

مدل‌سازی انتشار میدان موج لرزه‌ای با استفاده از روش اویلر

فرزاد مرادپوری*

گروه مهندسی معدن، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه لرستان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۷/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲)

چکیده - اصولاً برونمایی میدان موج بر مبنای حل معادله موج یکی از مراحل مهم مدل‌سازی لرزه‌ای بوده و نیازمند دقت بسیار بالایی است. برونمایی میدان موج توسط روش‌های مختلف عددی از جمله روش تفاضلات محدود به عنوان یک روش سنتی و مرسوم انجام می‌شود. از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود کاهش دقت و پراکندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی (Δt) است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیرهای ترکیبی است که با توجه به نوع ساختار آنها زمان محاسبات را کاهش داده و با افزایش فواصل زمانی دچار پراکندگی عددی نشده و دقت آن به نسبت روش تفاضلات محدود بیشتر است. از این رو در این مقاله ابتدا با استفاده از روش اویلر یک انتگرال‌گیر ترکیبی برای برونمایی میدان موج معرفی می‌شود. سپس برونمایی میدان موج برای یک فاصله زمانی به نسبت بزرگ در قالب یک مدل ساده برای هر دو روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اویلر نشان داده شده است که بیانگر برونمایی میدان موج با کیفیت بهتر است. در نهایت دقت برونمایی هر دو روش با هم مقایسه شده است که نشان از دقت بسیار بالاتر روش ترکیبی اویلر دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی لرزه‌ای، تفاضلات محدود، روش اویلر، دقت، پراکندگی عددی.

Seismic Wave-Field Propagation Modelling using the Euler Method

F. Moradpouri*

Department of Mining Engineering, Faculty of Engineering, Lorestan University, Khoramabad, Iran.

Abstract: Wave-field extrapolation based on solving the wave equation is an important step in seismic modeling and needs a high level of accuracy. It has been implemented through a various numerical methods such as finite difference method as the most popular and conventional one. Moreover, the main drawbacks of the finite difference method are the low level of accuracy and the numerical dispersion for large time intervals (Δt). On the other hand, the symplectic integrators due to their structure can cope with this problem and act more accurately in comparison to the finite difference method. They reduce the computation cost and do not face numerical dispersion when time interval is increased. Therefore, the aim of the current paper is to present a symplectic integrator for wave-field extrapolation using the Euler method. Then, the extrapolation is implemented for rather large time intervals using a simple geological model. The extrapolation employed for both symplectic Euler and finite difference

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: moradpouri.fa@lu.ac.ir

methods showed a better quality image for the proposed method. Finally the accuracy was compared to the finite difference method.

Keywords: Seismic modeling, Finite difference, Euler method, Accuracy, Numerical dispersion.

فهرست علائم

سرعت انتشار موج صوتی	c	زمان	t
$-c^2(x)\nabla^2$	عملگر L^2	انرژی سینتیکی	$T(p)$
f	بردار نیرو	انرژی پتانسیلی	$V(x)$
G	مشتق اول میدان موج نسبت به زمان	تقریب مشتق دوم میدان موج	W
H	تابع همیلتونی	مکان	x
J	تابع بسل	زمان نمونه برداری	Δt
k	عدد موج	فواصل شبکه	$\Delta x, \Delta z$
P	میدان موج	مشتق جزئی	∂
p	بردار اندازه حرکت	عملگر لاپلاسین	∇
Q_{rk}	چندجمله ای اصلاح شده چیشیف	مقدار ویژه	λ

۱- مقدمه

به طور اصولی انجام مدل سازی های مختلف معادله موج مبنا با حل معادلات موج شروع می شود. این معادلات نوعی معادلات دیفرانسیل جزئی شامل مشتقات مکانی و زمانی هستند که با استفاده از روش های مختلفی به صورت عددی حل شده و میدان موج را در نقاط درون زمین برون یابی می کنند. معادله موج صوتی^۱ ارائه شده در رابطه (۱) از جمله پرکاربردترین این معادلات برای توصیف انتشار موج لرزه ای در زمین است.

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P(x,t) \quad (1)$$

به طوری که $P(x,t)$ میدان موج در زمان t و مکان $x = (x,y,z)$ است، $c = c(x)$ سرعت انتشار موج صوتی و ∇^2 عملگر لاپلاسین در مختصات کارتزین^۲ است.

برون یابی میدان موج یک راهکار ریاضیاتی است که امکان به دست آوردن میدان موج به صورت پیشرو و پسرو در زمان یا مکان را فراهم آورده و از طریق روش های بازگشتی^۳ و غیر بازگشتی^۴ قابل انجام است [۱ و ۲]. در روش های غیر بازگشتی،

برون یابی میدان موج در هر نقطه ای عمقی با استفاده از میدان ثبت شده در سطح قابل انجام است و نیاز به تعیین میدان موج در مراحل میانی نیست. در شرایط محیط غیرهمگن، برون یابی در اعماق خیلی زیاد در یک مرحله نیازمند استفاده از عملگرهای بسیار پیچیده است که تنها به کمک الگوریتم های مدل سازی همانند ردیابی پرتو^۵ قابل انجام است. در مقابل روش های بازگشتی تا زمانی که فواصل برون یابی کوچک هستند و محیط به صورت محلی همگن است مشکلی ندارند.

