نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

مدل‌سازی انتشار میدان موج لرزه‌ای با استفاده از روش اویلر

فرزاد مرادپوری*

گروه مهندسی معدن، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.6.9]

[DOI: 10.47176/jcme.38.2.6801]

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۷/۱۹ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲)

چکیده– اصولاً برونیابی میدان موج بر مبنای حل معادله موج یکی از مراحل مهم مدل‌سازی لرزه‌ای بوده و نیازمند دقت بسیار بالایی است. برونیابی میدان موج توسط روش‌های مختلف عددی از جمله روش تفاضلات محدود به‌عنوان یک روش سنتی و مرسوم انجام می‌شود. از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود کاهش دقت و پراکندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی (Δt) است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیرهای ترکیبی است که با توجه به نوع ساختار آنها زمان محاسبات را کاهش داده و با افزایش فواصل زمانی دچار پراکندگی عددی نشده و دقت آن به نسبت روش تفاضلات محدود بیشتر است. از این‌رو در این مقاله ابتدا با استفاده از روش اویلر یک انتگرال‌گیر ترکیبی برای برونیابی میدان موج معرفی می‌شود. سپس برونیابی میدان موج برای یک فاصله زمانی به نسبت بزرگ در قالب یک مدل ساده برای هر دو روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اویلر نشان داده شده است که بیانگر برونیابی میدان موج با کیفیت بهتر است. در نهایت دقت برونیابی هر دو روش با هم مقایسه شده است که نشان از دقت بسیار بالاتر روش ترکیبی اویلر دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی لرزه‌ای، تفاضلات محدود، روش اویلر، دقت، پراکندگی عددی.

Seismic Wave-Field Propagation Modelling using the Euler Method

F. Moradpouri*

Department of Mining Engineering, Faculty of Engineering, Lorestan University, Khoramabad, Iran.

Abstract*: Wave-field extrapolation based on solving the wave equation is an important step in seismic modeling and needs a high level of accuracy. It has been implemented through a various numerical methods such as finite difference method as the most popular and conventional one. Moreover, the main drawbacks of the finite difference method are the low level of accuracy and the numerical dispersion for large time intervals (Δt). On the other hand, the symplectic integrators due to their structure can cope with this problem and act more accurately in comparison to the finite difference method. They reduce the computation cost and do not face numerical dispersion when time interval is increased. Therefore, the aim of the current paper is to present a symplectic integrator for wave-field extrapolation using the Euler method. Then, the extrapolation is implemented for rather large time intervals using a simple geological model. The extrapolation employed for both symplectic Euler and finite difference*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: moradpouri.fa@lu.ac.ir

methods showed a better quality image for the proposed method. Finally the accuracy was compared to the finite difference method.

Keywords: *Seismic modeling, Finite difference, Euler method, Accuracy, Numerical dispersion.*

فهرست علائم

c	سرعت انتشار موج صوتی	t	زمان
$-c^{2}(\mathbf{x})\nabla^{2}$	عملگر L^{2}	$T(\mathbf{p})$	انرژی سینتیکی
$\mathbf{f}$	بردار نیرو	$V(\mathbf{x})$	انرژی پتانسیلی
G	مشتق اول میدان موج نسبت به زمان	W	تقریب مشتق دوم میدان موج
H	تابع همیلتونی	x	مکان
J	تابع بسل	Δt	زمان نمونه‌برداری
k	عدد موج	$\Delta x,\ \Delta z$	فواصل شبکه
P	میدان موج	∂	مشتق جزئی
$\mathbf{p}$	بردار اندازه حرکت	∇	عملگر لاپلاسین
Q_{2k}	چندجمله‌ای اصلاح شده چبیشف	λ	مقدار ویژه

۱- مقدمه

به‌طور اصولی انجام مدل‌سازی‌های مختلف معادله موج مبنا با حل معادلات موج شروع می‌شود. این معادلات نوعی معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مشتقات مکانی و زمانی هستند که با استفاده از روش‌های مختلفی به‌صورت عددی حل شده و میدان موج را در نقاط درون زمین برون‌یابی می‌کنند. معادله موج صوتی[1] ارائه شده در رابطه (۱) از جمله پرکاربردترین این معادلات برای توصیف انتشار موج لرزه‌ای در زمین است.

$$\frac{\partial^{2}P(\mathbf{x},t)}{\partial t^{2}}=c^{2}\nabla^{2}P(\mathbf{x},t) \tag{۱}$$

به‌طوری که $P(\mathbf{x},t)$ میدان موج در زمان t و مکان $\mathbf{x}=(x,y,z)$ است، $c=c(\mathbf{x})$ سرعت انتشار موج صوتی و ∇^{2} عملگر لاپلاسین در مختصات کارتزین[2] است.

