نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

شبیه‌سازی عددی امواج هارمونیک تولید شده توسط موج‌ساز پیستونی در کانال موج به‌روش بدون شبکه توابع پایه نمایی با استفاده از الگوریتم اویلری- لاگرانژی مخلوط

سید مهدی زندی* و امین رفیع‌زاده
گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.1]

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۰۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۸/۱۸)

چکیده– در این مقاله، روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای شبیه‌سازی امواج هارمونیک تولید شده توسط موج‌ساز پیستونی در سیال دارای سطح آزاد ارائه شده است. فرمول‌بندی روش ارائه شده بر اساس رویکرد اویلری- لاگرانژی مخلوط و مبتنی بر پتانسیل سرعت است. در روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای گسسته‌سازی دامنه حل فقط از تعدادی نقطه روی مرزهای سیال استفاده می‌شود. با توجه به استفاده از الگوریتم اویلری- لاگرانژی مخلوط، به‌منظور به‌هنگام‌سازی هندسه حل در طی زمان، نقاط سطح آزاد فقط در راستای قائم جابه‌جا می‌شود. برای جلوگیری از برگشت امواج به داخل دامنه، در انتهای کانال موج از میرایی مصنوعی استفاده شده است. با استفاده از روش بدون شبکه ارائه شده، امواج غیرخطی با دامنه بزرگ شبیه‌سازی و نتایج با دیگر روش‌ها مقایسه شده است. روش حاضر با وجود هزینه اندک محاسباتی از دقت مطلوبی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: امواج هارمونیک، موج‌ساز پیستونی، کانال موج، فرمول‌بندی اویلری- لاگرانژی مخلوط، توابع پایه نمایی، روش بدون شبکه.

Simulation of Harmonic Waves Generated by the Piston-type Wave-maker in the Wave Flume via the Exponential Basis Functions Mesh-free Method and MEL Formulation

S. M. Zandi* and A. Rafizadeh

Department of Civil Engineering and Transportation, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Abstract*: In this article, a meshless method based on exponential basis functions (EBFs) is presented to simulate the harmonic waves with moving free-surfaces generated by the piston-type wave maker. Accordingly, velocity potential is adopted in a Mixed Eulerian-Lagrangian (MEL) approach. Boundary conditions are met through a point-wise collocation approach. In order to update the geometry in the simulation time, the free surface points are only moved vertically. To reduce the reflection in*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: s.m.zandi@eng.ui.ac.ir

the wave flume, a damping zone is added at the far end opposite to the wave maker, where the velocity is modified by adding an artificial damping term. The results indicated the ability of this numerical method in simulating free surface flow problems like non-linear waves with a good accuracy, as well as suitable performances and the least run time calculation.

Keywords: *Harmonic waves, Piston-type wave maker, Wave flume, Mixed Eulerian-Lagrangian, Exponential basis functions, Meshless method.*

فهرست علائم

$\mathbf{a}_h$	شتاب پس از اعمال میرایی مصنوعی	$\mathbf{V}_i$	بردارهای مشارکت پایه‌ها
C_i	ضرایب ثابت مستقل	α_i و β_i	اعداد مختلط
$\mathbf{G}$	ماتریس مشارکت پایه‌ها	v	تابع میرایی
$\mathbf{G}^+$	شبه معکوس ماتریس $\mathbf{G}$	x_p	تاریخچه زمانی حرکت پدال موج‌ساز
g	شتاب گرانشی زمین	x_h	مختصات شروع ناحیه میرایی انتهایی
h	عمق آب	ϕ	پتانسیل سرعت
L	طول کانال	$\Re$	قسمت حقیقی مقادیر محاسبه شده
L_{dm}	طول ناحیه میرایی انتهایی	η	تغییر مکان سطح آزاد سیال
m	تعداد نقاط استفاده شده روی سطح آزاد	Γ_B	مرز پایینی کانال
n	تعداد کل نقاط روی مرزهای سیال	Γ_∞	مرز انتهایی کانال
$\mathbf{R}$	ماتریس تصویر	Ω	دامنه مسئله
$S_\circ$	دامنه جابه‌جایی موج‌ساز	$\bar{\mathbf{\Phi}}_B$	بردار شرایط مرزی
s_j	ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایه‌ها	ρ	چگالی سیال
t	زمان حل	ω	فرکانس تحریک
$\mathbf{u}_h$	سرعت پس از اعمال میرایی مصنوعی		