روش تفاضلات محدود یکی از معروف ترین روش های بازگشتی حل عددی معادلات دیفرانسیلی جزئی بوده و به طور گسترده در مدل سازی لرزه ای استفاده می شود [۷-۳]. پاسخ عددی میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود از گسسته سازی زمانی و مکانی برای تقریب زدن استفاده می کند [۸ و ۹]. در حل معادله موج با استفاده از روش تفاضلات محدود، در ابتدا عملگر زمان توسط یک طرح مرتبه دو تقریب زده می شود، در حالی که مشتقات مکانی توسط یک طرح مرتبه چهار تقریب زده می شوند. تقریب مشتق زمان به این صورت باعث

ایجاد خطای عددی می‌شود که منجر به تغییر شکل پالس^۶ و پراکندگی عددی می‌شود که با انتخاب گام‌های زمانی کوچک می‌توان از آن جلوگیری کرد [۱۰]. کوچک شدن گام زمانی باعث بالا رفتن دقت شده و در مقابل باعث بالا رفتن زمان و هزینه محاسبات می‌شود که هنگام مواجهه با یک مدل زمین‌شناسی واقعی پیچیده استفاده از آن با مشکل مواجه می‌شود.

از روش‌های دیگر با سازوکار بازگشتی الگوریتم‌های ترکیبی هستند که به واسطه ویژگی حفظ ساختار و شبیه‌سازی‌های بلندمدت شناخته شده هستند. این خصوصیات جالب الگوریتم‌های ترکیبی باعث کارآمدی آنها در بزرگ‌تر کردن فواصل زمانی و مکانی کوچک بدون کاهش دقت و مشکل پراکندگی عددی می‌شود [۱۱]. انتگرال‌های ترکیبی را می‌توان برای محاسبه عددی پاسخ معادله موج و مشتق اول زمانی آن مورد استفاده قرار داد. یکی دیگر از جنبه‌های جالب انتگرال‌های ترکیبی آن است که میدان موج برآورد شده برای محاسبه مشتق نسبت به زمان میدان موج در همان گام زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده از انتگرال‌های ترکیب شده با روش بسط سریع می‌تواند میدان موج را به‌صورت پایدار و بدون نویز برون‌یابی کرده و به‌طور مؤثری برای مدل‌سازی داده‌های لرزه‌ای استفاده کند. این روش دارای دقتی همانند روش بسط سریع است. علاوه بر آن، اگر تعداد عبارات بسط به‌طور درست انتخاب شود، می‌تواند برای هر گام زمانی مورد استفاده قرار گیرد. از این‌رو در مقاله حاضر ضمن استفاده درست از روابط ریاضیاتی و نحوه ارتباط آنها با پارامترهای فیزیکی، به‌ویژه در حوزه علوم لرزه‌ای روش ترکیبی اوایلر برای برون‌یابی میدان موج معرفی شده است. در روش معرفی شده، سعی شده است تا روابط موجود برای برون‌یابی میدان موج (در طول و عمق زمین) نسبت به سایر روش‌های ترکیبی موجود ساده‌تر و در عین حال امکان استفاده و اجرای آن تسهیل شود. همچنین روش معرفی شده اوایلر این ویژگی را دارد تا ضمن استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر خطای ناشی از افزایش گام زمانی را در مقایسه با روش تفاضلات محدود به‌میزان زیادی

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

کاهش دهد. در عین حال در یک شرایط یکسان، زمان انجام محاسبات در این روش نسبت به روش تفاضلات محدود در استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر، به‌مراتب کمتر است.

۲- دستگاه معادلات موج همیلتونی

در ریاضیات انتگرال‌های ترکیبی به‌روش‌های انتگرال‌گیری عددی برای گروه خاصی از معادلات دیفرانسیلی مرتبط با مکانیک کلاسیک و هندسه ترکیبی گفته می‌شود [۱۲]. انتگرال‌های ترکیبی زیر مجموعه‌ای از انتگرال‌های هندسی را تشکیل می‌دهند، به عبارتی تبدیلات بآیینی (متعارفی) هستند که شکل معادلات حرکت همیلتون را حفظ می‌کنند [۱۳].

