

## ارائه ترکیب عددی المان محدود نامنطبق کروزیکس - راویارت و گالرکین ناپیوسته برای جریان‌های دوفازی در محیط متخلخل

مهدی جامعی<sup>۱\*</sup> و حمیدرضا غفوری<sup>۲</sup>

۱. مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان

۲. مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۷/۲۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۹/۱۰)

**چکیده** - در این تحقیق حل عددی معادله‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی (فشار ترکنده - درجه اشباع ترکنده) در محیط متخلخل و در شرایط همدمای، با استفاده از ترکیب دو روش المان محدود نامنطبق خطی و گالرکین ناپیوسته پנالتی داخلی ارائه شده است. این ترکیب از مدل عددی برای اولین بار در زمینه مدل‌سازی جریان‌های دوفازی به کار رفته است و به عنوان نوآوری این تحقیق تلقی می‌شود. معادله فشار با استفاده از روش المان محدود نامنطبق به کمک المان‌های کروزیکس - راویارت خطی ناپیوسته و معادله انتقال غالب درجه اشباع نیز با استفاده از روش‌های گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی وزنی حل می‌شوند. استفاده از روش المان محدود نامنطبق در حل معادلات جریان موجب شده تا، به دلیل استقرار درجات آزادی روی مرکز وجوه مشترک المان‌ها، مقادیر فشار و سرعت از تطابق مطلوب‌تری برخوردار شوند. در این مدل‌سازی از شرایط مرزی نوع رابین در مرزهای ورودی استفاده شده است و برای گسسته‌سازی زمانی معادله‌های همبسته حاکم، از تکنیک حل‌های متوالی بهره برده شده است. به منظور بهبود وضوح نتایج و حفظ پیوستگی بردار نرمال سرعت در ناپیوستگی‌ها و ناهمگنی‌ها، از نگاشت فضای  $H(\text{div})$  با کمک المان‌های خطی راویارت - توماس استفاده می‌شود. در پایان هر گام زمانی نیز با استفاده از محدودکننده شیب چاونت - جافر اصلاح شده، نوسانات غیرفیزیکی مقادیر درجه اشباع در هر المان حذف می‌شوند. همچنین به منظور صحت‌سنجی و بیان کارایی مدل در تسخیر شوک‌های ناگهانی در محل تماس دو فاز سیال و ناهمگنی‌ها، به حل مدل‌های پنج‌مارک و نمونه پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: روش المان محدود نامنطبق، جریان دوفازی، المان‌های کروزیکس - راویارت، محدودکننده شیب، نگاشت میدان سرعت.

## A Hybridized Crouziex-Raviart Nonconforming Finite Element and Discontinuous Galerkin Method for a Two-Phase Flow in the Porous Media

M. Jamei<sup>1\*</sup> and H. R. Ghafouri<sup>2</sup>

1. Department of Mechanical Engineering, Shohadaye Hoveyzeh University of technology, Dashte-Azadegan, Iran.

2. Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m.jamei@shhut.ac.ir

**Abstract:** In this study, we present a numerical solution for the two-phase incompressible flow in the porous media under isothermal condition using a hybrid of the linear lower-order nonconforming finite element and the interior penalty discontinuous Galerkin (DG) method. This hybridization is developed for the first time in the two-phase modeling and considered as the main novelty of this research. The pressure equation and convection dominant saturation equation are discretized using the nonconforming Crouziex-Raviart finite element (CR FEM) and the weighed interior penalty discontinuous Galerkin (SWIP) method, respectively. Utilizing the nonconforming finite element method for solving the flow equation made the pressure and velocity values be consistent with respect to the degrees of freedom arrangement at the midpoint of the neighboring element edges. The boundary condition governing the simulation is the Robin type at entrance boundaries, and the time marching discretization for the governing equations is the sequential solution scheme. An  $H(\text{div})$  projection using Raviart-Thomas element is implemented to improve the results' resolution and preserve the continuity of the normal component of the velocity field. At the end of each time step, the non-physical oscillation is omitted using a slope limiter, namely, modified Chavent-Jaffre limiter, in each element. Also, in this study, the developed algorithm is verified using some benchmark problems and the test cases are considered to demonstrate the efficiency of the developed model in capturing the shock front at the interface of fluid phases and discontinuities.

**Keywords:** Nonconforming finite element method, Two-phase flow, Crouziex-Raviart element, Slope limiter, Velocity field.

## فهرست علائم

درجه اشباع باقیمانده در فاز ترکننده	$S_{rw}$	وجه مشترک دو المان مجاور	F
ضرایب وزنی عملگر متوسط	$W_F$	تابع کسر جریان	$f_w$
متوسط هارمونیک ضرایب انتشار فشار	$\gamma_{Fp}$	نفوذپذیری نسبی فاز غیر ترکننده	$k_{rn}$
متوسط هارمونیک ضرایب انتشار درجه اشباع	$\gamma_{Fs}$	نفوذپذیری نسبی فاز ترکننده	$k_{rw}$
ضریب توزیع حفرات	$\mu$	تانسور نفوذپذیری ذاتی	K
تحرك پذیری فاز $\alpha$	$\lambda_\alpha$	فشار مویینگی	$P_c$
تحرك پذیری فاز غیر ترکننده	$\lambda_n$	فشار مویینگی ورودی	$P_d$
تحرك پذیری فاز ترکننده	$\lambda_w$	فشار در مرز دیرشله	$P_{dir}$
گرانروی فاز غیر ترکننده	$\mu_n$	فشار فاز غیر ترکننده	$P_n$
گرانروی فاز ترکننده	$\mu_w$	فشار فاز ترکننده	$P_w$
چگالی فاز $\alpha$	$\rho_\alpha$	سرعت کل داری	$u_T$
تخلخل	$\phi$	ترم چشمه - چاه فاز غیر ترکننده	$q_n$
تابع درون یابی برداری	$\Psi$	ترم چشمه - چاه فاز ترکننده	$q_w$
مقدار پنالتی	$\sigma_F$	درجه اشباع مؤثر	$S_e$
متوسط	{}	درجه اشباع ورودی مرز رابین	$S_{in}$
پرش	[]	درجه اشباع باقیمانده در فاز غیر ترکننده	$S_{rn}$

## ۱- مقدمه

است و در مورد بررسی رفتار جریان‌های چندفازی در محیط‌های متخلخل نیز از این قاعده مستثنی نیست. بررسی عددی جریان‌های چندفازی در علوم متعددی چون مهندسی استخراج نفت، هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی، مکانیک سیالات زیستی، ردیابی آلاینده‌ها و... کاربرد فراوانی دارند. از این میان، مدل‌سازی

امروزه مدل‌های ریاضی جزء قدرتمندترین ابزار علوم مهندسی برای پیش‌بینی پدیده‌های فیزیکی محسوب می‌شوند. با توسعه صنعت رایانه در جهان، امروزه موج استفاده از مدل‌سازی ریاضی و فناوری روش‌های عددی قدرتمند به سرعت در حال پیشرفت

عددی جریان‌های دوفازی در صنعت نفت کاربرد فراوانی دارد که از پر اهمیت‌ترین این کاربردها می‌توان به مدل‌سازی مرحله احیاء ثانویه در صنعت استخراج نفت اشاره کرد.

معادله‌های همبسته حاکم در این زمینه شامل فشار، سرعت داری و درجه اشباع هستند که حل عددی آنها با توجه به فیزیک مسئله از اهمیت خاصی برخوردار است. معادله‌های حاکم بر این تحقیق از نوع انتقال- غالب و دارای رفتار تباهیده<sup>۱</sup> هستند. پاسخ حاصل از مدل‌سازی در این معادله‌ها به‌طور عمومی دارای نوسانات شدید و به‌اصطلاح پیشانی تیز است. رسیدن به نتایج دقیق و با وضوح بالا در عین صرف زمان و هزینه کم محاسبات، از عمده اهداف اصلی مدل‌سازی بوده که رسیدن به آن مستلزم استفاده از روش‌های عددی قوی دارای بقای محلی است. در دو دهه گذشته، روش‌های عددی دارای بقای محلی متعددی با هدف بهبود تسخیر پیشانی شوک‌های ناگهانی برای حل معادله‌های حاکم بر محیط‌های چندفازی ارائه شده‌اند. در چنین مسائلی تطابق میدان فشار و سرعت در نتایج از اهمیت بسزایی برخوردار است. دقت میدان سرعت از بابت پیوستگی بردار نرمال سرعت در محل تماس وجوه مشترک المان‌ها و رعایت بقای محلی جرم در تعیین مقادیر درجه اشباع بسیار تعیین کننده است. زیرا در غیر این صورت، خطای قابل توجهی در تعیین میدان سرعت رخ می‌دهد که حاصل آن، نوسانات غیرفیزیکی شدید در مقادیر درجه اشباع فاز ترکنده<sup>۲</sup> است. حل‌های عددی معادله‌های همبسته در این زمینه یا بر پایه یک روش واحد دارای بقای محلی مانند گالرکین ناپیوسته<sup>۳</sup> و المان محدود ترکیبی<sup>۴</sup> است و یا بر پایه استفاده از ترکیب روش‌های عددی هستند که به‌اصطلاح آنها را روش‌های پیوندی گویند.

در سال‌های اخیر، روش پنالته داخلی گالرکین ناپیوسته در حل مسائل هذلولوی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. زیرا این روش با توجه به دارا بودن خاصیت بقای محلی، قابلیت استفاده از تقریبات مرتبه بالا و سازگاری با روش‌های تثبیت و بازسازی میدان‌های سرعت، نتایج مطلوبی را در حل مسائل انتقال- غالب به‌دست می‌دهد. اما استفاده از این روش به‌منظور

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

حل مسائلی با معادله‌های همبسته، مانند مدل‌سازی جریان‌های دوفازی (معادله فشار ترکنده- درجه اشباع ترکنده) باوجود حصول نتایج مطلوب، مستلزم صرف زمان به‌نسبت زیادی از بابت تعداد درجات آزادی زیاد است.

اما انگیزه استفاده از روش‌های پیوندی از یکسو کاهش زمان و هزینه محاسبات و از سوی دیگر در جهت بهبود نتایج و تطابق بهتر میدان‌های فشار و سرعت ارزیابی می‌شود. در سال‌های اخیر ترکیبات متعددی از روش‌های دارای بقای محلی همچون روش‌های المان محدود ترکیبی، حجم‌های محدود، روش گالرکین ناپیوسته، روش گالرکین ضعیف و... برای حل انواع فرم‌های معادله‌های جریان‌های دوفازی در محیط‌های ناهمگن استفاده شده است.

هتیت و فیروزآبادی حل جریان‌های دوفازی را در محیط‌های متخلخل شکاف‌دار، با استفاده ترکیب دو روش المان محدود ترکیبی و روش گالرکین ناپیوسته پنالته داخلی به‌ترتیب برای حل همزمان معادله‌های فشار و حل معادله درجه اشباع مورد توجه قرار دادند [۱]. میکسکا و فوسیچ با ارائه مدل جریان‌های دوفازی در محیط ناهمگن، با استفاده از روش المان محدود ترکیبی پیوندی<sup>۵</sup>، معادله‌های فشار و سرعت را به‌طور همزمان حل کرده و نتایج آنها را در حل معادله درجه اشباع با روش گالرکین ناپیوسته استفاده کردند [۲].

در تحقیق حاضر برای اولین بار، از پیوند روش المان محدود نامنطبق خطی کروزیکس- راویارت برای حل معادله‌های جریان (فشار و سرعت داری) و روش پنالته داخلی گالرکین ناپیوسته برای حل معادله درجه اشباع استفاده شده است. به‌تازگی روش المان محدود نامنطبق در حل معادله‌های بیضوی مرتبه دو مانند معادله استوکس، ماکسول و مسائل الاستیک خطی بسیار مورد توجه قرار گرفته است، زیرا دارای خصوصیات منحصر به‌فردی همچون سهولت استفاده از گره‌های آویزان، تطابق مناسب با فضای برداری  $H(\text{div})$  و حذف قیود پیوستگی در وجه مشترک دو المان همسایه است [۳]. ساده‌ترین نوع المان‌های غیرمنطبق مثلثی تحت عنوان المان

نامنطبق  $P_1$  یا المان کروزیکس - راویارت شناخته می‌شود که توسط کروزیکس و توماس برای حل معادله‌های استوکس ارائه شده است [۳]. در این المان‌ها از قید پیوستگی در طول وجوه المان به‌جز در مرکز المان صرف‌نظر می‌شود. این روش در حل مسائل بیضوی به‌دلیل پایداری بهتر، از اقبال بیشتری نسبت به روش‌های المان محدود سنتی برخوردار است [۴].