۱- مقدمه

کانال موج در شبیه‌سازی اثر امواج بر اجسام شناور، غوطه‌ور، سازه‌های دریایی و ... از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بررسی و مطالعه امواج در کانال موج با روش‌های عددی مختلفی انجام گرفته است. با توجه به نوسانات سطح آزاد و تغییر هندسه حل در زمان، استفاده از روش‌های بدون شبکه می‌تواند مقرون به‌صرفه باشد. در علم دینامیک سیالات محاسباتی[1] که با روش‌های حل عددی به مسائل مکانیک سیالات می‌پردازد، سه رویکرد اصلی برای بیان حرکت یک سیال با سطح آزاد وجود دارد؛ این سه رویکرد عبارتند از: روش‌های اویلری[2]، لاگرانژی[3] و ترکیب اویلری- لاگرانژی[4]. در رویکرد اویلری که به روش‌های بدون حرکت شبکه نیز معروف هستند، تمرکز روی یک حجم خالص سیال است که در محل خود ثابت بوده و سیال عبور کننده از آن که به‌طور مرتب جایگزین می‌شود، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در رویکرد لاگرانژی که به روش‌های حرکت شبکه نیز معروف هستند، ذرات سیال دنبال می‌شوند و بدین‌ترتیب شکل حجم سیال دائماً تغییر کرده ولی جرم کل آن ثابت باقی می‌ماند. در رویکرد ترکیب اویلری- لاگرانژی، مخلوطی از ویژگی‌های هر دو رویکرد با هم وجود دارد. در این رویکرد، محاسبات می‌تواند روی یک شبکه منظم انجام شود.

تا پیش از سه دهه گذشته، فرمول‌بندی معادلات مکانیک

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.1]

سیالات در شکل اویلری بسیار رایج بوده و از آن برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شده است. در این رویکرد، تحلیل مسائلی که دارای مرزهای با اشکال گوناگون هستند نظیر مسائل اندرکنش سیال با سازه[5] به همراه سطح آزاد، دشوار بوده و نیازمند حل مسائل تماسی[6] بسیار پیچیده هستند [۱]. از سوی دیگر، در سال‌های اخیر روش‌های لاگرانژی بیشتر توجه محققین را به خود جلب کرده و همچنین ترکیب دو روش برای افزایش دقت و قدرت حل، تحت عنوان فرمول‌بندی اویلری- لاگرانژی اختیاری[7] مورد استفاده قرار گرفته است.

در روش‌های عددی رایج نظیر اجزای محدود، تفاضل محدود و حجم محدود، کل فضای دامنه مسئله به یک شبکه گسسته‌سازی می‌شود. به هر نوع فضای خالی بین خطوط مشبک که توسط شکل‌گیری منظمی از اتصال نقاط دامنه به یکدیگرحاصل می‌شود، شبکه گفته می‌شود. روش‌های مختلف عددی برای گسسته‌سازی دامنه حل برای یک مسئله از تعاریف مختلفی برای مفهوم شبکه استفاده می‌کنند. در روش المان محدود از شبکه المان، در تفاضل محدود از شبکه نقاط و در روش حجم محدود از شبکه سلولی استفاده می‌شود [۲].

از آنجایی که در اکثر روش‌های عددی موجود نظیر اجزای محدود، دامنه مسئله توسط یک شبکه گسسته‌سازی می‌شود؛ بنابراین مشکلات و محدودیت‌هایی در حل مسائل مختلف به‌خصوص سیالات به وجود خواهد آمد. از مهم‌ترین این مشکلات می‌توان به صرف وقت زیاد در تولید یک شبکه مناسب برای مسئله مورد نظر، هزینه محاسباتی زیاد و کاهش دقت محاسبات در مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ اشاره کرد. در آن سوی روش اجزای محدود می‌توان به روش‌های بدون شبکه اشاره کرد که بدون نیاز به یک سیستم شبکه‌بندی و تنها با استفاده از نقاط گره‌ای به حل یک مسئله می‌پردازد. اگرچه این روش‌ها نیز با مشکلات مختلفی روبرو هستند، اما در مسائلی که هندسه حل در طول زمان تغییر می‌کند راه‌گشا خواهند بود. در روش‌های بدون شبکه، دامنه و مرز مسئله بدون نیاز به هرگونه شبکه، توسط تعدادی نقاط گره‌ای گسسته‌سازی شده و سپس برای هر یک از این نقاط، سیستمی از معادلات جبری معرفی می‌شود؛ درنهایت فرایند حل با انجام محاسبات روی این نقاط صورت می‌گیرد.

