M_{ij}(t_n) \qquad (۴۰)$$

$$\Delta M_{ij}=\frac{h^3}{12}\left\{\int_{t_n}^{t_{n+1}} C_{ijkl}(t_n-t')\frac{\partial\kappa_{kl}(t')}{\partial t'}dt'+\Delta M_{ij}^{R}\right\} \qquad (۴۱)$$

در رابطه (۴۱)، ΔM_{ij}^{R} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta M_{ij}^{R}=\int_{0}^{t_n}\Delta C_{ijkl}\frac{\partial\kappa_{kl}(t')}{\partial t'}dt' \qquad (۴۲)$$

مدول استراحت در لحظه t_{n+1} با به‌کارگیری مدل ویچرت نشان داده شده در شکل (۶)، با استفاده از سری پرونی[۴۴] به‌صورت رابطه (۴۳) بیان می‌شود:

$$C_{ijkl}(t_{n+1}-t')=C_{\infty}+\sum_{q=1}^{Q}C_q\,e^{-\frac{(t_{n+1}-t')}{\rho_q}} \qquad (۴۳)$$

$$\rho_q=\frac{\eta_q}{C_q} \qquad (۴۴)$$

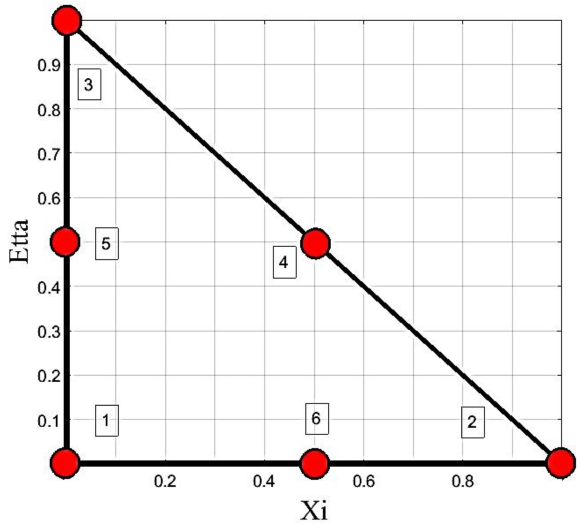
در رابطه (۴۳)، ρ_q زمان استراحت المان q ام ماکسول و Q تعداد کل المان‌های ماکسول و C_{∞} ثابت فنر تنها، در مدل ویچرت است. در رابطه (۴۴)، η_q ضریب میراگر و C_q ثابت فنر در المان q ام ماکسول در مدل ویچرت است.

در روش‌های نیمه‌تحلیلی انتگرال‌گیری زمانی در مواد ویسکوالاستیک، ایده‌آل‌سازی تاریخچه بارگذاری بسیار متداول است، برای این‌کار معمولاً تغییرات کرنش در یک گام زمانی به‌صورت ساده‌سازی شده فرض می‌شود [۳۲]. ساده‌ترین تقریب برای به‌دست آوردن انتگرال زمانی به‌صورت تحلیلی آن است که کرنش در کل یک گام زمانی ثابت فرض می‌شود. این روش توسط زینکویچ و همکاران [۳۳] برای اولین بار پیشنهاد شد. یک تقریب بهتر برای به‌دست آوردن انتگرال زمانی به‌صورت تحلیلی آن است که مقدار کرنش در یک گام زمانی به تکه‌های ثابت تقسیم می‌شود [۳۴ و ۳۵]. به‌جای آنکه کرنش در یک گام زمانی به‌صورت ثابت تقریب زده شود، نرخ کرنش نسبت به زمان در یک گام زمانی می‌تواند به‌صورت ثابت فرض شود. این روش به تیلور و همکاران [۳۶] نسبت داده شده است.

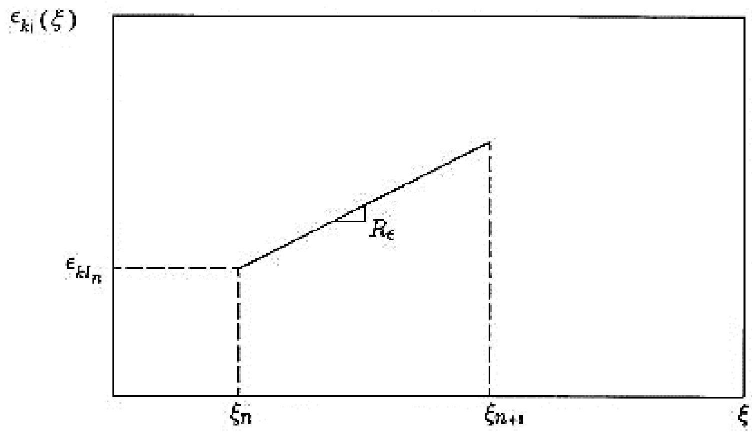
در این مقاله فرض شده است که در یک گام زمانی نرخ تغییرات کرنش نسبت به زمان می‌تواند به‌صورت ثابت درنظر گرفته شود. به‌عبارت دیگر مقدار کرنش در بازه زمانی $t_n\le t\le t_{n+1}$ با رابطه (۴۵) تخمین زده می‌شود:

$$\varepsilon_{kl}(t)=\varepsilon_{kl}(t_n)+R_{\varepsilon}(t-t_n)H(t-t_n) \qquad (۴۵)$$

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۶- المان مثلثی ۶ گرهی



شکل ۷- تقریب کرنش در بازه زمانی Δt [۳۰]

در رابطه (۴۵)، R_ε نرخ تغییرات کرنش در طول بازه زمانی است و $H(t-t_n)$ تابع هویساید است. در شکل (۷) تقریب کرنش در یک گام زمانی ترسیم شده است. با استفاده از رابطه (۴۵) می‌توان دریافت که با این تخمین، نرخ تغییرات انحنا در یک گام زمانی را نیز می‌توان به‌صورت ثابت فرض کرد:

$$\Delta\kappa_{kl} = R_\kappa \Delta t \tag{۴۶}$$

در رابطه (۴۶)، $\Delta\kappa$ بردار تغییرات انحنا در یک گام زمانی است و R_κ نرخ تغییرات انحنا نسبت به زمان در طول گام زمانی Δt است. با استفاده از این تقریب انتگرال‌گیری زمانی نیمه تحلیلی از رابطه (۴۱) ممکن می‌شود:

$$\Delta M_{ij} = \frac{h^{۳}}{۱۲}\left\{C'_{ijkl}\,\Delta\kappa_{kl} + \Delta M_{ij}^{R}\right\} \tag{۴۷}$$

