

تحلیل کمناش حرارتی نانورق‌های گرافینی بر اساس تئوری جفت تنش اصلاح‌شده با استفاده از روش نوار محدود و تئوری اصلاح‌شده دومتغیره

زهرا شفیعی، سعید صرامی فروشانی* و مجتبی ازهری
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۶/۱۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۷/۱۶)

چکیده - گرافین از جمله مواد نانوساختاری است که با گسترش روز افزون فناوری نانو و کاربرد فراوان این نانوساختار به دلیل خصوصیات فوق‌العاده مکانیکی، الکتریکی و حرارتی در تکنولوژی و صنعت مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در این مقاله بررسی رفتار کمناش حرارتی نانورق گرافین به صورت تک‌لایه با لحاظ کردن اثرات مقیاس کوچک مورد ارزیابی قرار گرفته است. با توجه به عدم توانایی تئوری پیوسته کلاسیک در لحاظ کردن اثرات نانومقیاس و وجود موانع و مشکلات در بررسی‌های آزمایشگاهی، در این بررسی از تئوری جفت تنش اصلاح‌شده که دارای یک پارامتر مقیاس طول است، استفاده می‌شود. همچنین برای تعریف میدان جابه‌جایی و فرمول‌بندی مسئله، از تئوری اصلاح‌شده دومتغیره استفاده شده است که به اعمال تغییر شکل‌های برشی، علاوه بر اثرات ناشی از خمش، منجر می‌شود. روابط استخراج شده بر مبنای روش نوار محدود معمولی برای تعیین دمای بحرانی کمناش مورد ارزیابی قرار گرفته و صحت این روابط با مقایسه نتایج این بررسی با مقالات موجود تأیید شده است. در همین راستا تأثیر شرایط مرزی مختلف، نحوه تغییر دما، نسبت ابعاد و نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت روی دمای بحرانی کمناش نانورق مورد توجه قرار گرفته و نتایج حاصل به صورت جدول‌ها و نمودارهایی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: نانورق گرافین، تئوری اصلاح‌شده جفت تنش، تئوری اصلاح‌شده دومتغیره، پایداری حرارتی، روش عددی نوار محدود.

Thermal Buckling Analysis of Graphene Nanoplates Based on the Modified Couple Stress Theory using Finite Strip Method and Two-Variable Refined Plate Theory

Z. Shafiei, S. Sarrami-Foroushani* and M. Azhari

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

Abstract: Graphene is one of the nanostructured materials that has recently attracted the attention of many researchers. This is due to the increasing expansion of nanotechnology and the application of this nanostructure in technology and industry owing

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: sarrami@iut.ac.ir

to its mechanical, electrical and thermal properties. Thermal buckling behavior of single-layered graphene sheets is studied in this paper. Given the failure of classical theories to consider the scale effects and the limitations of the nano-sized experimental investigations of nano-materials, the small-scale effect is taken into account in this study, by employing the modified couple stress theory which has only one scale parameter. On the other hand, the two-variable refined plate theory, which considers the shear deformations in addition to bending deformations, is used to define the displacement field and to formulate the problem. The developed finite strip method formulation is used to evaluate the critical buckling temperature of the nanoplates. The validity of the proposed method is confirmed by comparing the results of this study with the those in the literature. The effects of different boundary conditions, temperature changing patterns, aspect ratio, and the ratio of length parameter to thickness on the critical buckling temperature are considered and the results are presented in the form of Tables and Figures.

Keywords: Graphene nanoplate, Modified couple stress theory, Two-variable refined plate theory, Thermal stability, Finite strip method.

فهرست علائم

جا به جایی های صفحه میانی در راستای x و y	u_0, v_0	مساحت	A
مؤلفه های جا به جایی در راستای x، y و z	u, v, w	عرض نانورق	a
مؤلفه بردار جا به جایی	u_i	عرض نوار	b
حجم	V	ماتریس سختی ماده	D
انرژی پتانسیل	V_p	مدول الاستیسیته	E
مؤلفه خمشی جا به جایی	w_b	تانسور جایگشت	e_{ijk}
مؤلفه برشی جا به جایی	w_s	ضخامت نانورق	h
ضریب انبساط حرارتی	α	پارامتر مقیاس طول	I
نماد تغییرات	δ	ماتریس سختی هندسی نوار	K_G
تانسور دلتای کرونیگر	δ_{ij}	ماتریس سختی هندسی ورق	K_{Gt}
ماتریس کرنش	ϵ	ماتریس سختی نوار	K_t
ماتریس کرنش حرارتی	ϵ_r	ماتریس سختی ورق	K_{tt}
مؤلفه بردار چرخش	θ_i	طول نانورق	L
ضرایب لامه	μ, λ	ماتریس جفت تنش	m
نسبت پواسون	ν	ماتریس نیرو	N.
ماتریس تنش	σ	ماتریس توابع شکل	N
پارامتر شکل توزیع دما	φ	دما	T
ماتریس انحنا	χ	انرژی کرنشی	U
		چگالی انرژی کرنشی	U_0

۱- مقدمه

بررسی ساختارهای نانومقیاس پژوهش های بسیاری را انجام داده اند. در این راستا هی و همکاران [۲] برای بررسی رفتار مکانیکی الاستیک فیلم های بسیار نازک، یک مدل محیط پیوسته کلی بر مبنای الاستیسیته پیوسته سطحی^۱ ارائه دادند، به گونه ای که شامل شکل و شرایط مرزی دلخواه باشد. این محققان برای

گرافین با خصوصیات فوق العاده الکتریکی، مکانیکی و حرارتی، اساس بسیاری از ساختارهای کربنی مانند نانولوله ها، نانوحلقه ها، نانورق ها و نانوتیرها است [۱]. بنابراین تحلیل و بررسی آن از اهمیت بالایی برخوردار است. محققین در زمینه

بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی یک نانورق با شرایط مرزی ساده، از همین روش استفاده کردند [۳]. آنها در تحلیل خود از فرضیات ون کارمن و تئوری کلاسیک ورق استفاده کردند. به منظور تحلیل ورق‌های گرافین، کیتی پورنچای و همکاران [۴] این ورق‌ها را بر اساس مدل ورق پیوسته بررسی کردند. هی و همکاران نیز به بررسی ورق‌های گرافین چندلایه با در نظر گرفتن نیروی و اندروالسی بین لایه‌ها پرداختند [۵]. در همین راستا، صرامی و ازهری ارتعاش و کمانش نانورق‌های گرافین چندلایه را با استفاده از تئوری غیرمحلّی ارینگن^۲ و روش نوار محدود مورد بررسی قرار دادند [۶]. استفاده از تئوری‌های غیرمحلّی کیرشهف و میندلین برای استخراج معادلات بنیادین نانورق با تکیه‌گاه مفصلی توسط لو و همکاران انجام شد [۷]. افزایش استفاده از گرافین به‌عنوان الیاف تقویت‌کننده، سبب بررسی تحلیل ارتعاشی این ورق‌ها در ماتریس پلیمری، توسط پارادهن و فادیکر [۸] با در نظر گرفتن مکانیک پیوسته غیرمحلّی بود. مورمو و پارادهن [۹]، ارتعاش داخل صفحه نانورق‌ها را با به‌کارگیری مکانیک محیط پیوسته غیرمحلّی و با در نظر گرفتن اثرات کوچک‌مقیاس^۳ ارزیابی کردند. اکسنسر و ایدیگو [۱۰] با استفاده از روش حل لوی به بررسی ارتعاش و کمانش نانورق‌هایی با خصوصیات ایزوتروپیک بر مبنای تئوری کلاسیک ورق پرداختند. وانگ و همکاران [۱۱] نیز اثرات حرارتی روی نانورق‌های دولایه با خصوصیات مکانیکی ایزوتروپیک را مطالعه کردند.

تئوری‌های تغییر شکل برشی بسیاری برای بررسی رفتار مختلف ورق‌ها گسترش یافته است. تئوری اصلاح‌شده دومتغیره^۴ که توسط شیمپی [۱۲] در سال ۲۰۰۲ معرفی شد یکی از این تئوری‌ها است. در راستای این بررسی‌ها، ناراندر [۱۳ و ۱۴] با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلّی، کمانش نانورق تک‌لایه همسانگرد و ناهمسانگرد را بر اساس تئوری اصلاح‌شده دومتغیره بررسی کرد. وی بارگذاری را دوطرفه و شرایط مرزی را مفصلی در نظر گرفت و در بررسی خود از روش حل ناویر استفاده کرد. ساتیش و همکاران [۱۵] به تحلیل

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

ارتعاش حرارتی نانورق‌های ارتوتروپیک با استفاده از تئوری شیمپی و بر اساس مکانیک محیط پیوسته غیرمحلّی پرداختند. تئوری دومتغیره با معرفی جابه‌جایی‌هایی برحسب عبارت‌های مثلثاتی بازنویسی شد که این عبارت‌ها نیز در بسیاری از بررسی‌ها برای مطالعات خمش [۱۸-۱۶]، کمانش و ارتعاش [۱۷] برای ورق‌های FGM مورد استفاده قرار گرفت. کمانش حرارتی ورق‌های گرافین تک‌لایه مستقر بر بستر الاستیک با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی سینوسی توسط زنکور و صبحی [۱۹] بررسی شد. صبحی [۲۰]، با به‌کارگیری تئوری دومتغیره ورق به بررسی ارتعاش آزاد، کمانش مکانیکی و کمانش حرارتی ورق گرافین چندلایه پرداخت. همچنین وی برای مطالعه پاسخ خمشی ورق تک‌لایه گرافین در محیط حرارتی از تئوری اصلاح‌شده دومتغیره و حل لوی استفاده کرد [۲۱].