برون‌یابی میدان موج یک راهکار ریاضیاتی است که امکان به‌دست آوردن میدان موج به‌صورت پیشرو و پسرو در زمان یا مکان را فراهم آورده و از طریق روش‌های بازگشتی[3] و غیر بازگشتی[4] قابل انجام است [۱ و ۲]. در روش‌های غیر بازگشتی، برون‌یابی میدان موج در هر نقطه‌ای عمقی با استفاده از میدان ثبت شده در سطح قابل انجام است و نیاز به تعیین میدان موج در مراحل میانی نیست. در شرایط محیط غیرهمگن، برون‌یابی در اعماق خیلی زیاد در یک مرحله نیازمند استفاده از عملگرهای بسیار پیچیده است که تنها به‌کمک الگوریتم‌های مدل‌سازی همانند ردیابی پرتو[5] قابل انجام است. در مقابل روش‌های بازگشتی تا زمانی که فواصل برون‌یابی کوچک هستند و محیط به‌صورت محلی همگن است مشکلی ندارند.

روش تفاضلات محدود یکی از معروف‌ترین روش‌های بازگشتی حل عددی معادلات دیفرانسیلی جزئی بوده و به‌طور گسترده در مدل‌سازی لرزه‌ای استفاده می‌شود [۷-۳]. پاسخ عددی میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود از گسسته سازی زمانی و مکانی برای تقریب زدن استفاده می‌کند [۸ و ۹]. در حل معادله موج با استفاده از روش تفاضلات محدود، در ابتدا عملگر زمان توسط یک طرح مرتبه دو تقریب زده می‌شود، درحالی که مشتقات مکانی توسط یک طرح مرتبه چهار تقریب زده می‌شوند. تقریب مشتق زمان به این‌صورت باعث

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.6.9]

[DOI: 10.47176/jcme.38.2.6801]

ایجاد خطای عددی می‌شود که منجر بـه تغییـر شـکل پـالس[۶] و پراکندگی عددی می‌شود که با انتخاب گـام‌هـای زمـانی کوچـک می‌توان از آن جلوگیری کرد [۱۰]. کوچک شدن گام زمانی باعث بالا رفتن دقت شده و در مقابل باعـث بـالا رفـتن زمـان و هزینـه محاسبات می‌شود که هنگام مواجهه بـا یـک مـدل زمـین‌شناسـی واقعی پیچیده استفاده از آن با مشکل مواجه می‌شود.

از روش‌های دیگـر بـا سـازوکـار بازگشـتی الگـوریتم‌هـای ترکیبـی هسـتند کـه بـه‌واسـطه ویژگـی حفـظ سـاختار و شبیه‌سازی‌های بلندمدت شناخته شده هستند. ایـن خصوصـیات جالب الگوریتم‌های ترکیبی باعـث کارامـدی آنهـا در بـزرگ‌تـر کردن فواصل زمـانی و مکـانی کوچـک بـدون کـاهش دقـت و مشکل پراکندگی عددی می‌شود [۱۱]. انتگرال‌گیرهای ترکیبی را می‌توان برای محاسبه عددی پاسـخ معادلـه مـوج و مشـتق اول زمانی آن مورد استفاده قرار داد. یکی دیگر از جنبه‌هـای جالـب انتگرال‌گیرهای ترکیبی آن است که میدان موج براورد شده برای محاسبه مشتق نسبت به زمان میدان موج در همـان گـام زمـانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده از انتگـرال‌گیـرهـای ترکیـب شده با روش بسط سریع مـی‌توانـد میـدان مـوج را بـه‌صـورت پایدار و بدون نویز بـرون‌یـابی کـرده و بـه‌طـور مـؤثری بـرای مدل‌سازی داده‌های لرزه‌ای استفاده کند. ایـن روش دارای دقتـی همانند روش بسط سریع است. علاوه بر آن، اگر تعداد عبـارات بسط به‌طور درست انتخاب شود، می‌تواند برای هر گـام زمـانی مورد استفاده قرار گیرد. از این‌رو در مقاله حاضر ضمن اسـتفاده درست از روابط ریاضیاتی و نحوه ارتبـاط آنهـا بـا پارامترهـای فیزیکی، به‌ویژه در حوزه علوم لرزه‌ای روش ترکیبی اویلر بـرای برون‌یابی میدان موج معرفی شده است. در روش معرفـی شـده، سعی شده است تا روابط موجود برای برون‌یابی میدان موج (در طول و عمق زمین) نسبت به سـایر روش‌هـای ترکیبـی موجـود ساده‌تر و در عین حال امکان استفاده و اجرای آن تسهیل شـود. همچنین روش معرفی شده اویلر این ویژگـی را دارد تـا ضـمن استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر خطای ناشی از افـزایش گـام زمانی را در مقایسه با روش تفاضلات محدود بـه‌میـزان زیـادی کاهش دهد. در عین حال در یک شرایط یکسـان، زمـان انجـام محاسبات در این روش نسـبت بـه‌روش تفاضـلات محـدود در استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر، به‌مراتب کمتر است.

۲- دستگاه معادلات موج همیلتونی

در ریاضیات انتگرال‌گیرهای ترکیبی به‌روش‌های انتگـرال‌گیـری عددی برای گـروه خاصـی از معـادلات دیفرانسـیلی مـرتبط بـا مکانیـک کلاسـیک و هندسـه ترکیبـی گفتـه مـی‌شـود [۱۲]. انتگرال‌گیرهـای ترکیبـی زیـر مجموعـه‌ای از انتگـرال‌گیـرهـای هندسی را تشکیل می‌دهند، به‌عبارتی تبدیلات بآیینی (متعارفی) هستند که شکل معادلات حرکـت همیلتـون را حفـظ مـی‌کننـد [۱۳].

