

شبیهسازی عددی امواج هارمونیک تولید شده توسط موجساز پیستونی در کانال موج بهروش بدون شبکه توابع پایه نمایی با استفاده از الگوریتم اویلری– لاگرانژی مخلوط

سید مهدی زندی* و امین رفیعزاده گروه مهندسی عمران، دانشکده عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۵۵/۱۳۹۵ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۸/۱۸)

چکیده – در این مقاله، روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای شبیهسازی امواج هارمونیک تولید شده توسط موجساز پیستونی در سیال دارای سطح آزاد ارائه شده است. فرمولبندی روش ارائه شده بر اساس رویکرد اویلری – لاگرانژی مخلوط و مبتنی بر پتانسیل سرعت است. در روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای گسستهسازی دامنه حل فقط از تعدادی نقطه روی مرزهای سیال استفاده می شود. ب توجه به استفاده از الگوریتم اویلری – لاگرانژی مخلوط، بهمنظور به هنگام سازی هندسه حل در طی زمان، نقط سطح آزاد فقط در استای قائم جابه جا می شود. برای جلوگیری از برگشت امواج به داخل دامنه، در انتهای کانال موج از میرایی مصنوعی استفاده شده است. با استفاده از روش بدون شبکه ارائه شده، امواج غیرخطی با دامنه بزرگ شبیه سازی و نتایج با دیگر روش ها مقایسه شده است. روش حاضر ب هزینه اندک محاسباتی از دقت مطلوبی بر خوردار است.

واژههای کلیدی: امواج هارمونیک، موجساز پیستونی، کانال موج، فرمولبندی اویلری– لاگرانژی مخلوط، توابع پایه نمایی، روش بدون شبکه.

Simulation of Harmonic Waves Generated by the Piston-type Wave-maker in the Wave Flume via the Exponential Basis Functions Mesh-free Method and MEL Formulation

S. M. Zandi* and A. Rafizadeh

Department of Civil Engineering and Transportation, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Abstract: In this article, a meshless method based on exponential basis functions (EBFs) is presented to simulate the harmonic waves with moving free-surfaces generated by the piston-type wave maker. Accordingly, velocity potential is adopted in a Mixed Eulerian-Lagrangian (MEL) approach. Boundary conditions are met through a point-wise collocation approach. In order to update the geometry in the simulation time, the free surface points are only moved vertically. To reduce the reflection in

* : مسئول مكاتبات، يست الكترونيكي: s.m.zandi@eng.ui.ac.ir

۱

the wave flume, a damping zone is added at the far end opposite to the wave maker, where the velocity is modified by adding an artificial damping term. The results indicated the ability of this numerical method in simulating free surface flow problems like non-linear waves with a good accuracy, as well as suitable performances and the least run time calculation.

Keywords: Harmonic waves, Piston-type wave maker, Wave flume, Mixed Eulerian-Lagrangian, Exponential basis functions, Meshless method.

\mathbf{a}_{h}	شتاب پس از اعمال میرایی مصنوعی	V _i	بردارهای مشارکت پایهها
C _i	ضرايب ثابت مستقل	$\beta_i _{e} \alpha_i$	اعداد مختلط
G	ماتريس مشاركت پايەھا	v	تابع میرایی
\mathbf{G}^+	شبه معکوس ماتریس G	x _p	تاريخچه زماني حركت پدال موجساز
g	شتاب گرانشی زمین	$\mathbf{x}_{\mathbf{h}}$	مختصات شروع ناحيه ميرايي انتهايي
h	عمق آب	φ	پتانسيل سرعت
L	طول کانال	R	قسمت حقيقي مقادير محاسبه شده
L _{dm}	طول ناحیه میرایی انتهایی	η	تغيير مكان سطح آزاد سيال
m	تعداد نقاط استفاده شده روی سطح آزاد	$\Gamma_{\mathbf{B}}$	مرز پایینی کانال
n	تعداد کل نقاط روی مرزهای سیال	L^{∞}	مرز انتهایی کانال
R	ماتریس تصویر	Ω	دامنه مسئله
S.	دامنه جابهجايي موجساز	$ar{m{\Phi}}_{ m B}$	بردار شرایط مرزی
$\mathbf{s}_{\mathbf{j}}$	ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایهها	ρ	چگالی سیال
t	زمان حل	ω	فرکانس تحریک
\mathbf{u}_{h}	سرعت پس از اعمال میرایی مصنوعی		