کی - واک و همکاران در زمینه حل مسائل بیضوی سطح تماس با کمک روش المان محدود نامنطبق ارتماسی<sup>۶</sup>، از المان‌های سه ضلعی کروزیکس - راویارت و المان چهار ضلعی راناچر - تورک بهره بردند [۵]. لامپج هان از یک تکنیک تثبیت برای المان‌های کروزیکس - راویارت برای حل معادله الاستیک خطی استفاده کردند [۶]. در این تحقیق جنس مواد الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپ فرض شد. شی و وانگ با استفاده از روش المان محدود نامنطبق کروزیکس - راویارت خطی به حل معادله‌های ناویر استوکس با استفاده از شبکه غیرایزوتروپ پرداختند [۷]. همچنین یونس و همکاران یک مدل ترکیبی غیرتکراری متشکل از روش‌های المان محدود نامنطبق، گالرکین ناپیوسته و تقریب چندقطعه‌ای شار<sup>۷</sup> را به‌منظور مدل‌سازی جریان شناوری رانده شده در شبکه بی‌سامان مثلثی ارائه کردند [۸]. جو و کی - واک یک مدل جریان‌های دوفازی محیط ناهمگن متخلخل را با استفاده از ترکیب روش‌های المان محدود نامنطبق ارتماسی و روش حجم‌های محدود به‌ترتیب برای حل معادله فشار و درجه اشباع ارائه کردند. آنها برای این منظور از روش گسسته‌سازی زمانی فشار ضمنی - درجه اشباع صریح<sup>۸</sup> (IMPES) و المان ساختاریافته بهره بردند [۹].

در پژوهش حاضر همان‌طور که ذکر شده، حل عددی معادله‌های جریان‌های دوفازی فشار ترکنده - درجه اشباع ترکنده ( $P_w - S_w$ ) در محیط متخلخل و در شرایط همدمایی با استفاده از ترکیب دو روش المان محدود نامنطبق کروزیکس - راویارت و گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی متقارن ارائه شده است. معادله فشار با استفاده از روش المان محدود نامنطبق به‌کمک المان‌های کروزیکس - راویارت خطی و معادله انتقال -

غالب درجه اشباع نیز با استفاده از روش‌های گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی وزنی و تکنیک پنالتی مقیاس شده گسسته‌سازی می‌شوند. در پایان هر گام زمانی هم از محدودکننده شیب چاونت - جافر اصلاح شده برای حذف نوسانات احتمالی مقادیر درجه اشباع استفاده می‌شود. در مدل تهیه شده، معادله‌های همبسته حاکم با استفاده از تکنیک‌های حل متوالی ضمنی<sup>۹</sup> حل می‌شوند. عمده کاربرد تحقیق حاضر در زمینه مدل‌سازی استخراج ثانویه نفت خام از مخازن نفت و همچنین ردیابی آلاینده‌های امتزاج‌ناپذیر است. نوآوری اصلی در این تحقیق استفاده از این ترکیب عددی و کاربرد المان‌های نامنطبق خطی کروزیکس - راویارت برای اولین بار به‌منظور مدل‌سازی عددی پدیده‌هایی با رفتار معادله‌های انتقال - غالب است. در این مدل با استفاده از تکنیک‌های تثبیت‌کننده در حل معادله جریان در فضای نامنطبق المان محدود، میدان سرعتی با کیفیت مطلوب و کم‌نوسان برای حل معادله درجه اشباع تولید شده است. این تحقیق در راستای تکمیل مطالعات انجام شده [۱۰] است.

در بخش دوم این مقاله، معادله‌ها و مبانی ریاضی حاکم بر مدل‌سازی عددی به‌طور مشروح بیان می‌شوند. همچنین در بخش سوم به صحت‌سنجی و بیان کاربرد و توانمندی مدل تهیه شده در زمینه تسخیر پیشانی تیز ناشی از محل تماس دوفاز ترکنده و غیر ترکنده پرداخته می‌شود و در بخش پایانی نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

## ۲- بررسی معادله‌های حاکم و حل عددی

### ۲-۱- معادله‌های حاکم بر فیزیک مسئله

معادله‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی شامل معادله فشار، سرعت داری و معادله درجه اشباع هستند که دارای فرم‌های متنوعی هستند و انتخاب آن منوط به نوع روش و تکنیک عددی مورد استفاده است. از فرم‌های پرکاربرد در زمینه معادله‌های جریان‌های دوفازی، می‌توان به فرمولاسیون فشار فاز ترکنده - درجه اشباع فاز ترکنده ( $S_w - P_w$ ) اشاره کرد که در

که در آن  $k$  ضریب توزیع ذرات خاک است. همچنین در روابط وان گنختون نیز:

$$k_{rw}(S_e) = S_e^\varepsilon \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^\gamma, \quad (11)$$

$$k_m(S_e) = (1 - S_e)^\gamma \left[ 1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right]^\gamma. \quad (12)$$

که در آنها  $\gamma$ ،  $m$  و  $\varepsilon$  ضرایب ثابت تجربی هستند ( $\varepsilon = \frac{1}{3}$  و  $\gamma = \frac{1}{3}$ ) [۱۳]. همچنین درجه اشباع مؤثر به صورت ذیل تعریف می‌شود [۱۴]:

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rm}}, \quad 0 \leq S_e \leq 1 \quad (13)$$

شرایط مرزی به سه بخش ورودی، خروجی و مرز نفوذناپذیر  $(\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_N)$  روی مرز تقسیم می‌شوند به طوری که بخش ورودی مرز  $\partial\Omega$  با نماد  $\Gamma_{in} = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F < 0\}$  و خروجی با  $\Gamma_{out} = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F \geq 0\}$  معرفی می‌شود [۱۴]. برای معادله فشار در بخش‌های ورودی و خروجی شرط مرزی دیریشله حاکم است و شرط مرزی رایین نیز در مرز ورودی معادله درجه اشباع استفاده می‌شود. شرط نیومن نیز در سایر مرزها حاکم است:

$$P_w = P_{dir}^-, \quad (S_w \mathbf{u}_t - K \left| P_c \right| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t \bar{\nabla} S_w) \cdot \mathbf{n}_F = S_{in} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{on } \Gamma_{in}, \quad (14)$$

$$P_w = P_{dir}^+, \quad (K \left| P_c \right| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t \bar{\nabla} S_w) \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad \text{on } \Gamma_{out}, \quad (15)$$

$$(K \lambda_t \bar{\nabla} P_w) \cdot \mathbf{n}_F = 0, \quad (K \left| P_c \right| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t \bar{\nabla} S_w) \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (16)$$

$$S_w(\cdot, 0) = S_{initial}. \quad (17)$$

که در روابط فوق،  $\mathbf{n}_F$  بردار عمودی خروجی از مرز  $\partial\Omega$  و  $S_{initial}$  درجه اشباع اولیه معرفی می‌شود. لازم به ذکر است که مفهوم فیزیکی شرط مرزی رایین در مسائل مدل‌سازی مخازن نفت، در نظر گرفتن اثر گرادیان فشار موینگی در محل تماس با چاه تزریق سیال ترکننده، در قسمت ورودی مرز

این تحقیق از آن استفاده شده است. معادله‌های جریان‌های دوفازی از ترکیب معادله‌های بقای هر فاز و قانون دارسی با صرف نظر از اثر شتاب ثقل به دست می‌آید. معادله فشار در فرم کلی عبارت است از [۱۱]:

$$\bar{\nabla} \cdot (\mathbf{u}_t) = q_w + q_n \quad (1)$$

که در آن  $\mathbf{u}_t$  سرعت کل است و عبارت است از:

$$\mathbf{u}_t = -K \lambda_t \bar{\nabla} P_w + K \lambda_n \left| P_c \right| \bar{\nabla} S_w. \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱)، رابطه فشار فاز ترکننده عبارت است از:

$$-\bar{\nabla} \cdot (K \lambda_t \bar{\nabla} P_w) + \bar{\nabla} \cdot (K \lambda_n \left| P_c \right| \bar{\nabla} S_w) = q_w + q_n. \quad (3)$$

برای حل رابطه‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی از دو معادله تعادل درجه اشباع و فشار موینگی استفاده می‌شود:

$$S_w + S_n = 1, \quad (4)$$

$$S_w + S_n = 1, \quad (5)$$

$$\lambda_t = \lambda_w + \lambda_n, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_n, \quad f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t}. \quad (6)$$

که پارامترهای  $\lambda_t$ ،  $\mathbf{u}_w$  و  $\mathbf{u}_n$  به ترتیب تحت عنوان تحرک پذیری کل، سرعت در فاز ترکننده و سرعت در فاز غیرکننده معرفی می‌شوند. همچنین با بازنویسی معادله بقای جرم برای فاز ترکننده، معادله درجه اشباع به فرم ذیل استخراج می‌شود:

$$\phi \frac{\partial (S_w)}{\partial t} - \bar{\nabla} \cdot (K \left| P_c \right| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t \bar{\nabla} S_w) = q_w - \bar{\nabla} \cdot (f_w \mathbf{u}_t), \quad S_{rw} \leq S_w \leq 1 - S_{rm} \quad (7)$$

که در رابطه (۷)  $f_w$  تابع کسر جریان<sup>۱۰</sup> معرفی می‌شود.

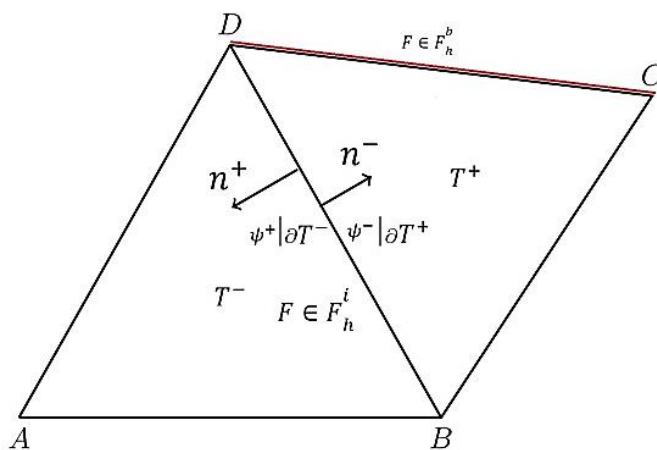
به منظور توصیف توابع نفوذپذیری نسبی و فشار موینگی، از توابع غیرخطی بروکس-کری و وان گنختن استفاده شده است [۱۲]. در روابط بروکس و کری:

$$k_{rw}(S_e) = S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}}, \quad (8)$$

$$k_m(S_e) = (1 - S_e)^2 \left( 1 - S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}} \right), \quad 0/2 \leq \zeta \leq 4, \quad (9)$$

$$P_c(S_e) = P_d S_e^{\frac{-1}{\zeta}}. \quad (10)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸



شکل ۱- نمایش هندسی سطوح تماس بین المان‌ها و بردارهای عمود بر هر وجه

گالریکین ناپیوسته برای حل معادله درجه اشباع تعریف می‌شود. مجموعه درجات تقریب با مرتبه حداکثر  $r \in \mathbb{N}$  است [۱۵].

پارامتر  $h_F = |T|/|F|$  قطر وجه  $F$  است که برابر نسبت مساحت المان بر طول وجه است [۱۵ و ۱۶]. همچنین اگر قطر هر المان  $h_T$  نامیده شود، برای نمایش ریز یا درشت بودن شبکه المان‌ها از پارامتر اندازه شبکه  $h = \max(h_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$  استفاده می‌شود که برابر بیشینه قطر  $h_T$  المان‌ها در دامنه  $\mathcal{T}_h$  خواهد بود.