یک دستگاه همیلتونی متشکل از معادلات متـداول بـه‌شـکل زیر است [۱۴].

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{۲}$$

که در آن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{p}$ به‌ترتیب بردارهـای n بعـدی یـک مختصـات تعمیم‌یافته (مختصات لاگرانژی)، اندازه حرکت هستند. t متغیـر زمانی مستقل و $H = H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ تابع همیلتونی هستند. مجموعـه مکـان و مختصـات انـدازه حرکـت $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ مختصـات بـآیین (متعارف) نامیده می‌شود.

با درنظر گرفتن دستگاه معادلات دیفرانسیلی به‌دسـت آمـده از سیستم همیلتونی می‌توان نوشت.

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{x}) \tag{۳}$$

به‌طوری که $T(\mathbf{p})$ انرژی سـینتیکی و $V(\mathbf{x})$ انـرژی پتانسـیلی است.

بنابراین معادلات حرکـت یـک ذره بـا جـرم واحـد توسـط معادله (۴) به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}=\mathbf{p}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{f} \tag{۴}$$

به‌طوری که $\mathbf{f}$ و $\mathbf{p}$ به‌ترتیب بردارهای نیرو و اندازه حرکت هستند.

معادله موج را می‌توان با استفاده از فرمول‌های همیلتونی ارائه شده در رابطه (۴) بازنویسی و از آن در معرفی انتگرال‌گیر های ترکیبی استفاده کرد. بر اساس تحقیق اسکل و همکاران (۱۹۹۷)، روش‌های ترکیبی، نامتغیرهای خاص دستگاه همیلتونی را حفظ کرده و در بازه‌های انتگرال‌گیری بزرگ با دقت بسیار بالا عمل کرده و برای دستگاه‌های خطی با اندازه گام برون‌یابی به‌نسبت کوچک پایدار باقی می‌ماند [۱۱].

۳- روش اویلر

دسته‌ای از انتگرال‌گیرهای ترکیبی که به‌طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرند، با به‌کارگیری روش جداسازی به‌وجود آمده‌اند. فرض کنید که دستگاه همیلتونی تفکیک‌پذیر باشد، به این معنی که بتوان آن را به‌شکل رابطه (۳) نوشت. برای ساده‌سازی نمادها، $\mathbf{g}=(\mathbf{x},\mathbf{p})$ معرفی می‌شود که بیانگر بردار مختصات بآیین (متعارف) است. سپس دستگاه معادلاتی (۲) را می‌توان به‌صورت یک عبارت به‌صورت رابطه (۵) نوشت [۱۲].

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt}=\{\mathbf{g},H(\mathbf{g})\} \tag{۵}$$

به‌طوری که کروشه، معرف کروشه پواسن[۷] است که به‌صورت عملگر رابطه (۶) معرفی می‌شود:

$$D_H\mathbf{g}=\{\mathbf{g},H(\mathbf{g})\}=\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{۶}$$

دستگاه همیلتونی را می‌توان به‌صورت رابطه (۷) ساده کرد:

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt}=D_H\mathbf{g} \tag{۷}$$

پاسخ صوری[۸] این دستگاه معادلادت توسط رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{g}(t)=e^{[tD_H]}\,\mathbf{g}(0) \tag{۸}$$

برای شکل همیلتونی رابطه (۳)، $D_H=D_T+D_V$ دارای پاسخ صوری به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{g}(t)=e^{[t(A+B)]}\mathbf{g}(0) \tag{۹}$$

به‌طوری که $A=D_T$ و $B=D_V$.

تا زمانی که A و B عملگرهای جابه‌جایی‌پذیر (آبلی)[۹] نیستند و t یک عدد حقیقی کوچک است، تابع نمایی می‌تواند توسط ضرب توابع نمایی به‌صورت معادله (۱۰) تقریب زده شود:

$$e^{[t(A+B)]}=\prod_{i=1}^{k}e^{(c_i tA)}e^{(d_i tB)}+o(t^{n+1}) \tag{۱۰}$$

به‌طوری که n در رابطه (۱۰) مرتبه انتگرال نامیده شده و برای یک n داده شده مقادیر مجموعه اعداد حقیقی $(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ و $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$ طوری تعیین می‌شوند که اختلاف بین $e^{[t(A+B)]}$ و ضرب نمایی‌ها از مرتبه t^{n+1} باشد.