یک دستگاه همیلتونی متشکل از معادلات متداول به‌شکل زیر است [۱۴].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (2)$$

که در آن x و p به ترتیب بردارهای n بعدی یک مختصات تعمیم‌یافته (مختصات لاگرانژی)، اندازه حرکت هستند. t متغیر زمانی مستقل و $H = H(x, p)$ تابع همیلتونی هستند. مجموعه مکان و مختصات اندازه حرکت (x, p) مختصات بآیین (متعارف) نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن دستگاه معادلات دیفرانسیلی به‌دست آمده از سیستم همیلتونی می‌توان نوشت.

$$H(x, p) = T(p) + V(x) \quad (3)$$

به‌طوری که $T(p)$ انرژی سینتیکی و $V(x)$ انرژی پتانسیلی است.

بنابراین معادلات حرکت یک ذره با جرم واحد توسط معادله (۴) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = f\end{aligned}\quad (4)$$

به‌طوری که \mathbf{f} و \mathbf{p} به‌ترتیب بردارهای نیرو و اندازه حرکت هستند.

معادله موج را می‌توان با استفاده از فرمول‌های همیلتونی ارائه شده در رابطه (۴) بازنویسی و از آن در معرفی انتگرال‌گیرهای ترکیبی استفاده کرد. بر اساس تحقیق اسکل و همکاران (۱۹۹۷)، روش‌های ترکیبی، نامتغیرهای خاص دستگاه همیلتونی را حفظ کرده و در بازه‌های انتگرال‌گیری بزرگ با دقت بسیار بالا عمل کرده و برای دستگاه‌های خطی با اندازه گام برون‌یابی به‌نسبت کوچک پایدار باقی می‌ماند [۱۱].

۳- روش اویلر

دسته‌ای از انتگرال‌گیرهای ترکیبی که به‌طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرند، با به‌کارگیری روش جداسازی به‌وجود آمده‌اند. فرض کنید که دستگاه همیلتونی تفکیک‌پذیر باشد، به این معنی که بتوان آن را به‌شکل رابطه (۳) نوشت. برای ساده‌سازی نمادها، $\mathbf{g} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ معرفی می‌شود که بیانگر بردار مختصات بآیین (متعارف) است. سپس دستگاه معادلاتی (۲) را می‌توان به‌صورت یک عبارت به‌صورت رابطه (۵) نوشت [۱۲].

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \{\mathbf{g}, H(\mathbf{g})\} \quad (5)$$

به‌طوری که کروشه، معرف کروشه پواسن^۷ است که به‌صورت عملگر رابطه (۶) معرفی می‌شود:

$$D_H \mathbf{g} = \{\mathbf{g}, H(\mathbf{g})\} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6)$$

دستگاه همیلتونی را می‌توان به‌صورت رابطه (۷) ساده کرد:

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = D_H \mathbf{g} \quad (7)$$

پاسخ صوری^۸ این دستگاه معادلات توسط رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{g}(t) = e^{[tD_H]} \mathbf{g}(0) \quad (8)$$

برای شکل همیلتونی رابطه (۳)، $D_H = D_T + D_V$ دارای پاسخ صوری به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{g}(t) = e^{[t(A+B)]} \mathbf{g}(0) \quad (9)$$

به‌طوری که $A = D_T$ و $B = D_V$.

تا زمانی که A و B عملگرهای جابه‌جایی‌پذیر (آبلی)^۹ نیستند و t یک عدد حقیقی کوچک است، تابع نمایی می‌تواند توسط ضرب توابع نمایی به‌صورت معادله (۱۰) تقریب زده شود:

$$e^{[t(A+B)]} = \prod_{i=1}^k e^{(c_i t A)} e^{(d_i t B)} + o(t^{n+1}) \quad (10)$$

به‌طوری که n در رابطه (۱۰) مرتبه انتگرال نامیده شده و برای یک n داده شده مقادیر مجموعه اعداد حقیقی (c_1, c_2, \dots, c_k) و (d_1, d_2, \dots, d_k) طوری تعیین می‌شوند که اختلاف بین $e^{[t(A+B)]}$ و ضرب نمایی‌ها از مرتبه t^{n+1} باشد.

با فرض c_i و d_i ($i=1, 2, \dots, k$)، به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد حقیقی که شرایط معادله (۱۰) را برای یک n داده شده تأمین می‌کنند. معادله (۹) را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{g}(t) = \left[\prod_{i=1}^k e^{(c_i t A)} e^{(d_i t B)} \right] \mathbf{g}(0) \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، انتقال نقطه به نقطه از $\mathbf{g}(0)$ تا $\mathbf{g}(t)$ انجام می‌شود. این انتقال به‌صورت ترکیبی انجام می‌شود، زیرا فقط ضرب ترکیبی اجزاء انتقال بوده و پاسخ دقیق رابطه (۹) از مرتبه $o(t^n)$ را تقریب می‌زند. علاوه بر این رابطه (۱۱) به‌طور صریح از طریق رابطه (۹) قابل محاسبه است. در واقع معادله (۱۱) توالی از انتقال‌ها را به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{i-1} + t c_i \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1} - t d_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (12)$$

برای $i=1$ تا $i=k$ ، به‌طوری که $(\mathbf{x}_*, \mathbf{p}_*) = \mathbf{g}(0)$ و $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{g}(t)$. انتگرال ترکیبی از مرتبه n به‌دست می‌آید.