که در این رابطه:

$$C'_{ijkl} = C_\infty + \frac{۱}{\Delta t}\sum_{q=۱}^{Q}\eta_q\left(۱-e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) \tag{۴۸}$$

با قرار دادن رابطه (۴۳) در (۳۹)، ΔC_{ijkl} به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta C_{ijkl} = -\sum_{q=۱}^{Q} C_q\, e^{-\frac{(t_n-t')}{\rho_q}}\left(۱-e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) \tag{۴۹}$$

با قرار دادن رابطه (۴۹) در (۴۲)، ΔM_{ij}^{R} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

$$\Delta M_{ij}^{R} = -\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} A_{ijkl} \quad (\text{no sum on } i,j) \qquad (۵۰)$$

در رابطه (۵۰):

$$A_{ijkl} = \sum_{q=1}^{Q}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) S_{ijkl_q}\left(t_n\right) \qquad (۵۱)$$

S_q در رابطه (۵۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S_{ijkl_q}\left(t_n\right) = \int_0^{t_n} C_{ijkl_q}\left(e^{-\frac{(t_n - t')}{\rho_q}}\right)\frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt' \qquad (۵۲)$$

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، در رابطه (۵۲)، نرخ تغییرات انحنا نسبت به زمان را می‌توان به‌صورت زیر تخمین زد:

$$\frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'} \approx R_\kappa = \frac{\Delta \kappa_{kl}}{\Delta t} \quad \left(t_n - \Delta t \le t' \le t_n\right) \qquad (۵۳)$$

در رابطه (۵۳)، $\frac{\Delta \kappa_{kl}}{\Delta t}$ از گام زمانی پیشین به‌دست می‌آید. بنابراین رابطه بازگشتی زیر برای S_{ijkl_q} حاصل می‌شود:

$$S_{ijkl_q}\left(t_n\right) = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}} S_{ijkl_q}\left(t_n - \Delta t\right) + \eta_q R_\kappa\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) \qquad (۵۴)$$

۶- رابطه‌سازی اجزای محدود

با اعمال روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار بر معادله تعادل و سپس اعمال انتگرال جزء به جزء[۴۵]، معادله انتگرالی زیر حاصل می‌شود:

$$\int_\Omega \sigma_{ji}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega = \int_\Omega \rho f_i\,\delta u_i\,d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i\,\delta u_i\,d\Gamma \qquad (۵۵)$$

در رابطه (۵۵)، δu_i تغییر شکل مجازی، $\delta\varepsilon_{ij}$ کرنش ناشی از تغییر شکل مجازی، ρ جرم واحد حجم، f_i نیروی حجمی، T_i بردار تنش سطحی، Ω دامنه سازه و Γ_2 مرزی از سازه است که تحت نیروی بردار تنش قرار دارد.

رابطه (۵۵) را می‌توان به‌صورت زیر برای یک ورق کیرشهف نازک بازنویسی کرد:

$$\int_\Omega M_{ji}\,\delta\kappa_{ij}\,d\Omega = \int_\Omega \rho f_i\,\delta u_i\,d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i\,\delta u_i\,d\Gamma \qquad (۵۶)$$

در رابطه (۵۶)، M_{ji} ماتریس لنگر، $\delta\kappa_{ij}$ ماتریس انحنای مجازی در ورق نازک کیرشهف است.

با توجه به اینکه فرض می‌شود جابه‌جایی در لحظه t_n معلوم است، رابطه (۵۶) در لحظه t_{n+1} به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_\Omega M_{ji}^{n+1}\,\delta\kappa_{ij}^{n+1}\,d\Omega = \int_\Omega \rho f_i^{n+1}\,\delta u_i^{n+1}\,d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i^{n+1}\,\delta u_i^{n+1}\,d\Gamma \qquad (۵۷)$$

با استفاده از بیان نموی رابطه تغییرات لنگر- انحنا که در رابطه (۴۷) به‌دست آمد، می‌توان رابطه (۵۷) را نیز به فرم نموی تبدیل کرد. مقدار لنگر، انحنای مجازی، تغییر شکل و تغییر شکل مجازی در لحظه t_{n+1} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\Delta M_{ji} = M_{ji}^{n+1} - M_{ji}^{n} \rightarrow M_{ji}^{n+1} = M_{ji}^{n} + \Delta M_{ji}\\
&\Delta\delta\kappa_{ij} = \delta\kappa_{ij}^{n+1} - \delta\kappa_{ij}^{n} \rightarrow \delta\kappa_{ij}^{n+1} = \delta\kappa_{ij}^{n} + \Delta\delta\kappa_{ij}\\
&\Delta\delta u_i = \delta u_i^{n+1} - \delta u_i^{n} \rightarrow \delta u_i^{n+1} = \delta u_i^{n} + \Delta\delta u_i\\
&\Delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^{n} \rightarrow u_i^{n+1} = u_i^{n} + \Delta u_i
\end{aligned} \qquad (۵۸)$$

از آنجایی که فرض شده است مقدار جابه‌جایی در لحظه t_n معلوم است، می‌توان نتیجه گرفت که جابه‌جایی مجازی δu_i^n و انحنای مجازی $\delta\kappa_{ij}^n$ در لحظه t_n صفر است. با قرار دادن رابطه (۵۸) در رابطه (۵۷)، این معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(M_{ji}^{n} + \Delta M_{ji}\right)\left(\Delta\delta\kappa_{ij}\right)d\Omega =\\
&\quad\int_\Omega \rho f_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,d\Gamma
\end{aligned} \qquad (۵۹)$$

رابطه (۵۹) را می‌توان به‌صورت (۶۰) بیان کرد:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta M_{ji}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,d\Omega = &\int_\Omega \rho f_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Omega +\\
&\int_{\Gamma_2} T_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Gamma -\\
&\int_\Omega M_{ji}^{n}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,d\Omega
\end{aligned} \qquad (۶۰)$$

با قرار دادن رابطه (۴۷) در (۶۰):

$$\begin{aligned}
&\frac{h^3}{12}\int_A C'_{ijkl}\,\Delta\kappa_{kl}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA =\\
&\quad\int_A \rho f_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,dA + \int_{S_2} T_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,dS -\\
&\quad\int_A M_{ji}^{n}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA - \frac{h^3}{12}\int_A \Delta M_{ji}^{R}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA
\end{aligned} \qquad (۶۱)$$

در رابطه (۶۱)، h ضخامت ورق است که ثابت فرض شده است، C'_{ijkl} و ΔM_{ij}^{R} به‌ترتیب از رابطه‌های (۴۸) و (۵۰) به‌دست می‌آیند. A سطح مقطع صفحه میانی ورق است و S_2 مرزی از ورق است که تحت بردار تنش قرار دارد.

