نشریه علمی - پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر در روتور با یاتاقان‌های غیرخطی

موسی رضائی*، میر محمد اتفاق و رضا فتحی
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۳/۱۱)

چکیده– اتوبالانسر[۱] دینامیکی ساچمه‌ای علاوه‌بر مزیت‌های مختلف، دارای دو عیب اساسی یعنی محدود بودن ناحیه بالانس[۲] پایدار و افزایش دامنه روتور در ناحیه گذرا است که سبب محدودیت استفاده از این نوع اتوبالانسر می‌شود. به‌همین منظور به‌تازگی مدل جدیدی از این اتوبالانسر با نام اتوبالانسر ساچمه- فنر ارائه شده است که تا حد قابل ملاحظه‌ای عیب‌های مذکور را رفع کرده است. با توجه به مزیت اتوبالانسر جدید و برای کاربردی کردن آن لازم است رفتار دینامیکی آن به‌طور دقیق بررسی شود. در مطالعات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های خطی و مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر بررسی شده است ولی در عمل ممکن است یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرخطی باشند. لذا در مقاله حاضر به‌منظور بررسی دقیق‌تر، برای اولین بار رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر برای بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرخطی با روش مقیاس‌های چندگانه مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که یاتاقان‌های غیرخطی خللی در مزیت‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر ایجاد نمی‌کند.

واژه‌های کلیدی: اتوبالانسر ساچمه- فنر، یاتاقان‌های غیرخطی، روش مقیاس‌های چندگانه، رفتار دینامیکی.

Investigating the Dynamics of a Ball-Spring Autobalancer in a Rotor with Non-Linear Bearings

M. Rezaee*, M. M. Ettefagh and R. Fathi

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Abstract*: Although the traditional automatic ball balancer (ABB) has numerous advantages, it has two major deficiencies, i.e., it has a limited balance stable region and it increases the vibration amplitude of the rotor at transient state. These deficiencies limit the applicability of ABBs. In this regard, a new type of ABB called "the Ball-spring autobalancer" has been proposed to resolve the mentioned deficiencies of the traditional ABBs. In order to investigate the capability of the Ball-spring AB in balancing rotors, it is necessary to study its dynamics accurately. The dynamics of a rotor with linear bearing equipped with a Ball-spring AB has been studied previously; however, in real situations, the bearings have nonlinear characteristics. Here, the dynamics of a rotor with nonlinear bearings equipped with a Ball-spring AB is investigated by the multiple scales method for the*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

first time. The results show that the nonlinearity at the rotor bearings does not impair the advantages of the Ball-spring AB.

Keywords: *Automatic ball-spring balancer, Nonlinear bearings, Multiple scale method, Dynamic behavior.*

فهرست علائم

$\bar{e}$	خروج از مرکزی بی‌بعد	β	نسبت میرایی بالانسر
J	ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم، $kg.m^2$	ρ	ضریب بی‌بعد معرف اثر غیرخطی یاتاقان‌ها
K_p	سفتی فنرهای محیطی، N/m^2	$\bar{\omega}$	فرکانس بی‌بعد سیستم
K_r	سفتی فنرهای شعاعی، N/m^2	ω_b	فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی، rad/s
m_d	جرم روتور، kg	ζ	نسبت میرایی روتور
m_b	جرم هر یک از ساچمه‌ها، kg	$\bar{\delta}_i$	جابه‌جایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی
$\bar{m}$	جرم بی‌بعد ساچمه‌ها		

۱- مقدمه

نابالانسی[۳] یکی از عوامل مخرب و از دلایل اصلی ارتعاشات ناخواسته در سیستم‌های دوار است. با توجه به اینکه سیستم‌های دوار یکی از پرکاربردترین تجهیزات مورد استفاده در صنایع مختلف از جمله نیروگاه‌ها، صنایع هوافضا، ماشین‌ابزارها، ماشین‌های لباسشویی و ... است، بنابراین رفع نابالانسی در این سیستم‌ها حائز اهمیت است. نابالانسی وقتی اتفاق می‌افتد که محورهای اینرسی اصلی روتور منطبق بر محور دوران آن نباشد. در روش معمول، عملیات بالانس سیستم پس از متوقف کردن دستگاه و وزنه‌گذاری یا برداشتن جرم از صفحاتی خاص که جهت انجام این‌کار روی روتور تعبیه شده‌اند انجام می‌پذیرد. ولی اگر نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند دیگر با یک‌بار بالانس کردن، مشکل حل نمی‌شود. در چنین شرایطی، استفاده از اتوبالانسر ساچمه‌ای دینامیکی که زیر مجموعه‌ای از روش‌های بالانس غیرفعال است، توصیه می‌شود [۱]. اتوبالانسر ساچمه‌ای از یک دیسک دوار شیاردار پر شده از مایع لزج تشکیل یافته است که در داخل آن ساچمه‌هایی قرار دارند. تحت شرایطی این ساچمه‌ها با قرارگیری در موقعیت مناسب، نابالانسی سیستم را جبران کرده و آن را به حالت بالانس در می‌آورند. نحوه عملکرد سیستم به این صورت است که نیروی گریز از مرکز وارد بر ساچمه‌ها به‌دلیل عدم انطباق مرکز دوران روتور و مرکز هندسی آن به دو مؤلفه مماسی و عمودی تجزیه می‌شود. در اثر مؤلفه مماسی، ساچمه‌ها در جهت مقابل نابالانسی حرکت کرده و با رسیدن به موقعیت تعادل خود که در خلاف جهت نابالانسی قرار دارد، باعث کاهش میزان نابالانسی می‌شود. استفاده از این نوع اتوبالانسر بدون نیاز به منبع انرژی و سیستم کنترلی خاص، قادر است سیستم دوار دارای نابالانسی را به‌صورت خودکار و بدون نیاز به توقف سیستم، بالانس کند. اتوبالانسر ساچمه‌ای به دلیل توانایی رفع نابالانسی‌های متغیر با شرایط کاری، در سیستم‌های مختلف از جمله در دی‌وی‌دی، ماشین‌های ابزار و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵-۲].

مطالعات اولیه در زمینه بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای توسط تیارل [۶]، الکساندر [۷] و کید [۸] انجام شده است. در سال ۱۹۹۹ چانگ و رو [۹] با به‌کارگیری مختصات قطبی توانستند معادلات روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر را به‌شکل خودگردان تبدیل کرده و پایداری سیستم را به‌طور کامل بررسی کنند. چانگ و جانگ [۱۰] به بررسی اثر ژیروسکوپی روی رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آنها نشان داد اتوبالانسر علاوه‌بر بالانس سیستم

قادر است زوایای اویلر ناشی از اثر ژیروسکوپی را میرا کند. لو و همکارانش [۱۱] به بررسی تحلیلی پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با دو ساچمه پرداختند. آنها محدوده پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را بهوسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مساله مقدارویژه بررسی کردند. همچنین لو و هانگ [۱۲] در تحقیقی دیگر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با سه ساچمه را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ احیایی و مقدم [۱۳] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف‌پذیر دوار نابالانس روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی و مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. در سال ۲۰۱۱ چان و همکارانش [۱۴] تأثیر غیرخطی بودن سیستم تعلیق بر پایداری سیستم مجهز به بالانسر ساچمه‌ای متداول را بدون استخراج پاسخ دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳ سانگ و همکارانش [۱۵] تاثیر تحریک خارجی بر عمکرد اتوبالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج تحلیلی نشان می‌دهد که ساچمه‌ها می‌توانند نابالانسی ناشی از تحریک خارجی را با تغییر موقعیت‌های خود رفع کنند. در همان سال بایکو [۱۶] به بررسی رفتار روتور انعطاف‌پذیر ارتوتروپیک[۴] مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداخت. نتایج تحلیل ایشان نشان داد که ناحیه پایدار برای روتور ارتوتروپیک کمتر از ناحیه پایدار روتور ایزوتوروپیک است. در سال ۲۰۱۴ رضایی و فتحی [۱۷] تأثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور مجهز به اتوبالانسر در غیاب اثر ژیروسکوپی را بررسی کردند. رضایی و فتحی [۱۸] در تحقیق دیگر با لحاظ کردن اثرات ژیروسکوپی[۵] رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ ماجسکی و همکارانش [۱۹] به بررسی رفتار دیسک صلب نصب شده روی محور الاستیک مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آنها نشان داد که عملکرد اتوبالانسر کاملاً وابسته به محل نصب آن روی محور است و در صورت نزدیکی اتوبالانسر به محل نابالانسی، اتوبالانسر عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۶ یانگ و اسمیت [۲۰] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر تحت اثر نیروی آلفورد پرداختند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که افزایش ضریب میرایی اتوبالانسر می‌تواند ارتعاشات مخرب ناشی از چرخه حدی سیستم تحت اثر نیروی آلفورد را از بین ببرد. مطالعات مختلف نشان داده است که اتوبالانسر متداول علاوه‌بر مزیت‌های ذکر شده، دارای دو عیب اساسی به شرح زیر است:

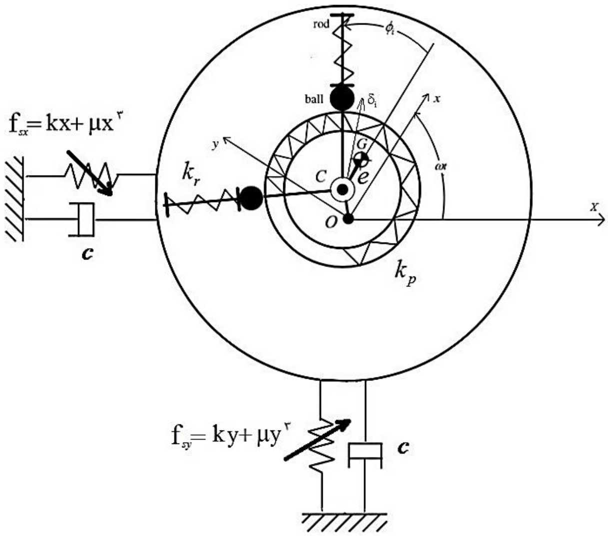
الف- محدود بودن ناحیه بالانس پایدار

اولین عیب عمده در این نوع اتوبالانسرها محدود بودن ناحیه بالانس پایدار است. بررسی‌های مختلف [۱۲-۹] نشان داده است که محدوده مشخصی به‌ازای پارامترهای سیستم (روتور مجهز به اتوبالانسر) از جمله جرم ساچمه‌ها، جرم روتور، میزان نابالانسی، میرایی روتور و ... وجود دارد که اتوبالانسر می‌تواند روتور را بالانس کند. بنابراین محدود بودن این ناحیه سبب می‌شود اتوبالانسر قادر به بالانس روتورها با مقدار پارامترهای معین شود که این امر سبب محدود شدن گستره کاربرد این نوع اتوبالانسر می‌شود.

ب- افزایش دامنه ارتعاشی روتور در دورهای زیر دور بحرانی اول

با توجه به اینکه این نوع اتوبالانسرها معمولاً برای سیستم‌هایی به‌کار می‌رود که در یک روز ممکن است دور سیستم چندبار از ناحیه گذرا عبور کند (به‌دلیل خاموش/ روشن کردن سیستم) به‌همین خاطر افزایش دامنه در ناحیه گذرا سبب کاهش عمر خستگی، ایجاد صدا و ... می‌شود. برای رفع ایرادهای مذکور مدل‌های مختلفی توسط محققان ارائه شده است ولی تنها مدلی که هر دو عیب را به‌طور همزمان تا حد قابل ملاحظه‌ای رفع می‌کند اتوبالانسر ساچمه- فنر است [۲۱].

در تحقیقات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های خطی و مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش‌های عددی بررسی شده است [۲۱]. با توجه به اینکه یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرخطی هستند، و همچنین روش‌های نیمه‌تحلیلی دارای مزیت‌های متعددی هستند، به‌همین منظور در این مقاله برای



شکل ۱- شکل نمادین اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های غیرخطی

اولین بار رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. بدین منظور، معادلات غیرخطی حاکم بر روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های غیرخطی استخراج شده است. محدوده پایداری سیستم با روش مقیاس‌های چندگانه استخراج و با محدوده پایداری سیستم متداول مقایسه شده است. درنهایت پاسخ سیستم غیرخطی مورد نظر با روش مقیاس‌های چندگانه به‌صورت تحلیلی استخراج و با پاسخ حاصل از روش عددی مقایسه شده است.

۲- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های غیرخطی در شکل (۱) نشان داده شده است. سیستم یاتاقان‌ها با فنر غیرخطی سفت شونده و دمپر ویسکوز با ثابت میرایی C مدل شده است. مرکز جرم روتور با G و خروج از مرکزیت CG با e نشان داده شده است. موقعیت ساچمه‌ها به‌وسیله شعاع δ_i و زاویه $\phi_i, i = 1,2,...,n$ تعیین می‌شود که n تعداد ساچمه‌ها است. مرکز هندسی روتور، C، با استفاده از مختصات x و y تعیین می‌شود. برای خودگردان کردن معادلات حرکت، دستگاه مختصات oxy متصل به روتور فرض شده است که با سرعت زاویه‌ای روتور چرخش می‌کند. خط واصل محور یاتاقان‌ها از نقطه O می‌گذرد که برای روتور ساکن، C بر O منطبق است. مکانیزم عملکرد اتوبالانسر ساچمه- فنر به این صورت است که فنرهای محیطی در ناحیه گذرا از همگرایی ساچمه‌ها جلوگیری می‌کند. در سرعت‌های زاویه‌ای بالاتر از دور بحرانی، با افزایش نیروی گریز از مرکز، نیروی مماسی افزایش یافته و با فشرده شدن فنرها، ساچمه‌ها به موقعیت تعادل پایدار خود منتقل شده و سبب بالانس سیستم می‌شوند.

معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت اتوبالانسر جدید را می‌توان با استفاده از معادلات لاگرانژ که در رابطه (۱) نشان داده شده است به‌دست آورد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial V}{\partial q_k}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad k=1,2,...,n \qquad (1)$$

که در آن T انرژی جنبشی،V انرژی پتانسیل،F تابع اتلاف ریلی و q_k مختصات تعمیم یافته هستند که عبارتند از x ، y، φ_i و δ_i که $i = 1,2,...,n$ است. بردارهای مکان مرکز جرم روتور و موقعیت ساچمه‌ها در دستگاه مختصات xy را می‌توان به صورت روابط (۲) و (۳) بیان کرد:

$$\vec{r}_G = x\vec{i}+y\vec{j}+e\vec{i} \qquad (2)$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.3.1]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.7131]

$$\vec{r}_{B_i} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (\delta_i \cos\phi_i)\,\vec{i} + (\delta_i \sin\phi_i)\,\vec{j} \tag{۳}$$