از میان تئوری‌های وابسته به مقیاس، تئوری جفت تنش اصلاح‌شده^۵ با وابستگی به تنها یک پارامتر طول از مزیت ویژه‌ای برخوردار است. بسیاری از مدل‌های وابسته به ابعاد بر اساس این تئوری گسترش پیدا کردند که می‌توان به مدل وابسته به ابعاد تیر اوپلر-برنولی [۲۲]، مدل تیر تیموشینکو [۲۳]، مدل ورق کیرشهف [۲۴]، مدل تیر ردی لوینسون [۲۵]، مدل ورق میندلین [۲۶]، مدل ورق ردی [۲۷] و مدل ورق مرتبه سوم [۲۸] اشاره کرد. میرصالحی نیز با استفاده از تئوری جفت تنش و گرادیان کرنش^۶ به بررسی کمانش نانورق‌های FGM و مقایسه نتایج حاصل از این دو تئوری پرداخت [۲۹].

در این مقاله با به‌کارگیری میدان جابه‌جایی ارائه شده توسط شیمپی و با استفاده از تئوری جفت تنش اصلاح‌شده، کمانش حرارتی نانورق گرافین بررسی می‌شود. با استفاده از روش نوار محدود، روابط لازم برای این بررسی استخراج شده و به کمک این روابط و با تغییر عواملی همچون پارامتر مقیاس طول، ابعاد نانورق، نحوه توزیع دما در ضخامت و شرایط مرزی، پارامترهای تأثیرگذار بر نانورق و چگونگی تغییر رفتار این نانو ساختار بررسی می‌شود.

۲- تئوری اصلاح شده جفت تنش

تئوری‌های مرتبه بالاتر محیط پیوسته از جمله تئوری جفت تنش اصلاح شده با اثبات عدم توانایی تئوری پیوسته کلاسیک در لحاظ کردن اثرات مقیاس کوچک معرفی شدند. تئوری جفت تنش با وارد کردن قسمت متقارن تانسور گرادیان مرتبه سوم تغییر شکل در فرمول بندی و به وسیله پارامتری به نام پارامتر مقیاس طول، اثر کاهش اندازه را وارد محاسبات می‌کند. بنابراین با وارد شدن گرادیان‌های مرتبه بالاتر جابه‌جایی، انرژی کرنشی سیستم، U ، چنین به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{V} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{m}) dV = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} + \chi_{ij} m_{ij}) dV \quad (1)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسور کرنش و در واقع قسمت متقارن گرادیان جابه‌جایی، $u_{i,j}$ ، است و عناصر آن مطابق با رابطه (۲-۲) الف) تعریف می‌شود. $\boldsymbol{\chi}$ نیز قسمت متقارن تانسور گرادیان چرخش، $\theta_{i,j}$ ، است که درایه‌های آن در رابطه (۲-۲) ب) تعریف شده‌اند. \mathbf{m} و $\boldsymbol{\sigma}$ نیز به ترتیب تانسور تنش و تانسور جفت تنش‌ها هستند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-الف)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{V} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \theta_i = \frac{1}{V} e_{ijk} u_{k,j} \quad (2-ب)$$

می‌توان چگالی انرژی کرنشی سیستم، U_0 ، را با توجه به اختیاری بودن حجم در رابطه (۱) به صورت رابطه (۳) در نظر گرفت:

$$U_0 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{m} \quad (3)$$

از آنجا که چگالی انرژی کرنشی به جابه‌جایی u_i و چرخش θ_i وابسته است، یعنی $U_0 = U_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\chi})$ ، می‌توان با دیفرانسیل گیری از تابع چگالی انرژی کرنشی نسبت به متغیرهای آن چنین نوشت:

$$\delta U_0 = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\delta U_0}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \frac{\delta U_0}{\delta \boldsymbol{\chi}} \quad (4)$$

به این ترتیب با مقایسه روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\delta U_0}{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{m} = \frac{\delta U_0}{\delta \boldsymbol{\chi}} \quad (5)$$

در مواد ایزوتروپیک با رفتار الاستیک خطی، چگالی انرژی کرنشی به صورت یک تابع مرتبه دوم مطابق رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود [۳۰]:

$$U_0 = \frac{1}{V} \lambda [\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}]^2 + \mu (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi}) \quad (6)$$

که در آن λ و μ ثابت‌های لامه و I پارامتر مقیاس طول مواد است. منظور از tr مجموع عناصر روی قطر اصلی هستند. با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۵) می‌توان تانسورهای تنش و جفت تنش را به این شکل تعریف کرد:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (7-الف)$$

$$m_{ij} = 2\mu I^2 \chi_{ij} \quad (7-ب)$$

که در آن δ_{ij} تانسور دلتای کرونیکر است.

۳- تئوری اصلاح شده دومتغیره

عدم در نظر گرفتن کرنش برشی در تغییر شکل‌ها و میدان جابه‌جایی در تئوری کلاسیک ورق، به کاهش دقت نتایج این تئوری در ارزیابی ورق‌های با ضخامت قابل ملاحظه منجر می‌شود. این مسئله محققان را به توسعه تئوری‌هایی سوق داد که علاوه بر اثرات خمش، تغییر شکل‌های ناشی از برش را نیز در میدان جابه‌جایی لحاظ کنند. تئوری اصلاح شده دومتغیره ورق یکی از آنها است که در سال ۲۰۰۲ توسط شیمی [۱۲] ارائه شد. در این تئوری میدان جابه‌جایی مطابق با رابطه (۸) متشکل از دو جزء خمشی و برشی است، با این ویژگی که مؤلفه‌های خمشی در محاسبه نیروهای برشی و مؤلفه‌های برشی در محاسبه لنگرهای خمشی تأثیری ندارند:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + F(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8-الف)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + F(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (8-ب)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (8-ج)$$

در رابطه (۸)، u ، v و w به ترتیب جابه‌جایی در راستاهای x ، y و z هستند. u_0 و v_0 نیز جابه‌جایی‌های صفحه میانی ورق مورد بررسی هستند که در این مطالعه از آنها صرف نظر شده است.

قرار می‌گیرد. بنابراین کرنش‌های غیرصفر با توجه به رابطه کرنش جابه‌جایی معرفی شده در رابطه (۲-الف) عبارتند از:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (۱۱-الف)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (۱۱-ب)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + 2h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (۱۱-ج)$$

$$\gamma_{yz} = \left[\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2} \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (۱۱-د)$$

$$\gamma_{xz} = \left[\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2} \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (۱۱-ه)$$

همچنین مقادیر غیرصفر χ را نیز با توجه به رابطه (۲-ب) می‌توان مطابق با روابط (۱۲) بازنویسی کرد:

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (۱۲-الف)$$

$$\chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (۱۲-ب)$$

$$\chi_{xy} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (w_b + w_s) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(w_b - \frac{\partial F(z)}{\partial z} w_s \right) \right] \quad (۱۲-ج)$$

$$\chi_{xz} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (۱۲-د)$$

$$\chi_{yz} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{z}{h} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (۱۲-ه)$$

با جایگذاری روابط (۱۱-الف) تا (۱۱-ه) در رابطه تنش-کرنش معرفی شده در قسمت قبل، می‌توان تنش‌ها را برحسب جابه‌جایی‌ها استخراج کرد:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right] \quad (۱۳-الف)$$

اندیس‌های b و s در این روابط معرف خمش و برش هستند. در عبارت‌های u و v جمله دوم معرف جزء خمشی و مشابه تئوری کلاسیک ورق است و جمله سوم معرف جزء برشی و به‌گونه‌ای است که همراه با w_s برای تنش‌های برشی توزیع سهمی‌واری ایجاد کند. این توزیع سبب می‌شود که تنش‌های برشی عرضی در بالا و پایین ورق صفر شوند و در ضمن در محاسبه لنگرهای خمشی اثری از اجزاء برشی نباشد. بنابراین طبق فرضیات این تئوری باید تابع $F(z)$ به‌گونه‌ای انتخاب شود که شرایط بیان‌شده را ارضا کند. این شرایط مطابق با رابطه (۹) نشان داده می‌شوند:

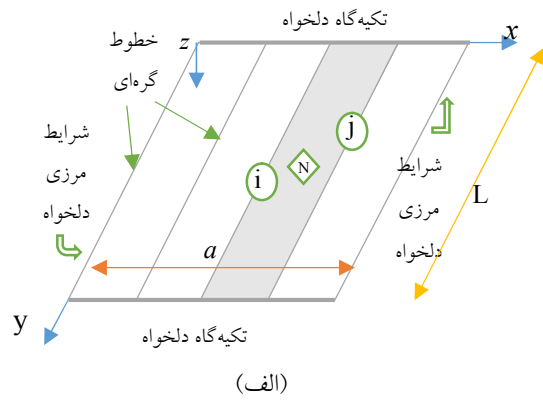
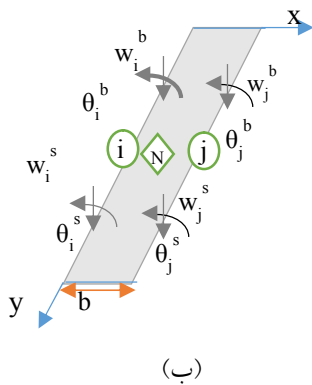
$$\int_{-h/2}^{h/2} F(z) dz = 0 \quad (۹-الف)$$

$$\left. \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right|_{z=\pm(h/2)} = -1 \quad (۹-ب)$$