قطر المان ( $h_T$ ) به قطر دایره محاط شده توسط هر المان دلالت دارد. مفاهیم پرش و متوسط بر مبنای مقدار در یک نقطه مشترک از دو المان همسایه ( $T^+, T^-$ )، با وجه مشترک  $F$  با استفاده از روابط ذیل معرفی می‌شوند:

$$[\psi] = \psi^-|_F - \psi^+|_F, \{\psi\} = \frac{\psi^-|_F + \psi^+|_F}{2}, F \in F_h^i \quad (18)$$

هرگاه  $\psi$  تابعی برداری باشد آنگاه عملگرهای پرش و متوسط عبارتند از:

$$[\bar{\psi}] = \bar{\psi}^-|_F \cdot \mathbf{n}^- + \bar{\psi}^+|_F \cdot \mathbf{n}^+ = \mathbf{n}_F \cdot (\bar{\psi}^-|_F - \bar{\psi}^+|_F), \quad (19)$$

$$\{\bar{\psi}\} = \frac{\bar{\psi}^-|_F + \bar{\psi}^+|_F}{2}, \quad F \in F_h^i. \quad (20)$$

در عبارت پرش، بردار عمود  $\mathbf{n}_F$  به سمت خارج از المان جاری  $T^-$  است. پرش و متوسط تابع اسکالر و برداری  $\psi$

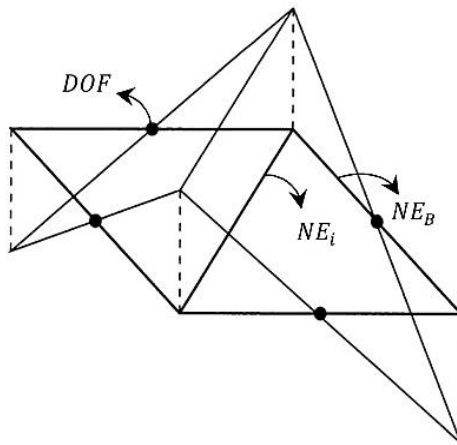
درجه اشباع ورودی در شرط مرزی رابین ( $\Gamma_{in} = \Gamma_R$ ) و  $S_{in}$  درجه اشباع ورودی در شرط مرزی رابین است.

## ۲-۲- مبانی پیش نیاز در مدل‌سازی

دامنه مسئله با نماد  $\Omega$  و مرزهای بیرونی آن با  $\partial\Omega$  معرفی می‌شوند.  $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{N_h}$  یک زیر دامنه چندوجهی مثلثی منظم و سازگار در دامنه  $\Omega$  است و متشکل از  $N_h$  المان  $T$  در فضای دوبعدی المان مثلثی است. همچنین  $|T|$  سطح مقطع هر یک از المان‌های مثلثی  $T \in \mathcal{T}_h$  و  $|F|$  اندازه هر وجه المان  $F \in \mathcal{F}_h$  تعریف می‌شوند. مجموعه وجوه مشترک داخلی بین دو المان همسایه  $\partial T^- \cap \partial T^+$  با نماد  $F_h^i$  و مجموعه وجوه مرزی  $\partial T \cap \partial \Omega$  منطبق بر مرز  $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_N$  نیز با  $\mathcal{F}_h^b$  نمایش داده می‌شوند. مجموعه کل وجوه نیز با  $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$  نمایش داده می‌شود.  $n_F$  بردار نرمال واحد بر وجه  $F$  است که جهت آن از المان  $T^-$  به  $T^+$  تعریف می‌شود [۱۵]. شکل (۱) تعاریف انواع وجوه و مرزها را نمایش می‌دهد.

$$V_{T_p} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h : v_h|_T \in P_r^d; \forall F \in F_h^i, \int_F v_h = 0 \right\}$$

زیرفضای گسسته هیلبرت<sup>۱۱</sup> المان محدود غیر منطبق به منظور حل معادله فشار و  $V_{T_s} = \left\{ \psi_h \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h : \psi_h|_T \in P_r^d \right\}$  زیر فضای المان محدود از فضای گسسته هیلبرت در روش‌های



شکل ۲- نحوه آرایش درجات آزادی المان کروزیکس - راویارت

زمینه ساختار المان‌های نامنطبق حاصل شده است که سبب شده سازگاری مناسبی را با برخی روش‌های دارای بقای محلی همچون گالرکین ناپیوسته داشته باشند. در این المان‌ها، درجات آزادی بر خلاف المان‌های لاگرانژی که روی رئوس المان تعریف می‌شوند، بر وجوه المان مستقر می‌شوند.

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، شناخته شده‌ترین نوع المان‌های مثلثی در روش المان محدود غیرمنطبق، المان نامنطبق  $P_1$  یا المان کروزیکس - راویارت است که با  $(\mathbb{V}_{r_p}, \mathbb{V}_h)$  معرفی می‌شود. این المان اولین بار توسط کروزیکس و توماس ارائه شده است و در حل مسائل فیزیک، به‌خصوص معادله استوکس کاربرد فراوان دارند [۳]. به‌طور کلی در این المان‌ها از قید پیوستگی در طول وجوه المان به‌جز در مرکز المان صرف‌نظر می‌شود. این روش به‌دلیل پایداری بهتر نسبت به روش‌های المان محدود کلاسیک از استقبال چشمگیری برخوردار شده است [۴]. شکل (۲) المان‌های کروزیکس - راویارت را به‌همراه محل استقرار درجات آزادی آن نشان می‌دهد.

در شکل (۲)، هرگاه تعداد وجوه مشترک بین المان‌ها در زیرفضای المان محدود نامنطبق معادله فشار  $(\mathbb{V}_{r_p})$  با  $NE_i \in \mathcal{F}_h^i$  و تعداد وجوه مرزی را با  $NE_B \in \mathcal{F}_h^b$  نمایش دهیم، آنگاه  $NE = NE_i + NE_B$  کلیه وجوه را در  $\mathcal{T}_h \in \Omega$  المان‌های نامنطبق نمایش می‌دهد. به‌ازای تمامی المان‌های

روی وجوه مرزی خارجی  $F \in \mathcal{F}_h^b$  نیز به‌ترتیب عبارتند از [۱۵]:

$$[\psi] = \psi^-|_F, \quad \{\psi\} = \psi^-|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^b \quad (21)$$

$$[\psi] = \mathbf{n}_F \cdot \psi^-|_F, \quad \{\psi\} = \psi^-|_F, \quad F \in \mathcal{F}_h^b. \quad (22)$$

در این تحقیق درجه‌های تقریب  $r_p = \{1\}$  و  $r_s = \{1\}$  به‌ترتیب در معادله‌های فشار و اشباع فاز ترکننده و فضای راویارت توماس مرتبه پایین  $RT_0$  برای معادله داری استفاده شده است. توابع آزمون معادله‌های فشار و درجه اشباع به‌صورت  $(v, z) \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h) \times \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$  تعریف می‌شوند. به‌منظور حل معادله‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی در این تحقیق از روش حل متوالی ضمنی غیرهمبسته معادله‌های حاکم استفاده می‌شود، به‌طوری که در پارامترهای غیرخطی تحرک‌پذیری و مشتق فشار موینگی (ضرایب  $\lambda_w^n$ ،  $\lambda_n^n$  و  $|P_c^n|$ ) از گام زمان قبلی درجه اشباع استفاده می‌شود و میدان فشار  $P_w^{n+1}$  در سطح زمانی جدید  $t^{n+1}$  محاسبه می‌شود. به‌علت استفاده از روش ضمنی مرتبه اول اولر در گسسته‌سازی زمانی معادله‌ها، پایداری همواره برقرار بوده و حساسیت نسبت به اندازه گام‌های زمانی کم است.

### ۲-۳- گسسته‌سازی معادله فشار

گسسته‌سازی معادله فشار با استفاده از روش المان محدود نامنطبق ناپیوسته انجام می‌گیرد. به‌تازگی پیشرفت‌های زیادی در

$$\begin{cases} [P_w]_F = 0, P_w^+ = P_w^- & \text{on } F \in \mathcal{F}_h \\ [(K\lambda_t \nabla P_w)_F] = 0, (K\lambda_t \nabla P_w)^+ = (K\lambda_t \nabla P_w)^- & \text{on } F \in \mathcal{F}_h \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{1}{|F|} \int_{F^-} P_w ds = \frac{1}{|F|} \int_{F^+} P_w ds. \quad (29)$$

در این پژوهش به منظور بهبود عملکرد تسخیر شوک‌های ناگهانی ناشی از ناهمگنی‌ها و خاصیت تباہیدگی معادله‌های حاکم به جای استفاده از عملگرهای عمومی پرش و متوسط از عملگر متوسط وزنی در معادله‌های گسسته‌سازی مکانی استفاده می‌شود. برای هر تابع اسکالر مانند  $\psi$  که روی سطح تماس مشترک  $F \in \mathcal{F}_h^i$  دو المان همسایه به صورت هموار تعریف می‌شود، متوسط وزنی روی وجه  $F$  به صورت ذیل تعریف می‌شود [۱۵ و ۱۶]:

$$\{\psi\}_w = w_{F^-} \cdot \psi^-|_F + w_{F^+} \cdot \psi^+|_F \quad (30)$$

که در آن  $w_{F^+} + w_{F^-} = 1$ ,  $w_{F^\pm} \geq 0$  و برای توابع برداری نیز صادق است. در محیط‌های غیرهمگن می‌توان به سادگی عملگر متوسط وزنی که تابع تانسور نفوذپذیری ذاتی است را برای هر المان  $T^\pm|_F$  به دست آورد:

$$w_{F^-} = \frac{k_{T^+,F}}{k_{T^+,F} + k_{T^-,F}}, w_{F^+} = \frac{k_{T^-,F}}{k_{T^+,F} + k_{T^-,F}}, F = \partial T^- \cap \partial T^+ \quad (31)$$

که در آن  $(k_{T^\pm,F} = \mathbf{n}_F^T \mathbf{K}^\pm \mathbf{n}_F)$  مؤلفه نرمال نفوذپذیری ذاتی است. به طور طبیعی در مواردی که محیط‌های همگن مورد بررسی هستند، عملگر وزنی متوسط به نوع استاندارد آن  $w_{F^+} = w_{F^-} = 0.5$  تبدیل می‌شود [۱۷]:

$$\begin{cases} \{\psi\} = \frac{\psi^-|_F + \psi^+|_F}{2} & F \in \mathcal{F}_h^i, \\ \{\psi\} = \psi^-|_F & F \in \mathcal{F}_h^b \end{cases} \quad (32)$$

اگر  $v \in \mathbb{V}_{T_p}(T_h)$  تابع آزمون یا همان تابع درونیابی در فضای المان محدود نامنطبق ناپیوسته باشد و تحمیل شرایط مرزی دیریشله با استفاده از روش ضعیف تخصیص پناستی اعمال شود، آنگاه فرم نهایی عبارت گسسته‌سازی مکانی معادله فشار عبارت است از:

فضای محلی المان محدود نامنطبق ( $\mathbb{V}_{T_p}$ ) برای معادله فشار به صورت ذیل تعریف می‌شود [۹]:

$$\mathbb{V}_{T_p} = \{\text{Span}\{1, x, y\}, \forall T \in \mathcal{CR}\} \quad (23)$$

در المان‌های نامنطبق به طور عمومی درجات آزادی به دو گونه روی وجوه المان مورد توجه قرار می‌گیرند. یکی آنکه مقدار تابع در مرکز هر وجه  $v_h(m_i)$  بیانگر درجه آزادی است که در این صورت از توابع آزمون و مشتقات آن مطابق روابط (۲۴) تا (۲۷) استفاده می‌شود:

$$v_i = 1 - 2\phi_i, \phi_i = \frac{A_i}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_r & y_r \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}, \phi_i \geq 0, \quad (24)$$

$$v_1 = 1 - 2\phi_1, v_2 = 1 - 2\phi_2, v_3 = \phi_1 + \phi_2 - 1, \quad (25)$$

$$\bar{\nabla} v_i = \frac{|F|}{|T|} \mathbf{n}_F \quad T \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_h \quad (26)$$

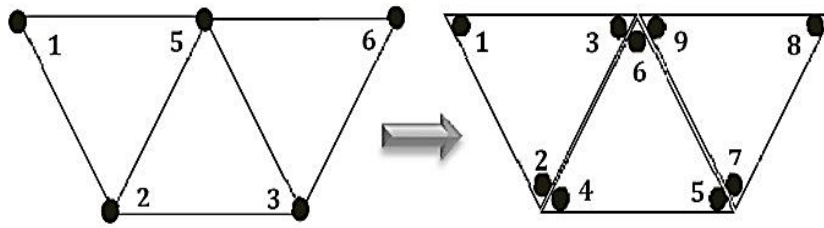
$$\frac{1}{|F|} \int_{F_i} v_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \quad v_j \in \mathbb{V}_{T_p}(T_h) \quad (27)$$

که در آن  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر است. دیگر آنکه مقدار درجه آزادی با استفاده از متوسط انتگرال‌گیری روی هر وجه  $\int_F v_h ds$  به دست می‌آید که در آن  $|F|$  اندازه وجه است.

لازم به تذکر است در تقریب خطی با استفاده از المان‌های مرتبه پایین  $P_1$  کروزیکس-راویارت، مقادیر تابع تخمین فشار در محل درجات آزادی مستقر در مرکز وجه المان  $v_h(m_i)$  برابر متوسط انتگرال‌گیری فشار روی آن وجه  $(\int_F P_w ds / |F|)$  است که در این تحقیق به دلیل استفاده از درجه تقریب خطی از این قاعده پیروی می‌شود. هر چند در المان‌های چرخشی چهارضلعی مسئله فوق صادق نخواهد بود [۴].