برومند و همکاران در سال ۲۰۱۰ روش بدون شبکه توابع پایه نمایی را ارائه کرده‌اند. از این روش تاکنون برای دامنه گسترده‌ای از مسائل استاتیکی و دینامیکی استفاده شده است و تحقیق روی آن همچنان ادامه دارد. از مزایای اصلی این روش، ساده بودن فرمول‌بندی و پیاده‌سازی رایانه‌ای، سرعت بالا برای حل مسائل وابسته به زمان و همچنین توانایی ارائه پاسخ‌هایی با دقت بسیار زیاد برای مسائل مختلف است [۸-۳].

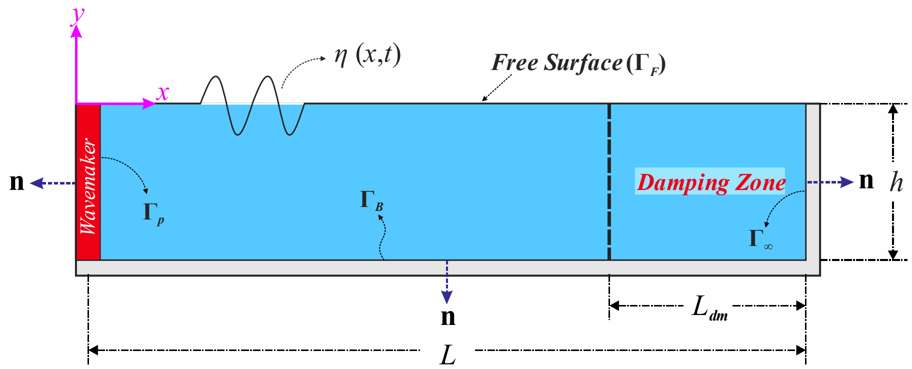
در این تحقیق، فرم مرزی روش توابع پایه نمایی[8] برای شبیه‌سازی امواج بلند هارمونیک در کانال موج توسعه داده شده است. به این منظور معادلات حاکم برای سیال غیرلزج تراکم‌ناپذیر با رویکرد اویلری- لاگرانژی مخلوط بر اساس پتانسیل سرعت مورد استفاده قرار گرفته است. بنابراین نقاط سطح آزاد سیال فقط در راستای قائم جابه‌جا می‌شوند و لذا نیازی به منظم‌سازی نقاط سطح آزاد در طول زمان نخواهد بود. نتایج حاصل برای شبیه‌سازی امواج بلند با دیگر روش‌های عددی مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی مسائل سطح آزاد بر مبنای پتانسیل سرعت

حرکت سیال در حالت دو بعدی با توجه به سیستم مختصات کارتزین Oxy تعریف می‌شود که در آن y بیانگر محور قائم است. سیال مورد نظر غیرلزج و تراکم‌ناپذیر بوده و عمق آن، h، ثابت فرض شده است. بنابراین معادله حاکم بر حرکت سیال دارای سطح آزاد توسط رابطه لاپلاس با درنظر گرفتن پتانسیل سرعت $\varphi(x, y)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^{۲}\varphi = \frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial y^{۲}} = ۰ \qquad (۱)$$

شکل (۱) نمایش دهنده طرح کانال مورد نظر به همراه دامنه



شکل ۱- دامنه محاسباتی به همراه مرزهای آن، موج‌ساز پیستونی در سمت چپ و ناحیه میرایی مصنوعی در انتهای کانال

محاسباتی و شرط مرزی نویمان روی مرزهای پایین، چپ و راست و شرط مرزی دریشله در سطح آزاد است. با درنظر گرفتن مرز پایینی کانال به‌صورت هموار و نفوذناپذیر، عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \quad \text{at} \quad y=-h \quad \text{on} \quad \Gamma_B \qquad (۲)$$

همچنین برای مرز سمت راست (انتهای کانال):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \quad \text{at} \quad x=L \quad \text{on} \quad \Gamma_\infty \qquad (۳)$$

و درنهایت برای مرز مربوط به پدال موج‌ساز در سمت چپ کانال (ابتدای کانال) رابطه (۴) درنظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\dot{x}_p(t) \quad \text{at} \quad x=x_p(t) \quad \text{on} \quad \Gamma_p \qquad (۴)$$

که در رابطه فوق، $x_p(t)$ تاریخچه زمانی حرکت پدال موجساز است. شرط مرزی دینامیکی سطح آزاد سیال[9] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+g\eta=0 \quad \text{on} \quad y=\eta(x,t) \qquad (۵)$$