با مقایسه جابه‌جایی‌های u و v در تئوری‌های مختلف، می‌توان گفت طی مطالعات انجام شده توسط محققین، اشکال مختلفی برای تابع $F(z)$ در نظر گرفته شده است. در تئوری کلاسیک ورق، تابع کرنش برشی یعنی $F(z)$ برابر صفر است. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه شده توسط میندلین [۳۱] این تابع برابر z در نظر گرفته می‌شود. در تئوری مرتبه بالاتر ورق [۳۲] این تابع برابر $4z^3/3h^2$ لحاظ شده است. به‌علاوه در نظریه سینوسی^۸ ارائه شده توسط زنکووار [۳۳] و توریتتر [۳۴] به‌ترتیب تابع به‌شکل $z - (h/\pi)(\sin[\pi z/h])$ و $(h/z)(\sin[\pi z/h])$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین در نظریه تغییر شکل برشی نمایی [۳۵] این تابع برابر $z(e^{-\nu(z/h)})$ در نظر گرفته شده است. این تابع در برخی از بررسی‌ها نیز به‌شکل تابع هایپربولیک به‌صورت $z - \frac{\nu z \sinh(z^2/h^2)}{2 \sinh(1/4) + \cosh(1/4)}$ معرفی شده است [۳۶]. شیمی در مقاله خود [۱۲] این تابع را مطابق رابطه (۱۰) ارائه کرده است:

$$F(z) = h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (۱۰)$$

در پژوهش حاضر تابع معرفی شده توسط شیمی مورد استفاده



شکل ۱- تقسیم بندی ورق بر اساس روش نوار محدود. (الف) شرایط مرزی و (ب) یک المان نواری شکل و درجات آزادی آن

$$m_{xz} = \frac{1}{\nu} \mu I^2 \left(1 - \nu \frac{z}{h} \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \quad (14-d)$$

$$m_{yz} = \frac{1}{\nu} \mu I^2 \left(-1 - \nu \frac{z}{h} \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \quad (14-e)$$

به این ترتیب روابط ارزیابی میکروورق بر اساس تئوری جفت تنش اصلاح شده و با در نظر گرفتن میدان جابه جایی مطابق با تئوری شیمی به دست می آید. با به کارگیری این روابط و با استفاده از روش حل مناسب می توان اثرات مقیاس کوچک را مورد بررسی قرار داد.

۴- روش حل نوار محدود

پیچیدگی پیدا کردن راه حل دقیق برای معادلات ورق و لزوم وجود شرایط خاص برای استفاده از روش های موجود، مانند حل ناویر، سبب گسترش روش های عددی در تحلیل ورق ها شد. روش نوار محدود با توجه به مدت زمان کمتر در روند حل و کاهش حجم محاسبات و هزینه ها یک روش قوی برای تحلیل بسیاری از مسائل ورق محسوب می شود.

۴-۱- توسعه روش نوار محدود بر اساس تئوری اصلاح شده دو متغیره

در این رویکرد ورق مستطیلی به تعدادی نوار طولی مطابق شکل (۱) تقسیم می شود و با توجه به استفاده از تئوری اصلاح شده دو متغیره، برای هر نوار ۸ درجه آزادی شامل دو

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \left[\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right] \quad (13-b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \quad (13-c)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (13-d)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (13-e)$$

همچنین جفت تنش ها نیز با توجه به رابطه (۷-ب) چنین به دست می آیند:

$$m_{xx} = \nu \mu I^2 \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\nu}{\lambda} + \frac{5}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \quad (14-f)$$

$$m_{yy} = -\nu \mu I^2 \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\nu}{\lambda} + \frac{5}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right] \quad (14-b)$$

$$m_{xy} = \frac{1}{\nu} \mu I^2 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (w_b + w_s) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(w_b - \frac{\partial F(z)}{\partial z} w_s \right) \right] \quad (14-c)$$

جدول ۱- توابع مثلثاتی استفاده شده در جهت y

شرایط مرزی	توابع مورد استفاده
SS	$\sin \frac{m\pi y}{L}$
CC	$\sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$
SC	$\sin \frac{(m+1)\pi y}{L} + \left(\frac{m+1}{m}\right) \sin \frac{m\pi y}{L}$
CF	$1 - \cos \frac{(m-1)\pi y}{2L}$

$$w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{n=i} \left[\left(1 - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} + \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right) (w_i^s)_n + \left(-x + \frac{\gamma x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right) (\theta_i^s)_n + \left(\frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right) (w_j^s)_n + \left(\frac{x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right) (\theta_j^s)_n \right] Y_n^s(y) \quad (16-ب)$$

اندیس‌های i و j نشان‌دهنده دو خط گره‌ای کناری و w و θ به ترتیب جابه‌جایی و دوران آنها را نشان می‌دهند. b عرض نوار است که از تقسیم عرض کل ورق (a) بر تعداد نوارها حاصل می‌شود. همچنین، Γ تعداد جملات سری مثلثاتی مورد استفاده در جهت طول نوار است. روابط (۱۶) را می‌توان به شکل برداری چنین بازنویسی کرد:

$$w_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\Gamma} L_n^b \delta_n^b \quad (17-الف)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\Gamma} L_n^s \delta_n^s \quad (17-ب)$$

که در این روابط L_n^s و L_n^b عبارتند از:

$$L_n^b = L_n^s = L_n = \left[\left(1 - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} + \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right), \left(-x + \frac{\gamma x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right), \left(\frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right), \left(\frac{x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right) \right] Y_n \quad (18)$$

همچنین δ_n^s و δ_n^b بردارهای درجات آزادی گره‌ای متناظر با n امین جمله از سری‌های $Y_n^s(y)$ و $Y_n^b(y)$ هستند و مطابق با رابطه (۱۹) نوشته می‌شوند:

درجه آزادی انتقالی حاصل از خمش و برش و دو درجه آزادی دورانی ناشی از خمش و برش در هر خط گره (لبه نوار) در نظر گرفته می‌شود. تابع شکل هر نوار با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها مطابق رابطه (۱۵) بر اساس X_n ، تابع تغییر شکل در راستای محور x که فقط تابعی از مجهول x است و به شکل توابع هرمیتی در نظر گرفته می‌شود و Y_n ، تابع تغییر شکل در راستای محور y که فقط تابعی از متغیر y و به صورت توابع هارمونیک است، تعریف می‌شود. توابع هارمونیک مورد استفاده در این بررسی با توجه به شرط مرزی مورد ارزیابی در جدول (۱) ارائه شده است.

$$w_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^b(x) \cdot Y_n^b(y) \quad (15-الف)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^s(x) \cdot Y_n^s(y) \quad (15-ب)$$

در روابط اخیر، اندیس b نشان‌دهنده تغییر شکل‌های خمشی و اندیس s نشان‌دهنده تغییر شکل‌های برشی است.

با اعمال توابع شکل هرمیتی در جهت x می‌توان رابطه (۱۵)

را چنین بازنویسی کرد:

$$w_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \left[\left(1 - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} + \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right) (w_i^b)_n + \left(-x + \frac{\gamma x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right) (\theta_i^b)_n + \left(\frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma} - \frac{\gamma x^\gamma}{b^\gamma}\right) (w_j^b)_n + \left(\frac{x^\gamma}{b} - \frac{x^\gamma}{b^\gamma}\right) (\theta_j^b)_n \right] Y_n^b(y) \quad (16-الف)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{N}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} \quad (23\text{-الف})$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{S}'\mathbf{N}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{J}\mathbf{B}'\boldsymbol{\delta} \quad (23\text{-ب})$$

در روابط (23) \mathbf{B} ، \mathbf{B}' و \mathbf{J} به ترتیب عبارتند از:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r}\mathbf{L}_n\right) & F(z)\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r}\mathbf{L}_n\right) \\ -z\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\mathbf{L}_n\right) & F(z)\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\mathbf{L}_n\right) \\ -rz\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) & rF(z)\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) \\ \cdot & \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z} + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{L}_n\right) \\ \cdot & \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z} + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{L}_n\right) \end{bmatrix} \quad (24\text{-الف})$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} r\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) & \left(1 - \frac{\partial F(z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) \\ -r\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) & \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z} - 1\right)\left(\frac{\partial^r}{\partial x\partial y}\mathbf{L}_n\right) \\ r\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\mathbf{L}_n - \frac{\partial^r}{\partial x^r}\mathbf{L}_n\right) & \left(1 - \frac{\partial F(z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\mathbf{L}_n - \frac{\partial^r}{\partial x^r}\mathbf{L}_n\right) \\ \cdot & \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{L}_n\right) \\ \cdot & \left(-\frac{\partial F(z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{L}_n\right) \end{bmatrix} \quad (24\text{-ب})$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24\text{-ج})$$

با استخراج کرنش‌ها و انحناها به صورت برداری، می‌توان تنش‌ها و جفت تنش‌ها را نیز با استفاده از روابط (7) چنین نوشت:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} \quad (25\text{-الف})$$

$$\mathbf{m} = r\mu\mathbf{I}^r\boldsymbol{\chi} = r\mu\mathbf{I}^r\mathbf{J}\mathbf{B}'\boldsymbol{\delta} \quad (25\text{-ب})$$