در معادله فشار فاز ترکننده، ترم شبه انتقال  $\nabla \cdot (K\lambda_n |P_c'| \nabla S_w)$  مقداری معلوم دارد و ترم پخش نیز باید به صورت زیر تعریف شود





شکل ۳- نحوه تبدیل المان محدود کلاسیک به المان گالرکین ناپیوسته

این ضریب در هر وجه برای معادله فشار با  $D_{Fp} = K\lambda_t$  نمایش داده می‌شوند.

همچنین به علت افزایش پایداری گسسته‌سازی ترم شبه انتقال  $\bar{\nabla} \cdot (K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w)$  در وجوه مرزی بین المان‌ها از فرم بادسوی این عبارت برای وجوه داخلی  $F \in \mathcal{F}_h^i$  استفاده می‌شود:

$$\forall F = \partial T^- \cap \partial T^+,$$

$$(K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w)^\uparrow = \begin{cases} (K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w)^- : \{u_t \cdot n_F\} \geq 0 \\ (K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w)^+ : \{u_t \cdot n_F\} < 0 \end{cases} \quad (37)$$

#### ۲-۴- گسسته‌سازی معادله درجه اشباع فاز ترکننده

به منظور گسسته‌سازی معادله انتقال- غالب درجه اشباع به علت استفاده از عملگر متوسط وزنی از روش پنالتی داخلی متقارن وزنی (SWIP)<sup>۱۲</sup> استفاده شده است [۱۸]. لازم به ذکر است که به ازای مقدار پنالتی ( $\sigma_F = 0$ ) روش پنالتی داخلی تحت عنوان روش ادن- باومن- بابوشکا<sup>۱۳</sup> معرفی می‌شود. شکل (۳) نحوه گسسته‌سازی المان محدود کلاسیک را به المان محدود ناپیوسته (گالرکین ناپیوسته) نشان می‌دهد. اگر  $z \in \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$  تابع آزمون یا همان تابع درون‌یابی ناپیوسته معادله درجه اشباع باشد، آنگاه معادله درجه اشباع با روش گالرکین ناپیوسته به صورت فرم تغییری دوخطی زیر معرفی می‌شود:

$$\left( \frac{\partial S_w}{\partial t}, z \right) + a(S_w, z) = L(z), \quad \forall z \in \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h), \quad (38)$$

$$S_w(X, \circ) = S_{w_{\text{initial}}}(X), \quad X = X(x, y). \quad (39)$$

$$a(P_w, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h). \quad (33)$$

$$a(P_w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T K\lambda_t(S_w^n) \bar{\nabla} P_w^{n+1} \cdot \nabla v \, dT - \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F \{K\lambda_t(S_w^n) \bar{\nabla} P_w^{n+1} \cdot n_F\}_w [v] \, ds - \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F \{K\lambda_t(S_w^n) \bar{\nabla} v \cdot n_F\}_w [P_w^{n+1}] \, ds + \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \sigma_F \gamma_{Fp} \frac{|F|}{\text{Mean}(|T^-|, |T^+|)} \int_F [v] [P_w^{n+1}] \, ds. \quad (34)$$

$$L(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w \cdot \bar{\nabla} v \, dT - \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_F (K\lambda_n |P_c'| \bar{\nabla} S_w)^\uparrow \cdot n_F [v] \, ds + \sum_{F \in \Gamma_D} \int_F (K\lambda_t(S_w^n) \bar{\nabla} v \cdot n_F) P_{\text{dir}} \, ds + \sum_{F \in \Gamma_D} \sigma_F \gamma_{Fp} \frac{|F|}{\text{Mean}(|T^-|, |T^+|)} \int_F v P_{\text{dir}} \, ds + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (q_w^{n+1} + q_n^{n+1}) v \, dT. \quad (35)$$

$$\gamma_F = \frac{\gamma_D^- D_F^+}{D_F^- + D_F^+}, \quad \gamma_F \leq \gamma \min(D_F^-, D_F^+), \quad F \in F_h^i,$$

$$\gamma_F = D_F^-. \quad F \in F_h^b \quad (36)$$

که در آن  $\gamma_F$  متوسط هارمونیک ضرایب انتشار است و به منظور تقلیل حساسیت مدل نسبت به انتخاب پارامتر پنالتی ناشی از تحمیل فرم ضعیف شرایط مرزی دیریشه و تثبیت گسسته‌سازی مکانی معادله فشار به خصوص در ناهمگنی‌ها به کار رفته است.

که در آن ترم مشتق زمانی به روش اویلر مرتبه اول است:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \int_{T \in \mathcal{T}_h} \phi \frac{S_w^{n+1}}{\Delta t} \cdot z dT + \\ & \sum_{T \in \mathcal{T}_h E} \int_K \left( \left| P_c \right| \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n} \right) \left( S_w^n \right) \bar{\nabla} S_w^{n+1} \cdot \bar{\nabla} z dT - \\ & \sum_{F \in \Gamma_R F} \int_{S_w^{n+1}} \mathbf{u}_t^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F z ds - \\ & \sum_{F \in \Gamma_h F} \int_{S_w^{n+1}} \left\{ K \left( \left| P_c \right| \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n} \right) \left( S_w^n \right) \nabla z \cdot \mathbf{n}_F \right\}_w ds = \\ & \int_{T \in \mathcal{T}_h} \phi \frac{S_w^n}{\Delta t} \cdot z ds + \sum_{N_h T \in \mathcal{T}_h} \int \mathbf{u}_t^{n+1} f_w^n \cdot \bar{\nabla} z ds - \\ & \sum_{F \in \Gamma_h \cup \Gamma_R \cup \Gamma^+ F} \int \mathbf{u}_t^{n+1} f_w^n \cdot \mathbf{n}_F [z] ds - \\ & \sum_{F \in \Gamma_R F} \int_{S_w^{n+1}} \mathbf{u}_t^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F z ds + \sum_{T \in \mathcal{T}_h E} \int q_w^{n+1} z dT, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \gamma_{F_S} &= \frac{\gamma D_{F_S}^+ D_{F_S}^-}{D_{F_S}^+ + D_{F_S}^-}, \quad \gamma_B = \frac{1}{\gamma} \left| \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F \right| \\ \forall F \in \mathcal{F}_h^b, \quad \gamma_{F_S} &= D_{F_S}^- \\ \forall F \in \mathcal{F}_h^i, \quad \gamma &= \sigma_F \gamma_{F_S} \frac{|F|}{\text{Mean}(|T^-, |T^+|)} + \gamma_B, \end{aligned} \quad (42)$$

همچنین به دلیل افزایش پایداری گسسته‌سازی ترم انتقال تابع کسر جریان  $\nabla \cdot (f_w \mathbf{u}_t)$  در جوه مرزی بین المان‌ها از فرم بادسوی این عبارت برای جوه داخلی  $F \in \mathcal{F}_h^i$  استفاده می‌شود:

$$\forall F = \partial T^- \cap \partial T^+, \forall f_w : f_w^\uparrow = \begin{cases} f_w^- : \{ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F \} \geq 0 \\ f_w^+ : \{ \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_F \} < 0 \end{cases} \quad (43)$$

$\gamma_F$  متوسط هارمونیک ضرایب انتشار در معادله درجه اشباع  $(D_{F_S} = \left| P_c \right| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t)$  به منظور کاهش حساسیت مقدار پנالتی اختصاص یافته به معادله درجه اشباع است. لازم به ذکر

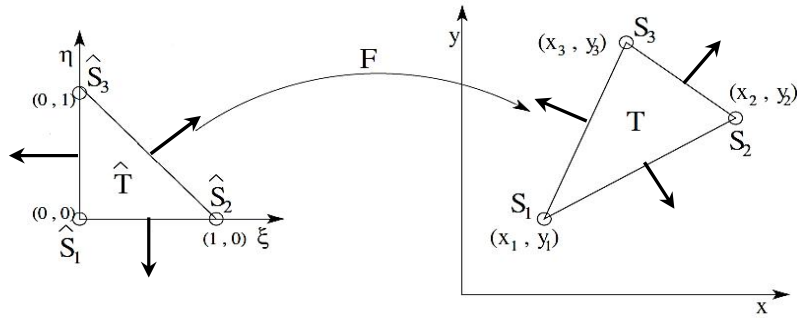
است تکنیک پنالتی‌های مقیاس شده سبب می‌شود تا دامنه انتخاب مقادیر پنالتی از حساسیت بسیار کمتری برخوردار شود و حتی به‌ازای مقادیر پایین آن نیز پایداری حفظ شود. اما در حل مسائل در محیط‌های ناهمگن، به‌ازای دامنه مقادیر پنالتی  $(\sigma_F = 50-100)$  نتایج قابل قبولی حاصل می‌شود [۱۸].

## ۲-۵- بازسازی میدان سرعت در فضای مرتبه پایین $RT_0$

در مدل‌سازی مسائل انتقال در محیط متخلخل با معادله‌های همبسته، تعیین میدان سرعتی پیوسته که بتواند بقای محلی و پیوستگی بردار نرمال شار را در دامنه مسئله تضمین کند همواره، از اهمیت خاصی برخوردار است. از طرفی استراتژی‌های حل معادله‌های همبسته با روش حل متوالی و یا استفاده از روش‌های فاقد خاصیت بقای محلی مانند مشتق‌گیری عددی از میدان فشار که در المان محدود سستی مرسوم است منجر به ناپیوستگی میدان سرعت ناپیوسته و از بین رفتن خاصیت بقای محلی آن می‌شود. این امر موجب می‌شود تا نوسانات غیرفیزیکی در حل معادله انتقال ایجاد شود. یکی از روش‌های احیای میدان سرعت  $\mathbf{u}_t \in \mathcal{V}$ ، نگاشت و بازسازی میدان سرعت در فضاهای برداری  $\mathbf{H}(\text{div})$  مانند فضای راولیارت-توماس<sup>۱۴</sup>  $(RT_0)$  است [۱۹]. فضاهای راولیارت-توماس مرتبه پایین و  $\mathbf{H}(\text{div})$  با خصوصیات منحصر به‌فرد، به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰ و ۲۱].

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{ \mathbf{u}_t \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{u}_t|_K \in RT_0, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \\ RT_0(K) &= \left\{ \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} : u^x = a + bx, u^y = c + by \right. \\ & \quad \left. , a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) &= \left\{ \bar{\Psi} \in [L^2(\Omega)]^2 ; \nabla \cdot \bar{\Psi} \in L^2(\Omega), \bar{\Psi} \cdot \bar{\mathbf{n}}_F|_{\Gamma_N} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

در روش نگاشت در فضای برداری  $\mathbf{H}(\text{div})$ ، با استفاده از مقادیر تقریبی مرتبه خطی میدان فشار  $P_w^{n+1} \in V_{r_p}(T_h)$  و درجه اشباع  $S_w^n \in V_{r_s}(T_h)$  می‌توان میدان سرعت جدید را در فضای راولیارت-توماس مرتبه پایین پردازش کرد. در فضای راولیارت-توماس مرتبه  $(RT_0)$ ، مطابق قسمت سمت راست شکل (۴)



شکل ۴- نگاشت المان مثلثی از المان فیزیکی به المان مرجع

خاصیت  $\bar{\Psi}_F|_{F'} = \delta_{F,F'}$  را ارضا کنند که در آن  $\mathbf{n}_{F'}$  بردار عمودی وجه  $F'$  و  $\delta_{F,F'}$  دلتای کرونکر است.