و همچنین شرط مرزی سینماتیکی[10] روی سطح آزاد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}=0 \quad \text{on} \quad y=\eta(x,t) \qquad (۶)$$

فرم لاگرانژی روابط (۵) و (۶) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{Dx}{Dt}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \frac{Dy}{Dt}=\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (۷)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt}=-g\eta+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi \qquad (۸)$$

اگر حرکت نقاط سطح آزاد در راستای افقی را محدود کرده و فقط در راستای قائم جابه‌جایی انجام شود، روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\varphi\cdot\nabla\eta \qquad (۹)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+g\eta+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t}=0 \qquad (۱۰)$$

که با مرتب‌سازی و گسترش رابطه فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=-g\eta-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (۱۲)$$

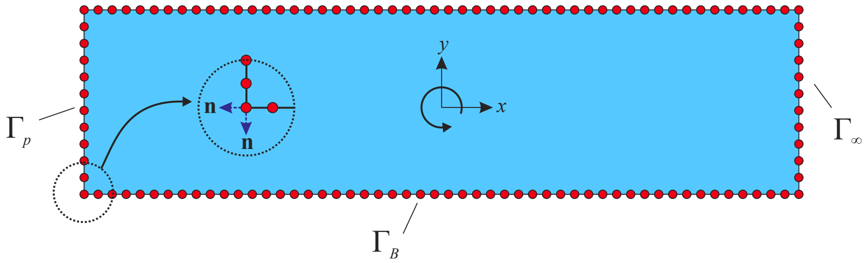
روابط فوق بیانگر فرم اویلری- لاگرانژی مخلوط[11] شرط مرزی روی سطح آزاد است. در این شکل از معادلات، نقاط سطح آزاد در راستای افقی بدون حرکت بوده و فقط در راستای قائم حرکت می‌کنند.

۳- میرایی مصنوعی در انتهای کانال موج

به‌منظور جلوگیری از برگشت موج به داخل دامنه حل نوعی میرایی مصنوعی در انتهای ناحیه حل به‌صورت زیر اعمال می‌شود (شکل ۱):

$$\mathbf{u}_d=\mathbf{u}\left(1-v(x)\right) \qquad (۱۳)$$

که $\mathbf{u}_d$ معرف سرعت پس از اعمال میرایی مصنوعی است. همچنین تابع میرایی $v(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۲- نقاط مرزی استفاده شده در روش عددی و قرارگیری دو نقطه مرزی در گوشه‌ها

$$v(x)=\frac{1}{2}v_0\left(1-\cos\left(\frac{\pi(x-x_h)}{L_{dm}}\right)\right),\quad x\ge x_h \qquad (۱۴)$$

که $v_0=0/1$ ضریب میرایی [۹]، x_h مختصات سمت چپ ناحیه میرایی انتهایی و $L_{dm}=3h$ طول ناحیه میرایی انتهایی است (شکل ۱).

۴- روش توابع پایه نمایی برای حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت

پتانسیل سرعت در کل دامنه حل با استفاده ازتوابع پایه نمایی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود [۳]:

$$\hat{\varphi}=\sum C_i\, e^{\alpha_i x+\beta_i y} \qquad (۱۵)$$

در این رابطه، x و y مختصات یک نقطه عمومی در دامنه Ω، α_i و β_i اعداد مختلط و C_i ضرایب ثابت مستقل از مختصات هستند. حال با قرار دادن رابطه (۱۵) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2=0 \qquad (۱۶)$$

با توجه به رابطه (۱۶)، می‌توان مقادیر α و β را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\alpha_i=\pm\mathbf{i}\beta_i \quad \text{or} \quad \beta_i=\pm\mathbf{i}\alpha_i \qquad (۱۷)$$

که در این رابطه، $i=\sqrt{-1}$ است.

در ادامه حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت، باید ضرایب C_i در رابطه (۱۵) محاسبه شوند. برای این منظور، دامنه مسئله به تعدادی نقطه که مرزهای سیال را تشکیل می‌دهند، گسسته‌سازی می‌شود. به‌منظور سهولت در محاسبه بردارهای مختلف روی مرز و حفظ ترتیب نقاط مرزی، نقاط به‌صورت پادساعت‌گرد شماره‌گذاری می‌شوند. توجه شود که در گوشه‌های ناحیه حل از دو نقطه در یک محل استفاده خواهد شد که هرکدام از آنها جزء یکی از مرزهای متقاطع محسوب شده و دارای بردار نرمال متفاوت خواهند بود. در دو گوشه سطح آزاد نیز از دو نقطه مرزی استفاده می‌شود که یکی جزء دیواره و دیگری جزء سطح آزاد محسوب می‌شود [۷] (شکل ۲).