با فرض c_i و d_i $(i=1,2,\ldots,k)$، به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد حقیقی که شرایط معادله (۱۰) را برای یک n داده شده تأمین می‌کنند. معادله (۹) را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{g}(t)=\left[\prod_{i=1}^{k}e^{(c_i tA)}e^{(d_i tB)}\right]\mathbf{g}(0) \tag{۱۱}$$

در رابطه (۱۱)، انتقال نقطه به نقطه از $\mathbf{g}(0)$ تا $\mathbf{g}(t)$ انجام می‌شود. این انتقال به‌صورت ترکیبی انجام می‌شود، زیرا فقط ضرب ترکیبی اجزاء انتقال بوده و پاسخ دقیق رابطه (۹) از مرتبه $o(t^n)$ را تقریب می‌زند. علاوه بر این رابطه (۱۱) به‌طور صریح از طریق رابطه (۹) قابل محاسبه است. در واقع معادله (۱۱) توالی از انتقال‌ها را به‌دست می‌دهد:

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_{i-1}+tc_i\frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_{i-1})$$
$$\mathbf{p}_i=\mathbf{p}_{i-1}-td_i\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \tag{۱۲}$$

برای $i=1$ تا $i=k$، به‌طوری که $(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}_0)=\mathbf{g}(0)$ و $(\mathbf{x},\mathbf{p})=\mathbf{g}(t)$. انتگرال ترکیبی از مرتبه n به‌دست می‌آید.

یوشیدا (۱۹۹۰)، برخی از روش‌ها را برای تعیین مجموعه ضرایب (c_i,d_i) که شرایط رابطه (۱۰) را تأمین می‌کنند، معرفی کرد. روش معرفی شده، طرف چپ و راست معادله (۱۰) را با توان t بسط داده و ضرایب توان‌های برابر t از مرتبه $o(t^n)$ را برابر می‌کند. به این ترتیب یک دسته از معادلات جبری غیرخطی برای ضرایب نامعین c_i و d_i به‌دست می‌آیند. برای مثال برای $n=1$ (انتگرال‌گیر مرتبه اول)، جواب صفر[۱۰]

برابر است با $c_1 = d_1 = 1$ ، $(k = 1)$ و می‌توان نوشت:

$$e^{[t(A+B)]} = e^{(tA)} e^{(tB)} + o(t^2) \qquad (۱۳)$$

استفاده از ضرایب $c_1 = d_1 = 1$ در معادلـه (۱۲)، روش اویلـر را مطابق آنچه که در رابطه (۱۴) آمده است، به‌دست می‌دهد:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t\frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0),$$
$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 - t\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1) \qquad (۱۴)$$

۳-۱- ارائه انتگرال‌گیر ترکیبی اویلر

در این قسمت روش عددی ترکیبی بـرون‌یـابی میـدان مـوج بـا استفاده از روش اویلر (رابطه ۱۴) برای اسـتفاده در مـدل‌سـازی لرزه‌ای ارائه می‌شود. در ابتـدا رابطـه (۱) را مـی‌تـوان بـه‌شـکل ساده‌تر زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = -L^2 P(\mathbf{x},t) \qquad (۱۵)$$

به‌طوری که $-L^2 = c^2(\mathbf{x})\nabla^2$ است.

پاسخ رابطـه (۱۵)، بـا شـرایط اولیـه $\frac{\partial P(\mathbf{x},t)}{\partial t}|_{t=0} = \dot{P}_0$ و $P(\mathbf{x}, t=0) = P_0$ $P(\mathbf{x}, t=0) = P_0$ به‌صورت زیر است:

$$P(x,t) = \cos(Lt)P_0 + L^{-1}\sin(Lt)\dot{P}_0 \qquad (۱۶)$$

میـدان‌هـای مـوج $P(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ و $P(\mathbf{x}, t-\Delta t)$ را مـی‌تـوان توسط رابطه (۱۶)، براورد کرد. برای حذف بخش مشتق زمـانی میدان موج در این معادله، با اضافه کردن ایـن دو میـدان مـوج، بخش فرد پاسخ در زمان حذف شده و تنها بخش زوج آن باقی خواهد ماند. در نتیجه:

$$P(\mathbf{x}, t+\Delta t) + P(\mathbf{x}, t-\Delta t) = 2\cos(L\Delta t)P(\mathbf{x},t) \qquad (۱۷)$$

پاسخ تحلیلی رابطه (۱۷) در شکل ساده‌تر به‌صورت زیر نوشـته می‌شود [۱۵]:

$$P(t+\Delta t) + P(t-\Delta t) = 2\cos(L\Delta t)P(t), \quad L^2 = -c^2\nabla^2 \qquad (۱۸)$$

به‌طوری که برای محاسبه $\cos(L\Delta t)$، باید عملگر L^2 را به‌طور صریح محاسبه و سـپس از بسـط چبیشـف ارائـه شـده توسـط کوزلوف و همکاران (۱۹۸۹) استفاده کرد. در اینجا، رابطـه (۱۸) بازنویسی شده، اما تابع کسینوس با بسط چبیشف آن جـایگزین می‌شود [۱۷–۱۵].

$$P(t+\Delta t) + P(t-\Delta t) = 2\left[\sum_{k=0}^{M} C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k}\left(\frac{iL}{R}\right)\right] P(t) \qquad (۱۹)$$

که در آن $C_0 = 1$ و $C_k = 2$ برای $k \neq 0$ است، مقدار M بسته به نوع مسئله از صفر تا بی‌نهایت قابل تغییـر اسـت. $J_k(\Delta t R)$ معرف توابع بسل[11] مرتبه k است بـه‌طـوری کـه $z = \Delta t R$ و Q_{2k} چندجمله‌ای اصلاح شـده چبیشـف[12] هسـتند. مقـدار R برای انتشار دو بعدی موج به‌طور تقریبی از رابطه زیر بـه‌دسـت می‌آید:

$$R = c_{max}\pi\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2} \qquad (۲۰)$$

به‌طوری که، R یک مقدار اسکالر بزرگ‌تر از مقادیر ویـژه $-L^2$ است. همچنین c_{max} حداکثر سـرعت در شـبکه و Δx و Δz فواصل شبکه هستند [۱۶].