رابطه بردارهای تغییرات انحنا $\Delta\boldsymbol{\kappa}$, $\Delta\delta\boldsymbol{\kappa}$ و بردارهای تغییرات جابه‌جایی گرهی $\Delta\mathbf{d}$, $\Delta\delta\mathbf{d}$ در یک المان ورق DKFT به‌صورت (۶۲) و (۶۳) بیان می‌شود:

[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81] [DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8] [Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]

$$\Delta\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{d} \quad (۶۲)$$

$$\Delta\delta\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\Delta\delta\mathbf{d} \quad (۶۳)$$

در روابط (۶۲) و (۶۳)، $\mathbf{B}$ ماتریس گرادیان یا تبدیل انحنا- جابه‌جایی است که از رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید و $\Delta\mathbf{d}$, $\Delta\delta\mathbf{d}$ بردارهای تغییرات جابه‌جایی گرهی در یک المان ورق DKFT هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta\mathbf{d}^T = \left\langle \Delta w_1 \;\; \Delta\theta_{x_1} \;\; \Delta\theta_{y_1} \;\; \Delta w_2 \;\; \Delta\theta_{x_2} \;\; \Delta\theta_{y_2} \;\; \Delta w_3 \;\; \Delta\theta_{x_3} \;\; \Delta\theta_{y_3} \right\rangle \quad (۶۴)$$

$$\Delta\delta\mathbf{d}^T = \left\langle \Delta\delta w_1 \;\; \Delta\delta\theta_{x_1} \;\; \Delta\delta\theta_{y_1} \;\; \Delta\delta w_2 \;\; \Delta\delta\theta_{x_2} \;\; \Delta\delta\theta_{y_2} \;\; \Delta\delta w_3 \;\; \Delta\delta\theta_{x_3} \;\; \Delta\delta\theta_{y_3} \right\rangle \quad (۶۵)$$

با قرار دادن رابطه (۶۲) و (۶۳) در (۶۱)، این معادله برای یک المان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{h^3}{12}\int_{A^e}(\mathbf{B}\,\Delta\delta\mathbf{d})^T\mathbf{C}'(\mathbf{B}\,\Delta\mathbf{d})dA^e = \\
&\int_{A^e}\rho\left(\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]\;\Delta\delta\mathbf{d}\right)^T\mathbf{f}^{n+1}dA \; + \\
&\int_{S_2^e}\left(\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]\;\Delta\delta\mathbf{d}\right)^T\mathbf{T}^{n+1}dS^e - \\
&\int_{A^e}(\mathbf{B}\,\Delta\delta\mathbf{d})^T\mathbf{M}^n\,dA^e - \\
&\frac{h^3}{12}\int_{A^e}(\mathbf{B}\,\Delta\delta\mathbf{d})^T\Delta\mathbf{M}^R dA^e
\end{aligned} \quad (۶۶)$$

در رابطه (۶۶)، مؤلفه‌های ماتریس $\left[\mathbf{H}_x \quad \mathbf{H}_y\right]^T$ با قرار دادن مؤلفه‌های رابطه (۳۲) در رابطه (۱۴) به‌دست می‌آیند. از آنجایی که $\Delta\delta\mathbf{d}^T$ تغییرات جابه‌جایی گرهی مجازی است، رابطه (۶۶) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{h^3}{12}\left(\int_{A^e}\mathbf{B}^T\mathbf{C}'\,\mathbf{B}\,dA^e\right)\Delta\mathbf{d} = \\
&\int_{A^e}\left(\rho\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]^T\mathbf{f}^{n+1}\right)dA^e + \\
&\int_{S_2^e}\left(\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]^T\mathbf{T}^{n+1}\right)dS^e - \\
&\int_{A^e}\left(\mathbf{B}^T\;\mathbf{M}^n\right)dA^e - \\
&\frac{h^3}{12}\int_{A^e}\left(\mathbf{B}^T\;\Delta\mathbf{M}^R\right)dA^e
\end{aligned} \quad (۶۷)$$

رابطه (۶۷) را می‌توان به‌صورت (۶۸) بازنویسی کرد:

$$\mathbf{K}^e\;\Delta\mathbf{d} = \mathbf{f}_1^e + \mathbf{f}_2^e - \mathbf{f}_3^e - \mathbf{f}_4^e \quad (۶۸)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12}\int_{A^e}\mathbf{B}^T\;\mathbf{C}'\;\mathbf{B}\,dA^e$$

$$\mathbf{f}_1^e = \int_{A^e}\rho\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]^T\;\mathbf{f}^{n+1}\,dA^e$$

$$\mathbf{f}_2^e = \int_{S_2^e}\left[\mathbf{H}_x \;\; \mathbf{H}_y\right]^T\;\mathbf{T}^{n+1}\,dS$$

$$\mathbf{f}_3^e = \int_{A^e}\mathbf{B}^T\;\;\mathbf{M}^n\,dA^e$$

$$\mathbf{f}_4^e = \frac{h^3}{12}\int_{A^e}\mathbf{B}^T\;\;\Delta\mathbf{M}^R\,dA^e \quad (۶۹)$$

در رابطه (۶۹)، $\mathbf{K}^e$ ماتریس سختی المان ورق DKFT است، $\mathbf{f}_1^e$ بردار نیروی المان ناشی از نیروی حجمی، $\mathbf{f}_2^e$ بردار نیروی المان ناشی از بردار تنش سطحی، $\mathbf{f}_3^e$ بردار نیروی المان ناشی از لنگر در ابتدای بازه زمانی و $\mathbf{f}_4^e$ بردار نیروی المان ناشی از تغییرات لنگر در طول بازه زمانی است. به‌علاوه $\Delta\mathbf{d}$ بردار تغییرات جابه‌جایی گرهی در یک المان است.