در ادامه با فرض یکسان بودن جرم ساچمه‌ها و کوچک بودن قطر آنها، انرژی جنبشی اتوبالانسر ساچمه‌ای به‌همراه روتور از رابطه (۴) به‌دست می‌آید [۲۱]:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + (x^2 + y^2)\omega^2\right] + \\ & \frac{1}{2}m_d\left(2xe\omega^2 + e^2\omega^2 + 2e\dot{y}\omega\right) + \\ & \frac{1}{2}m_b\sum_{i=1}^{n}[2\delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{y} + \omega x)\cos\phi_i - \\ & 2\delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{x} - \omega y)\sin\phi_i + \delta_i^2(\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \\ & \dot{\delta}_i^2 + 2\dot{\delta}_i(\dot{x} - \omega y)\cos\phi_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{y} + \omega x)\sin\phi_i] \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن J ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم، M جرم کل، m_d جرم روتور، m_b جرم هر یک از ساچمه‌ها، ω سرعت دورانی روتور و e خروج از مرکزیت روتور است. با صرف‌نظر کردن از انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان به صورت رابطه (۵) بیان کرد. اگر به‌جای μ در رابطه (۵) صفر قرار داده شود، رابطه انرژی پتانسیل ارائه شده در مرجع [۲۱] حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{4}\mu\left(x^4 + y^4\right) + \frac{1}{2}k_r\sum_{i=1}^{n}(\delta_i - a)^2 + \\ & \frac{1}{2}k_p d^2\left[\left(\phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن k سفتی معادل روتور، μx^4 و μy^4 جملات غیرخطی ناشی از یاتاقان‌های غیرخطی، k_d سفتی فنرهای محیطی و k_r سفتی فنرهای شعاعی است. پارامتر a طول آزاد اولیه فنرهای شعاعی و d فاصله مرکز دیسک تا محل قرارگیری فنرهای محیطی است. تابع اتلاف ریلی را می‌توان به‌صورت رابطه (۶) بیان کرد:

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{1}{2}c[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + \omega^2(x^2 + y^2)] + \\ & \frac{1}{2}c_r\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\delta}_i^2 + \delta_i^2\dot{\phi}_i^2\right) \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن c ثابت میرایی معادل روتور و c_r ثابت میرایی لزج اتوبالانسر است. فرض می‌شود که ثابت‌های میرایی لزج برای همه ساچمه‌ها یکسان است. معادلات غیرخطی حرکت روتور مجهز به اتوبالانسر جدید با استفاده از معادلات لاگرانژ به‌صورت روابط (۷) تا (۱۱) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & M\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k - M\omega^2\right)x + \mu x^3 + \\ & m_b\sum_{i=1}^{n}[(\ddot{\delta}_i - \delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2)\cos\phi_i - \\ & (\delta_i\ddot{\phi}_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega))\sin\phi_i] - \\ & m_d e\omega^2 - 2M\omega\dot{y} - c\omega y = 0 \end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned} & M\ddot{y} + c\dot{y} + \left(k - M\omega^2\right)y + \mu y^3 + \\ & m_b\sum_{i=1}^{n}[(\ddot{\delta}_i - \delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2)\sin\phi_i + \\ & (\delta_i\ddot{\phi}_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega))\cos\phi_i] + \\ & 2M\omega\dot{x} + c\omega x = 0 \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} & m_b\delta_i[(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\phi_i - \\ & (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\phi_i + \delta_i\ddot{\phi}_i + \\ & 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)] + c_r\delta_i^2\dot{\phi}_i + k_p d^2 q_i(\phi_i) = 0 \end{aligned} \tag{۹}$$

که

$$\begin{aligned} & q_1(\phi) = \left(\phi_1 - \phi_2 - \frac{2\pi}{n}\right) \\ & q_i(\phi) = \left(2\phi_i - \phi_{i-1} - \phi_{i+1}\right) \\ & q_n(\phi) = \left(\phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n}\right) \\ & i = 2, 3, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned} & m_b[(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\phi_i + \\ & (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\phi_i \\ & -\delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \ddot{\delta}_i] + \\ & c_r\dot{\delta}_i + k_r(\delta_i - a) = 0 \end{aligned} \tag{۱۱}$$

صحت روابط اخیر با قرار دادن $\delta_i = R$، $\dot{\delta}_i = 0$، $\mu = 0$ و $k_r = k_d = 0$ در روابط (۷) تا (۱۱)، که به روابط موجود در مراجع [۱۱ و ۱۲] منجر می‌شود تائید می‌شود. به‌منظور به‌دست آوردن نتایج عمومی‌تر، مختصه‌ها و پارامترهای بی‌بعد به‌صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شوند:

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.3.1]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.7131]

$$\tau=\omega_n t,\ \bar{x}=\frac{x}{\lambda},\bar{y}=\frac{y}{\lambda},\ \bar{\delta}_i=\frac{\delta_i}{\lambda},$$
$$\bar{e}=\frac{e}{\lambda},f=\frac{\omega_b}{\omega_n},\bar{m}=\frac{m_b}{M},\ \bar{\omega}=\frac{\omega}{\omega_n}$$
$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{Mk}},\ \beta=\frac{c_r}{2m_b\omega_n},$$
$$\eta=\frac{k_p d^2}{m_b\lambda^2\omega_n^2},\rho=\frac{\lambda^2\mu}{M\omega_n^2},\ r=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2} \tag{۱۲}$$

که در آن ω_n فرکانس طبیعی روتور، ζ بیانگر نسبت میرایی سیستم، β نشان‌دهنده نسبت میرایی بالانسر، $\bar{\delta}$ جابه‌جایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی و λ طول تعادل فنرهای شعاعی است. همچنین ω_b فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی و ρ ضریب بی‌بعد معرف اثر غیرخطی یاتاقان‌ها است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده به‌صورت روابط (۱۳) تا (۱۶) به‌دست می‌آیند:

$$\ddot{\bar{x}}+2\zeta\dot{\bar{x}}+\left(1-\bar{\omega}^2\right)\bar{x}+\rho\bar{x}^3+$$
$$\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\ddot{\bar{\delta}}_i-\bar{\delta}_i\left(\dot{\phi}_i+\bar{\omega}\right)^2\right)\cos\phi_i-\\ \left(\bar{\delta}_i\ddot{\phi}_i+2\dot{\bar{\delta}}_i\left(\dot{\phi}_i+\bar{\omega}\right)\right)\sin\phi_i\end{array}\right]-$$
$$\left(1-\bar{m}\right)\bar{e}\ \bar{\omega}^2-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}-2\zeta\bar{\omega}\bar{y}=0 \tag{۱۳}$$

$$\ddot{\bar{y}}+2\zeta\dot{\bar{y}}+\left(1-\bar{\omega}^2\right)\bar{y}+\rho\bar{y}^3+$$
$$\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\ddot{\bar{\delta}}_i-\bar{\delta}_i\left(\dot{\phi}_i+\bar{\omega}\right)^2\right)\sin\phi_i+\\ \left(\bar{\delta}_i\ddot{\phi}_i+2\dot{\bar{\delta}}_i\left(\dot{\phi}_i+\bar{\omega}\right)\right)\cos\phi_i\end{array}\right]+$$
$$2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}+2\zeta\bar{\omega}\bar{x}=0 \tag{۱۴}$$

$$\bar{m}\bar{\delta}_i[(\ddot{\bar{y}}+2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}-\bar{\omega}^2\bar{y})\cos\phi_i+$$
$$(\ddot{\bar{x}}-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}-\bar{\omega}^2\bar{x})\sin\phi_i+$$
$$\bar{\delta}_i\ddot{\phi}_i+2\dot{\bar{\delta}}_i(\dot{\phi}_i+\bar{\omega})]+$$
$$2\bar{m}\beta\bar{\delta}_i^2\dot{\phi}_i+\eta\bar{m}q_i(\phi_i)=0 \tag{۱۵}$$

$$\bar{m}[(\ddot{\bar{y}}+2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}-\bar{\omega}^2\bar{y})\sin\phi_i+$$
$$(\ddot{\bar{x}}-2\bar{\omega}\dot{\bar{y}}-\bar{\omega}^2\bar{x})\cos\phi_i-$$
$$\bar{\delta}_i\dot{\phi}_i^2-2\bar{\omega}\bar{\delta}_i\dot{\phi}_i+\ddot{\bar{\delta}}_i]+$$
$$2\bar{m}\beta\dot{\bar{\delta}}_i+\bar{m}(\bar{\delta}_i-1)(f^2-\bar{\omega}^2)=0 \tag{۱۶}$$

۳- اعمال روش مقیاس‌های چندگانه

در پژوهش‌های پیشین از روش عددی برای بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر استفاده شده است. در مقاله حاضر با توجه به مزیت‌های روش‌های نیمه‌تحلیلی از روش مقیاس‌های چندگانه برای بررسی استخراج پاسخ دینامیکی اتوبالانسر مذکور استفاده شده است.