یوشیدا (۱۹۹۰)، برخی از روش‌ها را برای تعیین مجموعه ضرایب (c_i, d_i) که شرایط رابطه (۱۰) را تأمین می‌کنند، معرفی کرد. روش معرفی شده، طرف چپ و راست معادله (۱۰) را با توان t بسط داده و ضرایب توان‌های برابر t از مرتبه $o(t^n)$ را برابر می‌کند. به این ترتیب یک دسته از معادلات جبری غیرخطی برای ضرایب نامعین c_i و d_i به‌دست می‌آیند. برای مثال برای $n=1$ (انتگرال‌گیر مرتبه اول)، جواب صفر^{۱۰}

بازنویسی شده، اما تابع کسینوس با بسط چیشف آن جایگزین می‌شود [۱۵-۱۷].

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \left[\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk}(\Delta t R) Q_{rk} \left(\frac{iL}{R} \right) \right] P(t) \quad (19)$$

که در آن $C_k = 1$ و $C_k = 2$ برای $k \neq 0$ است، مقدار M بسته به نوع مسئله از صفر تا بی‌نهایت قابل تغییر است. $J_k(\Delta t R)$ معرف توابع بسل^{۱۱} مرتبه k است به‌طوری که $z = \Delta t R$ و Q_{rk} چندجمله‌ای اصلاح شده چیشف^{۱۲} هستند. مقدار R برای انتشار دو بعدی موج به‌طور تقریبی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$R = c_{\max} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^2} \quad (20)$$

به‌طوری که، R یک مقدار اسکالر بزرگ‌تر از مقادیر ویژه $-L^2$ است. همچنین c_{\max} حداکثر سرعت در شبکه و Δx و Δz فواصل شبکه هستند [۱۶].

عبارت رابطه (۱۹)، تنها شامل چندجمله‌ای‌های اصلاح شده چیشف زوج است. مجموع بسط عبارت $\cos(L\Delta t)$ در معادله (۱۹) به‌طور نمایی برای $M > \Delta t R$ همگرا می‌شود، بنابراین، با اطمینان می‌توان مجموع بسط را با استفاده از تعیین مقدار M به‌ازای مقادیر کمی بزرگ‌تر از $\Delta t R$ قطع^{۱۳} کرد [۱۶].

برای معرفی طرح ترکیبی انتگرال‌گیر اویلر و روش بسط سریع، عبارت $-2P(t)$ به دو طرف رابطه (۱۹)، اضافه شده و عبارت $\sqrt{(\Delta t)^2}$ در هر دو طرف این معادله ضرب می‌شود، نتیجه به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{\frac{(\Delta t)^2}{2} \left[\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk}(\Delta t R) Q_{rk} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right]} P^{(n)} \quad (21)$$

باید توجه شود که عبارت سمت چپ تساوی در رابطه (۲۱)، تقریب تفاضل محدود مرکزی^{۱۴} مرتبه دو برای $\partial^2 P / \partial t^2$ و با $W(P^{(n)})$ برابر است (تقریب مشتق دوم میدان موج با استفاده از تفاضلات محدود مرکزی).

برابر است با $c_1 = d_1 = 1$ ، $(k=1)$ و می‌توان نوشت:

$$e^{[t(A+B)]} = e^{(tA)} e^{(tB)} + o(t^2) \quad (13)$$

استفاده از ضرایب $c_1 = d_1 = 1$ در معادله (۱۲)، روش اویلر را مطابق آنچه که در رابطه (۱۴) آمده است، به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + t \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0), \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 - t \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (14)$$

۳-۱- ارائه انتگرال‌گیر ترکیبی اویلر

در این قسمت روش عددی ترکیبی برون‌یابی میدان موج با استفاده از روش اویلر (رابطه ۱۴) برای استفاده در مدل‌سازی لرزه‌ای ارائه می‌شود. در ابتدا رابطه (۱) را می‌توان به‌شکل ساده‌تر زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -L^2 P(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

به‌طوری که $-L^2 = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2$ است.