با درنظر گرفتن مشارکت کلیه المان‌ها، پس از رویهم‌گذاری رابطه کلی به‌صورت رابطه (۷۰) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K}\,\Delta\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (۷۰)$$

در رابطه (۷۰)، $\mathbf{K}$ ماتریس سختی کلی، $\mathbf{F}$ بردار نیروی کلی و $\Delta\mathbf{U}$ بردار تغییرات جابه‌جایی گرهی کلی در طول گام زمانی Δt است. رابطه (۷۰)، یک دستگاه معادلات خطی است که با روش حذفی گاوس می‌تواند حل شود.

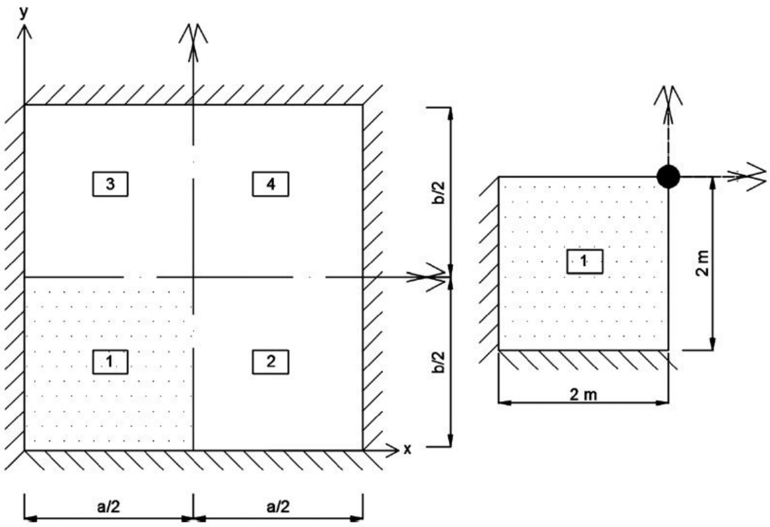
به‌منظور بررسی عملکرد المان‌های ورق پیشنهادی در مسائل ویسکوالاستیک و دقت این المان‌ها در شبکه‌های درشت[۴۶] در بخش (۷) چند مثال حل شده است و در مورد مقدار پارامتر شکل ω در ورق‌های ویسکوالاستیک بیضوی با نسبت‌های قطر بزرگ به کوچک مختلف پیشنهاداتی داده شده است.

۷- مثال‌های عددی

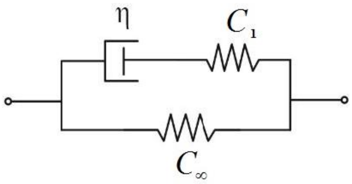
۷-۱- مثال اول: ورق مربعی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده تحت بار متمرکز مرکزی

در مثال اول ابتدا به‌منظور صحت‌سنجی برنامه اجزای محدود ویسکوالاستیک نوشته شده و سپس کارآمدی المان پیشنهادی،

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۸- ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده (هندسه ی مثال اول) [۱]



شکل ۹- مدل ماکسول- ویچرت سه المانی

یک ورق مربعی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده با طول $a = ۴\,m$، عرض $b = ۴\,m$ و ضخامت $h = ۰/۱\,m$ تحت بار متمرکز پله ای با اندازه $P = ۱۰۰\,H(t)\,kN \quad (۰ \le t \le ۱۲s)$ در مرکز آن درنظر گرفته شده است. $H(t)$ نشان‌دهنده تابع هویساید است. هندسه این مسئله در شکل (۸) نمایش داده شده است. به‌دلیل متقارن بودن مسئله، می‌توان تنها یک چهارم آن را مدل کرد.

در این مثال خصوصیات ماده ویسکوالاستیک با مدل ماکسول–ویچرت سه المانی نمایش داده شده در شکل (۹) توصیف می‌شود. ثابت‌های فنرها در این مدل $C_1 = C_\infty = ۳\times۱۰^۷\,kPa$ و ضریب میراگر $\eta = ۳\times۱۰^۷\,kPa\,s$ و نسبت پوآسون[۴۷] ثابت $\upsilon = ۰/۳$ درنظر گرفته شده است.

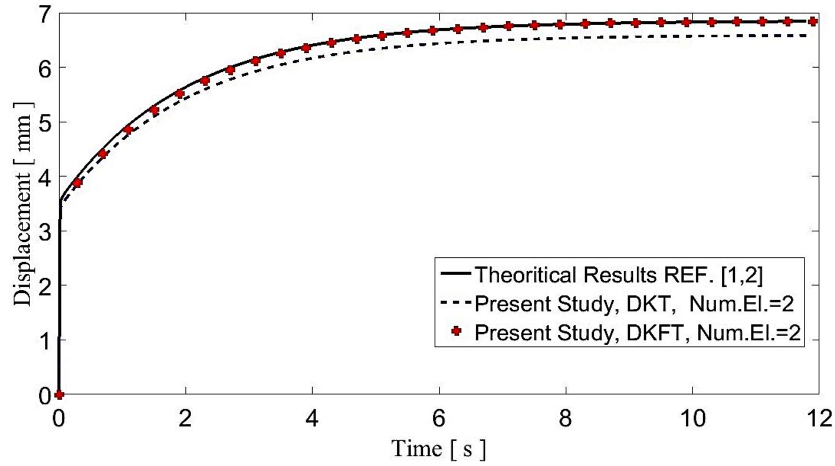
در شکل (۱۰) مقادیر جابه‌جایی w برای مرکز ورق ویسکوالاستیک و حل اجزای محدود با المان DKT و المان پیشنهادی DKFT با پاسخ تحلیلی مسئله [۱ و ۲] با استفاده از مدل ماکسول- ویچرت مقایسه شده است.