در رابطه (25-الف)، \mathbf{D} ماتریس سختی ماده است که با توجه به مدول الاستیسیته (E) و نسبت پواسون (ν) برای یک ماده ایزوتروپیک بر اساس رابطه (26) نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\delta}_n^b = \left\{ w_i^b, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i^b, w_j^b, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j^b \right\}_n^T = \left\{ \begin{matrix} w_{in}^b \\ \theta_{in}^b \\ w_{jn}^b \\ \theta_{jn}^b \end{matrix} \right\} = \left\{ \boldsymbol{\delta}_{jn}^b \right\} \quad (19\text{-الف})$$

$$\boldsymbol{\delta}_n^s = \left\{ w_i^s, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i^s, w_j^s, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j^s \right\}_n^T = \left\{ \begin{matrix} w_{in}^s \\ \theta_{in}^s \\ w_{jn}^s \\ \theta_{jn}^s \end{matrix} \right\} = \left\{ \boldsymbol{\delta}_{jn}^s \right\} \quad (19\text{-ب})$$

به این ترتیب مجموع درجات آزادی کل نوار چنین نوشته خواهد شد:

$$\boldsymbol{\delta} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\delta}_i^b \\ \boldsymbol{\delta}_j^b \\ \boldsymbol{\delta}_i^s \\ \boldsymbol{\delta}_j^s \end{matrix} \right\} = \sum_{n=1}^r \left\{ w_i^b \theta_i^b w_j^b \theta_j^b w_i^s \theta_i^s w_j^s \theta_j^s \right\}_n^T \quad (20)$$

4-2- کمانش حرارتی نانو ورق گرافین

برای استخراج فرمول‌بندی نوار محدود برای نانورق گرافین، میدان جابه‌جایی معرفی شده در رابطه (8) به شکل ماتریسی مطابق با رابطه (21) بازنویسی می‌شود:

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta} \quad (21)$$

که در این رابطه ماتریس \mathbf{N} به صورت ارائه شده در رابطه (22) است:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -z\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{L}_n\right) & F(z)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{L}_n\right) \\ -z\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{L}_n\right) & F(z)\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{L}_n\right) \\ \mathbf{L}_n & \mathbf{L}_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

با اعمال کردن رابطه (21) در روابط (2-الف) و (2-ب) ماتریس‌های کرنش و انحنا از این قرار خواهند بود:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\phi T \quad (31)$$

با انتگرال گیری از تنش در جهت ضخامت، نیروی اعمال شده به ورق در اثر این تغییرات دمایی برابر خواهد بود با:

$$N_T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\phi T dz = \frac{\alpha h E}{(1-\nu)(1+\phi)} T \quad (32)$$

با توجه با اینکه ماده سازنده ورق ایزوتروپیک است، ماتریس نیرویی حاصل از این تغییرات دمایی طبق رابطه (33) نوشته می شود:

$$\mathbf{N}_\bullet = \begin{bmatrix} N_T & 0 \\ 0 & N_T \end{bmatrix} \quad (33)$$

در نهایت انرژی پتانسیل حاصل از نیروهای خارجی برای ورق نازکی که تحت بار عمود بر سطح خود قرار ندارد چنین محاسبه می شود:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dA \quad (34)$$

با جایگذاری نیرو و میدان جابه جایی استخراج شده در رابطه (34) می توان ماتریس سختی هندسی نانوورق را به این ترتیب استخراج کرد:

$$\mathbf{K}_G = \int_A \left(\mathbf{B}_G^T \mathbf{N}_\bullet \mathbf{B}_G \right) dA \quad (35)$$

که در این رابطه \mathbf{B}_G عبارت است از:

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n,x} & \mathbf{L}_{n,x} \\ \mathbf{L}_{n,y} & \mathbf{L}_{n,y} \end{bmatrix} \quad (36)$$

مقدار بار بحرانی کمانش ورق (N_{cr}) با حل مسئله مقدار ویژه مطابق رابطه (37) تعیین می شود. ماتریس های سختی این مسئله، ماتریس سختی کل ورق است که از رویهم گذاری ماتریس های سختی نوارها حاصل می شود:

$$(\mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{Gt}) \delta = \mathbf{0} \quad (37)$$

در رابطه (37)، \mathbf{K}_{tt} معرف ماتریس سختی کل ورق مورد بررسی و ماتریس \mathbf{K}_{Gt} ، ماتریس پایداری کل ورق است و همان طور که بیان شد از رویهم گذاری ماتریس های سختی و پایداری تک تک نوارها حاصل می شود.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (23) و (25) در رابطه انرژی کرنشی معرفی شده در تئوری جفت تنش، می توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{m}) dV = \frac{1}{2} \int (\delta^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta + \delta^T \mathbf{B}'^T \mathbf{J}^T \mathbf{J}' \mathbf{B}' \delta) dV = \frac{1}{2} \int \delta^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}') \delta \quad (27)$$

به این ترتیب با توجه به رابطه (27) ماتریس سختی یک نوار به این شرح خواهد بود:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \mathbf{K}' = \int (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV + \int (\mathbf{B}'^T \mathbf{J}^T \nu \mu \mathbf{J}' \mathbf{B}') dV \quad (28)$$

برای بررسی کمانش حرارتی ورق های گرافین، فرض شده است تغییرات دما تنها به ضخامت این ماده وابسته است. در واقع این بدان معناست که رابطه فرض شده برای تغییرات دمایی باید تنها تابعی از مختصه z باشد. به این منظور تابع تغییرات دمایی مطابق با رابطه (29) فرض شده است:

$$\Delta T(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\phi T, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (29)$$

پارامتر ϕ در رابطه (29) مشخص کننده شکل توزیع حرارت در ضخامت است و در سه حالت $\phi = 0$ (توزیع یکنواخت دما)، $\phi = 1$ (توزیع خطی دما) و $\phi \geq 2$ (توزیع غیرخطی دما) در نظر گرفته می شود. در ضمن در این رابطه T نشان دهنده اختلاف دما بین دمای مرجع و مقدار دمایی است که در آن کمانش رخ می دهد.

با ایجاد تغییرات حرارتی در ورق، کرنش حرارتی ایجاد شده برابر است با:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \alpha \Delta T \quad (30)$$

با در نظر گرفتن رابطه تنش-کرنش، تنش حرارتی در دو جهت x و y را می توان مطابق با رابطه (31) تعریف کرد:

جدول ۲- همگرایی روش نوار محدود معمولی برای دمای بحرانی ورق گرافین مربعی با شرایط مرزی مفصلی (اعداد برحسب °K)

تعداد نوارها						I/h
۱۰	۸	۶	۴	۲	۱	
۱۳۷۴/۶	۱۳۷۴/۶	۱۳۷۴/۶	۱۳۷۴/۸	۱۳۷۷/۳	۱۴۵۳/۲	۰
۲۹۲۵/۰	۲۹۲۵/۰	۲۹۲۵/۱	۲۹۲۵/۳	۲۹۲۹/۴	۳۰۵۳/۲	۰/۵
۷۵۷۵/۴	۷۵۷۵/۵	۷۵۷۵/۵	۷۵۷۶/۰	۷۵۸۴/۸	۷۸۵۲/۲	۱

جدول ۳- دمای بحرانی کماتش (°C) برای ورق مربعی با شرایط مرزی مفصلی تحت اثر توزیع دمای یکنواخت

I/h					
۲/۰	۱/۵	۱/۰	۰/۵	۰	
۳۰۴/۲۶۴۲	۱۷۸/۶۲۳۶	۸۸/۸۸۶۱	۳۵/۰۳۸۷	۱۷/۰۹۰۱	مطالعه حاضر
۳۰۴/۶۳۵۳	۱۷۸/۶۸۶۳	۸۸/۹۱۵۷	۳۵/۰۵۳۳	۱۷/۰۹۹۲	مرجع [۲۹]
۰/۰۳۳۲	۰/۰۳۵۱	۰/۰۳۳۳	۰/۰۴۱۷	۰/۰۵۳۲	درصد اختلاف

۵- بحث

حرارتی یکنواخت و با شرایط مرزی مفصلی برای سه نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت ۰، ۰/۵ و ۱ مورد ارزیابی قرار گرفته و تعداد نوارهای مورد نیاز برای رسیدن به دقت مناسب استخراج شده است. نتایج حاصل از این بررسی در جدول (۲) برحسب درجه کلون ارائه شده است. با توجه به این نتایج برای بررسی عددی نانورق در تمام حالت‌های بارگذاری و شرایط مرزی مختلف، برای اطمینان از ۱۰ نوار استفاده می‌شود، هر چند در بسیاری از موارد استفاده از شش نوار کفایت می‌کند.

در این بخش با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده بر اساس تئوری اصلاح شده دو متغیره و با به‌کارگیری روابط حاکم بر نانورق بر اساس تئوری جفت تنش اصلاح شده با استفاده از روش نوار محدود به بررسی کماتش حرارتی نانورق گرافین پرداخته می‌شود. در ابتدا صحت این روابط ارزیابی شده و در ادامه نتایج حاصل از بررسی‌ها روی ورق گرافین با استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای نوشته شده در محیط MATLAB ارائه خواهد شد.

مشخصات ورق گرافین مورد مطالعه در این مقاله به این شرح است [۶]:

$h = 0.34 \text{ nm}$, $E = 1.06 \text{ TPa}$, $\nu = 0.25$, $\alpha = 1/1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
 h ضخامت نانورق، E مدول الاستیسیته آن، ν نسبت پواسون و α ضریب انبساط حرارتی ورق گرافین مورد ارزیابی هستند.