فهرست علائم

۱ – مقدمه

کانال موج در شبیه سازی اثر امواج بر اجسام شناور، غوط هور، سازه های دریایی و ... از اهمیت ویژه ای برخوردار است. بررسی و مطالعه امواج در کانال موج با روش های عددی مختلفی انجام گرفته است. با توجه به نوسانات سطح آزاد و تغییر هندسه حل در زمان، استفاده از روش های بدون شبکه می تواند مقرون به صرفه باشد. در علم دینامیک سیالات محاسباتی^۱ که با روش های حل عددی به مسائل مکانیک سیالات می پردازد، سه رویکرد اصلی برای بیان حرکت یک سیال با سطح آزاد وجود دارد؛ این سه رویکرد عبارتند از: روش های اویلری^۲، لاگرانژی^۳ و ترکیب اویلری – لاگرانـژی^۲. در رویکـرد اویلـری که به

روش های بدون حرکت شبکه نیز معروف هستند، تمرکز روی یک حجم خالص سیال است که در محل خود ثابت بوده و سیال عبور کننده از آن که به طور مرتب جایگزین می شود، مورد مطالعه قرار می گیرد. در رویکرد لاگرانژی که به روش های حرکت شبکه نیز معروف هستند، ذرات سیال دنبال می شوند و بدین ترتیب شکل حجم سیال دائماً تغییر کرده ولی جرم کل آن ثابت باقی می ماند. در رویکرد ترکیب اویلری – لاگرانژی، مخلوطی از ویژگی های هر دو رویکرد با هم وجود دارد. در این رویکرد، محاسبات می تواند روی یک شبکه منظم انجام شود.

تا پیش از سه دهه گذشته، فرمولبندی معادلات مکانیک

سیالات در شکل اویلری بسیار رایج بوده و از آن برای شبیه سازی جریان تراکم ناپذیر استفاده می شده است. در این رویکرد، تحلیل مسائلی که دارای مرزهای با اشکال گوناگون هستند نظیر مسائل اندرکنش سیال با سازه^۵ به همراه سطح آزاد، دشوار بوده و نیازمند حل مسائل تماسی^۶ بسیار پیچیده هستند [۱]. از سوی دیگر، در سالهای اخیر روش های لاگرانژی بیشتر توجه محققین را به خود جلب کرده و همچنین ترکیب دو روش برای افزایش دقت و قدرت حل، تحت عنوان فرمول بندی اویلری – لاگرانژی اختیاری^۷ مورد استفاده قرار گرفته است.

در روش های عددی رایج نظیر اجزای محدود، تفاضل محدود و حجم محدود، کل فضای دامنه مسئله به یک شبکه گسسته سازی می شود. به هر نوع فضای خالی بین خطوط مشبک که توسط شکل گیری منظمی از اتصال نقاط دامنه به یکدیگر حاصل می شود، شبکه گفته می شود. روش های مختلف عددی برای گسسته سازی دامنه حل برای یک مسئله از تعاریف مختلفی برای مفهوم شبکه استفاده می کنند. در روش المان محدود از شبکه المان، در تفاضل محدود از شبکه نقاط و در روش حجم محدود از شبکه سلولی استفاده می شود [۲].

از آنجایی که در اکثر روش های عددی موجود نظیر اجزای محدود، دامنه مسئله توسط یک شبکه گسسته سازی می شود؛ بنابراین مشکلات و محدودیت هایی در حل مسائل مختلف به خصوص سیالات به وجود خواهد آمد. از مهم ترین این مشکلات می توان به صرف وقت زیاد در تولید یک شبکه مناسب برای مسئله مورد نظر، هزینه محاسباتی زیاد و کاهش دقت محاسبات در مسائل با تغییر شکل های بزرگ اشاره کرد. در آن سوی روش اجزای محدود می توان به روش های بدون شبکه اشاره کرد که بدون نیاز به یک سیستم شبکه بندی و تنها با استفاده از نقاط گرهای به حل یک مسئله می پردازد. اگرچه این روش ها نیز با مشکلات مختلفی روبرو هستند، اما در مسائلی که هندسه حل در طول زمان تغییر می کند راه گشا خواهند بود. در روش های بدون شبکه، دامنه و مرز مسئله بدون

روش های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شمارهٔ ۱، تابستان ۱۳۹۷

نیاز به هرگونه شبکه، توسط تعدادی نقاط گرهای گسستهسازی شده و سپس برای هر یک از این نقاط، سیستمی از معادلات جبری معرفی می شود؛ درنهایت فرایند حل با انجام محاسبات روی این نقاط صورت می گیرد.