همان‌طور که در شکل (۱۰) مشخص است نتایج اجزای محدود حاصل از کد نوشته شده، با دقت بالایی با حل تحلیلی و نتایج مرجع [۲] تطابق دارد که این مطلب کارامدی برنامه کامپیوتری نوشته شده را تأیید می‌کند. با مقایسه نتایج اجزای محدود در شکل (۱۰) می‌توان دریافت که المان DKFT پیشنهادی توانمندتر از المان DKT است چرا که با شبکه درشتی شامل تنها دو المان به پاسخ تحلیلی همگرا می‌شود. شبکه استفاده شده در تحلیل اجزای محدود این مسئله در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. پارامتر شکل در این مسئله $\omega = ۱/۹ + ۱i$ درنظر گرفته شده است.

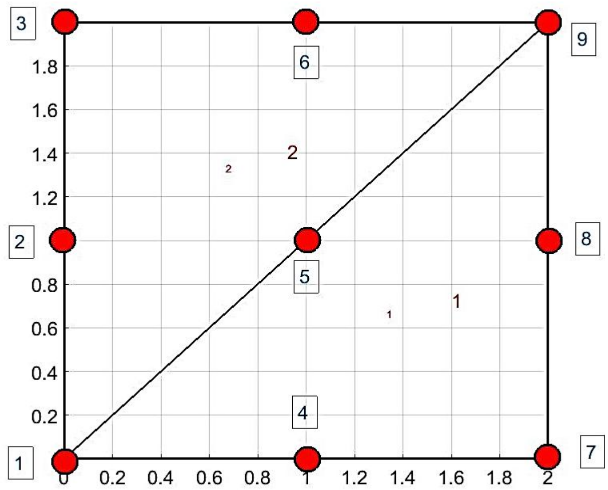
۷-۲- مثال دوم: ورق نازک بیضوی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه گیردار تحت بار متمرکز مرکزی

در مثال دوم، یک ورق ویسکوالاستیک بیضوی با تکیه‌گاه

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۱۰- مقایسه نتایج تحلیلی و اجزای محدود برای جابه‌جایی مرکز ورق ویسکوالاستیک مربعی در مثال اول

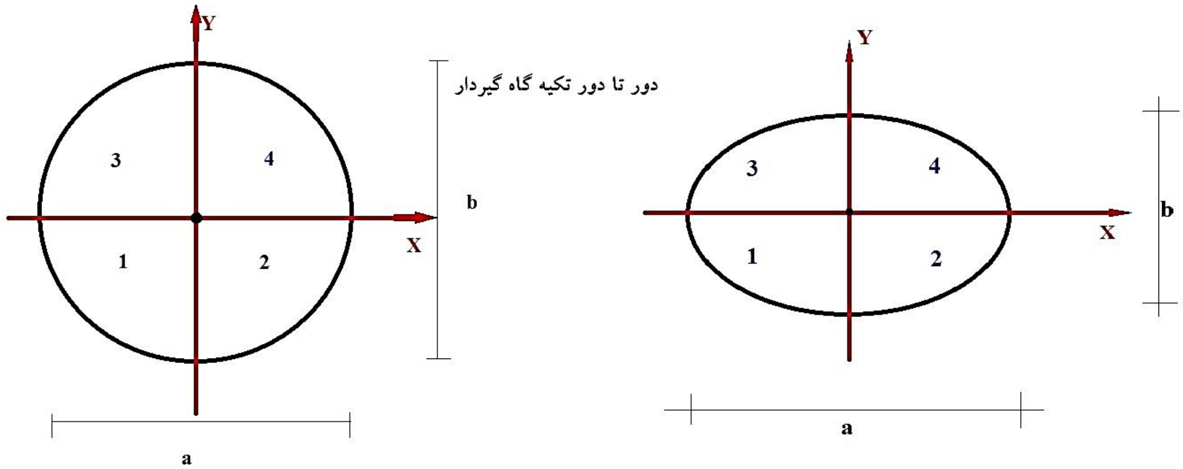


شکل ۱۱- مش به‌کار برده شده در تحلیل اجزای محدود مثال اول

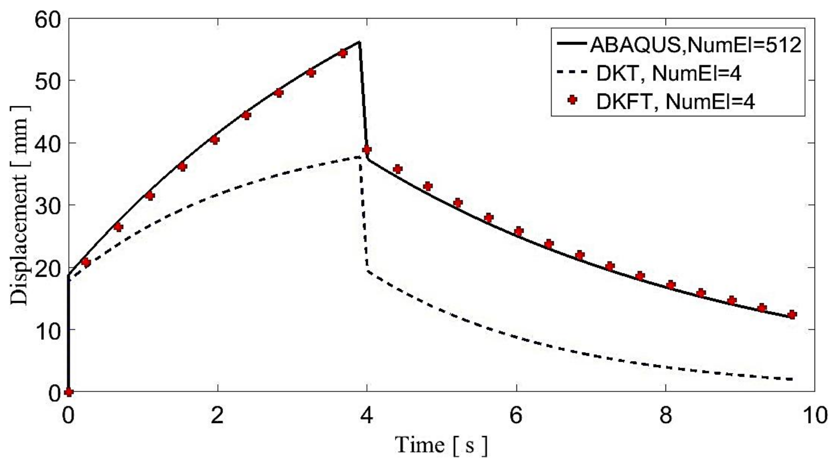
گیردار با نسبت قطر بزرگ a به قطر کوچک b مختلف و ضخامت $h = 0/1\ m$ تحت بار متمرکز ضربه‌ایِ مستطیلی[48] با اندازه $P=10(H(t)-H(t-t_0))\ N$,$(0\le t\le 10\ s,\ t_0=4s)$ در مرکز آن درنظر گرفته شده است. $H(t)$ نشان‌دهنده تابع هویساید[49] است. هندسه مثال دوم در شکل (۱۲) نمایش داده شده است. در شکل (۱۲) قطر بزرگ با a و قطر کوچک با b نمایش داده شده است.