۵-۱- همگرایی روش

برای بررسی همگرایی روابط ارائه شده، یک نانورق گرافین مربعی با ابعاد ۱۰ نانومتر با خواص عنوان شده تحت بار

۵-۲- صحت‌سنجی روش

برای صحت‌سنجی روابط استخراج شده در تحلیل کماتش حرارتی نانورق‌ها، به دلیل نبود نتایج معتبر در این زمینه، تنها پایداری حرارتی ورق به‌ازای توزیع حرارت یکنواخت مورد ارزیابی قرار گرفت. در ابتدا یک ورق مربعی با نسبت‌های I/h متفاوت با شرایط مرزی مفصلی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این بررسی برحسب درجه سانتی‌گراد در جدول (۳) ارائه و با نتایج مرجع [۲۹] مقایسه شده است. در ادامه ورق

جدول ۴- دمای بحرانی کمناش ($^{\circ}\text{C}$) برای ورق با شرایط مرزی گیردار تحت اثر توزیع دمای یکنواخت

a/L					
۲/۰	۱/۵	۱/۰	۰/۶۶۷	۰/۵	
۳۳/۵۱۱۲	۳۲/۲۵۶۶	۴۵/۴۸۱۲	۷۹/۰۹۱۴	۱۳۳/۶۱۴۶	مطالعه حاضر
۳۳/۶۲۸	۳۲/۳۶۷	۴۵/۵۹۸	۷۹/۵۷۷	۱۳۴/۵۱۳	مرجع [۳۷]
۰/۳۴۷۳	۰/۳۴۱۱	۰/۲۵۶۲	۰/۶۱۰۲	۰/۶۶۷۹	درصد اختلاف

پارامتر مقیاس طول معرفی شده در تئوری جفت تنش اصلاح شده به ترتیب برابر 0 ، $0/2h$ ، $0/4h$ ، $0/6h$ ، $0/8h$ و برابر با h لحاظ شده است. دمای بحرانی کمناش محاسبه شده در این بررسی ها بر دمای استاندارد محیط (296 درجه کلوین) تقسیم شده و نتایج در جدول های (۵) تا (۷) ارائه شده است. نتایج ارائه شده در این قسمت نشان می دهد که با افزایش اثرهای مقیاس کوچک دمای بحرانی کمناش افزایش پیدا می کند. شرایط مرزی SSFF کمترین میزان تغییرات دمای بحرانی را دارد که در آن دمای بحرانی کمناش با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول برابر با ضخامت در حدود سه برابر می شود. بیشترین تغییرات نیز در شرایط مرزی SSCF با نسبت ابعاد دو قابل مشاهده است که در آن دما تا حدود هشت برابر تغییر می کند. شرایط مرزی و میزان سخت شدن ورق در لبه نیز روی دمای بحرانی کمناش تأثیرگذار است و هر چه شرایط مرزی سخت تر باشد، افزایش دمای بحرانی بیشتر قابل مشاهده است. با تغییر توزیع حرارت از حالت یکنواخت به خطی و غیرخطی، دمای بحرانی کمناش ورق افزایش پیدا می کند. با توجه به نتایج حاصل، هر چه درجه غیرخطی بودن توزیع حرارت بیشتر باشد، تغییرات ایجاد شده در بار بحرانی کمناش بیشتر و رو به افزایش است. این شرایط با تغییر پارامتر مقیاس طول تقریباً الگوی ثابتی داشته و تغییر چندانی در نحوه تغییرات دما مشاهده نمی شود.

در ادامه تأثیر نسبت ابعاد ورق روی دمای بحرانی کمناش در شکل های (۲) تا (۴) بررسی شده است. این بررسی برای سه حالت توزیع حرارت یکنواخت، خطی و غیرخطی با شرایط مرزی SSSS، CCCS و SSCC با نسبت پارامتر مقیاس طول به

مورد بررسی به ازای $I/h=0$ و نسبت ابعاد مختلف با شرایط مرزی گیردار مورد بررسی قرار گرفته و نتایج این ارزیابی نیز با مرجع [۳۷] مقایسه و در جدول (۴) ارائه شده است. مطابق با این مراجع مقادیر زیر برای پارامترهای دخیل در حل مسئله در نظر گرفته شده است:

$$E = 380 \text{ GPa}, \nu = 0/3, h = 17/6 \times 10^{-6} \text{ m}, \\ a = L = 10 \cdot h, \alpha = 7/4 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$$

با مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهاد شده در این تحقیق با نتایج مراجع عنوان شده، مشخص می شود که روابط ارائه شده در مقاله حاضر از صحت و دقت کافی برخوردار بوده و می تواند برای بررسی کمناش حرارتی نانورق گرافین تحت شرایط مختلف مورد استفاده قرار گیرد. همان طور که در این جدول ها نیز نشان داده شده است، میزان انحراف نتایج از مقادیر ذکر شده در منابع عنوان شده کمتر از یک درصد است.

۵-۳- بررسی پایداری حرارتی نانورق گرافین

تابع تغییر درجه حرارت در رابطه (۲۹) ارائه شد که با توجه به این رابطه شکل توزیع حرارت به کمک پارامتر φ تعیین می شود. در بررسی انجام شده، توزیع حرارت در ضخامت ورق به سه شکل یکنواخت، خطی و غیرخطی در نظر گرفته شده است. به این منظور مقادیر φ اعمال شده در روابط به ترتیب برابر صفر، یک و دو فرض می شوند. ورق در دو حالت مربعی و مستطیلی با نسبت ابعاد دو و با شرایط مرزی مفصلی و گیردار در راستای عرض ورق و شرایط مرزی مختلف در راستای طولی تحت بارگذاری حرارتی عنوان شده مورد ارزیابی قرار گرفته است. بعد ورق در راستای x برابر با 10 نانومتر در نظر گرفته شده و

روش های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

جدول ۵- دمای بحرانی کمانش بی بعد شده تحت اثر تغییرات یکنواخت دما

L/a	شرایط مرزی	I/h				
		۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	SSFF	۲/۲۲۴۲	۲/۵۰۶۷	۳/۱۵۷۳	۴/۰۷۹۰	۵/۲۸۹۵
	SSCF	۲/۷۸۱۵	۳/۵۱۵۹	۵/۳۳۴۲	۷/۹۶۴۳	۱۱/۴۵۴۶
	CCCS	۹/۹۴۳۷	۱۱/۳۶۱۳	۱۵/۶۰۵۱	۲۲/۶۶۳۱	۳۲/۵۳۱۹
	SSCC	۸/۸۴۴۳	۱۰/۱۱۴۳	۱۳/۹۲۱۰	۲۰/۲۶۲۵	۲۹/۱۳۶۹
	CCCC	۱۲/۱۹۶۶	۱۳/۸۳۸۵	۱۸/۷۵۷۶	۲۹/۹۴۰۱	۳۸/۳۸۵۳
	SSSS	۴/۶۴۳۹	۵/۴۸۱۹	۷/۹۹۶۲	۱۲/۱۸۶۴	۱۸/۰۵۱۷
	CCFF	۶/۶۰۶۱	۸/۲۴۴۸	۱۲/۵۴۶۸	۱۶/۴۸۹۰	۲۱/۹۱۸۵
	SSCS	۶/۱۷۰۲	۷/۱۸۰۷	۱۰/۲۰۹۵	۱۵/۲۵۲۹	۲۲/۳۰۹۰
۲	SSFF	۰/۵۵۰۹	۰/۶۲۴۴	۰/۷۸۹۳	۰/۹۹۳۲	۱/۲۳۴۸
	SSCF	۱/۱۲۲۳	۱/۴۸۰۲	۲/۵۱۵۰	۴/۱۶۷۲	۶/۴۰۹۹
	CCCS	۵/۴۱۴۷	۶/۱۰۹۵	۸/۱۸۷۳	۱۱/۶۳۹۹	۱۶/۴۶۶۷
	SSCC	۸/۸۳۲۸	۹/۸۰۹۴	۱۲/۷۳۹۲	۱۷/۶۲۲۲	۲۴/۴۵۷۸
	CCCC	۹/۰۵۹۱	۱۰/۱۰۴۱	۱۳/۲۱۷۳	۱۸/۳۸۲۱	۲۵/۵۹۷۳
	SSSS	۲/۹۰۹۳	۳/۳۳۹۵	۴/۵۲۹۹	۶/۷۸۰۶	۹/۷۹۲۲
	CCFF	۱/۲۳۸۸	۱/۷۸۳۲	۳/۱۰۸۷	۴/۱۰۰۰	۵/۳۵۴۰
	SSCS	۵/۰۰۱۹	۵/۶۲۷۶	۷/۵۰۴۱	۱۰/۶۳۲۰	۱۵/۰۱۱۳