برای محاسبه ضرایب C_i فرض می‌شود:

$$C_i=\mathbf{V}_i^T\mathbf{R}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_B \qquad (۱۸)$$

درایه‌های بردار $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_B$ در رابطه فوق، مقادیر شرایط مرزی در لحظه و هندسه مورد نظر است.

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_B=\left\{(\varphi_B)_1 \quad (\varphi_B)_2 \quad \dots \quad (\varphi_B)_m \;\middle|\; (\partial\varphi_B)_{m+1} \quad (\partial\varphi_B)_{m+2} \quad \dots(\partial\varphi_B)_n\right\}^T \qquad (۱۹)$$

که در رابطه فوق، n تعداد کل نقاط روی مرزهای سیال و m تعداد نقاط استفاده شده روی سطح آزاد است. همچنین در این رابطه داریم:

$$(\varphi_B)_k=[\varphi]_{x=x_k,y=y_k} \quad \forall(x_k,y_k)\in\Gamma_F,\ k=1,\dots,m \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned}&(\partial\varphi_B)_k=n_x\dot{x}_p(t) \quad \forall(x_k,y_k)\in\Gamma_P,\\&(\partial\varphi_B)_k=0 \quad \forall(x_k,y_k)\in\Gamma_B\,\&\,\Gamma_\infty\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

بردار $\mathbf{V}_i$ بر اساس شرایط مرزی موجود در هر یک از نقاط مرزی و یا به‌عبارت دیگر بر اساس درایه‌های بردار $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_B$ تعریف می‌شود. بنابراین در نقاط مربوط به Γ_S، باید $\partial/\partial n$ پایه iام در آن نقطه محاسبه شود؛ در نقاط مربوط به Γ_F نیز مقدار پایه iام در آن نقطه محاسبه و در درایه نظیر آن در بردار $\mathbf{V}_i$ قرار داده می‌شود. بنابراین، با توجه به توضیحات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\mathbf{V}_i=\frac{1}{s_i}\left\{(\varphi_i)_1 \quad (\varphi_i)_2 \quad \dots \quad (\varphi_i)_m \;\middle|\; (\partial\varphi_i)_{m+1} \quad (\partial\varphi_i)_{m+2} \quad \dots(\partial\varphi_i)_n\right\}^T \qquad (۲۲)$$

که در این رابطه داریم:

$$(\varphi_i)_k = [e^{\alpha_i x+\beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F,\ k=1,...,m \tag{۲۳}$$

$$(\partial\varphi_i)_k = [(\alpha_i n_x + \beta_i n_y) e^{\alpha_i x+\beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_P \ \&\ \Gamma_B \ \&\ \Gamma_\infty \tag{۲۴}$$

همچنین s_j ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایه‌ها است.

$$s_j = \max_l \left(\left|V_j^l\right|\right), \quad l=1,...,M \tag{۲۵}$$

در رابطه فوق، V_j^l برابر l امین المان $\mathbf{V}_i$ است و همچنین عبارت $|\,.\,|$ طول بردار است.

سری $\hat{\varphi}$ با درنظر گرفتن رابطه (۱۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{\Phi}}_B) e^{\alpha_i x+\beta_i y}, \tag{۲۶}$$

حال اگر درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{\Phi}}_B$ را توسط سری فوق براورد کنیم، خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_B = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{\Phi}}_B) \mathbf{V}_i = \mathbf{G}\mathbf{R}\bar{\mathbf{\Phi}}_B, \quad \mathbf{G} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T) \tag{۲۷}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{G}$ ماتریس متقارن $M \times M$ است. از آنجایی که ممکن است مرتبه ماتریس فوق از M کمتر شود؛ بنابراین ماتریس $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^+ \tag{۲۸}$$

که در این رابطه، $\mathbf{G}^+$ شبه معکوس[۱۲] ماتریس $\mathbf{G}$ است. در پایان $\hat{\varphi}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\varphi} = \Re\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i} e^{\alpha_i x+\beta_i y} \mathbf{V}_i^T\right) \mathbf{R} \bar{\mathbf{\Phi}}_B\right] \tag{۲۹}$$

که در رابطه فوق، $\Re[\cdot]$ بیانگر قسمت حقیقی مقادیر محاسبه شده است. ضرایب α_i و β_i بر اساس روش ارائه شده در مراجع [۳ و ۷] انتخاب می‌شوند. باید توجه داشت که تعداد پایه‌های مورد استفاده تأثیر مستقیم بر نتایج خواهد داشت.