برومند و همکاران در سال ۲۰۱۰ روش بدون شبکه توابع پایه نمایی را ارائه کردهاند. از این روش تاکنون برای دامنه گستردهای از مسائل استاتیکی و دینامیکی استفاده شده است و تحقیق روی آن همچنان ادامه دارد. از مزایای اصلی این روش، ساده بودن فرمول بندی و پیادهسازی رایانهای، سرعت بالا برای حل مسائل وابسته به زمان و همچنین توانایی ارائه پاسخهایی با دقت بسیار زیاد برای مسائل مختلف است [۸–۳].

در این تحقیق، فرم مرزی روش توابع پایه نمایی^۸ برای شبیه سازی امواج بلند هارمونیک در کانال موج توسعه داده شده است. به این منظور معادلات حاکم برای سیال غیرلزج تراکم ناپذیر با رویکرد اویلری - لاگرانژی مخلوط بر اساس پتانسیل سرعت مورد استفاده قرار گرفته است. بنابراین نقاط سطح آزاد سیال فقط در راستای قائم جابه جا می شوند و لذا نیازی به منظم سازی نقاط سطح آزاد در طول زمان نخواهد بود. نتایج حاصل برای شبیه سازی امواج بلند با دیگر روش های عددی مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی مسائل سطح آزاد بـر مبنای پتانسیل سرعت

حرکت سیال در حالت دو بعدی با توجه به سیستم مختصات کارتزین Oxy تعریف می شود که در آن y بیانگر محور قائم است. سیال مورد نظر غیرلزج و تراکمناپذیر بوده و عمق آن، h، ثابت فرض شده است. بنابراین معادله حاکم بر حرکت سیال دارای سطح آزاد توسط رابطه لاپلاس با درنظر گرفتن پتانسیل سرعت (x, y) به صورت زیر بیان می شود:

$$\nabla^{\mathsf{Y}} \phi = \frac{\partial^{\mathsf{Y}} \phi}{\partial x^{\mathsf{Y}}} + \frac{\partial^{\mathsf{Y}} \phi}{\partial y^{\mathsf{Y}}} = \circ \tag{1}$$

شکل (۱) نمایش دهنده طرح کانال مورد نظر بـه همـراه دامنـه

٣

DOI: 10.29252/jcme.37.1.1



اگر حرکت نقاط سطح آزاد در راستای افقی را محـدود کـرده و فقط در راستای قائم جابهجایی انجام شود، روابط زیر حاصل مىشود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + g\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \circ \qquad (1 \circ)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$
(11)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^r - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^r \right] - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$
(17)

روابط فوق بیانگر فرم اویلری- لاگرانژی مخلوط " شرط مرزی روی سطح آزاد است. در این شکل از معادلات، نقاط سطح آزاد در راستای افقی بـدون حرکـت بـوده و فقـط در راسـتای قـائم حركت ميكنند.

۳- میرایی مصنوعی در انتهای کانال موج

 Γ_{∞}^{\prime}

--- L_{dm} -

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cdot \text{ at } y = -h \text{ on } \Gamma_{B}$$
 (7)

همچنین برای مرز سمت راست (انتهای کانال):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \circ \text{ at } x = L \text{ on } \Gamma_{\infty}$$
 (r)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \dot{x}_{p}(t) \text{ at } x = x_{p}(t) \text{ on } \Gamma_{p}$$
(4)

که در رابطه فوق، $\mathbf{x}_{\mathbf{p}}\left(\mathbf{t}
ight)$ تاریخچه زمانی حرکت پدال موجساز است. شرط مرزی دینامیکی سطح آزاد سیال^۹ بـهصـورت زیـر تعريف مي شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + g \eta = \circ \quad \text{on} \quad y = \eta \left(x, t \right)$$
 (a)

و همچنین شرط مرزی سینماتیکی°' روی سطح ازاد بهصورت زير تعريف مي شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \circ \text{ on } y = \eta \left(x, t \right)$$
(9)

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
(V)

$$\frac{D\phi}{Dt} = -g\eta + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi \tag{(A)}$$

۴

DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2]



شکل ۲– نقاط مرزی استفاده شده در روش عددی و قرارگیری دو نقطه مرزی در گوشهها

 $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{v}_{\circ} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{h})}{L_{dm}}\right) \right), \ \mathbf{x} \ge \mathbf{x}_{h}$ (14)

که ۷، =۰/۱ ضریب میرایی [۹]، x_h مختصات سمت چپ ناحیه میرایی انتهایی و L_{dm} = ۳h طول ناحیه میرایی انتهایی است (شکل ۱).