۳-۱- بررسی پایداری

با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به صورت رابطه (۱۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{x}(\tau;\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1(T_0,T_1,...)+\varepsilon^2x_2(T_0,T_1,...)+...$$
$$\bar{y}(\tau;\varepsilon)=y_0+\varepsilon y_1(T_0,T_1,...)+\varepsilon^2y_2(T_0,T_1,...)+...$$
$$\phi_i(\tau;\varepsilon)=\phi_{i0}+\varepsilon\phi_{i1}(T_0,T_1,...)+\varepsilon^2\phi_{i2}(T_0,T_1,...)+...$$
$$\bar{\delta}_i(\tau;\varepsilon)=\delta_{i0}+\varepsilon\delta_{i1}(T_0,T_1,...)+\varepsilon^2\delta_{i2}(T_0,T_1,...)+... \tag{۱۷}$$

که در آن مقیاس‌های زمانی به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$T_l=\varepsilon^l\tau,\qquad l=0,1,2,... \tag{۱۸}$$

مشتقات اول و دوم زمانی به شکل بی‌بعد عبارت است از:

$$\frac{d}{d\tau}=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2D_2+o\left(\varepsilon^3\right)$$
$$\frac{d^2}{d\tau^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2\left(D_1^2+2D_0D_2\right)+o\left(\varepsilon^3\right) \tag{۱۹}$$

که در آن

$$D_n=\frac{\partial}{\partial T_n},\qquad n=0,1,2,... \tag{۲۰}$$

برای بررسی پایداری با در نظر گرفتن دو جمله از روابط (۱۷) و جایگذاری آنها در روابط (۱۳) تا (۱۶)، و از برابر قرار دادن ضرایب جملات هم‌درجه از ε، دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های ε به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه ε طبق روابط (۲۱) تا (۲۴) هستند:

$$\left(1-\bar{\omega}^2\right)x_0-2\zeta\bar{\omega}y_0-\left(1-\bar{m}\right)\bar{e}\bar{\omega}^2-\bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right)=0 \tag{۲۱}$$

$$\left(1-\bar{\omega}^2\right)y_0-\bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\sin\phi_{i0}\right)+2\zeta\bar{\omega}x_0=0 \tag{۲۲}$$

$$\bar{\omega}^2\bar{m}\delta_{i0}\left(x_0\sin\phi_{i0}-y_0\cos\phi_{i0}\right)=0\quad i=1,2,\ldots,n \tag{۲۳}$$

$$\bar{m}\left[\left(f^2-\bar{\omega}^2\right)\left(\delta_{i0}-1\right)-\bar{\omega}^2\left(x_0\cos\phi_{i0}+y_0\sin\phi_{i0}\right)\right]=0$$
$$i=1,2,\ldots,n \tag{۲۴}$$

در روابط (۲۱) تا (۲۴) نقاط x_0، y_0، ϕ_{i0} و δ_{i0} نشان‌دهنده نقطه تعادل سیستم بوده و مقدار آنها ثابت و مشتق آنها برابر صفر است. معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه ε^1 مطابق روابط (۲۵) تا (۲۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&D_0^2 x_1 + 2\zeta D_0 x_1 + \left(1-\bar{\omega}^2+3\rho x_0^2\right) x_1 - 2\bar{\omega} D_0 y_1 - \\ &2\zeta\bar{\omega} y_1 + \bar{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[\left(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\right)\cos\phi_{i0} \\ &\quad + \left(\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} - \delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1}\right)\sin\phi_{i0}\Big] = 0\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}&D_0^2 y_1 + 2\zeta D_0 y_1 + \left(1-\bar{\omega}^2+3\rho y_0^2\right) y_1 + 2\bar{\omega} D_0 x_1 + \\ &2\zeta\bar{\omega} x_1 + \bar{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[\left(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\right)\sin\phi_{i0} \\ &\quad + \left(\delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - \delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1}\right)\cos\phi_{i0}\Big] = 0\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}&\bar{m}[(\delta_{i0}D_0^2 y_1 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 x_1 - \delta_{i0}\bar{\omega}^2 y_1 + \\ &\bar{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i1} - \delta_{i1}\bar{\omega}^2 y_0\phi_{i1})\cos\phi_{i0} + \\ &(2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0 y_1 - \delta_{i0}D_0^2 x_1 + \delta_{i0}\bar{\omega}^2 x_1 + \\ &\bar{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i1} + \delta_{i1}\bar{\omega}^2 x_0)\sin\phi_{i0} + \\ &\delta_{i0}^2 D_0^2\phi_{i1}] + 2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_0\phi_{i1} + \\ &2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\delta_{i1} + \eta\bar{m}q_i\left(\phi_i\right) = 0, \qquad i = 1,\dots,n\end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned}&\bar{m}[(D_0^2 x_1 - \bar{\omega}^2\phi_{i1}y_0 - \bar{\omega}^2 x_1 - 2\bar{\omega}D_0 y_1)\cos\phi_{i0} + \\ &(D_0^2 y_1 + \bar{\omega}^2\phi_{i1}x_0 - \bar{\omega}^2 y_1 + 2\bar{\omega}D_0 x_1)\sin\phi_{i0}] + \\ &+2\beta\bar{m}D_0\delta_{i1} + \bar{m}D_0^2\delta_{i1} - \\ &2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i1} + \bar{m}\bar{\delta}_{i1}\left(f^2 - \bar{\omega}^2\right) = 0, \qquad i = 1,\dots,n\end{aligned} \tag{۲۸}$$

پس از استخراج جملات هم‌مرتبه از ε، برای به‌دست آوردن نقاط تعادل سیستم، با تبدیل x_0 و y_0 به صورت قطبی $x_0 = r_0\cos\theta_0$ و $y_0 = r_0\sin\theta_0$ که r_0 نشان‌دهنده دامنه ارتعاشات روتور در حالت پایا است، و با جایگذاری آنها در روابط (۲۱) تا (۲۴)، روابط (۲۹) تا (۳۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\left(1-\bar{\omega}^2\right) r_0\cos\theta_0 - 2\zeta\bar{\omega} r_0\sin\theta_0 - \\ &\left(1-\bar{m}\right)\bar{e}\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right) = 0\end{aligned} \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned}&\left(1-\bar{\omega}^2\right) r_0\sin\theta_0 + 2\zeta\bar{\omega} r_0\cos\theta_0 - \\ &\bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\sin\phi_{i0}\right) = 0\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\bar{\omega}^2\bar{m}\delta_{i0}r_0\sin\left(\phi_{i0}-\theta_0\right) = 0 \tag{۳۱}$$

$$\bar{m}\Big[\left(f^2-\bar{\omega}^2\right)\left(\delta_{i0}-1\right) - \bar{\omega}^2 r_0\cos\left(\phi_{i0}-\theta_0\right)\Big] = 0 \tag{۳۲}$$

براساس معادلات به‌دست آمده از روابط (۲۹) تا (۳۲) می‌توان وضعیت‌های تعادل سیستم را برای دو مقدار $r_0 = 0$ و $r_0 \neq 0$ استخراج کرد. با توجه به اهمیت حالت بالانس، در اینجا فقط وضعیت بالانس، $r_0 = 0$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت بالانس، روابط (۲۹) تا (۳۲) سه رابطه (۳۳) تا (۳۵) حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{i0}\cos\phi_{i0}\right) + \frac{\left(1-\bar{m}\right)\bar{e}}{\bar{m}} = 0 \tag{۳۳}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\phi_{i0} = 0 \tag{۳۴}$$

$$\delta_{i0} = 1 \tag{۴۵}$$

با در نظر گرفتن دو ساچمه و با توجه به همگن بودن معادلات (۲۵) تا (۲۸)، پاسخ به صورت نمایی و مطابق روابط (۳۶) در نظر گرفته می‌شود:

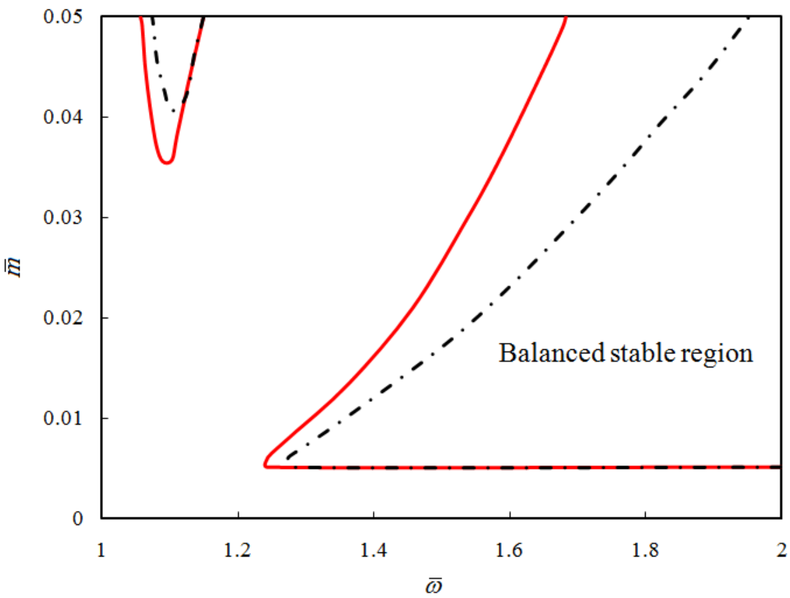
$$\begin{aligned}&x_1 = c_1 e^{\lambda T_0} && y_1 = c_2 e^{\lambda T_0} \\ &\phi_{11} = c_3 e^{\lambda T_0} && \phi_{21} = c_4 e^{\lambda T_0} \\ &\delta_{11} = c_5 e^{\lambda T_0} && \delta_{21} = c_6 e^{\lambda T_0}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

که با جایگذاری در معادلات داریم:

$$\left[A\right]_{6\times 6}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\end{Bmatrix} = 0 \tag{۳۷}$$

که در آن [A] ماتریس مربعی است که جهت رعایت اختصار، از آوردن آن خودداری شده است. شرط وجود جواب غیربدیهی برای c_i ها در دستگاه معادلات (۳۷)، صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب است. به این ترتیب، ۱۲ جواب برای λ به‌دست می‌آید. هنگامی که همه λ ها دارای قسمت حقیقی منفی باشند سیستم به صورت مجانبی پایدار است. اگر حداقل یکی

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.3.1]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.7131]



شکل ۲- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر(▬▬) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول(‒ · ‒): تغییرات $\bar{m}$ در مقابل $\bar{\omega}$ به‌ازای $\zeta = ۰/۰۵$، $\beta = ۰/۰۵$، $\bar{e} = ۰/۰۱$ و $f = ۴$

از λ ها دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است. پس با استفاده از ماتریس [A] ناحیه بالانس پایدار برای سیستم قابل استخراج است. با توجه به اینکه نواحی پایدار برحسب تمامی پارامترها را نمی‌توان در یک نمودار واحد نشان داد لذا نواحی پایدار برای دو به دوی پارامتر رسم می‌شود.

در شکل (۲) نواحی پایدار روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای $\zeta = ۰/۰۵$، $\beta = ۰/۰۵$، $\bar{e} = ۰/۰۱$ و $f = ۴$ برحسب پارامترهای $\bar{m}$ و $\bar{\omega}$ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر است روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرخطی را بالانس کند. همچنین برای بررسی مزیت این نوع اتوبالانسر، ناحیه پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر متداول به‌ازای شرایط یکسان در شکل (۲) نیز آورده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است.

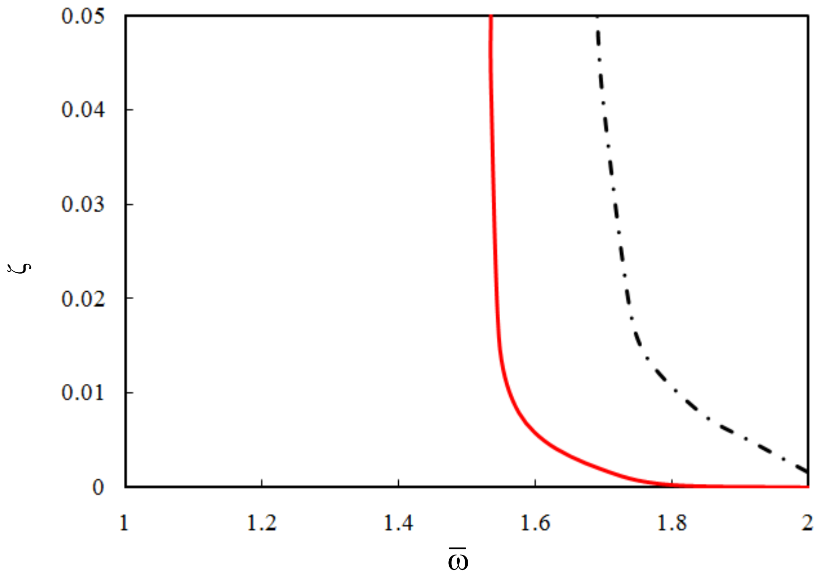
در شکل‌های (۳) تا (۵) نواحی پایدار به‌ازای تغییر پارامترهای ζ ، $\bar{e}$ و β برحسب $\bar{\omega}$ آورده شده است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشاهده می‌شود محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مزیت اول ادعائی برای اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی بیشتر بودن ناحیه بالانس پایدار، با یاتاقان‌های خطی در مورد روتور با یاتاقاهای غیرخطی نیز برقرار است.

۳-۲- استخراج پاسخ ارتعاشی روتور

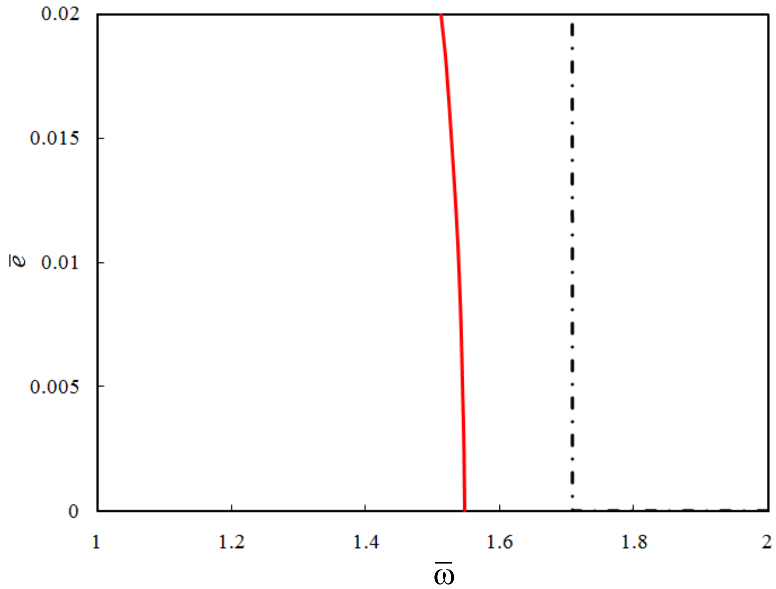
در این بخش پاسخ ارتعاشی روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌ها چندگانه استخراج می‌شود. بدین منظور پاسخ معادلات غیرخطی به این صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\tau;\varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0,T_1,\ldots) + \varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,\ldots) + O(\varepsilon^3)\\
\bar{y}(\tau;\varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0,T_1,\ldots) + \varepsilon^2 y_2(T_0,T_1,\ldots) + O(\varepsilon^3)\\
\phi_i(\tau;\varepsilon) &= \phi_{i0} + \varepsilon \phi_{i1}(T_0,T_1,\ldots) + \varepsilon^2 \phi_{i2}(T_0,T_1,\ldots) + O(\varepsilon^3)\\
\bar{\delta}_i(\tau;\varepsilon) &= \delta_{i0} + \varepsilon \delta_{i1}(T_0,T_1,\ldots) + \varepsilon^2 \delta_{i2}(T_0,T_1,\ldots) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