در این مثال خصوصیات ماده ویسکوالاستیک با مدل ماکسول–ویچرت سه المانی که در شکل (۹) نشان داده شد توصیف می‌شود. ثابت‌های فنرها در این مدل $C_\infty = 0/1\ MPa,\ C_1 = 0/4\ MPa$ و ضریب میراگر $\eta = 0/4\ MPa\,s$ و نسبت پوآسون ثابت $\upsilon = 0/3$ درنظر گرفته شده است [۳۰]. در شکل (۱۳) مقادیر خیز w برای مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با شعاع $a = b = 4\ m$ برای حل اجزای محدود با المان DKT و المان پیشنهادی DKFT به‌وسیله برنامه نوشته‌شده با نتایج حاصل از مدل‌سازی مسئله در نرم‌افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. شبکه استفاده شده در حل این مثال با نرم‌افزار تجاری آباکوس در شکل (۱۴) نمایش داده شده است. پارامتر شکل در المان DKFT برابر $\omega = 4/1+0/5i$ درنظر گرفته شده است.

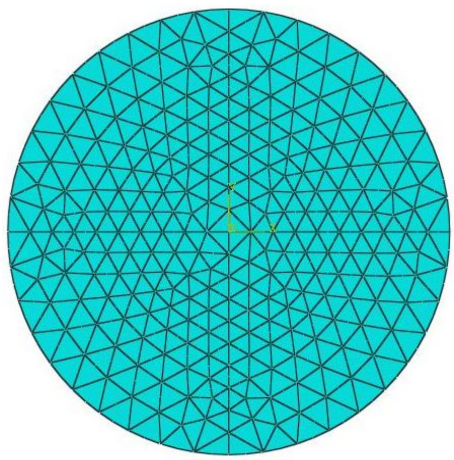
[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۱۲- ورق دایره‌ای و بیضوی با تکیه‌گاه گیردار (هندسه مثال‌های دوم و سوم)



شکل ۱۳- مقایسه نتایج اجزای محدود با ۴ المان DKT و DKFT با نتایج آباکوس برای جابه‌جایی عمودی مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با شعاع ۲ متر



شکل ۱۴- شبکه استفاده شده در حل ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با نرم‌افزار آباکوس شامل ۵۱۲ المان ورق مثلثی مرتبه دوم[۵۰]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

جدول ۱- مقایسه نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود ورق بیضوی با نسبت قطر بزرگ به کوچک مختلف در لحظه t=۴s برای b=۴m (مثال دوم)

نسبت قطر بزرگ به کوچک در ورق بیضوی $\frac{a}{b}$	مقدار پارامتر شکل ω	تعداد المان‌های پوسته مثلثی با گره میانی در مدل آباکوس	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه $t = ۴s$ با استفاده از آباکوس (mm)	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه $t = ۴s$ با استفاده از ۴ المان DKFT (خطا ٪)	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه $t = ۴s$ با استفاده از ۴ المان DKT (خطا ٪)
۱/۰	۴/۱+۰/i۵	۵۱۲	۵۶/۱۷۵	۵۵/۶۹ (۰/۸۶۳)	۳۷/۷۱ (۳۲/۸۷)
۱/۱	۳/۷+۰/i۰۰۱	۱۲۱۶	۶۱/۱۲۵۲	۶۰/۳۹ (۱/۲۰)	۳۹/۲۴ (۳۵/۸۰)
۱/۲	۵/۴۵+۰/i۱	۱۱۷۶	۶۵/۰۹۰۲	۶۴/۱۵ (۱/۴۴)	۴۰/۲۲ (۳۹/۷۱)
۱/۳	۳/۳+۰/i۱	۱۱۴۸	۶۸/۱۷۳۲	۶۷/۶۱ (۰/۸۲۶)	۴۰/۷۹ (۴۰/۱۷)
۱/۴	۳/۳+۰/i۱	۱۱۰۲	۷۰/۵۵۳۱	۶۹/۷۹ (۱/۰۸۲)	۴۱/۰۸ (۴۱/۷۷)
۱/۵	۳/۳+۰/i۱	۱۰۸۸	۷۲/۳۷۴۵	۷۱/۵۷ (۱/۱۱)	۴۱/۱۷ (۴۳/۱۱)
۱/۶	۳/۳+۰/i۱	۱۰۳۸	۷۳/۷۹۵۶	۷۲/۸۳ (۱/۳۰۸)	۴۱/۱۲ (۴۴/۲۸)
۱/۷	۳/۳+۰/i۱	۱۰۱۸	۷۴/۸۹۹۳	۷۳/۶۷ (۱/۶۴۱)	۴۰/۹۹ (۴۵/۲۷)
۱/۸	۳/۳+۰/i۱	۹۶۴	۷۵/۷۷۵۴	۷۵/۰۱ (۱/۰۱)	۴۰/۷۹ (۴۶/۱۷)
۱/۹	۳/۳+۰/i۱	۹۳۸	۷۶/۴۵۴۸	۷۵/۸۳ (۰/۸۱۷)	۴۰/۵۵ (۴۶/۹۶)
۲/۰	۳/۳+۰/i۱	۸۹۸	۷۷/۰۸۰۱	۷۶/۴۹ (۰/۷۶۵)	۴۰/۲۸ (۴۷/۷۴)

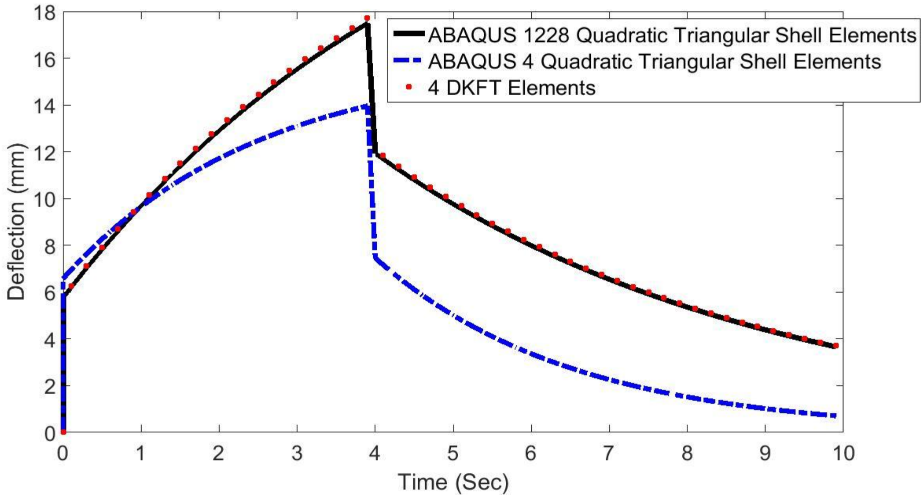
در جدول (۱) مقادیر جابه‌جایی عمودی w مرکز ورق ویسکوالاستیک بیضوی در لحظه $t = ۴s$ برای نسبت‌های مختلف قطر بزرگ به قطر کوچک، با استفاده از ۴ المان DKT و DKFT به‌دست آمده در این مطالعه با نتایج حاصل از مدل‌سازی مسائل در نرم‌افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. همین‌طور در جدول (۱) مقادیر پیشنهادی پارامتر شکل ω برای حل ورق بیضوی ویسکوالاستیک مورد نظر با نسبت قطر بزرگ به کوچک مختلف تنها با چهار المان DKFT ارائه شده است.