پاسخ رابطه (۱۵)، با شرایط اولیه $\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{P}_0$ و $P(\mathbf{x}, t=0) = P_0$ به‌صورت زیر است:

$$P(\mathbf{x}, t) = \cos(Lt) P_0 + L^{-1} \sin(Lt) \dot{P}_0 \quad (16)$$

میدان‌های موج $P(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ و $P(\mathbf{x}, t - \Delta t)$ را می‌توان توسط رابطه (۱۶)، برآورد کرد. برای حذف بخش مشتق زمانی میدان موج در این معادله، با اضافه کردن این دو میدان موج، بخش فرد پاسخ در زمان حذف شده و تنها بخش زوج آن باقی خواهد ماند. در نتیجه:

$$P(\mathbf{x}, t + \Delta t) + P(\mathbf{x}, t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) P(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

پاسخ تحلیلی رابطه (۱۷) در شکل ساده‌تر به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵]:

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) P(t), \quad L^2 = -c^2 \nabla^2 \quad (18)$$

به‌طوری که برای محاسبه $\cos(L\Delta t)$ ، باید عملگر L^2 را به‌طور صریح محاسبه و سپس از بسط چیشف ارائه شده توسط کوزلوف و همکاران (۱۹۸۹) استفاده کرد. در اینجا، رابطه (۱۸)

ترکیبی اویلر (معادله ۲۷) را به صورت معادله (۳۰) نیز نوشت:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)}$$

$$G^{(n+1)} = \frac{\gamma}{\Delta t} \left[\left(\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} \right) - 1 \right] P^{(n)} + \left[\gamma \sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} - 1 \right] G^{(n)} \quad (30)$$

برای تحلیل پایداری طرح ترکیبی اویلر-بسط سریع، با استفاده از تبدیل فوریه ماتریس ارائه شده در رابطه (۲۹) به صورت زیر نوشته می شود:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(ck\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} & \Delta t \\ -(ck)^{\gamma} \Delta t + \frac{(ck)^{\gamma} (\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} & 1 - \frac{(ck\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (31)$$

نوشتن معادله مشخصه به صورت $\det(A - \lambda I) = 0$ ، مقادیر ویژه را طبق رابطه (۳۲) به دست می دهد:

$$\lambda = \left[1 - \frac{(ck\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} \right] \pm (ck\Delta t) \sqrt{\frac{(ck\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} - 1} \quad \text{or}$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} \pm \sqrt{\left(\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} \right)^{\gamma} - 1} \quad (32)$$

به طوری که λ ، k ، c و Δt به ترتیب بیانگر مقدار ویژه، عدد موج، سرعت موج در محیط و زمان هستند.

برای پایداری روش ترکیبی اویلر-بسط سریع (معادله ۳۰) باید $|\lambda| \leq 1$ ، بنابراین λ نیز عدد مختلط باشد، به این معنی که ریشه معادله (۳۲) باید کمتر از صفر باشد و در نتیجه:

$$\frac{(ck\Delta t)^{\gamma}}{\gamma} - 1 \leq 0 \quad (33)$$

عبارت معادله (۳۳) شرط پایداری طرح ترکیبی اویلر-بسط سریع به صورت زیر را به دست می دهد:

$$\Delta t \leq \frac{\gamma}{c_{\max} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x} \right)^{\gamma} + \left(\frac{1}{\Delta z} \right)^{\gamma}}} \quad (34)$$

به طوری که c_{\max} حداکثر سرعت در شبکه و Δx و Δz فواصل شبکه هستند.

۴- نتایج عددی

برای مطالعه حاضر، یک مدل ساده چندلایه ای با سرعت های

روش های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{P^{(n+1)} - \gamma P^{(n)} + P^{(n+1)}}{(\Delta t)^{\gamma}} \quad (22)$$

$$W(P^{(n)}) = \frac{\gamma}{(\Delta t)^{\gamma}} \left[\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} (\Delta t R) Q_{rk} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)} \quad (23)$$

اکنون با استفاده از دستگاه معادلات همبستگی می توان روابط (۱)، (۱۵) و (۲۱) را به شکل واحد زیر با هم مرتبط کرد [۱۰، ۱۸ و ۱۹]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = W(P^{(n)}) \quad (24)$$

معادله موج (۲۴) این امکان را فراهم می کند تا بتوان دسته ای از روش های ترکیبی را برای انتگرال گیری در زمان استفاده کرد.

حل معادله (۲۴) با استفاده از روش اویلر (معادله ۱۴)، در

معادله (۲۵) ارائه شده است:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t W(P^{(n+1)}) \quad (25)$$

معادله (۲۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t c^{\gamma} \nabla^{\gamma} P^{(n+1)} = G^{(n)} + \Delta t c^{\gamma} \nabla^{\gamma} \left[P^{(n)} + \Delta t G^{(n)} \right] \quad (26)$$

در نتیجه می توان معادله نهایی انتگرال گیر ترکیبی اویلر را به شکل زیر نوشت:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + \Delta t G^{(n)},$$

$$G^{(n+1)} = \Delta t c^{\gamma} \nabla^{\gamma} P^{(n)} + \left(1 + \Delta t^{\gamma} c^{\gamma} \nabla^{\gamma} \right) G^{(n)} \quad (27)$$