برای نگاشت توابع درونیابی برداری و مشتقات آنها در فضای راویارت-توماس نیز می‌توان مطابق شکل (۴) از تئوری انتقال پیولا<sup>۱۵</sup> استفاده کرد که در آن خصوصیات المان مرجع  $(\hat{T})$  به المان فیزیکی  $(T)$  انتقال می‌یابد. در انتقال پیولا همانند نگاشت توابع اسکالر لاگرانژ، کلیه فرایندهای محاسباتی بر مبنای المان مرجع انجام می‌گیرد به طوری که تابع انتقال پیولا  $(F_p)$  عمل نگاشت را از المان  $\hat{T}$  به  $T$  انجام می‌دهد. برای بیان توابع و مشتقات المان مرجع در فضای برداری از مؤلفه های مختصات سطحی  $\phi_{i=1,2,3}$  استفاده شده است:

$$F_p : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\phi_2 + (x_3 - x_1)\phi_3 \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\phi_2 + (y_3 - y_1)\phi_3 \end{cases} \quad (51)$$

$$F_p : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad F_p(x) = B\hat{x} + b, \quad b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{J}_T| = |\det(\mathbf{J}_T)| \quad (53)$$

$\mathbf{X}(x, y, i=1:3)$  مختصات المان فیزیکی و  $|\mathbf{J}_T|$  دترمینان ماتریس جاکوبی هستند. تئوری انتقال پیولا برای تابع درونیابی برداری  $Q \in T$  در المان مرجع عبارت است از:

$$\hat{q} \rightarrow q(X) = P(q)(X) := \frac{1}{|\mathbf{J}_T|} \mathbf{J}_T \hat{q}(\hat{X}). \quad (54)$$

برای توابع درونیابی مؤلفه نرمال سرعت روی وجوه المان  $Q \in F$ :

$$\hat{Q} \rightarrow Q(X) = P(\hat{Q})(X) := \frac{1}{|\mathbf{J}_T|} \begin{pmatrix} \hat{I}_F \\ \hat{I}_F \end{pmatrix} \mathbf{J}_T \hat{Q}(\hat{X}) \quad (55)$$

درجات آزادی شار عبوری از هر وجه مقداری ثابت خواهد بود  $(q_t^{n+1} = \mathbf{u}_t^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F)$  و  $q_t \in RT_0(\mathcal{T}_h)$  روی هر وجه را می‌توان با استفاده از رابطه (۴۵) به دست آورد و به صورت ذیل بسط داد:

$$q_t^{n+1} = \frac{1}{|F|_{d-1}} (\mathbf{u}_t^{n+1} \cdot \mathbf{n}_F)_{\partial T} \quad (45)$$

$$q_t^{n+1} = \int_F (-\{K\lambda_t \nabla P_w^{n+1}\}_w \cdot \mathbf{n}_F + (K\lambda_n |P_c'| \nabla S_w^n)^\uparrow \cdot \mathbf{n}_F + \sigma_{F,F_p} \frac{|F|}{\text{Mean}(|T^-|, |T^+|)} [P_w^{n+1}]' ds, \quad (46)$$

$$[P_w^{n+1}]' = \begin{cases} [P_w^{n+1}] & F \in F_h^i, \\ P_w^{n+1} - P_{dir} & F \in F_h^b \text{ on } \Gamma_D \end{cases}, \quad (47)$$

$$q_t^{n+1} = 0 \text{ on } \Gamma_N \quad (48)$$

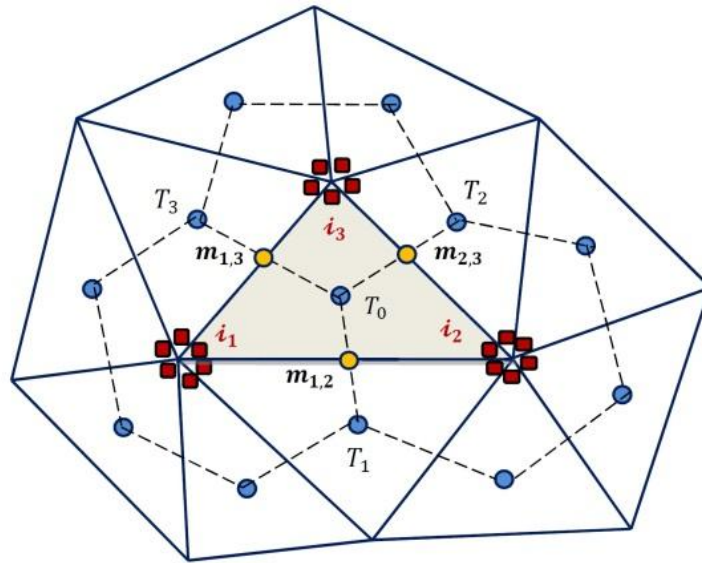
تقریب میدان سرعت با مؤلفه نرمال پیوسته در وجوه مشترک المان‌ها  $F \in \mathcal{T}_h$  با استفاده از ترکیب خطی درجات آزادی و توابع درونیابی برداری به منظور جایگذاری در نقاط گوسی معادله درجه اشباع عبارت است از:

$$\mathbf{u}_t^{n+1} = \sum_{i=1}^3 q_{t,i}^{n+1} \bar{\Psi}_{F,i}. \quad (49)$$

تابع درونیابی برداری در فضای راویارت-توماس مرتبه پایین  $RT_0$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۴):

$$\bar{\Psi}_F = \frac{|F|}{\sqrt{|T|}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_p), \quad (50)$$

که  $\mathbf{X}_p$  مختصات رأس مقابل به گره  $P$  است. تابع  $\bar{\Psi}_F$  باید



شکل ۵- عملکرد محدودکننده شیب چاونت- جافر اصلاح شده در المان‌های مثلی

محدودکننده شیب، به صورت  $\mathcal{L}(S_w) = \tilde{S}_w$  تعریف می‌شود. در هر المان  $T$ ،  $\bar{S}_{w,Ave}$ ، بیشینه  $\bar{S}_{w,max,i}$  و کمینه  $\bar{S}_{w,min,i}$  متوسط المان‌های احاطه کننده گره  $i$  در مجموعه  $\mathcal{T}_T$  قبل از فرایند محدودشدگی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱ و ۲۳]:

$$\bar{S}_{w,Ave} = \frac{1}{|T|} \int_T S_{w,i} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} S_{w,i} \quad (56)$$

$$\bar{S}_{w,min,i} = \min \{ \bar{S}_{w,Ave} \in T_h \}, \quad (57)$$

$$\bar{S}_{w,max,i} = \max \{ \bar{S}_{w,Ave} \in T_h \}, \quad (58)$$

$$\min \sum_{i=1}^{N_T} \frac{1}{\gamma} S_{w,i} - \tilde{S}_{w,i}, \quad i = 1, \dots, N_T. \quad (59)$$

در رابطه (۶۰) بقای محلی با برابر قرار دادن متوسط درجات اشباع محاسباتی روی هر المان  $\bar{S}_{w,Ave}$  با متوسط این مقدار پس از محدودشدگی  $\bar{S}_{w,Ave}$  حفظ می‌شود:

$$\tilde{S}_{w,Ave} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \tilde{S}_{w,i}, \quad \tilde{S}_{w,Ave} = \bar{S}_{w,Ave}, \quad T \in T_h \quad (60)$$

در رابطه (۶۱) تحت عنوان قید حذف اکسترمم محلی، بیشینه  $\bar{S}_{w,max,i}$  و کمینه متوسط  $\bar{S}_{w,min,i}$  تمام المان‌های محاط کننده آن کنترل می‌شود:

$$\bar{S}_{w,min,i} \leq \tilde{S}_{w,i} \leq \bar{S}_{w,max,i}, \quad i = 1, \dots, N_T \quad (61)$$

$I_F$  و  $\hat{I}_F$  به ترتیب طول وجه در المان فیزیکی و المان مرجع است.  $\hat{Q}$  و  $\hat{q}$  و  $\hat{X}$  فضاهای برداری درویابی قبل از نگاشت هستند.

## ۲-۶- تثبیت و حذف نوسانات غیرفیزیکی نتایج

به منظور حذف نوسانات غیرفیزیکی ناشی از حل معادله درجه اشباع، از یک محدودکننده به نام محدودکننده گره-محور چاونت- جافر اصلاح شده استفاده می‌شود. این محدودکننده شیب با وجود گران بودن نسبت به سایر محدودکننده‌ها، از دقت بالایی در حذف نوسانات غیرفیزیکی برخوردار است. فلسفه این محدودکننده منطبق بر اصل حذف اکسترمم‌های محلی و حداقل کردن اختلاف مقادیر درجه اشباع قبل  $(S_{w,i})$  و بعد  $(\tilde{S}_{w,i})$  از محدود شدن است. برای این منظور طبق شکل (۵) از قیودی استفاده می‌شود تا هم بقای محلی المان حفظ شود و هم از ایجاد اکسترمم‌های محلی جلوگیری کند [۲۲]. به منظور کمینه‌سازی تابع هدف در محدودکننده شیب، از روش حداقل‌سازی مربعات خطی استفاده شده است. در هر المان  $T \in T_h$ ، مجموعه المان‌های احاطه کننده هر گره مانند  $i$  با نماد  $\mathcal{T}_h = \{T \in T_h \mid i \subset T\}$  معرفی می‌شود.  $N_{\mathcal{T}}$  تعداد رئوس هر المان و  $m_{i,\mathcal{T}}$  مرکز وجه  $i$  است. عملکرد

جدول ۱- مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسئله باکلی - لورت

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$\phi$	۰/۲	$S_{rw}$	۰/۲
$K [m^2]$	$10^{-11}$	$S_m$	۰/۱۵
$P_d [Pa]$	۱۰۰۰	$\mu_w [kg/(ms)]$	۰/۰۰۱
$\zeta$	۲/۰	$\mu_n [kg/(ms)]$	۰/۰۱

به منظور صحت‌سنجی مدل تهیه شده، از مسئله باکلی - لورت (با خاصیت هذلولوی) استفاده می‌شود. هندسه این مدل شامل یک ستون افقی با دامنه  $(0m, 30m) \times (0m, 30m) = \Omega$  است. در این مسئله به منظور بررسی کارایی مدل در حالت همبسته، از اثر مشتقات فشار موینگی (عملگر انتشار) صرف‌نظر نشده است، هر چند داده‌های مسئله اثر ترم مشتق موینگی را در مقابل ترم انتقال ناچیز می‌کنند. پارامترهای سیال و محیط متخلخل در این مسئله در جدول (۱) معرفی شده‌اند. شرایط مرزی و اولیه مسئله مطابق شکل (۶) عبارتند از:

$$P_w|_{x=0} = 3/0 \times 10^5 \text{ (Pa)}, P_w|_{x=30} = 1/50 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$S_{in}|_{x=0} = 0/75, S_w|_{x=30} = 0/2, S_w(,0) = 0/3$$

در این مسئله از نسخه OBB-DG ( $\sigma_F = 0$ ) استفاده شده است. نتایج حاصل از روش ترکیبی المان محدود نامنطبق و گالرکین ناپیوسته با تقسیم‌های  $(h = L/33)$  با دو روش شبکه بدون المان<sup>۱۶</sup> صمیمی و پاک [۲۴] و روش سراسر گالرکین ناپیوسته (DG-DG) در شکل (۷) برای مدت زمان ۱۸۰ و ۳۶۰ روز مقایسه شد و نتایج کیفی بیانگر دقت قابل قبول مدل ارائه شده است. مقایسه کیفی شکل (۷) بیانگر دقت بالاتر نتایج مدل‌سازی با روش (CR-DG) در تحقیق حاضر و روش تماماً گالرکین ناپیوسته (DG-DG) در مقایسه با روش بدون شبکه است، به طوری که پیشانی تیز سطح تماس بین دوفاز به نحوه مطلوبی تسخیر شده است. به منظور بررسی اثر اندازه المان‌های شبکه از سه نوع تقسیمات  $h = L/33$ ،  $h = L/64$  و  $h = L/128$  استفاده شده است و مقدار خطای نرم و نسبت همگرایی به‌ازای

در قید سوم نیز متوسط مقدار روی هر وجه  $(\bar{S}_{w,ave,m})$  باید بین مقدار متوسط المان جاری و المان همسایه آن  $(\bar{S}_{w,ave,T_i}$  و  $\bar{S}_{w,ave,Ave}$ ) محدود شود تا از ایجاد اکسترم‌های محلی احتمالی روی وجوه نیز جلوگیری شود:

$$\min(\bar{S}_{w,ave,Ave}, \bar{S}_{w,ave,T_i}) \leq \bar{S}_{w,ave,m} \leq \max(\bar{S}_{w,ave,Ave}, \bar{S}_{w,ave,T_i}) \quad (62)$$

### ۳- صحت‌سنجی و بررسی نتایج

به منظور صحت‌سنجی مدل در این تحقیق از مدل‌های محک معروف در زمینه جریان‌های دوفازی همانند مسائل باکلی - لورت و مک و رتر - سونادا در فضای شبه یک‌بعدی استفاده شده است. نتایج حاصل با حل‌های نیمه‌تحلیلی و همچنین نتایج سایر تحقیق‌ها مقایسه شده است.