جدول ۶- دمای بحرانی کمانش بی بعد شده تحت اثر تغییرات خطی دما

L/a	شرایط مرزی	I/h				
		۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	SSFF	۴/۴۴۸۴	۵/۰۱۳۴	۶/۳۱۴۶	۸/۱۵۷۹	۱۰/۵۷۸۹
	SSCF	۵/۵۶۳۰	۷/۰۳۱۸	۱۰/۶۶۸۴	۱۵/۹۲۸۵	۲۲/۹۰۹۱
	CCCS	۱۹/۸۸۷۳	۲۲/۷۲۲۵	۳۱/۲۱۰۲	۴۵/۳۲۶۱	۶۵/۰۶۳۹
	SSCC	۱۷/۶۸۸۷	۲۲/۲۲۸۶	۲۷/۸۴۲۰	۴۰/۵۲۴۹	۵۸/۲۷۳۷
	CCCC	۲۴/۳۹۳۲	۲۷/۶۷۷۱	۳۷/۵۱۳۳	۵۳/۸۱۰۳	۷۶/۷۷۱۵
	SSSS	۹/۲۸۷۹	۱۰/۹۶۳۷	۱۵/۹۹۲۴	۲۴/۳۷۲۷	۳۶/۱۰۳۴
	CCFF	۱۳/۲۱۲۲	۱۶/۴۸۹۷	۲۵/۰۹۳۷	۳۲/۹۷۸۰	۴۳/۸۳۶۹
	SSCS	۱۲/۳۴۰۴	۱۴/۳۶۱۳	۲۰/۴۱۹۱	۳۰/۵۰۵۹	۴۴/۶۱۸۰
۲	SSFF	۱/۱۰۱۹	۱/۲۴۸۹	۱/۵۷۸۷	۱/۹۸۶۴	۲/۴۶۹۶
	SSCF	۲/۲۴۴۶	۲/۹۶۰۵	۵/۰۳۰۰	۸/۳۳۴۳	۱۲/۸۱۹۸
	CCCS	۱۰/۸۲۹۵	۱۲/۲۱۹۰	۱۶/۳۷۴۶	۲۳/۲۷۹۸	۳۲/۹۳۳۳
	SSCC	۱۷/۶۶۵۷	۱۹/۶۱۸۹	۲۵/۴۷۸۴	۳۵/۲۴۴۴	۴۸/۹۱۵۵
	CCCC	۱۸/۱۱۸۲	۲۰/۲۰۸۱	۲۶/۴۳۴۶	۳۶/۷۶۴۳	۵۱/۱۹۴۷
	SSSS	۵/۸۱۸۷	۶/۶۷۹۰	۹/۲۵۹۸	۱۳/۵۶۱۱	۱۹/۵۸۴۴
	CCFF	۲/۶۵۷۵	۳/۵۶۶۴	۶/۲۱۷۵	۸/۲۰۰۱	۱۰/۷۰۸۱
	SSCS	۱۰/۰۰۳۷	۱۱/۲۵۵۲	۱۵/۰۰۸۱	۲۱/۲۶۴۰	۳۰/۰۲۲۷

جدول ۷- دمای بحرانی کمانش بی بعد شده تحت اثر تغییرات غیرخطی دما

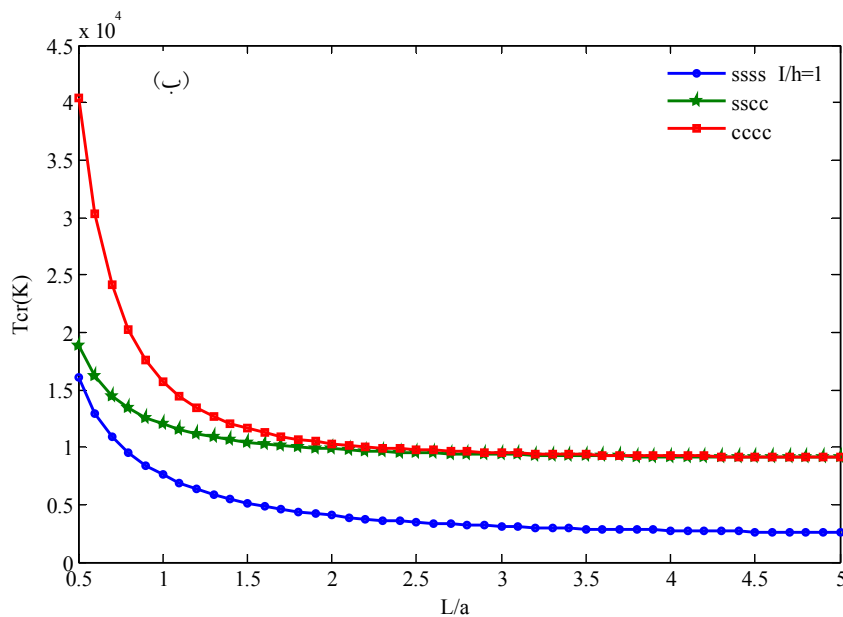
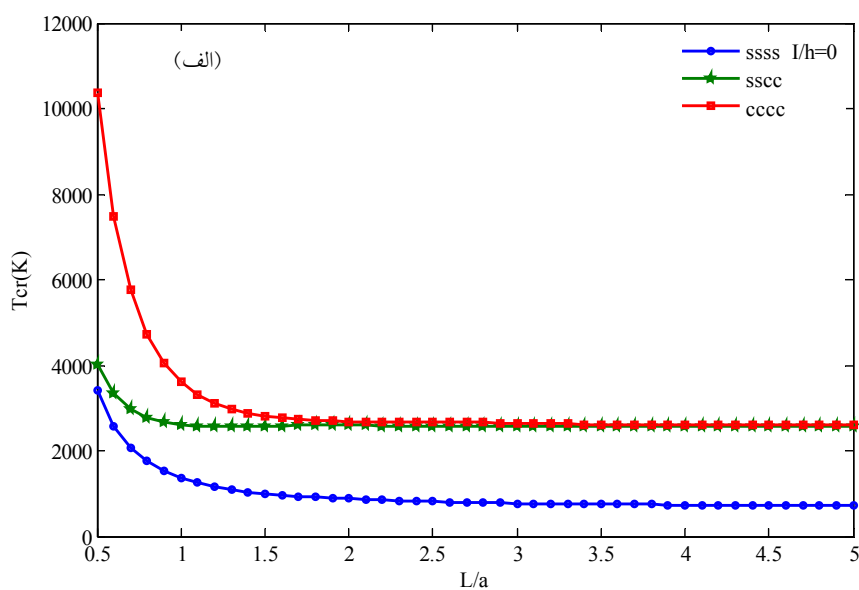
L/a	شرایط مرزی	I/h				
		۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
	SSFF	۶/۶۷۲۶	۷/۵۲۰۱	۹/۴۷۲۰	۱۲/۲۳۶۹	۱۵/۸۶۸۴
	SSCF	۸/۳۴۴۵	۱۰/۵۴۷۶	۱۶/۰۰۲۶	۲۳/۸۹۲۸	۳۴/۳۶۳۷
	CCCS	۲۹/۸۳۱۰	۳۴/۰۸۳۸	۴۶/۸۱۵۳	۶۷/۹۸۹۲	۹۷/۵۹۵۸
	SSCC	۲۶/۵۳۳۰	۳۰/۳۴۲۹	۴۱/۷۶۲۹	۶۰/۷۸۷۴	۸۷/۴۱۰۶
۱	CCCC	۳۶/۵۸۹۸	۴۱/۵۱۵۶	۵۶/۲۷۰۰	۸۰/۸۲۰۴	۱۱۵/۱۵۷۳
	SSSS	۱۳/۹۳۱۸	۱۶/۴۴۴۶	۲۳/۹۸۸۶	۳۶/۵۵۹۱	۵۴/۱۵۵۱
	CCFF	۱۹/۸۱۸۳	۲۴/۷۳۴۵	۳۷/۶۴۰۵	۴۹/۴۶۷۱	۶۵/۷۵۵۴
	SSCS	۱۸/۵۱۰۶	۲۱/۵۴۲۰	۳۰/۶۲۸۶	۴۵/۷۵۸۸	۶۶/۹۲۶۹
	SSFF	۱/۶۵۲۸	۱/۸۷۳۳	۲/۳۶۸۰	۲/۹۷۹۶	۳/۷۰۴۴
	SSCF	۳/۳۶۷۰	۴/۴۴۰۷	۷/۵۴۵۰	۱۲/۵۰۱۵	۱۹/۲۲۹۶
	CCCS	۱۶/۲۴۴۲	۱۸/۳۲۸۵	۲۴/۵۶۱۹	۳۴/۹۱۹۷	۴۹/۴۰۰۰
	SSCC	۲۶/۴۹۸۵	۲۹/۴۲۸۳	۳۸/۲۱۷۷	۵۲/۸۶۶۶	۷۳/۳۷۳۳
۲	CCCC	۲۷/۱۷۷۳	۳۰/۳۱۲۲	۳۹/۶۵۱۹	۵۵/۱۴۶۴	۷۶/۷۹۲۰
	SSSS	۸/۷۲۸۰	۱۰/۰۱۸۴	۱۳/۸۸۹۷	۲۰/۳۴۱۷	۲۹/۳۷۶۵
	CCFF	۳/۹۸۶۳	۵/۳۴۹۶	۹/۳۲۶۲	۱۲/۳۰۰۱	۱۶/۰۶۲۱
	SSCS	۱۵/۰۰۵۶	۱۶/۸۸۲۷	۲۲/۵۱۲۲	۳۱/۸۹۶۰	۴۵/۰۳۴۰

(۵) برای سه حالت تغییر دما در ضخامت نشان داده شده است. همان‌طور که در این نمودارها مشاهده می‌شود، افزایش نسبت h/I کاهش دمای بحرانی کمانش را به همراه دارد. همگرایی در نمودارها به‌ازای نسبت $h/I \geq 6$ قابل مشاهده است و بعد از این نسبت دمای بحرانی کمانش تغییرات ناچیزی داشته است. با توجه به نتایج استخراج شده می‌توان گفت اثرات مقیاس کوچک در ضخامت‌های زیاد بی‌تأثیر است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله پایداری حرارتی نانورق گرافین با استفاده از تئوری اصلاح‌شده دومتغیره، برای اعمال اثرات ناشی از برش، با به‌کارگیری روش نوار محدود مورد ارزیابی قرار گرفت و نتایج این ارزیابی در قسمت‌های قبل ارائه شد. اثر کاهش