همان‌طور که از نتایج ارائه شده در جدول (۱) مشخص است، با بهره‌گیری از المان DKFT پیشنهادی در این مقاله تنها با استفاده از شبکه‌ای متشکل از ۴ المان می‌توان به پاسخ مسئله همگرا شد، که این مطلب نمایانگر توانمندی المان‌های ورق پیشنهادی در حل مسائل ویسکوالاستیسیته است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از این المان‌ها هزینه محاسباتی را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد و از نظر مدت زمان تحلیل اجزای محدود مسئله نیز نسبت به المان‌های ورق کلاسیک بسیار مقرون به صرفه است. با توجه به جدول (۱) می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر شکل $\omega = ۳/۳ + ۰/۱i$ را می‌توان به‌عنوان مبنا برای مسائل خمش ورق‌های نازک بیضوی ویسکوالاستیک تحت بار متمرکز در مرکز آن، در تحلیل اجزای محدود با المان DKFT درنظر گرفت.

۷-۳- مثال سوم: ورق نازک دایره‌ای ویسکوالاستیک با تکیه گاه گیردار تحت بار پله‌ای گسترده یکنواخت یک نیوتن بر مترمربع

هندسه و خصوصیات ماده در مثال سوم دقیقاً مشابه حالت دایره‌ای مثال دوم با شعاع ۲ متر درنظر گرفته شده است در حالی که تحت بار پله‌ای گسترده یکنواخت یک نیوتن بر مترمربع به‌صورت $q = ۱(H(t) - H(t - t_۰))\,\frac{N}{m^۲}$, $(۰ \le t \le ۱۰\ s,\ t_۰ = ۴s)$ قرار

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]



شکل ۱۵- مقایسه نتایج اجزای محدود با ۴ المان DKFT با نتایج آباکوس برای جابه‌جایی عمودی مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با شعاع ۲ متر تحت بار گسترده یکنواخت یکه بر واحد سطح

دارد. پارامتر شکل در این مثال بـرای المـان ورق DKFT برابـر $\omega = ۲/۷ + ۰/۸i$ درنظر گرفته شده است. جابه‌جایی عمودی مرکز ورق دایره ای ویسکوالاستیک بـرای ایـن مثـال در شـکل (۱۵) نمایش داده شـده اسـت. همـان‌طـور کـه در شـکل (۱۵) مشخص است، تنها با چهار المان پیشنهادی DKFT حل اجزای محدود به پاسخ مسئله همگرا شده است. در ایـن شـکل پاسـخ مسئله، با حل اجزای محدود با اسـتفاده از چهـار المـان پوسـته مثلثی مرتبه دوم در نرم‌افزار تجاری آباکوس نیـز مقایسـه شـده است.

۸- نتیجه‌گیری

در ایـــن مقالـــه تحلیـــل اجـــزای محـــدود ورق‌هـــای نـــازک ویسکوالاستیک با استفاده از المان‌های جدیـد پیشـنهادی مثلثـی DKFT انجام شد. برای به‌دست آوردن توابع شکل در المان‌های DKFT ، توابع شکل المان DKT با میـدان توابـع پایـه شـعاعی مخـتلط فوریـه تقویـت شـد. توابـع شـکل در المـان DKFT تمـامی‌خصوصـیات لازم توابـع شـکل را دارا هسـتند و المـان DKFT نیز آزمون وصله را برآورده مـی‌کنـد. بـرای نشـان دادن دقت المان‌های پیشنهادی و صحت روش پیشـنهادی، ورق‌هـای نازک ویسکوالاستیک مربعی، دایره‌ای و بیضوی بـا نسـبت‌هـای مختلف قطر بزرگ به کوچک با کمک این المان‌ها تحلیل شد و نتایج آن با حل تحلیلی و نتایج حاصل از المـان‌هـای کلاسـیک DKT و نرم‌افزار تجاری آبـاکوس مقایسـه شـد. در مقایسـه بـا المان‌هـای کلاسـیک ورق و DKT ، بـا اسـتفاده از المـان‌هـای پیشنهادی با تعداد المان‌های به‌مراتب کمتر نتایج بسیار دقیق‌تری حاصل شد که این مطلب منجـر بـه کـاهش هزینـه محاسـباتی به‌میزان قابل توجهی می‌شود. با بهره‌گیری از نتایج مثال‌های حل شده می‌تـوان دریافـت کـه المـان ورق مثلثـی خمشـی DKFT پیشنهادی، بـه‌خصـوص در مقایسـه بـا المـان‌هـای ورق مثلثـی خمشی کلاسیک، المان بسیار توانمندی است زیرا در حالی کـه دقت بالایی دارد، هزینه محاسباتی را نیز بـه‌طـور قابـل تـوجهی کاهش می‌دهد. گفتنی است که این روش به‌راحتی قابـل تعمـیم برای به‌دست آوردن المان چهار ضلعی است کـه المـان DKFQ نامیده می‌شود.[51]