4- روش توابع پایه نمایی برای حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت سرعت
پتانسیل سرعت در کل دامنه حل با استفاده از توابع پایه نمایی پتانسیل سرعت در کل دامنه حل با استفاده از توابع پایه نمایی پتانسیل سرعت در کل دامنه حل با استفاده از توابع پایه نمایی (۱۵)
$$\hat{\phi} = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$
(۱۵)
 $\hat{\phi} = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y}$
در این رابطه، x و Y مختصات یک نقطه عمومی در دامنه Ω , α_i
 a_i اعداد مختلط و C_i ضرایب ثابت مستقل از مختصات مستند. حال با قرار دادن رابطه (۱۵) در معادله (۱) خواهیم داشت:
 $\alpha_i^r + \beta_i^r = 0$

با توجه به رابطه (۱۶)، می توان مقادیر α و β را به صورت زیر بهدست آورد:

$$\alpha_i = \pm i\beta_i \text{ or } \beta_i = \pm i\alpha_i$$
 (1V)
 $\sum_{i=\sqrt{-1}}^{i=\sqrt{-1}} \beta_i = \frac{1}{\sqrt{-1}}$

در ادامه حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت، باید ضرایب C_i در رابطه (۱۵) محاسبه شوند. برای این منظور، دامنه مسئله به تعدادی نقطه که مرزهای سیال را تشکیل میدهند، گسستهسازی می شود. به منظور سهولت در محاسبه بردارهای مختلف روی مرز و حفظ ترتیب نقاط مرزی، نقاط به صورت پادساعت گرد شماره گذاری می شوند. توجه شود که در گوشه های

روش های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شمارهٔ ۱، تابستان ۱۳۹۷

ناحیه حل از دو نقطه در یک محل استفاده خواهد شد که هرکدام
از آنها جزء یکی از مرزهای متقاطع محسوب شده و دارای بردار
نرمال متفاوت خواهند بود. در دو گوشه سطح آزاد نیز از دو نقطه
مرزی استفاده میشود که یکی جزء دیواره و دیگری جـزء سطح
آزاد محسوب میشود که یکی جزء دیواره و دیگری جـزء سطح
آزاد محسوب میشود که یکی جزء دیواره و دیگری در
ان محلی این از دو نقطه
آزاد محسوب میشود که یکی در ایک
$$C_i = V_i^T R \overline{\Phi}_B$$
 در رابطه فوق، مقادیر شـرایط مـرزی در
درایههای بردار $\overline{\Phi}$ در رابطه فوق، مقادیر شـرایط مـرزی در

درایههای بردار Φ_B در رابطه فوق، م*ق*ادیر شـرایط مـرزی در لحظه و هندسه مورد نظر است.

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathrm{B}} = \left\{ (\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{1} \quad (\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{1} \quad \dots \quad (\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{\mathrm{m}} \quad \left| \\ (\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{\mathrm{m+1}} \quad (\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{\mathrm{m+1}} \quad \dots (\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{B}})_{\mathrm{n}} \right\}^{\mathrm{T}}$$

$$(14)$$

که در رابطه فوق، n تعداد کل نقاط روی مرزهای سیال و m تعداد نقاط استفاده شده روی سطح آزاد است. همچنین در ایـن رابطه داریم:

$$(\phi_B)_k = [\phi]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, \ k = 1, ..., m \quad (\Upsilon \circ)$$
$$(\partial \phi_B)_k = n_x \dot{x}_n(t) \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_P,$$

$$\begin{array}{l} (\partial \phi_B)_k = n_x x_p(t) \quad \forall (x_k, y_k) \in I_P, \\ (\partial \phi_B)_k = \circ \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_B \& \Gamma_\infty \end{array}$$