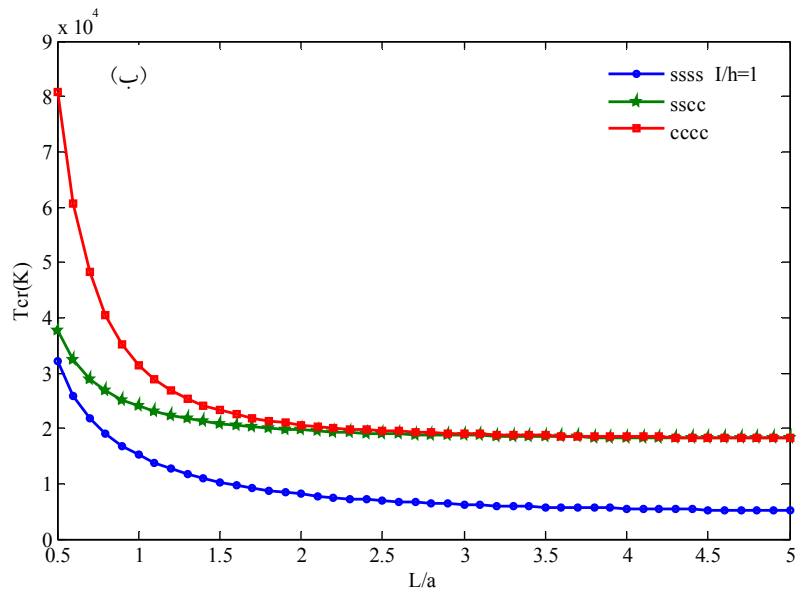
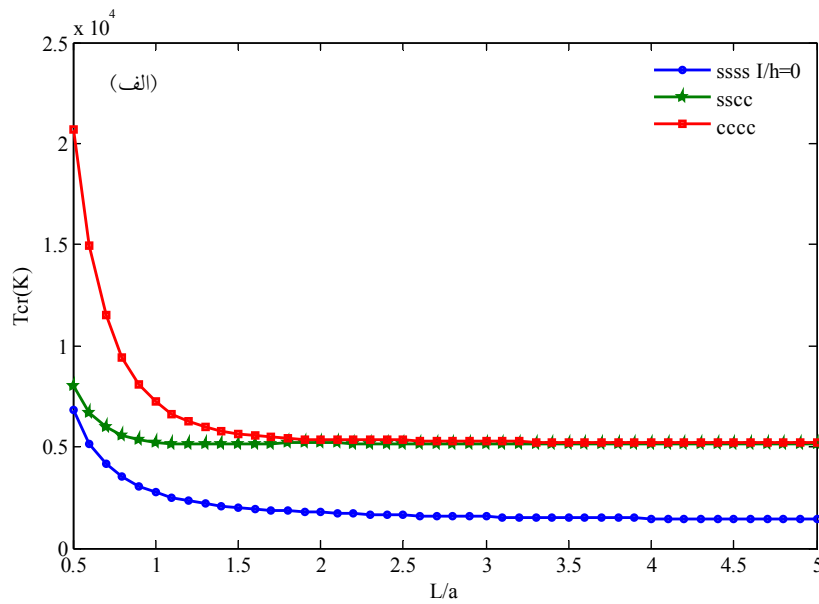
ضخامت صفر و یک انجام شده است تا تأثیر مقیاس و شرایط مرزی قابل مشاهده باشد. افزایش دمای بحرانی کمانش در مقایسه نمودارهای (الف) و (ب) در هر یک از این شکل‌ها با در نظر گرفتن شرایط یکسان و با افزایش پارامتر مقیاس طول قابل مشاهده است. میزان تأثیر شرایط مرزی با افزایش چشمگیر دمای بحرانی کمانش با سخت‌تر شدن شرایط مرزی نمایان شده است. در تمام نمودارها قابل مشاهده است که با افزایش نسبت ابعاد ورق دمای بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند. سرعت همگرایی کاهش دما بالا است به‌گونه‌ای که به‌ازای نسبت $L/a \geq 1/5$ تغییرات در دمای بحرانی کمانش ناچیز است. برای بررسی بهتر تأثیر پارامتر مقیاس طول، نسبت ضخامت ورق به این پارامتر از ۰/۵ تا ۲۰ به‌تدریج افزایش داده شده و دمای بحرانی کمانش به‌ازای هر نسبت تعیین و در نمودارهای شکل



شکل ۲- تغییرات دمای بحرانی کماتش ورق برحسب نسبت طول به عرض در حالت توزیع یکنواخت دما
برای نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت برابر با: الف) صفر و ب) یک

لازم به ذکر است که اگر کاهش اندازه در مقابل ضخامت به میزان قابل توجهی کمتر باشد، تغییر ابعاد یا به عبارت دیگر کاهش مقیاس بی تأثیر است. این تغییرات در هر سه حالت تغییر دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی قابل مشاهده است.

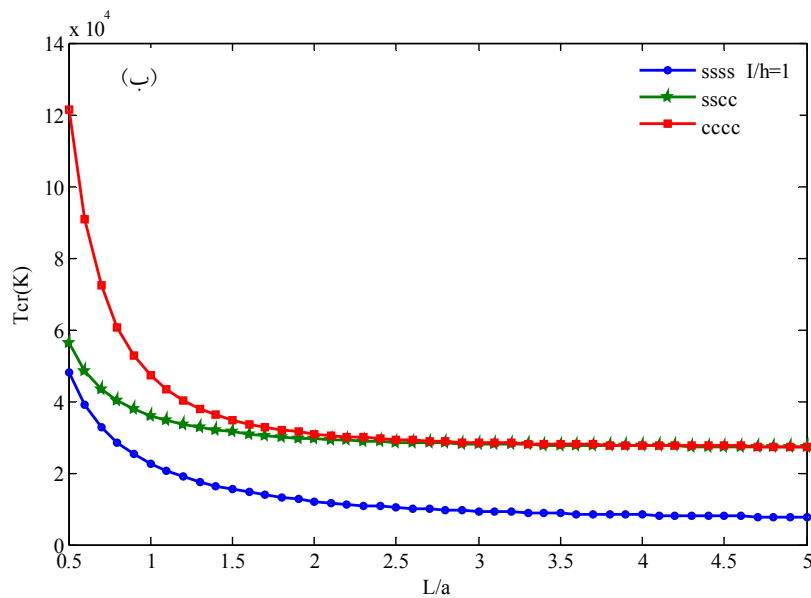
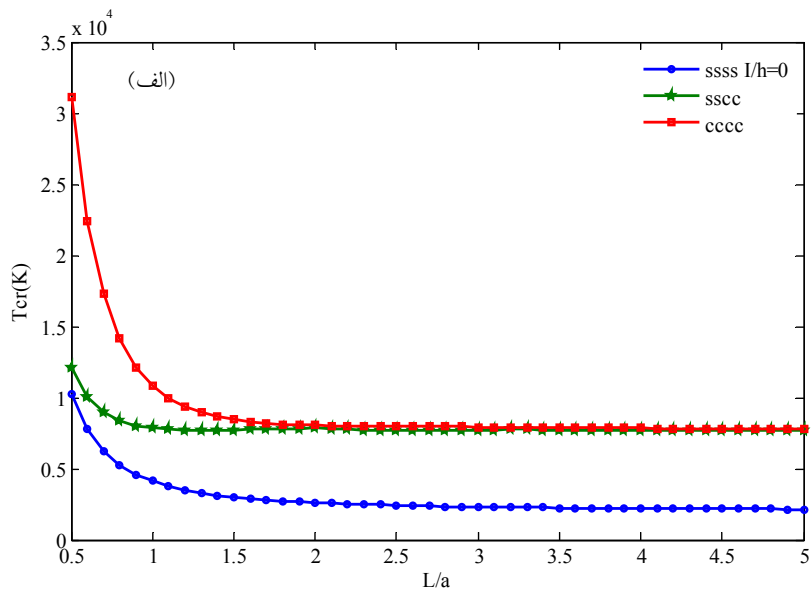
اندازه در تحلیل انجام شده به وسیله تئوری جفت تنش اصلاح شده که دارای پارامتری به نام پارامتر مقیاس طول است، لحاظ و مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج ارائه شده، با کاهش اندازه دمای بحرانی کماتش افزایش پیدا می کند. البته



شکل ۳- تغییرات دمای بحرانی کمانش ورق بر حسب نسبت طول به عرض در حالت توزیع خطی دما
برای نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت برابر با: الف) صفر و ب) یک