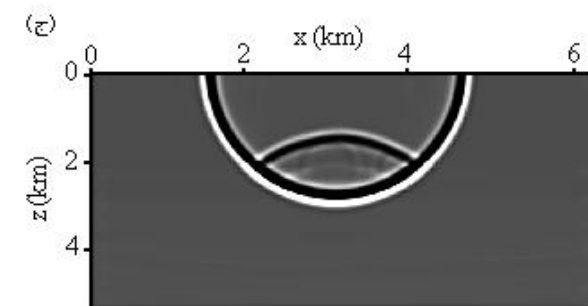
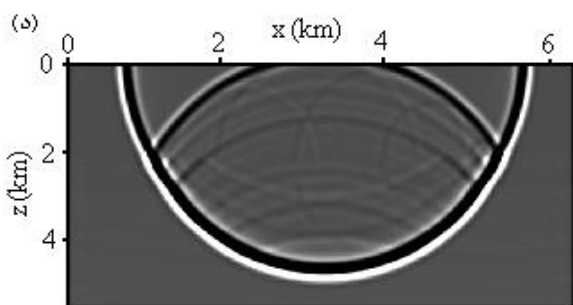
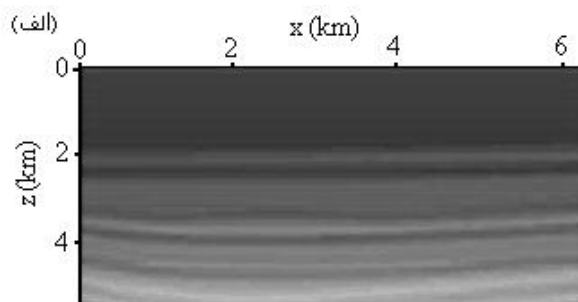
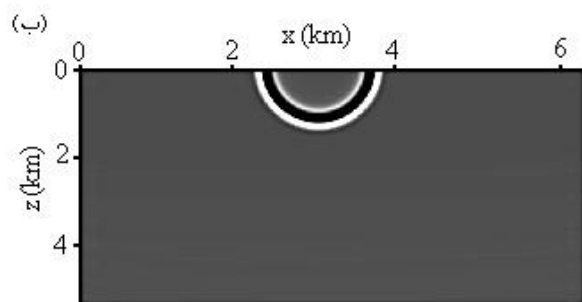
که طرح ترکیبی معادله (۲۷) انتگرال گیر اویلر و روش بسط سریع نامیده می شود که می توان آن را به شکل ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} P^{(n+1)} \\ G^{(n+1)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P^{(n)} \\ G^{(n)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

به طوری که A به صورت زیر تعریف می شود:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ \frac{\gamma}{\Delta t} \left[\left(\sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} \right) - 1 \right] & \left[\gamma \sum_{k=0}^M C_{rk} J_{rk} Q_{rk} - 1 \right] \end{pmatrix} \quad (29)$$

بنابراین با بازنویسی مجدد می توان رابطه نهایی انتگرال گیر



شکل ۱- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش تفاضلات محدود: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، د) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه

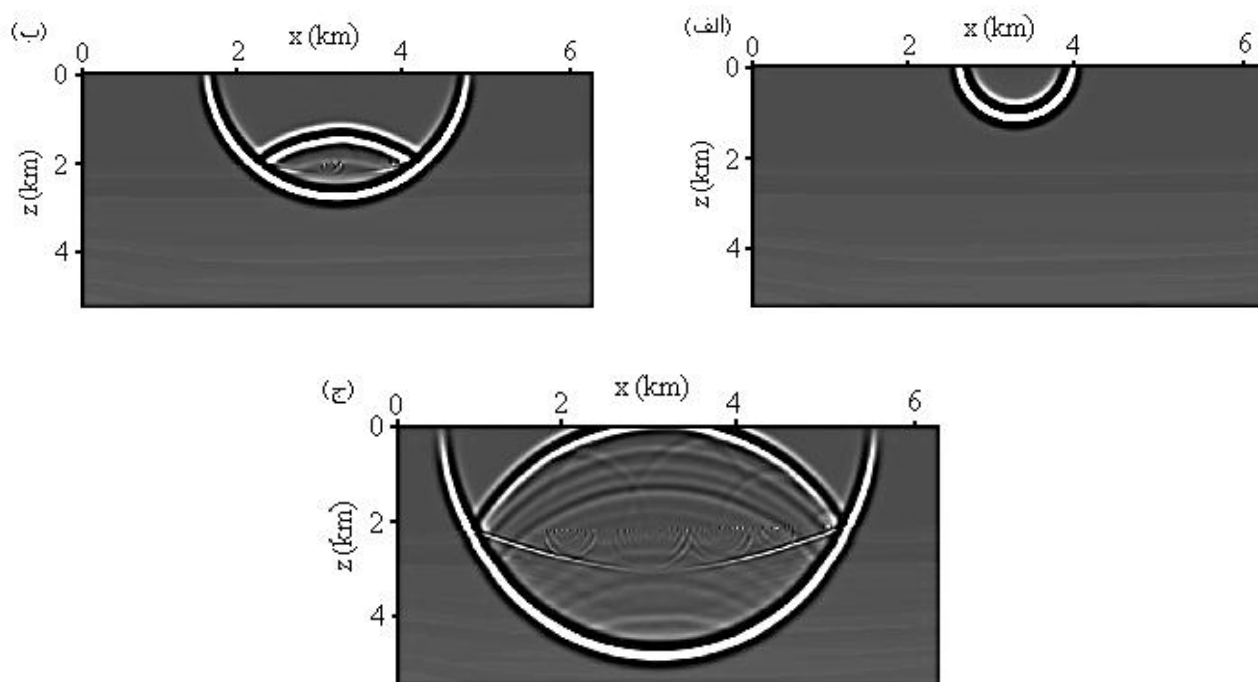
نشان می‌دهد که نتیجه برون‌یابی میدان موج حاصل از روش ترکیبی اوایلر در مقایسه با روش تفاضلات محدود دقیق‌تر و با کیفیت و جزئیات بیشتری انجام شده است. دقت برون‌یابی میدان موج برای این دو روش در شکل (۳) نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای برون‌یابی به روش ترکیبی اوایلر در مقابل روش تفاضلات محدود است.