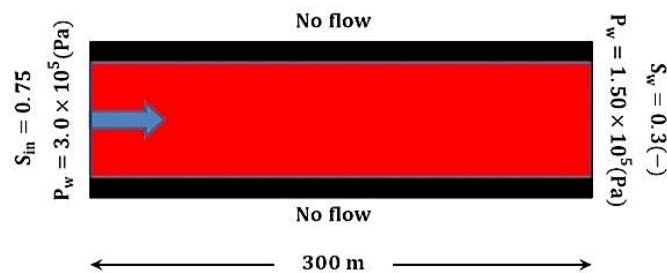
#### ۳-۱- مسئله محک باکلی - لورت

هرگاه از اثر فشار موینگی و تراکم‌پذیری در مقابل ترم انتقال در معادله درجه اشباع صرف‌نظر شود ( $\nabla P_c = 0$ )، آنگاه معادله درجه اشباع به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

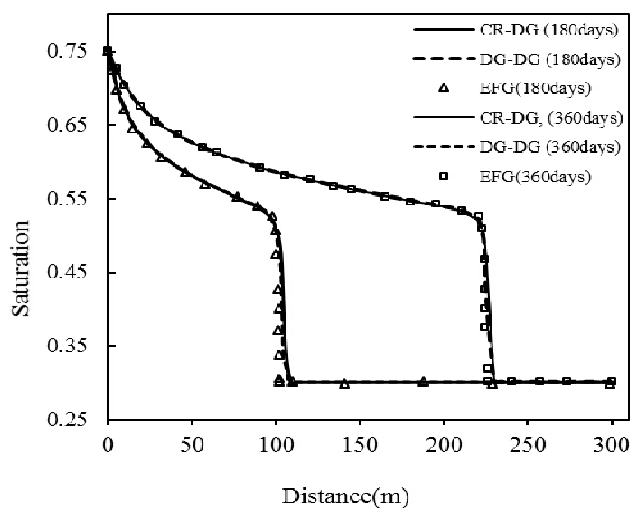
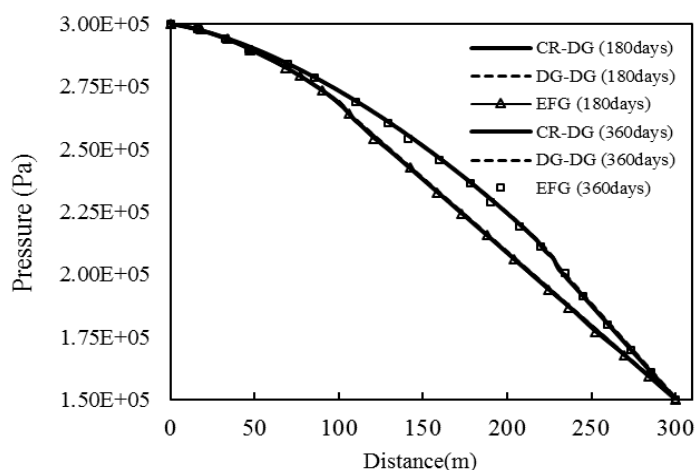
$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \left( u_t \frac{df_w}{dS_w} \right) \nabla S_w = q_w \quad (63)$$

این معادله به معادله باکلی - لورت یا سیلابزنی آب معروف است و به‌عنوان یکی از گزینه‌های صحت‌سنجی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. گفتنی است که سیلاب‌زنی یکی از روش‌های بازیافت ثانویه در صنعت نفت است. در این بخش

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸



شکل ۶- هندسه و شرایط مرزی مسئله باکلی - لورت



شکل ۷- مقایسه نتایج مسئله باکلی - لورت برای مدت زمان ۱۸۰ و ۳۶۰ روز با مدل صمیمی - پاک [۲۴] و روش DG-DG

این تقسیمات محاسبه شده است. با توجه به عدم دسترسی به یک حل تحلیلی در حالت همبسته، از یک شبکه بسیار ریز ( $h = L/256$ ) به عنوان مدل پایه برای محاسبه خطاهای نرم استفاده از روش گالرکین ناپیوسته (DG-DG) حل شده باشند، همچنین خطاهای گفته شد به ازای تقسیمات مختلف با حالتی که هر دو معادله با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته (DG-DG) حل شده باشند،

این تقسیمات محاسبه شده است. با توجه به عدم دسترسی به یک حل تحلیلی در حالت همبسته، از یک شبکه بسیار ریز ( $h = L/256$ ) به عنوان مدل پایه برای محاسبه خطاهای نرم استفاده از روش گالرکین ناپیوسته (DG-DG) حل شده باشند،

جدول ۲- خطای نرم ( $E_{L_r}$ ) متغیرهای اصلی پس از گذشت ۳۶۰ روز

$\Delta x = L/128$	$\Delta x = L/64$	$\Delta x = L/32$	ضریب همگرایی $E_{L_r}$
۰/۰۳۶۴۰	۰/۰۴۳۲۰	۰/۰۶۶۹۰	$P_{wBase} - P_{w0} (CR - DG)$
۰/۲۴۷۰۰	۰/۶۴۰۰۰	-	ضریب همگرایی ( $P_w$ )
۰/۰۳۳۹۰	۰/۰۸۵۷۰	۰/۲۱۳۰۰	$S_{wBase} - S_{w0} (CR - DG)$
۱/۳۳۷۰۰	۱/۳۱۷۰۰	-	ضریب همگرایی ( $S_w$ )
۰/۰۰۲۸۲	۰/۰۰۹۶۴	۰/۰۳۰۷۰	$P_{wBase} - P_{w0} (DG - DG)$
۱/۷۷۰۰۰	۱/۶۷۰۰۰	-	ضریب همگرایی ( $P_w$ )
۰/۰۶۹۷۰	۰/۱۴۸۰۰	۰/۲۴۲۰۰	$S_{wBase} - S_{w0} (DG - DG)$
۱/۱۵۰۰۰	۰/۷۱۰۰۰	-	ضریب همگرایی ( $S_w$ )

جدول ۳- مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسئله مک ورتتر

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۰/۰	$S_{rw}$	۰/۳	$\phi$
۰/۰	$S_{rn}$	$10^{-10}$	$K[m^2]$
۰/۰۰۱	$\mu_w [kg/(ms)]$	۵۰۰۰	$P_d [Pa]$
۰/۰۰۱	$\mu_n [kg/(ms)]$	۲/۰	$\zeta$

در مسائل محک برای صحت‌سنجی مدل جریان‌های دوفازی مورد توجه قرار می‌گیرد. معادله حاکم بر مسئله مک ورتتر از نوع سهموی غیرخطی است و علت این امر چشم‌پوشی از ترم انتقال در قیاس با ترم تغییرات فشار موینگی در معادله درجه اشباع است [۲۵]:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_t} \left| P_c' \right| K \frac{\partial S_w}{\partial x} \right) = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (64)$$

در این مسئله، از معادله‌های نفوذپذیری نسبی و فشار موینگی بروکس و کری بر مبنای ضریب توزیع حفرات ( $\zeta = 2$ ) استفاده شده است. تقسیمات هندسه مسئله برابر  $\Delta x = 0.05$  و ضریب پنالته ( $\sigma_F = 1$ ) است. همچنین تقسیمات زمانی  $\Delta t = 20 \text{ sec}$  هستند. خصوصیات فیزیکی سیال و خاک در جدول (۳) معرفی

در جدول (۲) مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که در روش پیوندی المان محدود غیرمنطبق و گالرکین ناپیوسته (CR-DG)، مقادیر درجه اشباع به‌عنوان متغیر اصلی، به‌ازای تقسیمات مشابه از ضریب همگرایی بالاتری برخوردار هستند. این امر بیانگر تطابق روش المان محدود غیرمنطبق با میدان سرعت بازسازی شده است.

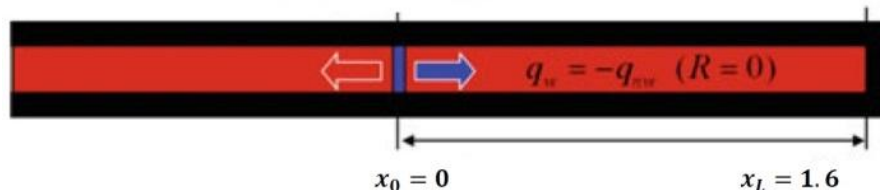
### ۲-۳- مسئله محک مک ورتتر

این مسئله برای اولین بار توسط مک ورتتر و سونادا به‌روش نیمه تحلیلی برای بررسی جریان جابه‌جایی دوطرفه در یک ستون بی‌نهایت با انتهای فاقد شار مورد توجه قرار گرفت. این مسئله انتشار- غالب در بسیاری از مدل‌سازی‌ها به‌عنوان یکی از

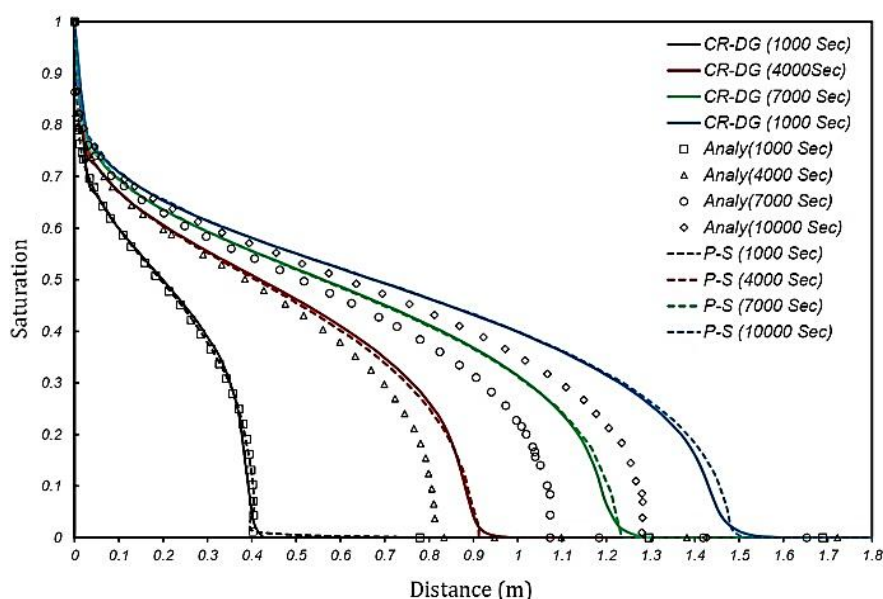
روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۸، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۸

$$S_w(0, t) = 0.1(-)$$

$$P_w(0, t) = 2 \times 10^{05} (Pa)$$



شکل ۸- هندسه و شرایط مرزی مسئله مک ورتر



شکل ۹- مقایسه نتایج مسئله مک ورتر برای مدت زمان‌های گوناگون در مدل حاضر با حل نیمه تحلیلی [۲۵] و نتایج

مدل المان محدود Geosys [۲۶]

عددی Geosys، انطباق مطلوبی برای حل همبسته معادله‌ها حاصل شده است و به‌ازای برخی زمان‌ها نتایج با حل نیمه تحلیلی مک ورتر مقداری اختلاف دارند. لازم به‌ذکر است اگر در مدل حاضر از متغیرهای فشار ترکنده و فشار موینگی  $(P_w - P_c)$  فشار به‌جای فرمولاسیون  $(P_w - S_w)$  استفاده شود، نتایج آنها با مدل نیمه‌تحلیلی منطبق خواهد بود [۲۶].

### ۳-۳- مسئله نمونه (۱)

در این بخش به بررسی کاربرد و توانایی مدل تهیه شده در یک محیط غیرهمگن به ابعاد  $(0.5\text{m}, 0.5\text{m}) \times (0.5\text{m}, 1.0\text{m})$   $\Omega_1 \cup \Omega_2$

شده‌اند. شرایط مرزی و اولیه مسئله مطابق شکل (۸) عبارتند از:

$$S_{in} |_{x=0} = 1 \text{ at } \Gamma_{in}$$

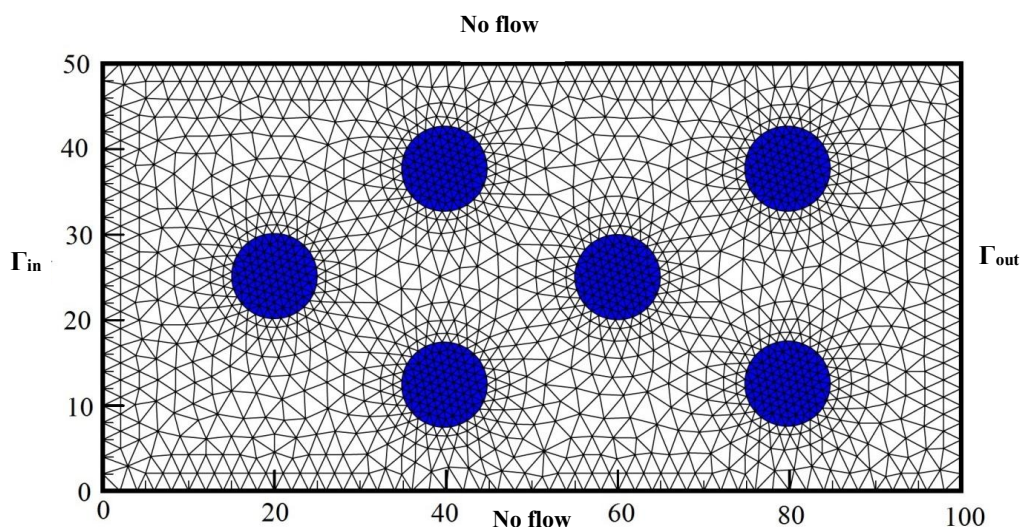
$$P_w |_{x=0} = 2/0 \times 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$S_w(x, 0) = 0$$

نتایج حاصل از مدل‌سازی با استفاده از روش پیوندی ارائه شده و نتایج عددی مدل المان محدود Geosys بر مبنای فشار-درجه اشباع (P-S) و همچنین حل نیمه‌تحلیلی مک ورتر در شکل (۹) مقایسه شد.