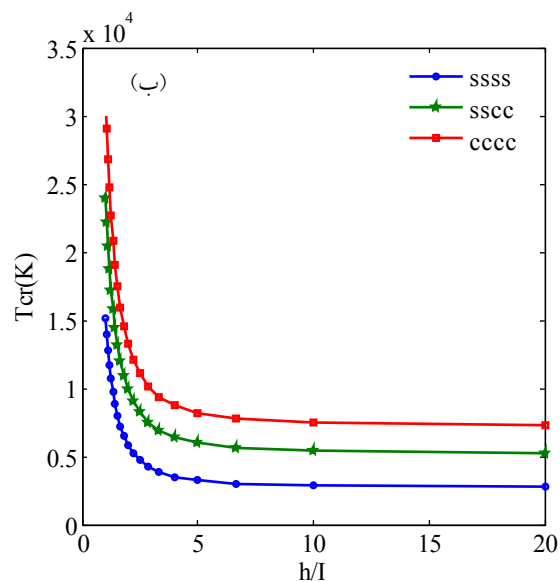
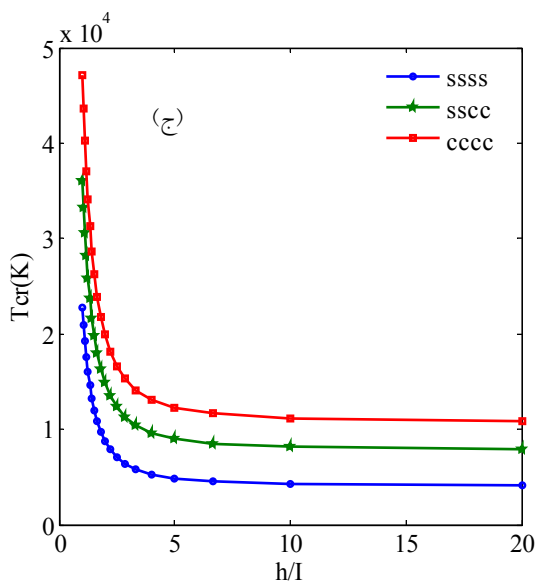
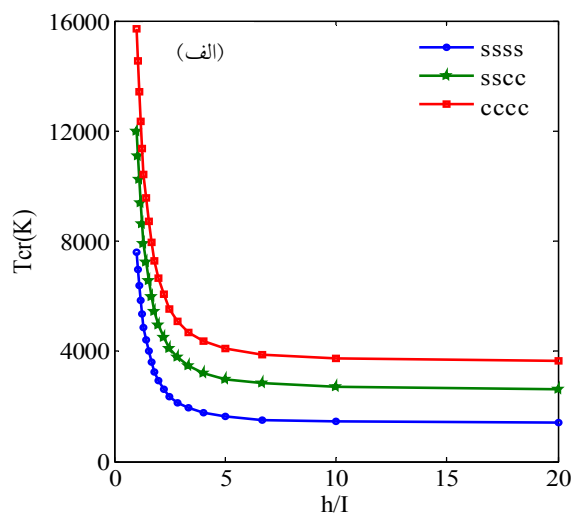
شده نشان از الگوی ثابت این تغییرات داشت. لازم به ذکر است که با تغییر دما از حالت یکنواخت به خطی و از حالت خطی به غیرخطی، افزایش دمای بحرانی کمانش به مقدار چشم گیری قابل مشاهده است.

در ضمن تغییر ابعاد ورق از مربعی به مستطیلی نیز نشان داد که در نسبت ابعاد زیاد، دمای بحرانی کمانش مقداری ثابت خواهد داشت، به گونه ای که با تغییر این نسبت تغییر ناچیزی در دمای بحرانی کمانش مشاهده می شود. این تغییرات نیز در حالت های مختلف توزیع دما ارزیابی شد و نتایج استخراج



شکل ۴: دمای بحرانی کماتش ورق بر حسب نسبت طول به عرض (توزیع حرارت غیر خطی):

(الف) نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت برابر صفر و (ب) نسبت پارامتر مقیاس طول به ضخامت برابر یک



شکل ۵- نمودار تغییرات دمای بحرانی ورق مربعی برحسب نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول
برای: الف) توزیع حرارت یکنواخت، ب) توزیع حرارت خطی و ج) توزیع حرارت غیرخطی

واژه‌نامه

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------------|
| 1. continuum surface elasticity | 4. two variable refined plate theory | 7. higher-order plate theory |
| 2. nonlocal theory of elasticity | 5. modified couple stress theory | 8. sinusoidal plate theory |
| 3. small scale effects | 6. strain gradient theory | |

مراجع

- Sobhy, M., "Hygrothermal Vibration of Orthotropic Double-Layered Graphene Sheets Embedded in an Elastic Medium using the Two-Variable Plate Theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, pp. 85-99, 2016.

2. He, L. H., Lim, C. W., and Wu, B. S., "A Continuum Model for Size-Dependent Deformation of Elastic Films of Nano-Scale Thickness", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 847-857, 2004.
3. Lim, C., and He, L., "Size-Dependent Nonlinear Response of Thin Elastic Films with Nano-Scale Thickness", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, pp. 1715-1726, 2004.
4. Kitipornchai, S., He, X. Q., and Liew, K. M., "Continuum Model for the Vibration of Multilayered Graphene Sheets", *Physical Review B*, Vol. 72, p. 075443, 2005.
5. XQ. He, S. Kitipornchai, KM. Liew, "Resonance Analysis of Multi-Layered Graphene Sheets used as Nanoscale Resonators", *Nanotechnology*, Vol. 16, p. 2086, 2005.
6. Sarrami-Foroushani, S., and Azhari, M., "Nonlocal Vibration and Buckling Analysis of Single and Multi-Layered Graphene Sheets using Finite Strip method Including Van Der Waals Effects", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 57, pp. 83-95, 2014.
7. Lu, P., Zhang, P. Q., Lee, H. P., Wang, C. M., and Reddy, J. N., "Non-Local Elastic Plate Theories", in *Proceedings of the Royal Society of London a: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pp. 3225-3240, 2007.
8. Pradhan, S., and Phadikar, J., "Small Scale Effect on Vibration of Embedded Multilayered Graphene Sheets Based on Nonlocal Continuum Models", *Physics Letters A*, Vol. 373, pp. 1062-1069, 2009.
9. Murmu, T., and Pradhan, S., "Small-Scale Effect on the Free In-Plane Vibration of Nanoplates by Nonlocal Continuum Model", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, pp. 1628-1633, 2009.
10. Aksencer, T., and Aydogdu, M., "Levy Type Solution Method for Vibration and Buckling of Nanoplates using Nonlocal Elasticity Theory", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, pp. 954-959, 2011.
11. Wang, Y. Z., Li, F. M., and Kishimoto, K., "Thermal Effects on Vibration Properties of Double-Layered Nanoplates at Small Scales", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, pp. 1311-1317, 2011.
12. Shimpi, R. P., "Refined Plate Theory and Its Variants", *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 137-146, 2002.
13. Narendar, S., "Buckling Analysis of Micro/Nano-Scale Plates Based on Two-Variable Refined Plate Theory Incorporating Nonlocal Scale Effects", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 3093-3103, 2011.
14. Narendar, S., and Gopalakrishnan, S., "Scale Effects on Buckling Analysis of Orthotropic Nanoplates Based on Nonlocal Two-Variable Refined Plate Theory", *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 395-413, 2012.
15. Satish, N., Narendar, S., and Gopalakrishnan, S., "Thermal Vibration Analysis of Orthotropic Nanoplates Based on Nonlocal Continuum Mechanics", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, pp. 1950-1962, 2012.
16. Ameer, M., Tounsi, A., Mechab, I., and El Bedi, A. A., "A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 15, pp. 1405-1414, 2011.
17. Thai, H. -T., and Vo, T. P., "A New Sinusoidal Shear Deformation Theory for Bending, Buckling, and Vibration of Functionally Graded Plates", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, pp. 3269-3281, 2013.
18. Tounsi, A., Houari, M. S. A., and Benyoucef, S., "A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 24, pp. 209-220, 2013.
19. Zenkour, A., and Sobhy, M., "Nonlocal Elasticity Theory for Thermal Buckling of Nanoplates Lying on Winkler-Pasternak Elastic Substrate Medium", *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 53, pp. 251-259, 2013.
20. Sobhy, M., "Generalized Two-Variable Plate Theory for Multi-Layered Graphene Sheets with Arbitrary Boundary Conditions", *Acta Mechanica*, Vol. 225, p. 2521, 2014.
21. Sobhy, M., "Levy-Type Solution for Bending of Single-Layered Graphene Sheets in Thermal Environment using the Two-Variable Plate Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 90, pp. 171-178, 2015.
22. Park, S., and Gao, X., "Bernoulli-Euler Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, p. 2355, 2006.
23. Ma, H. M., Gao, X. L., and Reddy, J. N., "A Microstructure-Dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, pp. 3379-3391, 2008.
24. Tsiatas, G. C., "A New Kirchhoff Plate Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 2757-2764, 2009.
25. Ma, H. M., Gao, X. L., and Reddy, J. N., "A Nonclassical Reddy-Levinson Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 8, 2010.
26. Ke, L. L., Wang, Y. S., Yang, J., and Kitipornchai, S., "Free Vibration of Size-Dependent Mindlin Microplates Based on the Modified Couple Stress

- Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 94-106, 2012.
27. Thai, H. -T., and Kim, S. -E., “A Size-Dependent Functionally Graded Reddy Plate Model Based on a Modified Couple Stress Theory”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, pp. 1636-1645, 2013.
 28. Kim, J., and Reddy, J., “Analytical Solutions for Bending, Vibration, and Buckling of FGM Plates using a Couple Stress-Based Third-Order Theory”, *Composite Structures*, Vol. 103, pp. 86-98, 2013.
 29. Mirsalehi, M., Azhari, M., and Amoushahi, H., “Stability of Thin FGM Microplate Subjected to Mechanical and Thermal Loading Based on the Modified Couple Stress Theory and Spline Finite Strip Method”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 47, pp. 356-366, 2015.
 30. Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P., “Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
 31. Hindiin, R., “Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates”, *JAPME*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
 32. Reddy, J., “Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 288-307, 2007.
 33. Zenkour, A. M., and Sobhy, M., “Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations using the Trigonometric Theory”, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 34, pp. 1119-1138, 2011.
 34. Touratier, M., “An Efficient Standard Plate Theory”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, pp. 901-916, 1991.
 35. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Es' Haghi, M., “A Novel Approach for In-Plane/Out-of-Plane Frequency Analysis of Functionally Graded Circular/Annular Plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp. 1025-1035, 2010.
 36. Mechab, I., Mechab, B., and Benaissa, S., “Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates using Four-Variable Refined Plate Theory by the New Function”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, pp. 748-757, 2013.
 37. Kiani, Y., Bagherizadeh, E., and Eslami, M. R., “Thermal Buckling of Clamped Thin Rectangular FGM Plates Resting on Pasternak Elastic Foundation (Three Approximate Analytical Solutions)”, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 91, pp. 581-593, 2011.