۵- الگوریتم شبه لاگرانژی حل و بهنگام‌سازی هندسه در روش عددی

در ابتدا هندسه اولیه مسئله مورد نظر تعریف شده و نقاط مرزی روی مرزها قرار داده می‌شود. سرعت نقاط مرزی نیز بر اساس شرایط اولیه مسئله مقداردهی می‌شود؛ بدیهی است، در مسائلی که از حالت سکون آغاز می‌شوند، سرعت اولیه همه نقاط مرزی برابر صفر خواهد بود. درنظر بگیرید که در حال حاضر در گام nام ($\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$) حل به‌سر می‌بریم. ابتدا، شرایط مرزی در لحظه t^n و در هندسه موجود در این لحظه، $\mathbf{x}^n$، با استفاده از رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_B^n = \bar{\mathbf{\Phi}}_B(\mathbf{x}^n, t^n) \tag{۳۰}$$

بردار $\mathbf{V}_i$ نیز با استفاده از رابطه (۲۲) در لحظه t^n و در هندسه $\mathbf{x}^n$، محاسبه شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{V}_i^n = \mathbf{V}_i\ (\mathbf{x}^n, t^n) \tag{۳۱}$$

بدین ترتیب پاسخ معادله (۱) به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\hat{\varphi}^n = \sum C_i^n\, e^{\alpha_i x+\beta_i y} \tag{۳۲}$$

و ضرایب C_i^n به‌صورت زیر خواهند بود:

$$C_i^n = \mathbf{V}_i^{n\,T}\, \mathbf{R}^n\ \bar{\mathbf{\Phi}}_H^n \tag{۳۳}$$

که $\mathbf{R}^n$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{R}^n = \left(\sum \left(\mathbf{V}_i^n\, \mathbf{V}_i^{nT}\right)\right)^{-1} \tag{۳۴}$$

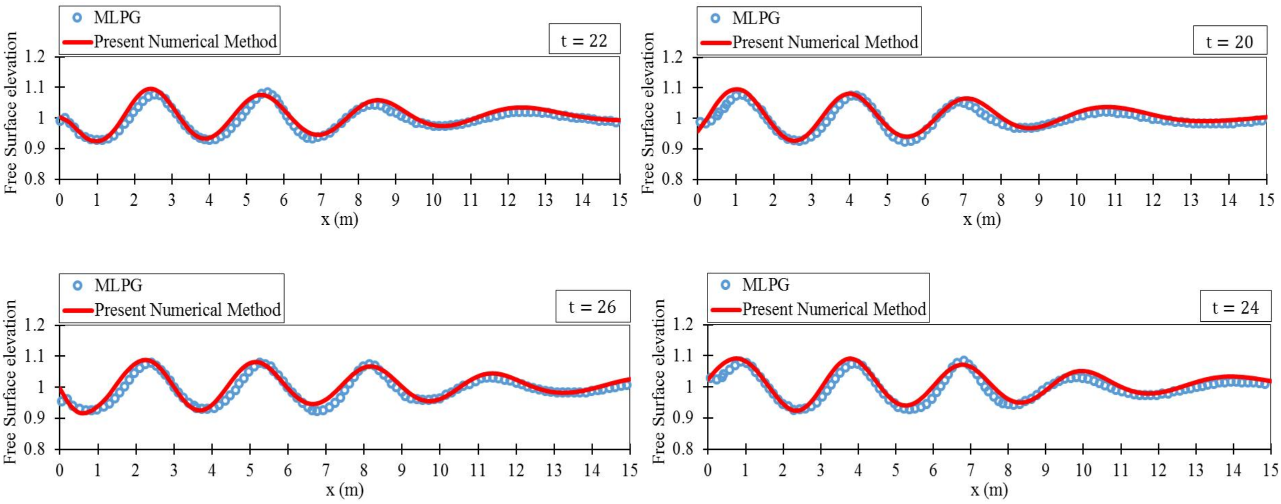
بنابراین حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت در ابتدای گام زمانی nام، لحظه t^n، کامل خواهد بود. در ادامه، بردار سرعت توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla^n \phi = \Re\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i^n} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x+\beta_i y} \mathbf{V}_i^{n\,T}\right) \mathbf{R}^n \bar{\mathbf{\Phi}}_H^n\right] \tag{۳۵}$$

و بردار سرعت به‌دست آمده از رابطه فوق ($\mathbf{u}^n = \nabla^n \phi$) با اعمال میرایی مصنوعی توسط رابطه (۱۳) اصلاح می‌شود.