مقایسه نتایج نشان می‌دهد به‌دلیل استفاده از متغیرهای مشابه فشار و درجه اشباع  $(P_w - S_w)$  در مدل ترکیبی حاضر و مدل





شکل ۱۰- هندسه و شرایط مرزی مسئله نمونه (۱)

جدول ۴- مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل مسئله نمونه

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۰/۱۵	$S_{rw}$	۰/۲-۰/۳	$\phi$
۰/۰	$S_m$	$10^{-11} - 10^{-14}$	$K [m^2]$
۰/۰۰۰۰۹۵	$\mu_w [kg/(ms)]$	۵۰۰۰	$P_d [Pa]$
۰/۰۱۹	$\mu_n [kg/(ms)]$	۲/۰	$\zeta$

عبارتند از:

$$P_{dir}^- = 2/50 \times 10^6 \text{ Pa}, S_{in} = 0/90 (-) \text{ at } \Gamma_{in}$$

$$P_{dir}^+ = 1/0 \times 10^6 \text{ Pa at } \Gamma_{out}$$

$$P_w(,0) = 1/0 \times 10^6 \text{ Pa}, S_w(,0) = 0/25$$

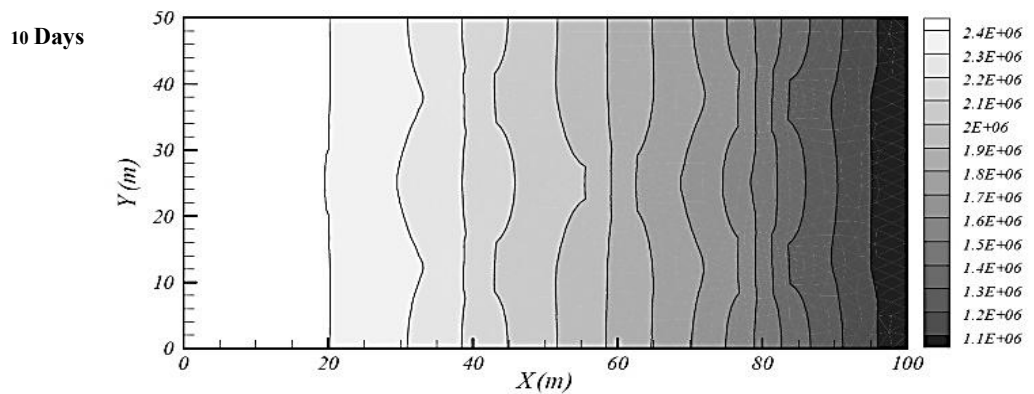
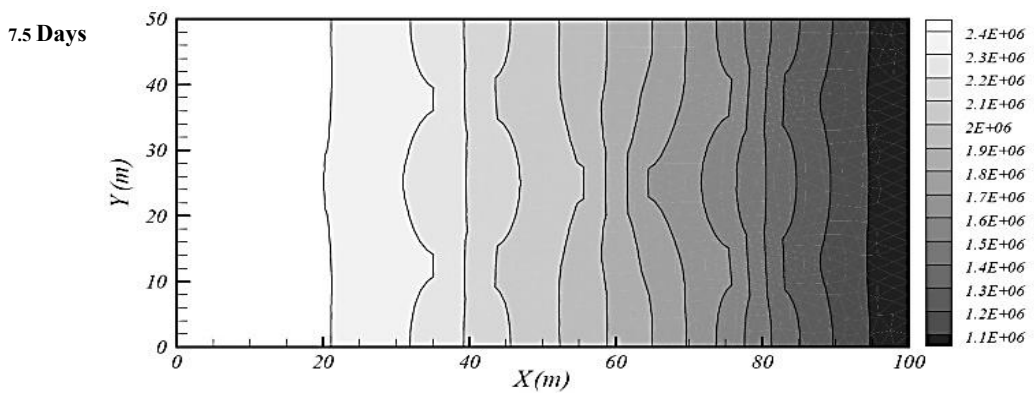
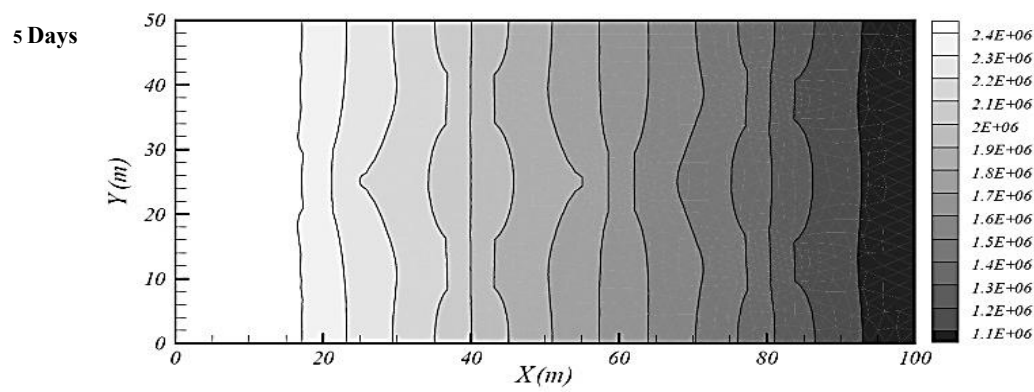
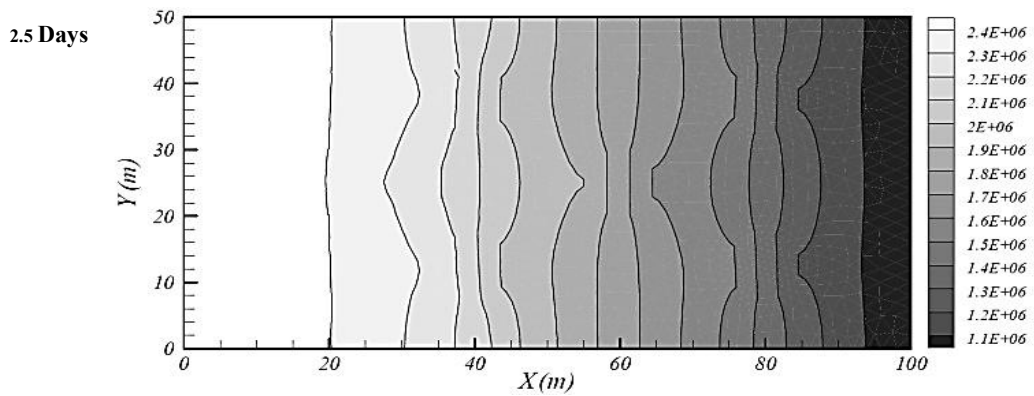
پارامترهای فیزیکی محیط متخلخل و سیالات موجود در جدول (۴) توصیف شده‌اند و شبکه المان‌بندی مثلثی آن از نوع بی‌سامان با تعداد ۳۴۰۲ المان و تعداد گره‌ها ۱۷۷۷ عدد است.

در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) ترسیمه‌های فشار و درجه اشباع فاز ترکننده برای مدت زمان‌های ۲/۵، ۵، ۷/۵ و ۱۰ روز با استفاده از روش پنالتی داخلی وزن‌دار متقارن (SWIP) با مقدار پنالتی ( $\sigma_F = 100$ ) نمایش داده شده است.

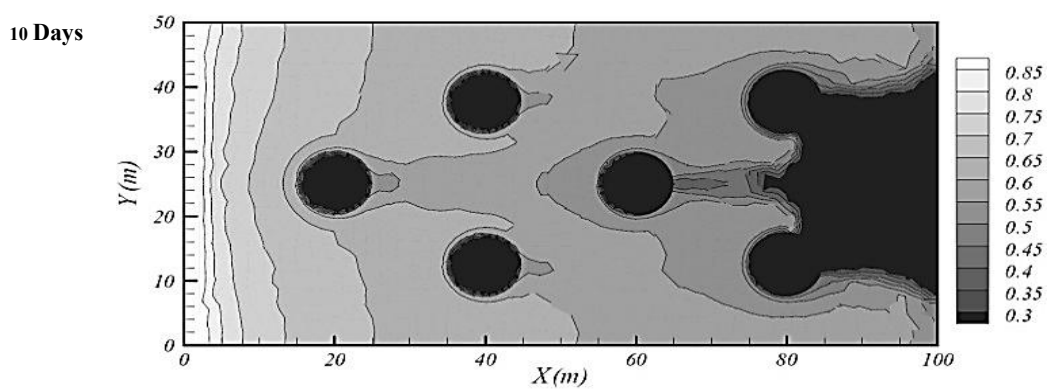
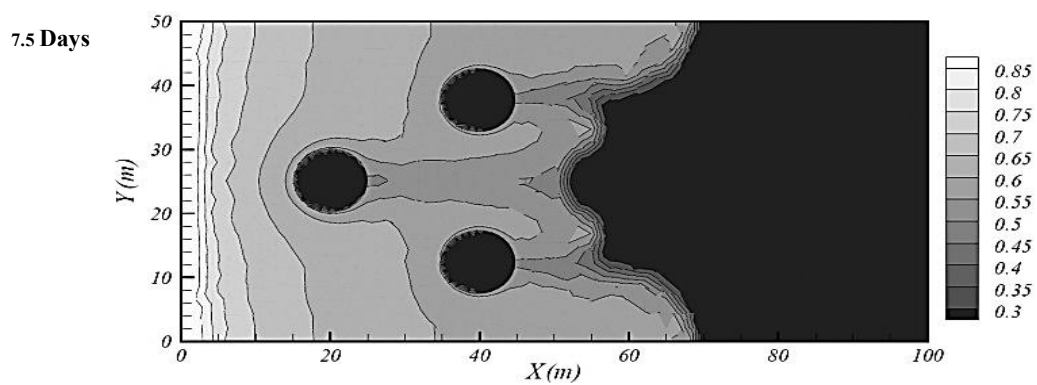
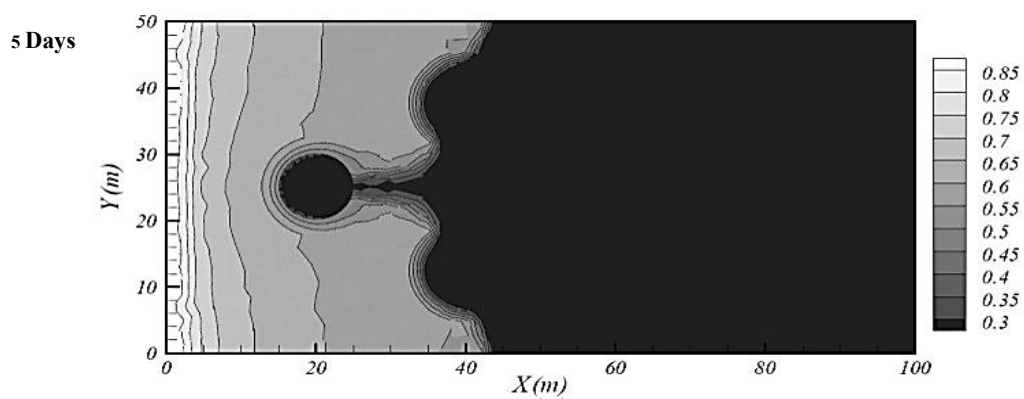
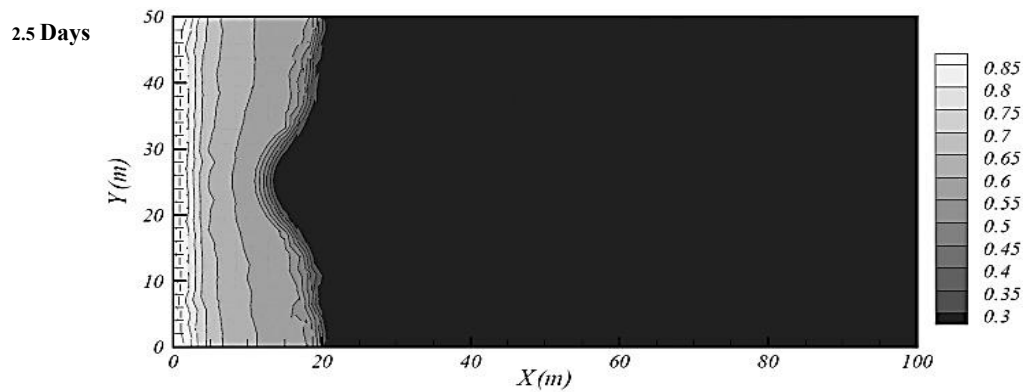
و اشباع از ماده امتزاج‌ناپذیر کلرو بنزن پرداخته می‌شود. در این دامنه مرزهای فوقانی و تحتانی فاقد شار و از نوع نفوذناپذیر هستند. آب از مرز سمت چپ  $\Gamma_{in} = \{0\} \times (0, 50)$  به یک سفره آب زیر زمینی تزریق می‌شود و مرز سمت راست از نوع مرز خروجی  $\Gamma_{out} = \{100\} \times (0, 50)$  است. ۶ ناحیه کم‌نفوذپذیر دایره‌ای شکل با نفوذپذیری ( $10^{-14} m^2$ ) و به شعاع ۵ متر در دامنه واقع شده‌اند که مختصات مرکز آنها به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{aligned} & [20, 25], [40, 12/5], [40, 27/5], \\ & [60, 25], [80, 12/5], [80, 27/5] \end{aligned} \right\}$$