(۳۸)

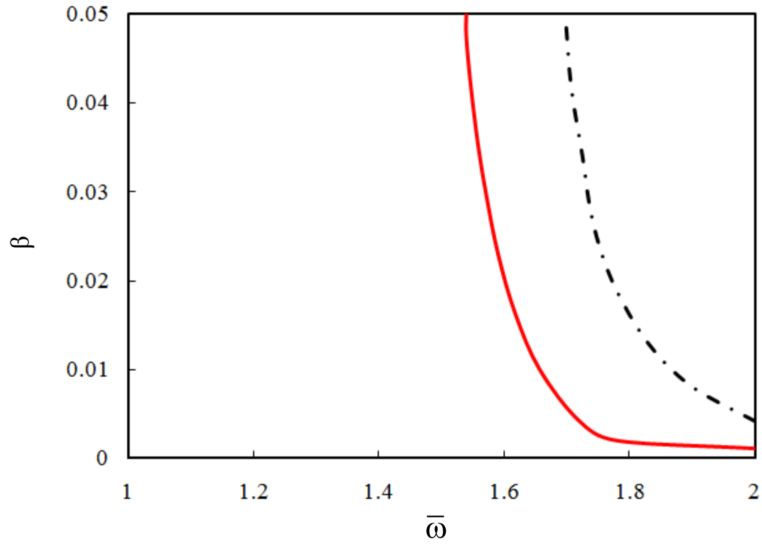


شکل ۳- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر(▬▬) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول(▬ ▪ ▬): تغییرات ζ در مقابل $\bar{\omega}$ به‌ازای $\bar{m}=$ ۰/۰۳، $\beta=$ ۰/۰۵، $\bar{e}=$ ۰/۰۱ و $f=$ ۴



شکل ۴- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر(▬▬) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول(▬ ▪ ▬): تغییرات $\bar{e}$ در مقابل $\bar{\omega}$ به ازای $\bar{m}=$ ۰/۰۳، $\beta=$ ۰/۰۵، $\zeta=$ ۰/۰۵ و $f=$ ۴

مطابق بخش قبل با جایگذاری روابط (۳۸) در معادلات غیرخطی سیستم، معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های مختلف ε به‌دست می‌آید. معادلات دیفرانسیل مربوط به ε^0 و ε^1 به‌ترتیب مطابق روابط (۲۱) تا (۲۴) و (۲۵) تا (۲۸) هستند و معادلات مربوط به مرتبه ε^2 مطابق روابط (۳۹) تا (۴۲) است:



شکل ۵- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر (▬) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (- ۰ -): تغییرات β در مقابل $\overline{\omega}$ به ازای $\overline{\mathbf{m}}=0/03$، $\zeta=0/05$، $\overline{\mathbf{e}}=0/01$ و $\mathbf{f}=4$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2x_2+2\zeta D_0x_2+\left(1-\overline{\omega}^2+3\rho x_0^2\right)x_2-2\overline{\omega}D_0y_2-\\
&2\zeta\overline{\omega}y_2+\overline{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[\left(D_0^2\delta_{i2}-2\delta_{i0}\overline{\omega}D_0\phi_{i2}-\overline{\omega}^2\delta_{i2}\right)\\
&\times\cos\phi_{i0}+\left(\delta_{i0}\overline{\omega}^2\phi_{i2}-\delta_{i0}D_0^2\phi_{i2}-2\overline{\omega}D_0\delta_{i2}\right)\sin\phi_{i0}\Big]+\\
&\overline{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[(2D_0D_1\delta_{i1}-\delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2\phi_{i1}\\
&\quad-2\delta_{i1}\overline{\omega}D_0\phi_{i1}-2\overline{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1}-\\
&\quad\delta_{i0}\left(D_0\phi_{i1}\right)^2-2\phi_{i1}\overline{\omega}D_0\delta_{i1})\cos\phi_{i0}+\\
&\quad(\overline{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1}-\phi_{i1}D_0^2\delta_{i1}-\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1}-2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1}-\\
&\quad 2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1}-2\overline{\omega}D_0\delta_{i1}+2\delta_{i0}\phi_{i1}\overline{\omega}D_0\phi_{i1})\sin\phi_{i0}\Big]+\\
&\quad 2D_0D_1x_1+2\zeta D_1x_1-2\overline{\omega}D_1y_1+3\rho x_0x_1^2=0
\end{aligned}
$$

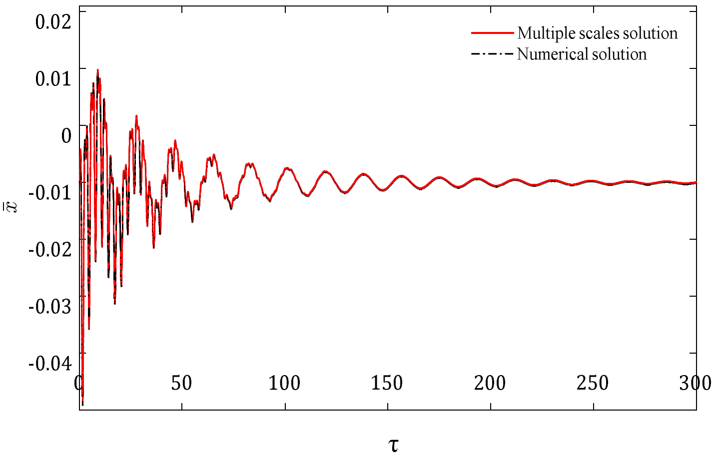
(۳۹)

$$
\begin{aligned}
&D_0^2y_2+2\zeta D_0y_2+\left(1-\overline{\omega}^2+3\rho y_0^2\right)y_2+\\
&2\overline{\omega}D_0x_2+2\zeta\overline{\omega}x_2+\\
&\overline{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[\left(D_0^2\delta_{i2}-2\delta_{i0}\overline{\omega}D_0\phi_{i2}-\overline{\omega}^2\delta_{i2}\right)\\
&\times\sin\phi_{i0}+\left(\delta_{i0}\overline{\omega}^2\phi_{i2}+\delta_{i0}D_0^2\phi_{i2}+2\overline{\omega}D_0\delta_{i2}\right)\cos\phi_{i0}\Big]+\\
&\overline{m}\sum_{i=1}^{2}\Big[(2D_0D_1\delta_{i1}-\delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2\phi_{i1}-2\delta_{i1}\overline{\omega}D_0\phi_{i1}\\
&\quad-2\overline{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1}-\delta_{i0}\left(D_0\phi_{i1}\right)^2-2\phi_{i1}\overline{\omega}D_0\delta_{i1})\sin\phi_{i0}+\\
&\quad(\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1}-\overline{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1}+\phi_{i1}D_0^2\delta_{i1}+2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1}\\
&\quad+2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1}+2\overline{\omega}D_0\delta_{i1}-2\delta_{i0}\phi_{i1}\overline{\omega}D_0\phi_{i1})\cos\phi_{i0}\Big]+\\
&\quad 2D_0D_1y_1+2\zeta D_1y_1+2\overline{\omega}D_1x_1+3\rho y_0y_1^2=0
\end{aligned}
$$