۵- نتیجه‌گیری

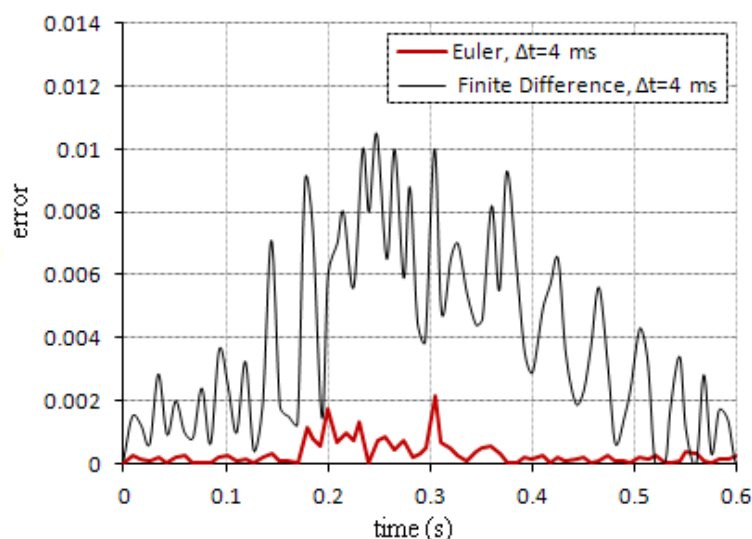
برون‌یابی میدان موج توسط روش‌های عددی متعدد از جمله روش تفاضلات محدود به عنوان یک روش سستی و مرسوم انجام می‌شود. از آنجایی که کاهش دقت و پراکندگی عددی با بزرگ‌تر شدن فواصل زمانی (Δt) از جمله محدودیت‌های روش تفاضلات محدود است. یکی از راهکارهای حل این مشکل استفاده از انتگرال‌گیری ترکیبی است که با افزایش فواصل زمانی دچار پراکندگی عددی نشده و دقت آن نسبت به روش

مختلف موج فشار شیء (موج P) برای انتشار میدان موج در نظر گرفته شده است (شکل ۱- الف). برای مدل‌سازی لرزه‌ای انتشار میدان موج از یک موجک ریکر^{۱۵} در یک نقطه سطحی استفاده شده است. حداکثر فرکانس مورد استفاده ۵۰ هرتز است. فاصله شبکه‌ای افقی و عمودی Δx و Δz ، به ترتیب برابر ۱۵ متر و گام زمانی برابر ۴ میلی‌ثانیه در نظر گرفته شده است. با مشخصات ارائه شده در مورد موجک ریکر مورد استفاده، برون‌یابی میدان موج در مورد مدل شکل (۱- الف) و با استفاده از معادله (۳۰) انجام شده است.

در شکل‌های (۱- ب)، (۱- ج) و (۱- د) نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش تفاضلات محدود برای مدل داده شده در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. همچنین نمایش لحظه‌ای میدان موج صوتی محاسبه شده با روش ترکیبی اوایلر در شکل‌های (۲- الف)، (۲- ب) و (۲- ج) نشان داده شده است. مقایسه دو شکل (۱) و (۲)، به وضوح



شکل ۲- نمایش لحظه‌ای میدان موج با استفاده از روش ترکیبی اویلر: الف) مدل ساده چندلایه‌ای زمین با سرعت‌های مختلف، ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۵۰۰ میلی ثانیه از انتشار موجک چشمه، (ب) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۲ ثانیه، (ج) نمایش لحظه‌ای میدان موج بعد از زمان ۱/۵ ثانیه