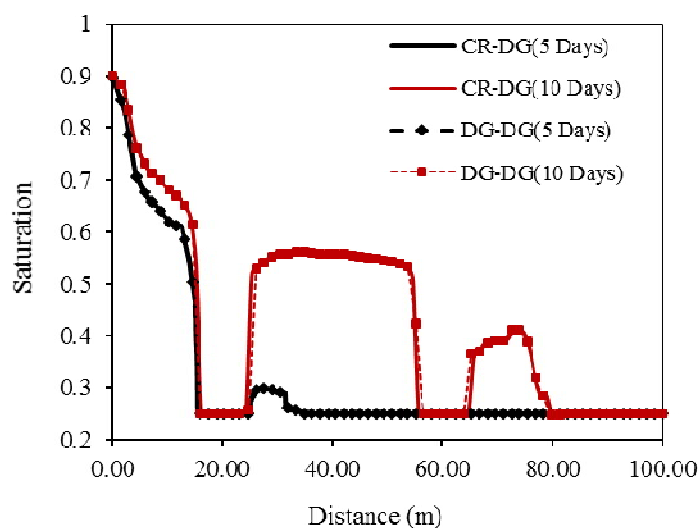
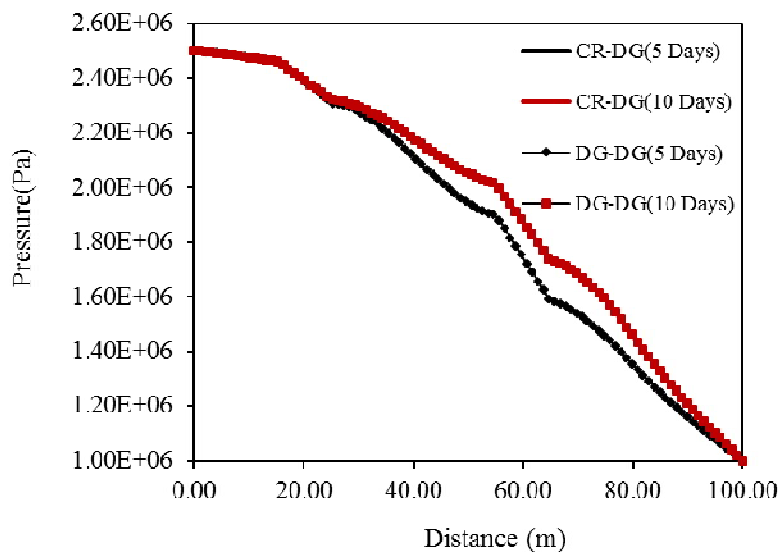
شرایط مرزی و اولیه حاکم بر دامنه مسئله مطابق شکل (۱۰)



شکل ۱۱- ترسیمه تغییرات فشار فاز ترکنده به ازای ۲/۵، ۵، ۷/۵ و ۱۰ روز



شکل ۱۲- ترسیمه تغییرات درجه اشباع فاز ترکنده به‌ازای ۲/۵، ۵، ۷/۵ و ۱۰ روز



شکل ۱۳- مقایسه پروفیل طولی (Y=۲۵) فشار و درجه اشباع فاز ترکنده در ۵ و ۱۰ روز، برای روش های CR-DG و DG-DG

است اندازه گام های زمانی در این مسئله برای استراتژی حل متوالی ضمنی معادله های حاکم، ( $\Delta t = ۸۶۴s$ ) لحاظ شده است.

#### ۴- نتیجه گیری

• نتایج مدل سازی با استفاده از روش ترکیبی نشان می دهد استفاده از روش المان محدود نامنطبق در حل معادله جریان (معادله های همبسته فشار و سرعت) موجب ایجاد تطابق بهتر نتایج مدل و وضوح در میدان سرعت تولید شده می شود. لذا سبب می شود تا مقادیر درجه اشباع حاصل، از

نتایج بیانگر آن است که استفاده از ترکیب روش المان محدود کروزیکس- راویارت ناپیوسته و روش پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته نتایج مطلوبی را به دست می دهد و در محل ناحیه ناپیوستگی ها، وضوح نتایج مطلوب و بدون نوسانات غیرفیزیکی هستند. همچنین پروفیل های فشار و درجه اشباع فاز ترکنده برای مدل تهیه شده (CR-DG) و روش تماماً گالرکین ناپیوسته (DG-DG) برای مدت ۵ و ۱۰ روز، با تقریب خطی به ازای یک شبکه معین و مقدار پنالتی یکسان در شکل (۱۳) با یکدیگر مقایسه شده و تطابق مطلوبی حاصل شده است. گفتنی

گره‌های آویزان با درجات تقریب متنوع را فراهم می‌کند. همچنین استفاده از تکنیک‌های گسسته‌سازی وزنی مکانی در بهبود تسخیر شوک‌ها در محل ناهمگنی‌ها بسیار سازنده و اثرگذار است. همچنین می‌توان در نسخه پنالتی داخلی SWIP به‌ازای مقادیر پنالتی ( $\sigma_F = 50-100$ ) به نتایج مطلوبی دست یافت.

نوسانات غیرفیزیکی کمتری در محل ناپیوستگی‌ها و ناهمگنی شود. نتایج ناشی از بررسی مدل بنجمارک باکلی لورت و مقایسه خطاهای نرم مربوط به مقادیر درجه اشباع در جدول (۲) نشان‌دهنده این امر است.

• استفاده از المان‌های نامنطبق و استقرار درجات آزادی روی وجوه المان، قيود انطباق گره‌ها را در حل معادله‌های جریان و تعیین میدان سرعت پیوسته را نفی کرده امکان استفاده از

## واژه‌نامه

- |  |   |
|--|---|
| 1. degenerated element                   | 12. symmetric weighted interior penalty |
| 2. wetting-phase                         | 13. Oden-Babuška-Baumann                |
| 3. discontinuous Galerkin (DG) method    | 14. Raviart-Thomas Space                |
| 4. mixed finite element (MFM)            | 15. Piola transform                     |
| 5. mixed hybrid finite element (MHFM)    | 16. element free mesh                   |
| 6. immerse nonconforming finite element  |   |
| 7. multipoint Flux                       |   |
| 8. Implicit pressure-Explicit saturation |   |
| 9. implicit sequential solution scheme   |   |
| 10. fractional flow function             |   |
| 11. broken Hilbert space                 |   |

## مراجع

- Computational and Applied Mathematics*, Vol. 260, No. 4, pp. 356-363, 2014.
- Hoteit, H., and Firoozabadi, A., "Numerical Modeling of Two-Phase Flow in Heterogeneous Permeable Media with Different Capillarity Pressures", *Advances in Water Resources*, Vol. 31, No. 1, pp. 56-73, 2008.
  - Fučík, R., and Mikyška, J., "Discontinuous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures", *Procedia Computer Science*, Vol. 4, No. 11, pp. 908-917, 2011.
  - Crouzeix, M., and Raviart, P. -A., "Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations I", *Revue Française D'automatique Informatique Recherche Opérationnelle. Mathématique*, Vol. 7, No. R3, pp. 33-75, 1973.
  - Zhang, X., "Nonconforming Immersed Finite Element Methods for Interface Problems", Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2013.
  - Rannacher, R., and Turek, S., "Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 8, No. 2, pp. 97-111, 1992.
  - Lamichhane, B. P., "A Mixed Finite Element Method for Nearly Incompressible Elasticity and Stokes Equations using Primal and Dual Meshes with Quadrilateral and Hexahedral Grids", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 260, No. 4, pp. 356-363, 2014.
  - Shi, D. -y., and Wang, H.-m., "The Crouzeix-Raviart Type Nonconforming Finite Element Method for the Nonstationary Navier-Stokes Equations on Anisotropic Meshes", *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, Vol. 30, No. 1, pp. 145-156, 2014.
  - Younes, A., Makradi, A., Tudor, C. H., and Zidane, A., "A Combination of Crouzeix-Raviart, Discontinuous Galerkin and MPFA Methods for Buoyancy-Driven Flows", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 24, No. 3, pp. 735-759, 2014.
  - Jo, G., and Kwak, D. Y., "An IMPES Scheme for a Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media using a Structured Grid", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 317, pp. 684-701, 2017.
  - Jamei, M., and Ghafouri, H. R., "A Discontinuous Galerkin Method for Two-Phase Flow in Porous Media using Modified MLP Slope Limiter", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 326-336, 2016.
  - Chen, Z., Huan, G., and Ma, Y., *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Siam, Texas, 2006.
  - Brooks, R., and Corey, T., *Hydraulic Properties of Porous Media*, Colorado State University, 1964.

13. Van Genuchten, M. T., and Nielsen, D., "On Describing and Predicting the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils", *Annales de Geophysique*, Vol. 3, No. 5, pp. 615-628, 1985.
14. Klieber, W., and Riviere, B., "Adaptive Simulations of Two-Phase Flow by Discontinuous Galerkin Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 1, pp. 404-419, 2006.
15. Di Pietro, D. A., and Ern, A., *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, Springer, Berlin, 2011.
16. Ern, A., Stephansen, A. F., and Zunino, P., A. "Discontinuous Galerkin Method with Weighted Averages for Advection-Diffusion Equations with Locally Small and Anisotropic Diffusivity", Technical Report 332, Ecole nationale des ponts et chaussées, 2007.
17. Rivière, B., *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Berlin, 2008.
18. Jamei, M., and Ghafouri, H., "A Novel Discontinuous Galerkin Model for Two-Phase Flow in Porous Media using an Improved IMPES Method", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 26, No. 1, pp. 284-306, 2016.
19. Ern, A., Mozolevski, I., and Schuh, L., "Accurate Velocity Reconstruction for Discontinuous Galerkin Approximations of Two-Phase Porous Media Flows", *Comptes Rendus Mathématique*, Vol. 347, No. 9, pp. 551-554, 2009.
20. Raviart, P. -A., and Thomas, J. -M., *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*, Springer, 1977.
21. Fortin, M., and Brezzi, F., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.
22. Jamei, M., and Ghafouri, H., "An Efficient Discontinuous Galerkin Method for Two-Phase Flow Modeling by Conservative Velocity Projection", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 26, No. 1, pp. 63-84, 2016.
23. Hoteit, H., Ackerer, P., Mosé, R., Erhel, J., and Philippe, B., "New Two-Dimensional Slope Limiters for Discontinuous Galerkin Methods on Arbitrary Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, No. 14, pp. 2566-2593, 2004.
24. Grüninger, C., "Using DUNE-PDELAB for Two-Phase Flow in Porous Media, Advances in DUNE", *Springer*, pp. 131-141, 2012.
25. McWhorter, D. B., and Sunada, D. K., "Exact Integral Solutions for Two-Phase Flow", *Water Resources Research*, Vol. 26, No. 3, pp. 399-413, 1990.
26. Amaziane, B., and Jurak, M., "A New Formulation of Immiscible Compressible Two-Phase Flow in Porous Media", *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 336, No. 7, pp. 600-605, 2008.