$$(71)$$

بردار \mathbf{V}_i بر اساس شرایط مرزی موجود در هر یک از نقاط مرزی و یا بهعبارت دیگر بر اساس درایههای بردار $\overline{\Phi}_B$ تعریف می شود. بنابراین در نقاط مربوط به ۲_S، باید \hbar / δ پایه iام در آن نقطه محاسبه شود؛ در نقاط مربوط به Γ_F نیز مقدار پایه in در آن نقطه محاسبه و در درایه نظیر آن در بردار \mathbf{V}_i قرار داده می شود. بنابراین، با توجه به توضیحات ارائه شده می توان نوشت: $\mathbf{V}_i = \frac{1}{s_i} \{(\phi_i)_{1}, (\phi_i)_{T}, \dots, (\phi_i)_m)\}_{i=1}^T$

که در این رابطه داریم:

$$(\varphi_i)_k = [e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x = x_k, y = y_k}$$
(YY)

$$\forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, \ k = 1, ..., m$$

$$(\partial \varphi_i)_k = [(\alpha_i n_x + \beta_i n_y) e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x = x_k, y = y_k}$$
(YY)

همچنین _j β ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایـهها است.

$$s_{j} = \max_{l} \left(\left| V_{j}^{l} \right| \right), \quad l = 1, ..., M$$
(Y Δ)

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_{i}^{T} \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{B}) e^{\alpha_{i} \mathbf{x} + \beta_{i} \mathbf{y}}, \qquad (\gamma \boldsymbol{\beta})$$

حال اگر درایههای بردار $\overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathrm{B}}$ را توسط سری فوق براورد کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{split} \mathbf{\bar{\Phi}}_{B} &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_{i}^{T} \mathbf{R} \mathbf{\bar{\Phi}}_{B}) \mathbf{V}_{i} = \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{\bar{\Phi}}_{B}, \\ \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{V}_{i} \mathbf{V}_{i}^{T}) \end{split} \tag{YV}$$

در رابطه فوق، G ماتریس متقارن M×M است. از آنجایی که ممکن است مرتبه ماتریس فوق از M کمتر شود؛ بنابراین ماتریس R بهصورت زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^+ \tag{YA}$$

که در این رابطه، +G شبه معکوس^{۱۲} ماتریس G است. در پایان ¢ بهصورت زیر محاسبه میشود:

$$\boldsymbol{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = \boldsymbol{\mathfrak{R}} \Bigg[\Bigg(\sum_{i=\imath}^{N} \frac{\imath}{s_i} e^{\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{y}} \boldsymbol{V}_i^T \Bigg) \boldsymbol{R} \boldsymbol{\bar{\Phi}}_B \Bigg] \tag{74}$$

که در رابط و فوق، $[\cdot] \Re$ بیانگر قسمت حقیقی مقادیر محاسبه شده است. ضرایب α_i و β_i بر اساس روش ارائه شده در مراجع [π و V] انتخاب می شوند. باید توجه داشت که تعداد پایه های مورد استفاده تأثیر مستقیم بر نتایج خواهد داشت.

روی مرزها قرار داده می شود. سرعت نقاط مرزی نیز بر اساس مرزها قرار داده می شود. سرعت نقاط مرزی نیز بر اساس شرایط اولیه مسئله مقداردهی می شود؛ بدیهی است، در مسائلی که از حالت سکون آغاز می شوند، سرعت اولیه همه نقاط مرزی برابر صفر خواهد بود. درنظر بگیرید که در حال حاضر در گام برابر صفر خواهد بود. درنظر بگیرید که در حال حاضر در گام ام ($^{n} - t^{n} = t^{n-1})$ حل به سر می بریم. ابتدا، شرایط مرزی در لحظه n و در هندسه موجود در این لحظه، n ، با استفاده از رابطه (۱۹) محاسبه می شود:

$$\overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{n}} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathrm{B}}(\mathbf{x}^{\mathrm{n}}, \mathbf{t}^{\mathrm{n}}) \tag{(vo)}$$

بردار $\mathbf{V_i}$ نیز با استفاده از رابطه (۲۲) در لحظه $\mathbf{t^n}$ و در هندسه $\mathbf{V_i}$ ، محاسبه شده و به صورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{V}_{i}^{n} = \mathbf{V}_{i} (\mathbf{x}^{n}, \mathbf{t}^{n})$$
 (Y1)

دین ترتیب پاسخ معادلے (۱) بے صورت زیر درنظر گرفتے
$${}_{\mathcal{S}}$$
ی شود:
 $\hat{\phi}^n = \sum C_i^n e^{\alpha_i x + \beta_i y}$ (۳۲)