به‌منظور حل پارامتر $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ در رابطه (۱۱)، یک تابع چند جمله‌ای روی نقاط مرزی سطح آزاد درون‌یابی شده و سپس پارامتر مورد نظر توسط تابع فوق روی این نقاط محاسبه

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.1]



شکل ۳- مقایسه پروفیل سطح آزاد توسط روش عددی حاضر با روش بیان شده در مرجع [۹] در زمان‌های مختلف برای $S_0 = 0/05$

می‌شود. با محاسبه سرعت روی تمام نقاط مرزی، تغییر مکان سطح آزاد آب در بالای سطح آب، η^{n+1} و همچنین پتانسیل سرعت، φ^{n+1} به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌هنگام می‌شوند:

$$\eta^{n+1} = \eta^{n} + \Delta t\left(\frac{\partial \varphi^{n}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{n}}{\partial x}\frac{\partial \eta^{n}}{\partial x}\right) \tag{۳۶}$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^{n} + \Delta t\left(-g\eta^{n} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi^{n}}{\partial x}\right)^{2} - \left(\frac{\partial \varphi^{n}}{\partial y}\right)^{2}\right] - \frac{\partial \varphi^{n}}{\partial y}\frac{\partial \varphi^{n}}{\partial x}\frac{\partial \eta^{n}}{\partial x}\right) \tag{۳۷}$$

۶-مثال عددی

مسئله‌ای که در این بخش ارائه می‌شود، از مرجع [۹] انتخاب شده است. تحریک اعمالی به موج‌ساز پیستونی در سمت چپ کانال به‌صورت زیر است:

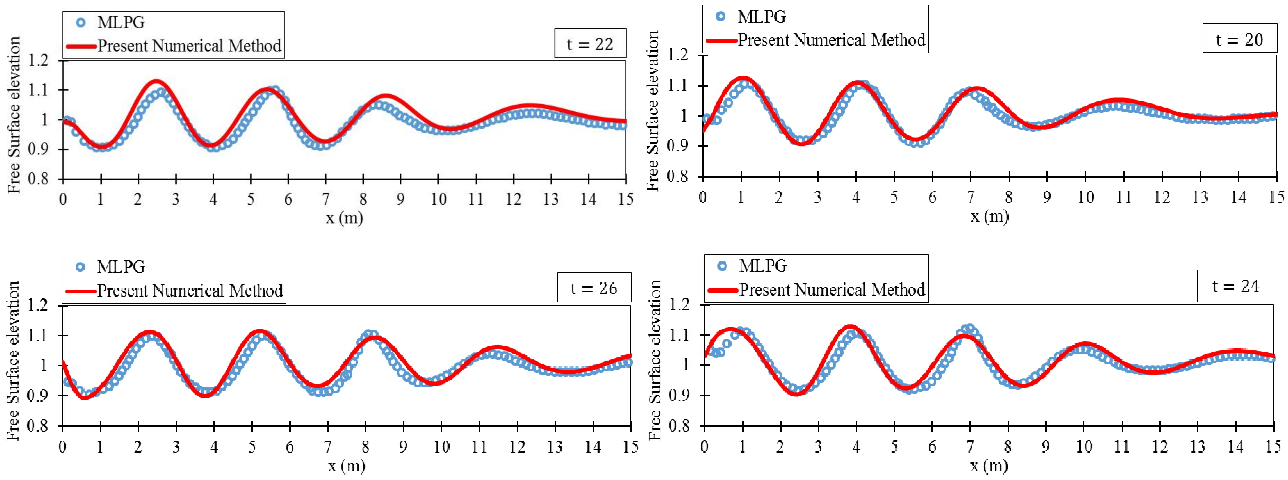
$$x_p(t) = S_0\left(1 - \cos(\omega t)\right) \tag{۳۸}$$

S_0 برابر ۰/۰۵ و ۰/۰۶۴ بیانگر دو دامنه مختلف جابه‌جایی موج‌ساز، و $\omega = 1/45$ فرکانس تحریک است. طول کانال (L) ۲۴ و عمق آب در شرایط ایستا (h) یک درنظر گرفته شده و شتاب ثقل (g)، ۱/۰ است. در مرجع [۹] برای حل این مسئله از ۶۸۱۷ (۱۷×۴۰۱) گره استفاده شده است. در اینجا از ۱۹۲ پایه و ۲۳۶ نقطه مرزی برای حل استفاده می‌شود؛ حل این مسئله با $\Delta t = 0/05$ انجام شده و نتایج آن در ادامه ارائه می‌شود. نتایج پروفیل سطح آزاد در لحظات زمانی مختلف ۲۰، ۲۲، ۲۴ و ۲۶ در شکل‌های (۳) و (۴) با مرجع [۹] مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، روش ارائه شده حتی با گام زمانی نسبتاً بزرگ و نقاط مرزی اندک پاسخ‌های خوبی به‌دست می‌دهد.