عبارت رابطه (۱۹)، تنها شامل چندجمله‌ای‌های اصلاح شده چبیشـف زوج اسـت. مجمـوع بسـط عبـارت $\cos(L\Delta t)$ در معادله (۱۹) به‌طور نمایی بـرای $M > \Delta t R$ همگـرا مـی‌شـود، بنابراین، با اطمینان می‌توان مجموع بسط را با اسـتفاده از تعیـین مقدار M به‌ازای مقادیر کمـی بـزرگ‌تـر از $\Delta t R$ قطع[13] کـرد [۱۶].

برای معرفی طرح ترکیبی انتگرال‌گیر اویلر و روش بسط سـریع، عبارت $-2P(t)$ به دو طرف رابطه (۱۹)، اضافه شده و عبـارت $1/(\Delta t^2)$ در هر دو طرف این معادلـه ضـرب مـی‌شـود، نتیجـه به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = \frac{2}{(\Delta t)^2}\left[\sum_{k=0}^{M} C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k}\left(\frac{iL}{R}\right) - 1\right] P^{(n)} \qquad (۲۱)$$

باید توجه شود که عبارت سمت چپ تسـاوی در رابطـه (۲۱)، تقریب تفاضل محدود مرکزی[14] مرتبه دو بـرای $\partial^2 P/\partial t^2$ و بـا $W(P^{(n)})$ برابر است (تقریب مشتق دوم میدان موج با اسـتفاده از تفاضلات محدود مرکزی).

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\frac{P^{(n+1)}-2P^{(n)}+P^{(n+1)}}{(\Delta t)^2} \qquad (۲۲)$$

$$W(P^{(n)})=\frac{2}{(\Delta t)^2}\left[\sum_{k=0}^{M} C_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k}\left(\frac{iL}{R}\right)-1\right]P^{(n)} \qquad (۲۳)$$

اکنون با استفاده از دستگاه معادلات همیلتونی می‌توان روابط (۱)، (۱۵) و (۲۱) را به‌شکل واحد زیر با هم مرتبط کرد [۱۰، ۱۸ و ۱۹]:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=G, \qquad \frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=W(P^{(n)}) \qquad (۲۴)$$

معادله موج (۲۴) این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان دسته‌ای از روش‌های ترکیبی را برای انتگرال‌گیری در زمان استفاده کرد.

حل معادله (۲۴) با استفاده از روش اویلر (معادله ۱۴)، در معادله (۲۵) ارائه شده است:

$$P^{(n+1)}=P^{(n)}+\Delta t G^{(n)}, \quad G^{(n+1)}=G^{(n)}+\Delta t W(P^{(n+1)}) \qquad (۲۵)$$

معادله (۲۵) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P^{(n+1)}=P^{(n)}+\Delta t G^{(n)}, \quad G^{(n+1)}=G^{(n)}+\Delta t c^2\nabla^2 P^{(n+1)}= G^{(n)}+\Delta t c^2\nabla^2\left[P^{(n)}+\Delta t G^{(n)}\right] \qquad (۲۶)$$

درنتیجه می‌توان معادله نهایی انتگرال‌گیر ترکیبی اویلر را به‌شکل زیر نوشت:

$$P^{(n+1)}=P^{(n)}+\Delta t G^{(n)}, \quad G^{(n+1)}=\Delta t c^2\nabla^2 P^{(n)}+\left(1+\Delta t^2 c^2\nabla^2\right)G^{(n)} \qquad (۲۷)$$

که طرح ترکیبی معادله (۲۷) انتگرال‌گیر اویلر و روش بسط سریع نامیده می‌شود که می‌توان آن را به‌شکل ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} P^{(n+1)} \\ G^{(n+1)} \end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix} P^{(n)} \\ G^{(n)} \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

به‌طوری که $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ \frac{2}{\Delta t}\left[\left(\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}\right)-1\right] & \left[2\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}-1\right] \end{pmatrix} \qquad (۲۹)$$

بنابراین با بازنویسی مجدد می‌توان رابطه نهایی انتگرال‌گیر ترکیبی اویلر (معادله ۲۷) را به‌صورت معادله (۳۰) نیز نوشت:

$$P^{(n+1)}=P^{(n)}+\Delta t G^{(n)}$$

$$G^{(n+1)}=\frac{2}{\Delta t}\left[\left(\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}\right)-1\right]P^{(n)}+\left[2\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}-1\right]G^{(n)} \qquad (۳۰)$$

برای تحلیل پایداری طرح ترکیبی اویلر- بسط سریع، با استفاده از تبدیل فوریه ماتریس ارائه شده در رابطه (۲۹) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1-\frac{(ck\Delta t)^2}{2} & \Delta t \\ -(ck)^2\Delta t+\frac{(ck)^4(\Delta t)^3}{4} & 1-\frac{(ck\Delta t)^2}{2} \end{pmatrix} \qquad (۳۱)$$

نوشتن معادله مشخصه به‌صورت $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$، مقادیر ویژه را طبق رابطه (۳۲) به‌دست می‌دهد:

$$\lambda=\left[1-\frac{(ck\Delta t)^2}{2}\right]\pm(ck\Delta t)\sqrt{\frac{(ck\Delta t)^2}{4}-1} \quad \text{or}$$

$$\lambda=\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}\pm\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{M} C_{2k}J_{2k}Q_{2k}\right)^2-1} \qquad (۳۲)$$

به‌طوری که λ، k، c و Δt به‌ترتیب بیانگر مقدار ویژه، عدد موج، سرعت موج در محیط و زمان هستند.