و ضرایب
$$C_i^n$$
 بەصورت زیر خواهند بود:
 $C_i^n = \mathbf{V}_i^{n \ T} \ \mathbf{R}^n \ \mathbf{\bar{\Phi}}_H^n$ (۳۳)

$$\mathbf{R}^{n} = \left(\sum \left(\mathbf{V}_{i}^{n} \mathbf{V}_{i}^{nT}\right)\right)^{-1}$$
(**YY**)

بنابراین حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت در ابتدای گام زمانی nم، لحظه ⁿ، کامل خواهد بود. در ادامه، بردار سرعت توسط رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\nabla^{n}\phi = \Re\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{s_{i}^{n}} \begin{cases} \alpha_{i} \\ \beta_{i} \end{cases} e^{\alpha_{i}x + \beta_{i}y} \mathbf{V}_{i}^{n^{T}} \right) \mathbf{R}^{n} \overline{\boldsymbol{\Phi}}_{H}^{n} \right]$$
(70)

و بردار سرعت بهدست آمـده از رابطـه فـوق ($\phi^n = \nabla^n \phi$) بـا اعمال میرایی مصنوعی توسط رابطه (۱۳) اصلاح میشود.

بهمنظور حل پـارامتر $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ در رابطـه (۱۱)، یـک تـابع چنـد جملهای روی نقاط مرزی سطح آزاد درونیـابی شـده و سـپس پارامتر مورد نظـر توسـط تـابع فـوق روی ایـن نقـاط محاسـبه



• MLPG

Present Numerical Method

می شود. با محاسبه سرعت روی تمام نقاط مرزی، تغییر مکان سطح آزاد آب در بالای سطح آب، ^۱ ۳^{+۱} و همچنین پتانسیل سرعت، p^{n+۱} بهترتیب بهصورت زیر به هنگام می شوند: $\frac{\partial \phi^n}{\partial y}$ $\frac{\partial \phi^n}{\partial x} \frac{\partial \eta^n}{\partial x}$ $=\eta^n$ (39) $+\Delta t$ $\phi^{n+i} = \phi^n + i$ ($\left[\left(\begin{array}{c} n \end{array} \right)^{r} \right]$ (- n)⁷] - n - n

7 8 x (m)

10 11

> 10 11 12

9

9

• MLPG

2

2

3

• MLPG

1

Present Numerical Method

Present Numerical Method

Eree 10.8

e Surface elevation 6.0 c 6.0 c

B.0 E

0

t = 22

14

t = 26

14 15

15

10

11 12 13

11 12 13

10

$$\Delta t \left[-g\eta^{n} - \frac{\gamma}{r} \left[\left(\frac{\partial \phi^{n}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \phi^{n}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial \phi^{n}}{\partial y} \frac{\partial \phi^{n}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{n}}{\partial x} \right]$$
(YV)

۶-مثال عددی

t = 20

14 15

t = 24

14

13

12 13

مسئلهای که در این بخش ارائه میشود، از مرجع [۹] انتخاب شده است. تحریک اعمالی به موجساز پیستونی در سمت چ كانال بەصورت زير است:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{S}_{\circ}(1 - \cos(\omega t)) \tag{TA}$$

.S برابر ۵۰/۰ و ۷/۰۶۴ بیانگر دو دامنه مختلف جابهجایی موجساز، و ۱/۴۵ه فرکانس تحریک است. طول کانال (L) ۲۴ و عمق آب در شرایط ایستا (h) یک درنظر گرفتـه شـده و شتاب ثقل (g)، ۱/۰ است. در مرجع [۹] برای حل این مسئله از ۶۸۱۷ (۲۰۱×۲۰) گره استفاده شده است. در اینجا از ۱۹۲ پایه و ۲۳۶ نقطه مرزی برای حل استفاده میشود؛ حل این

روش های عددی در مهندسی، سال ۳۷، شمارهٔ ۱، تابستان ۱۳۹۷

مسئله با Δt = ۰/۰۵ انجام شده و نتایج آن در ادامه ارائه می شود. نتایج پروفیل سطح آزاد در لحظات زمانی مختلف ۲۰، ۲۲، ۲۲ و ۲۶ در شکل های (۳) و (۴) با مرجع [۹] مقایسه شده است. همان طور که در این شکل ها مشاهده می شود، روش ارائه شده حتی با گام زمانی نسبتاً بزرگ و نقاط مرزی اندک پاسخهای خوبی بهدست میدهد.