(۴۰)

$$
\begin{aligned}
&\overline{m}\Big[\Big(\delta_{i0}D_0^2y_2+2\delta_{i0}\overline{\omega}D_0x_2-\delta_{i0}\,\overline{\omega}^2y_2-\\
&\quad\overline{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i2}-\delta_{i2}\overline{\omega}^2y_0\Big)\cos\phi_{i0}+\\
&\quad(2\delta_{i0}\overline{\omega}D_0y_2-\delta_{i0}D_0^2x_2+\delta_{i0}\overline{\omega}^2x_2+\\
&\quad\overline{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i2}+\delta_{i2}\overline{\omega}^2x_0)\sin\phi_{i0}+\delta_{i0}^2D_0^2\phi_{i2}\Big]+\\
&2\beta\delta_{i0}^2\overline{m}D_0\phi_{i2}+2\delta_{i0}\overline{\omega}\overline{m}D_0\delta_{i2}+\\
&\overline{m}[(\delta_{i1}D_0^2y_1+2\delta_{i0}\overline{\omega}D_1x_1-\delta_{i1}\overline{\omega}^2y_1+\\
&\quad\overline{\omega}^2x_0\delta_{i1}\phi_{i1}+\overline{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}x_1+2\delta_{i0}\phi_{i1}\overline{\omega}D_0y_1-\\
&\quad\phi_{i1}\delta_{i0}D_0^2x_1+2\delta_{i1}\overline{\omega}D_0x_1+2\delta_{i0}D_0D_1y_1)\cos\phi_{i0}-\\
&\quad(\delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2y_1-\overline{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}y_1-2\delta_{i1}\overline{\omega}D_0y_1+\delta_{i1}D_0^2x_1-\\
&\quad\overline{\omega}^2y_0\delta_{i1}\phi_{i1}+2\overline{\omega}\phi_{i1}\delta_{i0}D_0x_1-\overline{\omega}^2\delta_{i1}x_1-\\
&\quad 2\delta_{i0}\overline{\omega}D_1y_1+2\delta_{i0}D_0D_1x_1)\sin\phi_{i0}+2\delta_{i0}\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1}]+\\
&\eta\overline{m}q_i\left(\phi_i\right)+2\overline{m}\delta_{i0}^2D_0D_1\phi_{i1}+4\beta\delta_{i0}\delta_{i1}\overline{m}D_0\phi_{i1}+\\
&2\beta\delta_{i0}^2\overline{m}D_1\phi_{i1}+2\delta_{i0}\overline{\omega}\overline{m}D_1\delta_{i1}+\\
&2\overline{m}\delta_{i0}D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1}+2\overline{m}\overline{\omega}\delta_{i1}D_0\delta_{i1}=0,\qquad i=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

(۴۱)



شکل ۶- پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای پارامترهای $\bar{m}=0/03$، $\beta=0/05$، $\zeta=0/05$، $\bar{\omega}=3$، $\rho=0/2$، $\mu=0/005$، $\bar{e}=0/01$ و $f=4$

$$
\begin{aligned}
&\bar{m}[(D_0^2x_2+\bar{\omega}^2y_0\phi_{i2}-\bar{\omega}^2x_2-2\bar{\omega}D_0y_2)\cos\phi_{i0}+\\
&\quad(\bar{\omega}^2x_0\phi_{i2}-\bar{\omega}^2y_2+2\bar{\omega}D_0x_2+D_0^2y_2)\sin\phi_{i0}]+\\
&2\beta\bar{m}D_0\delta_{i2}-2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i2}+\bar{m}\bar{\delta}_{i2}(f^2-\bar{\omega}^2)+\\
&\bar{m}D_0^2\delta_{i2}+\bar{m}[(2D_0D_1x_1-\bar{\omega}^2\phi_{i1}y_1+\phi_{i1}D_0^2y_1+\\
&\qquad 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0x_1-2\bar{\omega}D_1y_1)\cos\phi_{i0}+\\
&\qquad(2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0y_1+\bar{\omega}^2\phi_{i1}x_1+2D_0D_1y_1-\\
&\qquad\phi_{i1}D_0^2x_1+2\bar{\omega}D_1x_1)\sin\phi_{i0}]+\\
&2\beta\bar{m}D_1\delta_{i1}+2\bar{m}D_0D_1\delta_{i1}-2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_1\phi_{i1}-\\
&2\bar{m}\bar{\omega}\delta_{i1}D_0\phi_{i1}-\bar{m}\delta_{i0}(D_0\phi_{i1})^2=0,\qquad i=1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{۴۲}
$$

پاسخ زمانی سیستم روتور و اتوبالانسر با دو ساچمه به صورت رابطه (۴۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&x_1=C_1(T_1)c_{1j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&y_1=C_2(T_1)c_{2j}e^{\lambda_j T_0}+cc\\
&\phi_{11}=C_3(T_1)c_{3j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&\phi_{21}=C_4(T_1)c_{4j}e^{\lambda_j T_0}+cc\\
&\delta_{11}=C_5(T_1)c_{5j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&\delta_{21}=C_6(T_1)c_{6j}e^{\lambda_j T_0}+cc
\end{aligned}
\tag{۴۳}
$$

که در آن $j=1,2,\dots,6$، λ_j و c_{ij} به‌ترتیب مقادیر و المان‌های بردارهای ویژه سیستم است که از ماتریس **A** به دست آمده‌اند. برای استخراج پاسخ سیستم لازم است $C_i(T_1)$ها استخراج شوند. جمله دوم پاسخ به صورت رابطه (۴۴) فرض می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&x_2=b_{1j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&y_2=b_{2j}e^{\lambda_j T_0}+cc\\
&\phi_{12}=b_{3j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&\phi_{22}=b_{4j}e^{\lambda_j T_0}+cc\\
&\delta_{12}=b_{5j}e^{\lambda_j T_0}+cc &&\delta_{22}=b_{6j}e^{\lambda_j T_0}+cc
\end{aligned}
\tag{۴۴}
$$

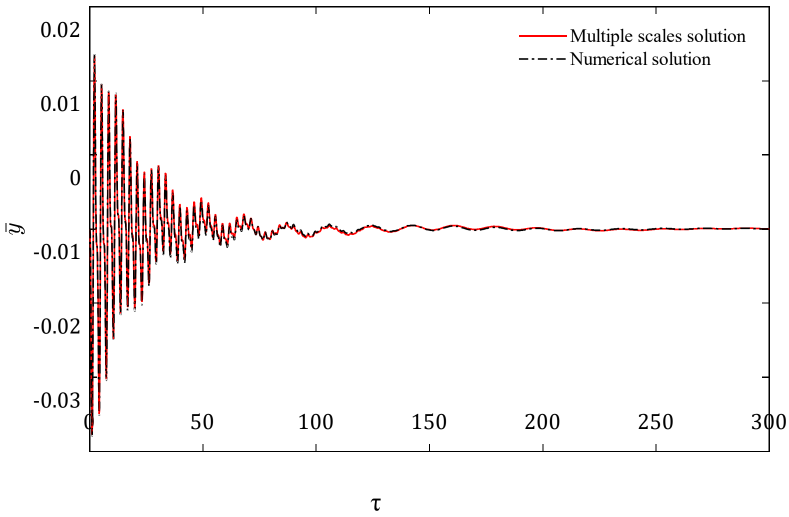
با جایگذاری معادلات (۴۳) و (۴۴) در معادلات مربوط به ضرایب ε^2 و انجام عملیات مفصل ریاضی مشخص می‌شود که $\frac{dC_i(T_1)}{dT_1}=0$. پس برای به‌دست آوردن جواب نهایی لازم است ثابت C_i با اعمال شرایط اولیه محاسبه شود. بدین منظور با در نظر گرفتن دو جمله اول از روابط (۳۸) و در $t=0$ داریم:

$$\varepsilon\mathbf{C}=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}(0)-\mathbf{X}_0)\tag{۴۵}$$