برای پایداری روش ترکیبی اویلر- بسط سریع (معادله ۳۰) باید $|\lambda|\leq 1$، بنابراین λ نیز عدد مختلط باشد، به این معنی که ریشه معادله (۳۲) باید کمتر از صفر باشد و درنتیجه:

$$\frac{(ck\Delta t)^2}{4}-1\leq 0 \qquad (۳۳)$$

عبارت معادله (۳۳) شرط پایداری طرح ترکیبی اویلر- بسط سریع به‌صورت زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\Delta t\leq\frac{2}{c_{max}\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \qquad (۳۴)$$

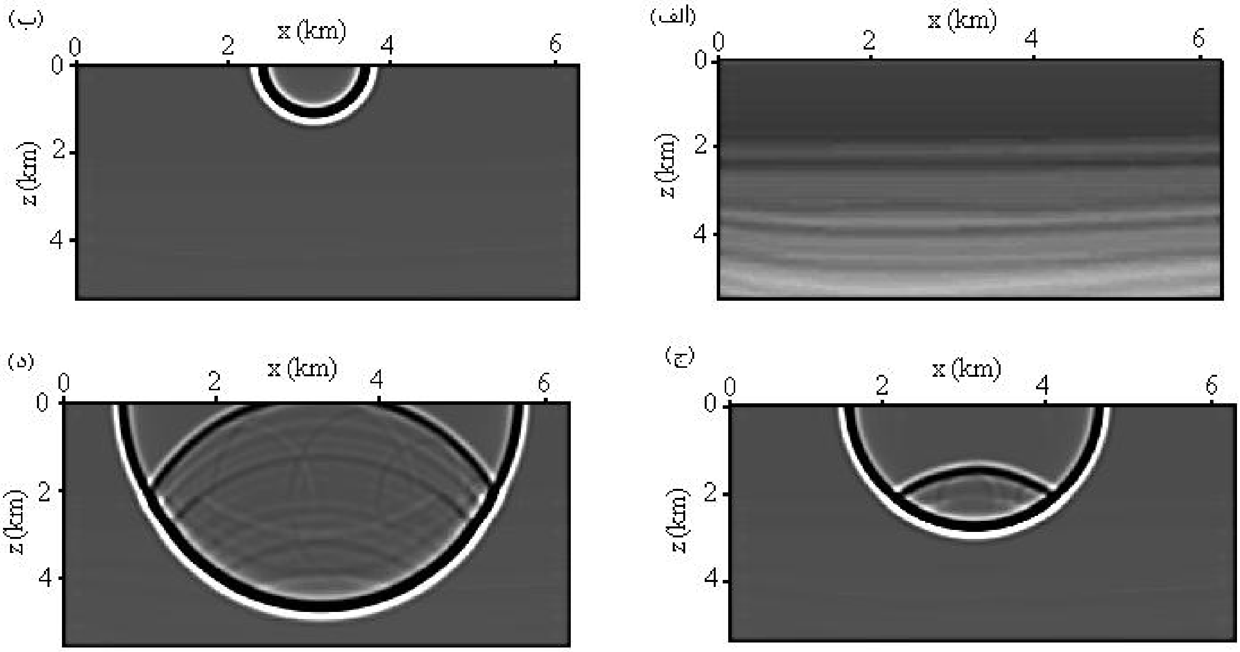
به‌طوری که c_{max} حداکثر سرعت در شبکه و Δx و Δz فواصل شبکه هستند.

۴- نتایج عددی

برای مطالعه حاضر، یک مدل ساده چندلایه‌ای با سرعت‌های

[DOR: 20.1001.1.22287698.1398.38.2.6.9]

[DOI: 10.47176/jcme.38.2.6801]