۷-نتيجه گيري

در این مقاله روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای شبیهسازی کانال موج با موجساز پیستونی بهکار گرفته شد. با استفاده از مفهوم شبه لاگرانژی حرکت در کنار بدون شبکه بودن روش حل معادلات، این امکان فراهم شد تا جابهجاییهای سطح آزاد بهخوبي توسط نقاط مرزي مدلسازي شود. مسائل مختلفي نظير تلاطم سطحی با دامنه کوچک و بـزرگ، اثـر تحریـک قـائم بـر تلاطم سطحی سیال، مسئله موج ایستا و شکست سد توسط روش ارائه شده بررسی شده است که در اینجا مجال ارائـه آنهـا نیست. با این وجود یک نمونه از این مسائل جهت نشان دادن کارائی روش در مدل کردن امواج غیرخطی ایجاد شده در سطح آزاد توسط موجساز در قالب شبه لاگرانژی ارائه شـد. در ایـن روش تنها با دنبال کردن نقاط مرزی سیال می توان هندسه حل را به هنگام کرده و به سادگی سرعت و جابه جایی نقاط را



نشان میدهد که روش ارائه شده توانایی شبیهسازی امواج با دامنه بزرگ را دارد. محاسبه کرد. لذا هیچ گونه انتقال اطلاعات بین شبکه حـل و یـا نامنظمی شبکه و هزینه تولید شـبکه جدیـد نیـاز نخواهـد بـود. امواج مورد بررسی با دامنهای در حدود ۱۰ درصد عمق بوده و

8 9 10 П 12 13 14

x (m)

7 8 x (m)

7

- 1. computational fluid mechanics (CFD)
- 2. Eulerian methods
- 3. Lagrangian methods
- 4. combined Lagrangian-Eulerian methods
- 5. fluid-structure interaction (FSI)
- 6. contact problems

واژەنامە

t = 20

t = 24

9 10 11 12 13 14 15

- 7. arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation (ALE)
- 8. exponential basis function
- 9. dynamic free surface boundary condition (D.F.S.B.C)
- 10. kinematic free surface boundary condition (K.F.S.B.C)
- 11. semi-Lagrangian or mixed eulerian-Lagrangian
- 12. pseudo inverse

مراجع

- 1. Idelsohn, S. R., Oñate, E., and Del, P. F., "A Lagrangian Meshless Finite Element Method Applied to Fluid-structure Interaction Problems", Computers and Structures, Vol. 81, pp. 655-671, 2003.
- 2. Liu, G. R., Mesh Free Methods: Moving Beyond Finite Element Method, Taylor & Francis, 2010.
- 3. Boroomand, B., Soghrati, S., and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 81, pp. 971-1018, 2010.
- 4. Boroomand, B., and Mossaiby, F., "Generalization of Robustness Test Procedure for Error Estimators, Part I: Formulation for Patches Near Kinked Boundaries", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 64, pp. 427-460, 2005.

- 5. Shamsaei, B., and Boroomand, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Laminated Structures", Composite Structures, Vol. 93, pp. 2010-2019, 2011.
- 6. Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "A Mesh-free Method using Exponential Basis Functions for LAminates Modeled by CLPT, FSDT and TSDT; Part I: Formulation", Composite Structures, Vol. 93, pp. 3112-3119, 2011.
- 7. Zandi, S. M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "Exponential Basis Functions in Solution of Incompressible Fluid Problems with Moving Free Surfaces", Journal of Computation Physics, Vol. 231, pp 505-527, 2012a.
- 8. Zandi, S. M., Boroomand, B., and Soghrati, S., "Exponential Basis Functions in Solution of Problems with Fully Incompressible Materials: A

DOR: 20.1001.1.22287698.1397.37.1.8.2

Mesh-free Method", Journal of Computational Physics, Vol. 231, pp. 7255-7273, 2012b.

Source Solution for Simulating Nonlinear Water Waves", *CMES*, Vol. 9, No. 2, pp.193-209, 2005.

9. Ma, Q. W., "MLPG Method Based on Rankine

٩

روشهای عددی در مهندسی، سال ۳۷، شمارهٔ ۱، تابستان ۱۳۹۷