۷-نتیجه‌گیری

در این مقاله روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای شبیه‌سازی کانال موج با موج‌ساز پیستونی به‌کار گرفته شد. با استفاده از مفهوم شبه لاگرانژی حرکت در کنار بدون شبکه بودن روش حل معادلات، این امکان فراهم شد تا جابه‌جایی‌های سطح آزاد به‌خوبی توسط نقاط مرزی مدل‌سازی شود. مسائل مختلفی نظیر تلاطم سطحی با دامنه کوچک و بزرگ، اثر تحریک قائم بر تلاطم سطحی سیال، مسئله موج ایستا و شکست سد توسط روش ارائه شده بررسی شده است که در اینجا مجال ارائه آنها نیست. با این وجود یک نمونه از این مسائل جهت نشان دادن کارائی روش در مدل کردن امواج غیرخطی ایجاد شده در سطح آزاد توسط موج‌ساز در قالب شبه لاگرانژی ارائه شد. در این روش تنها با دنبال کردن نقاط مرزی سیال می‌توان هندسه حل را به‌هنگام کرده و به‌سادگی سرعت و جابه‌جایی نقاط را

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]
[DOI: 10.29252/jcme.37.1.1]



شکل ۴- مقایسه پروفیل سطح آزاد توسط روش عددی حاضر با روش بیان شده در مرجع [۹] در زمان‌های مختلف برای $S_{\circ} = ۰/۰۶۴$

محاسبه کرد. لذا هیچ‌گونه انتقال اطلاعات بین شبکه حل و یا نامنظمی شبکه و هزینه تولید شبکه جدید نیاز نخواهد بود. امواج مورد بررسی با دامنه‌ای در حدود ۱۰ درصد عمق بوده و نشان می‌دهد که روش ارائه شده توانایی شبیه‌سازی امواج با دامنه بزرگ را دارد.

واژه‌نامه

1. computational fluid mechanics (CFD)
2. Eulerian methods
3. Lagrangian methods
4. combined Lagrangian-Eulerian methods
5. fluid-structure interaction (FSI)
6. contact problems
7. arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation (ALE)
8. exponential basis function
9. dynamic free surface boundary condition (D.F.S.B.C)
10. kinematic free surface boundary condition (K.F.S.B.C)
11. semi-Lagrangian or mixed eulerian-Lagrangian
12. pseudo inverse

مراجع

1. Idelsohn, S. R., Oñate, E., and Del, P. F., “A Lagrangian Meshless Finite Element Method Applied to Fluid-structure Interaction Problems”, *Computers and Structures*, Vol. 81, pp. 655-671, 2003.
2. Liu, G. R., *Mesh Free Methods: Moving Beyond Finite Element Method*, Taylor & Francis, 2010.
3. Boroomand, B., Soghrati, S., and Movahedian, B., “Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, pp. 971-1018, 2010.
4. Boroomand, B., and Mossaiby, F., “Generalization of Robustness Test Procedure for Error Estimators, Part I: Formulation for Patches Near Kinked Boundaries”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 64, pp. 427-460, 2005.
5. Shamsaei, B., and Boroomand, B., “Exponential Basis Functions in Solution of Laminated Structures”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2010-2019, 2011.
6. Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., “A Mesh-free Method using Exponential Basis Functions for LAminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT; Part I: Formulation”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 3112-3119, 2011.
7. Zandi, S. M., Boroomand, B., and Soghrati, S., “Exponential Basis Functions in Solution of Incompressible Fluid Problems with Moving Free Surfaces”, *Journal of Computation Physics*, Vol. 231, pp 505-527, 2012a.
8. Zandi, S. M., Boroomand, B., and Soghrati, S., “Exponential Basis Functions in Solution of Problems with Fully Incompressible Materials: A

Mesh-free Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, pp. 7255-7273, 2012b.
9. Ma, Q. W., "MLPG Method Based on Rankine Source Solution for Simulating Nonlinear Water Waves", *CMES*, Vol. 9, No. 2, pp.193-209, 2005.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]

[DOI: 10.29252/jcme.37.1.1]