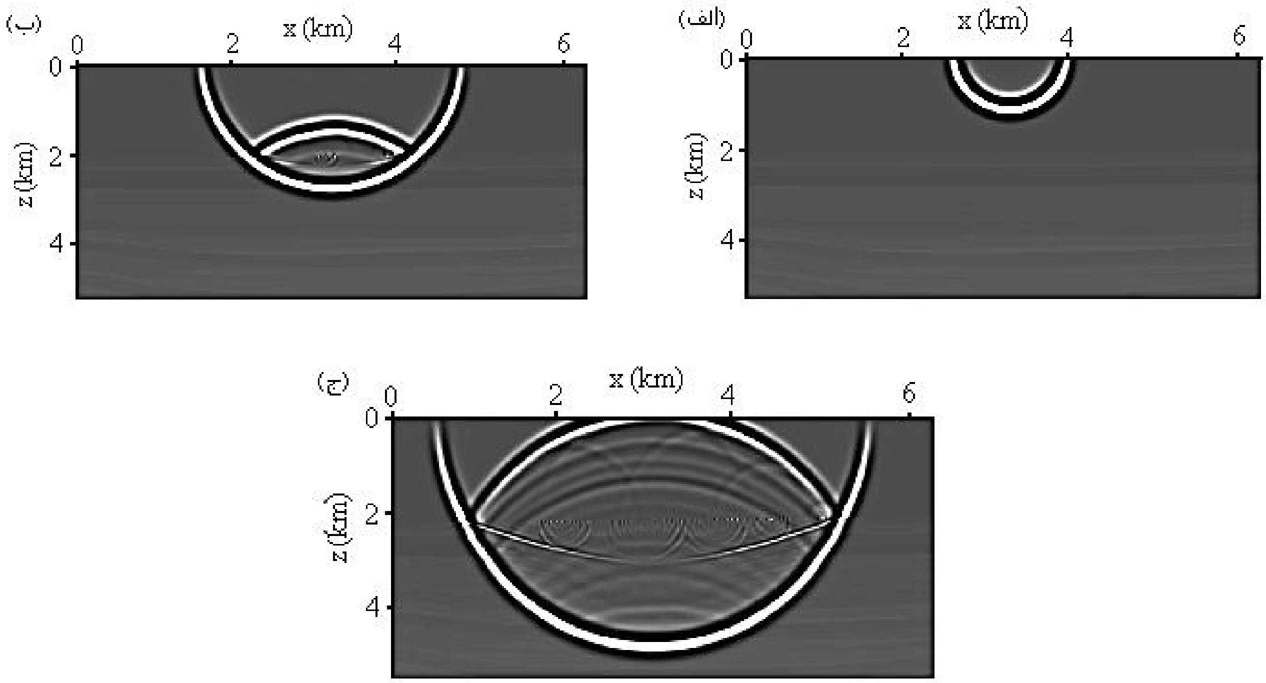
شکل ۱- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، د) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه

مختلف موج فشار شیء (موج P) برای انتشار میدان موج درنظر گرفته شده است (شکل ۱- الف). برای مدل‌سازی لرزه‌ای انتشار میدان موج از یک موجک ریکر[15] در یک نقطه سطحی استفاده شده است. حداکثر فرکانس مورد استفاده ۵۰ هرتز است. فاصله شبکه‌ای افقی و عمودی Δx و Δz، به‌ترتیب برابر ۱۵ متر و گام زمانی برابر ۴ میلی‌ثانیه درنظر گرفته شده است. با مشخصات ارائه شده در مورد موجک ریکر مورد استفاده، برون‌یابی میدان موج در مورد مدل شکل (۱- الف) و با استفاده از معادله (۳۰) انجام شده است.

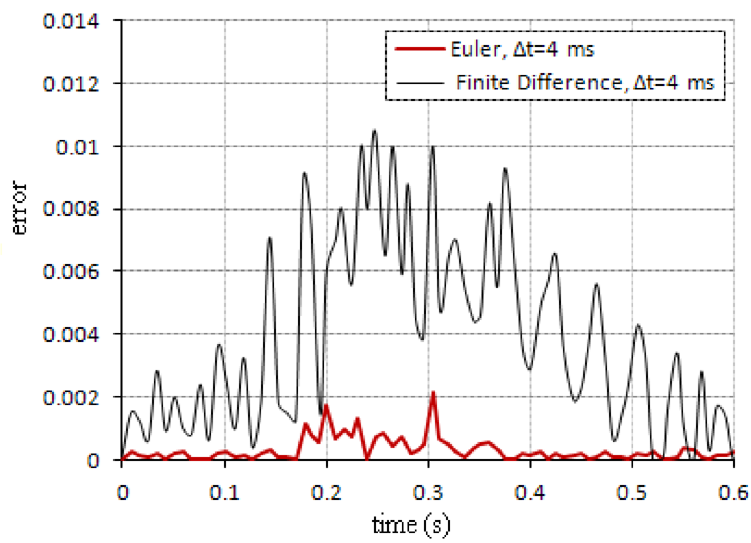
در شکل‌های (۱- ب)، (۱- ج) و (۱- د) نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش تفاضلات محدود برای مدل داده شده در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. همچنین نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش ترکیبی اویلر در شکل‌های (۲- الف)، (۲- ب) و (۲- ج) نشان داده شده است. مقایسه دو شکل (۱) و (۲)، به‌وضوح نشان می‌دهد که نتیجه برون‌یابی میدان موج حاصل از روش ترکیبی اویلر در مقایسه با روش تفاضلات محدود دقیق‌تر و با کیفیت و جزئیات بیشتری انجام شده است. دقت برون‌یابی میدان موج برای این دو روش در شکل (۳) نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای برون‌یابی به‌روش ترکیبی اویلر در مقابل روش تفاضلات محدود است.