شکل ۳- خطای حاصل از برون‌یابی میدان موج به روش تفاضلات محدود و روش ترکیبی اویلر

برون‌یابی میدان موج به روش ارائه شده با روش تفاضلات محدود در قالب یک آنالیز عددی مقایسه شد که نشان‌دهنده برتری و دقت بالاتر روش ترکیبی اویلر در مقایسه با روش

تفاضلات محدود بیشتر است. در این مطالعه پس از ارائه استدلال‌های مورد نیاز ریاضیاتی، روش ترکیبی انتگرال‌گیر اویلر برای برون‌یابی میدان موج معرفی شد. همچنین نتایج حاصل از

واژه‌نامه

- | | | |
|---------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1. acoustic wave equation | 7. Poisson bracket | 12. modified Chebyshev polynomials |
| 2. Cartesian coordinates | 8. formal solution | 13. truncate |
| 3. recursive | 9. non-commutative operator (Abelian) | 14. central finite difference |
| 4. non-recursive | 10. trivial solution | 15. Ricker wavelet |
| 5. ray tracing | 11. Bessel function | |
| 6. pulse distortion | | |

مراجع

1. Claerbout, J., *Imaging the Earth's Interior*, 414, Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1985.
2. Li, Z., "Compensating Finite-Difference Errors in 3-D Migration and Modelling", *Geophysics*, Vol. 56, pp. 1650-1660, 1991.
3. Kelly, K. R., Ward, R., Treitel, W. S., and Alford, R. M., "Synthetic Seismograms: A Finite-Difference Approach", *Geophysics*, Vol. 41, pp. 2-27, 1976.
4. Virieux, J., "P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity Stress Finite Difference Method", *Geophysics*, Vol. 51, pp. 889-901, 1986.
5. Igel, H., Mora, P., and Rioulet, B., "Anisotropic Wave Propagation through Finite-Difference Grids", *Geophysics*, Vol. 60, pp. 1203-1216, 1995.
6. Etgen, J. T., and O'Brien, M. J., "Computational Methods for Large-Scale 3D Acoustic Finite-Difference Modeling, A Tutorial", *Geophysics*, Vol. 72, pp. SM223-SM230, 2007.
7. Bansal, R., and Sen, M. K., "Finite-Difference Modelling of S-Wave Splitting in Anisotropic Media", *Geophysical Prospecting*, Vol. 56, pp. 293-312, 2008.
8. Zhang, G., Zhang, Y., and Zhou, H., "Helical Finite-Difference Schemes for 3-D. Depth Migration", *69th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pp. 862-865, 2000.
9. Fei, T., and Liner, C. L., "Hybrid Fourier Finite Difference 3D Depth Migration for Anisotropic Media", *Geophysics*, Vol. 73, pp. S27-S34, 2008.
10. Moradpour, F., Moradzadeh A., Pestana R. C., Ghaedrahmati, R., and Soleimani Monfared, M., "Improvement of Seismic Imaging Condition to Suppress RTM Artifacts", *Geophysics*, Vol. 82, No. 6, pp. S403-S409, 2017.
11. Skell, R. H., Zhang G., and Schlick T., "A Family of Symplectic Integrators: Stability, Accuracy, and Molecular Dynamics Applications", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 18, pp. 203-222, 1997.
12. Yoshida, H., "Construction of Higher Order Symplectic Integrators", *Physics Letters A*, Vol. 150, pp. 262-268, 1990.
13. Deriglazov, A. A., and Filgueiras, J. G., *Hamiltonian Formulation and Canonical Transformations in Classical Mechanics*, Library of Physics Publication, São Paulo, 2009.
14. Chen, J., "Lax-Wendroff and Nyström Methods for Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 57, pp. 931-941, 2009.
15. Pestana, R. C., and Stoffa, P. L., "Time Evolution of the Wave Equation using Rapid Expansion Method", *Geophysics*, Vol. 75, No. 4, pp. T121-T131, 2010.
16. Tal-Ezer, H., Kosloff, D., and Koren, Z., "An Accurate Scheme for Forward Seismic Modelling", *Geophysical Prospecting*, Vol. 35, pp. 479-490, 1987.
17. Kosloff, D., Filho, A., Tessmer, E., and Behle, A., "Numerical Solution of the Acoustic and Elastic Wave Equation by New Rapid Expansion Method", *Geophysical Prospecting*, Vol. 37, pp. 383-394, 1989.
18. Moradpour, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "Seismic Reverse Time Migration using a New Wave-Field Extrapolator and a New Imaging Condition", *Acta Geophysica*, Vol. 64, No. 5, pp. 1673-1690, 2016.
19. Moradpour, F., Moradzadeh, A., Pestana, R. C., and Monfared, M. S., "An Improvement in RTM Method to Image Steep Dip Petroleum Bearing Structures and its Superiority to Other Methods", *Journal of Mining and Environment*, Vol. 8, No. 4, pp. 573-578, 2017.