واژه‌نامه

1. plates
2. Kirchhoff
3. transverse shear deformation

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

4. mindlin
5. constitutive equations
6. governing equations
7. Laplace transform
8. Fourier transform
9. correspondence principle
10. superposition principle
11. finite element method
12. boundary element method
13. radial point interpolation meshless method (RPIM)
14. complex Fourier radial basis functions
15. discrete Kirchhoff theory
16. discrete Kirchhoff Fourier triangular plate element
17. deflection
18. rotation
19. continuity requirements
20. transverse shear strain energy
21. discrete
22. gradient Matrix
23. compatibility
24. isoparametric formulation
25. Jacobian matrix
26. area coordinate system
27. determinant
28. radial basis functions (RBFs)
29. enrichment
30. polynomial function fields
31. functional expansion
32. interpolation
33. radial point interpolation method
34. Fourier T6
35. Kronecker delta
36. partition of unity
37. infinite piecewise continuity
38. displacement patch test
39. constant strain states
40. force patch test
41. constant twisting moment
42. tensor
43. relaxation time
44. prony series
45. integration by part
46. coarse meshes
47. Poisson's ratio
48. rectangular impulsive load
49. heaviside function
50. quadratic
51. discrete Kirchhoff Fourier quadrilateral plate element

مراجع

1. Akoz, A. Y., Kadioglu, F., and Tekin, G., "Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Plates", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 19, pp. 483-503, 2015.
2. Kadioglu, F., and Tekin, G., "Analysis of Plates under Point Load using Zener Material Model", *International Journal of Computer Electrical Engineering*, Vol. 9, pp. 484-491, 2017.
3. Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 2nd edition, New York, USA, 1959.
4. Sadd, M. H., *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Elsevier Academic Press, Massachusetts, USA, 2005.
5. Wang, Y. Z., and Tsai, T. J., "Static and Dynamic Analysis of a Viscoelastic Plate by the Finite Element Method", *Applied Acoustics*, Vol. 25, pp. 77-94, 1988.
6. Flugge, W., *Viscoelasticity*, Springer, 2nd edition, Berlin, Germany, 1975.
7. Lakes, R. S., *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, New York, USA, 2009.
8. Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, 2nd edition, New York, USA, 1982.
9. Brinson, H. F., and Brinson, L. C., *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction*, Springer, 2nd edition, New York, USA, 2015.
10. Mase, G. E., "Behavior of Viscoelastic Plates in Bending", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 86, pp. 25-39, 1960.
11. Marvin, E. L., "Viscoelastic Plate on Poroelastic Foundation", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 98, pp. 911-928, 1972.
12. Mase, G. E., "Transient Response of Linear Viscoelastic Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 589-590, 1960.
13. Sarkar, S. K., "Deflection of Viscoelastic Plates under Concentrated Impulsive Load", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, pp. 708-710, 1964.
14. Nagaya, K., "Dynamics of Viscoelastic Plate with Curved Boundaries of Arbitrary Shape", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 629-635, 1978.
15. Srinivas, S., and Rao, A. K., "An Exact Analysis of Free Vibrations of Simply-Supported Viscoelastic Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 19, pp. 251-259, 1971.
16. DeLeeuw, S. L., "Circular Viscoelastic Plates Subjected to In-Plane Loads", *AIAA Journal*, Vol. 9, pp. 931-937, 1971.
17. Robertson, S. R., "Solving the Problem of Forced Motion of Viscoelastic Plates by Valanis' Method with an Application to a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 14, pp. 263-278, 1971.
18. Logan, D. L., *A First Course in the Finite Element Method*, Cengage Learning Engineering, 5th edition, Connecticut, USA, 2012.
19. Brebbia, C. A., and Dominguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, WIT Press/Computational Mechanics Publications, 2nd edition, Southampton, UK, 1992.
20. White, J. L., "Finite Elements in Linear Viscoelasticity", *Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, USA, pp. 489-516, 15-17 October, 1968.
21. Chen, T. M., "The Hybrid Laplace Transform/ Finite Element Method Applied to the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-05-14]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.1.7.8]
[DOI: 10.29252/jcme.38.1.81]

Beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 509-522, 1995.
22. Yi, S., and Hilton, H. H., "Dynamic Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 4081-4096, 1994.
23. Nguyen, S. N., Lee, J., and Cho, M., "A Triangular Finite Element using Laplace Transform for Viscoelastic Laminated Composite Plates Based on Efficient Higher-Order Zigzag Theory", *Composite Structures*, Vol. 155, pp. 223-244, 2016.
24. Temel, B., and Sahan, M. F., "An Alternative Solution Method for the Damped Response of Laminated Mindlin Plates", *Composites Part B-Engineering*, Vol. 47, pp. 107-117, 2013.
25. Attia, M. A., El-Shafei, A. G., and Mahmoud, F. F., "Nonlinear Analysis of Frictional Thermo-Viscoelastic Contact Problems using FEM", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, p. 1450028, 2014.
26. Wang, J. G., and Liu, G. R., "A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 1623-1648, 2002.
27. Khaji, N., and Hamzehei Javaran, S., "New Complex Fourier Shape Functions for the Analysis of Two-Dimensional Potential Problems using Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 260-272, 2013.
28. Hamzehei-Javaran, S., "Approximation of the State Variables of Navier's Differential Equation in Transient Dynamic Problems using Finite Element Method Based on Complex Fourier Shape Functions", *Asian Journal of Civil Engineering*, Vol. 19, pp. 431-450, 2018.
29. Batoz, J. L., Bathe, K. J., and Ho, L. W., "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1771-1812, 1980.
30. Zocher, M. A., Groves, S. E., and Allen, D. H., "A Three-Dimensional Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 2267-2288, 1997.
31. Kansara, K., "Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java", M.Sc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute & State University, Blacksburg, Virginia, USA, 2004.
32. Sorvari, J., and Hamalainen, J., "Time Integration in Linear Viscoelasticity- a Comparative Study", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 14, pp. 307-328, 2010.
33. Zienkiewicz, O. C., Watson, M., and King, I. P., "A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, pp. 807-827, 1968.
34. Simo, J. C., and Hughes, T. J. R., *Computational Inelasticity*, Springer, New York, USA, 1998.
35. Feng, W. W., "A Recurrence Formula for Viscoelastic Constitutive Equations", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, pp. 675-678, 1992.
36. Taylor, R. L., Pister, K. S., and Goudreau, G. L., "Thermo-Mechanical Analysis of Viscoelastic Solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, pp. 45-59, 1970.