۵- نتیجه‌گیری

برون‌یابی میدان موج توسط روش‌های عددی متعدد از جمله روش تفاضلات محدود به‌عنوان یک روش سنتی و مرسوم انجام می‌شود. از آنجایی که کاهش دقت و پراکندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی (Δt) از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیری ترکیبی است که با افزایش فواصل زمانی دچار پراکندگی عددی نشده و دقت آن نسبت به روش



شکل ۲- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش ترکیبی اویلر: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، (ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، (ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه



شکل ۳- خطای حاصل از برونیابی میدان موج به‌روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اویلر

تفاضلات محدود بیشتر است. در این مطالعه پس از ارائه استدلال‌های مورد نیاز ریاضیاتی، روش ترکیبی انتگرال‌گیر اویلر برای برون‌یابی میدان موج معرفی شد. همچنین نتایج حاصل از برون‌یابی میدان موج به‌روش ارائه شده با روش تفاضلات محدود در قالب یک آنالیز عددی مقایسه شد که نشان‌دهنده برتری و دقت بالاتر روش ترکیبی اویلر در مقایسه با روش

تفاضلات محدود است.

واژه‌نامه

1. acoustic wave equation
2. Cartesian coordinates
3. recursive
4. non-recursive
5. ray tracing
6. pulse distortion
7. Poisson bracket
8. formal solution
9. non-commutative operator (Abelian)
10. trivial solution
11. Bessel function
12. modified Chebyshev polynomials
13. truncate
14. central finite difference
15. Ricker wavelet

مراجع

1. Claerbout, J., *Imaging the Earth's Interior*, 414, Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1985.
2. Li, Z., "Compensating Finite-Difference Errors in 3-D Migration and Modelling", *Geophysics*, Vol. 56, pp. 1650-1660, 1991.
3. Kelly, K. R., Ward, R., Treitel, W. S., and Alford, R. M., "Synthetic Seismograms: A Finite-Difference Approach", *Geophysics*, Vol. 41, pp. 2-27, 1976.
4. Virieux, J., "P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity Stress Finite Difference Method", *Geophysics*, Vol. 51, pp. 889-901, 1986.
5. Igel, H., Mora, P., and Riollet, B., "Anistotropic Wave Propagation through Finite-Difference Grids", *Geophysics*, Vol. 60, pp. 1203-1216, 1995.
6. Etgen, J. T., and O'Brien, M. J., "Computational Methods for Large-Scale 3D Acoustic Finite-Difference Modeling, A Tutorial", *Geophysics*, Vol. 72, pp. SM223-SM230, 2007.
7. Bansal, R., and Sen, M. K., "Finite-Difference Modelling of S-Wave Splitting in Anisotropic Media", *Geophysical Prospecting*, Vol. 56, pp. 293-312, 2008.
8. Zhang, G., Zhang, Y., and Zhou, H., "Helical Finite-Difference Schemes for 3-D. Depth Migration", *69th Annual International Meeting*, SEG, Expanded Abstracts, pp. 862-865, 2000.
9. Fei, T., and Liner, C. L., "Hybrid Fourier Finite Difference 3D Depth Migration for Anisotropic Media", *Geophysics*, Vol. 73, pp. S27-S34, 2008.
10. Moradpouri, F., Moradzadeh A., Pestana R. C., Ghaedrahmati, R., and Soleimani Monfared, M., "Improvement of Seismic Imaging Condition to Suppress RTM Artifacts", *Geophysics*, Vol. 82, No. 6, pp. S403-S409, 2017.
11. Skell, R. H., Zhang G., and Schlick T., "A Family of Symplectic Integrators: Stability, Accuracy, and Molecular Dynamics Applications, *SIAM Journal on Numerical Analysis*", Vol. 18, pp. 203-222, 1997.
12. Yoshida, H., "Construction of Higher Order Symplectic Integrators", *Physics Letters A*, Vol. 150, pp. 262-268, 1990.
13. Deriglazov, A. A., and Filgueiras, J. G., *Hamiltonian Formulation and Canonical Transformations in Classical Mechanics*, Library of Physics Publication, São Paulo, 2009.
14. Chen, J., "Lax-Wendroff and Nyström Methods for Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 57, pp. 931-941, 2009.
15. Pestana, R. C., and Stoffa, P. L., "Time Evolution of the Wave Equation using Rapid Expansion Method", *Geophysics*, Vol. 75, No. 4, pp. T121-T131, 2010.
16. Tal-Ezer, H., Kosloff, D., and Koren, Z., "An Accurate Scheme for Forward Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 35, pp. 479-490, 1987.
17. Kosloff, D., Filho, A., Tessmer, E., and Behle, A., "Numerical Solution of the Acoustic and Elastic Wave Equation by New Rapid Expansion Method", *Geophysical Prospecting*, Vol. 37, pp. 383-394. 1989.
18. Moradpouri, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "Seismic Reverse Time Migration using a New Wave-Field Extrapolator and a New Imaging Condition", *Acta Geophysica*, Vol. 64, No. 5, pp. 1673-1690, 2016.
19. Moradpouri, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "An Improvement in RTM Method to Image Steep Dip Petroleum Bearing Structures and its Superiority to Other Methods", *Journal of Mining and Environment*, Vol. 8, No. 4, pp. 573-578, 2017.