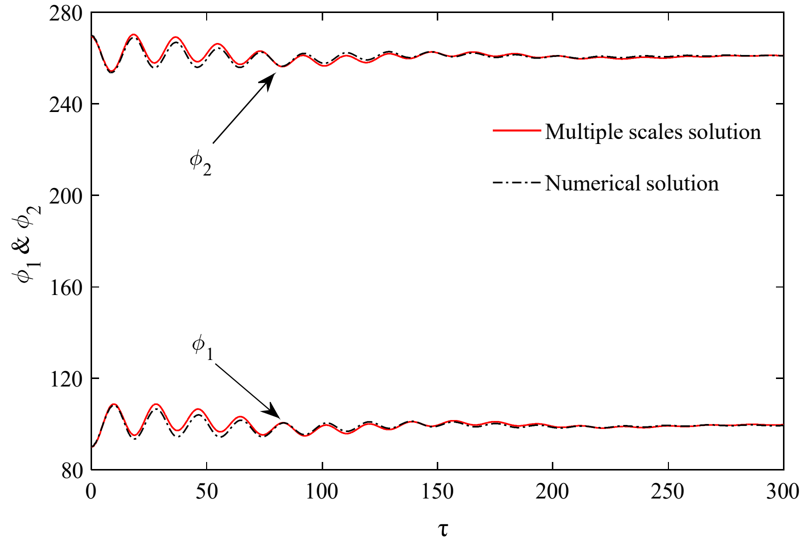
که در آن **B** ماتریسی بر حسب λ_i و c_{ij} است که چنین محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}\\ \mathbf{N}\end{bmatrix}\tag{۴۶}$$

که $M_{ij}=c_{ij}$ و $N_{ij}=\lambda_i c_{ij}$ است. بدین ترتیب ثوابت C_i به‌دست می‌آیند، و درنهایت پاسخ سیستم استخراج می‌شود. با استفاده از روش توضیح داده شده در این بخش پاسخ ارتعاشی سیستم با در نظر گرفتن یک جمله از تقریب در روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمد. به‌منظور اطمینان از دقت روش حل نیمه تحلیلی و برای سنجش درستی نتایج، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به روش رانگ- کوتا نیز استخراج شد. شکل‌های (۶) و (۷) به ترتیب مؤلفه‌های x و y



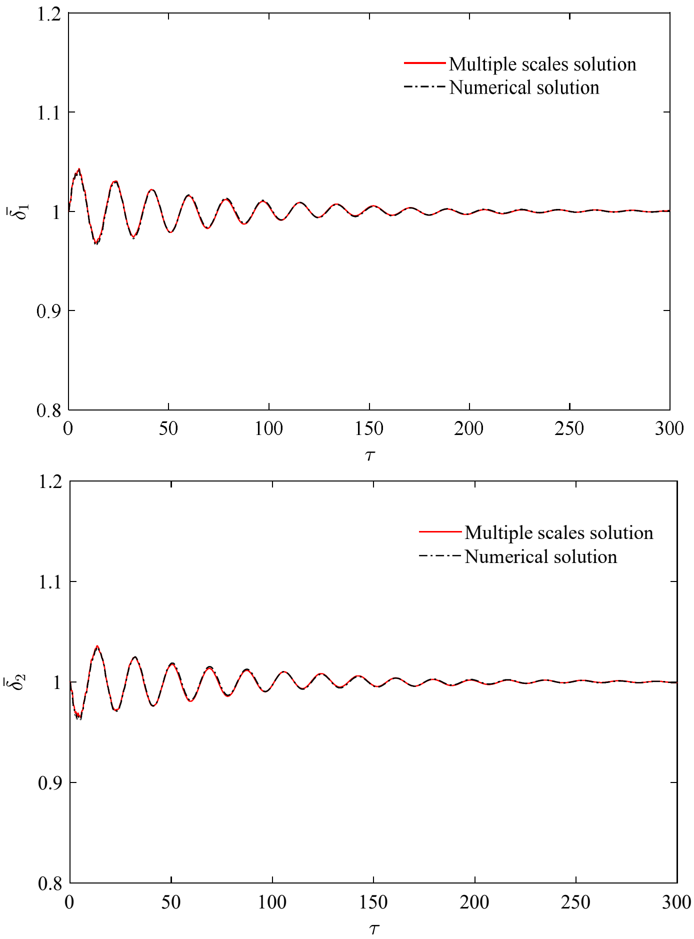
شکل ۷- پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای پارامترهای $\bar{m}=۰/۰۳$، $\beta=۰/۰۵$، $\zeta=۰/۰۵$، $\bar{\omega}=۳$، $\rho=۰/۲$، $\mu=۰/۰۰۵$، $\bar{e}=۰/۰۱$ و $f=۴$



شکل ۸- پاسخ زمانی موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای پارامترهای $\bar{m}=۰/۰۳$، $\beta=۰/۰۵$، $\zeta=۰/۰۵$، $\bar{m}=۰/۰۳$ $\bar{\omega}=۳$، $\rho=۰/۲$، $\mu=۰/۰۰۵$، $\bar{e}=۰/۰۱$ و $f=۴$

پاسخ زمانی روتور و شکل‌های (۸) و (۹) به ترتیب پاسخ زمانی موقعیت زاویه‌ای و شعاعی ساچمه‌ها را به‌ازای پارامترهای $\bar{m}=۰/۰۳$، $\beta=۰/۰۵$، $\zeta=۰/۰۵$، $\bar{\omega}=۳$، $\rho=۰/۲$، $\mu=۰/۰۰۵$، $\bar{e}=۰/۰۱$ و $f=۴$ نشان می‌دهند. همان‌طور از این شکل‌ها مشاهده می‌شود، پاسخ به‌دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه انطباق مناسبی با پاسخ به‌دست آمده از روش رانگ کوتا دارد.

بعد از اطمینان از نتایج حاصل از روش مقیاس‌های چندگانه در شکل (۱۰) پاسخ زمانی روتور در دو حالت به‌دست آمد: الف) روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر و ب) روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول. همان‌طور که از شکل (۸) مشاهده می‌شود



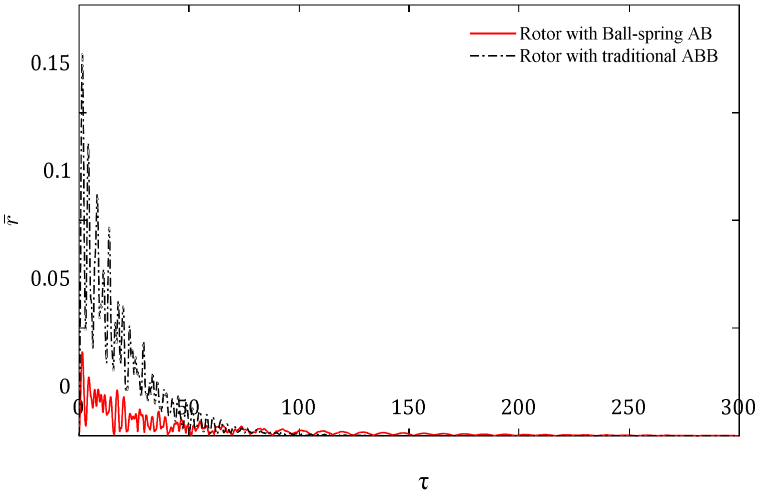
شکل ۹- پاسخ زمانی موقعیت شعاعی ساچمه‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای پارامترهای $\bar{\mathbf{m}}=$ ۰/۰۳، $\beta=$ ۰/۰۵، $\zeta=$ ۰/۰۵، $\bar{\omega}=$ ۳، $\rho=$ ۰/۲، $\mu=$ ۰/۰۰۵، $\bar{\mathbf{e}}=$ ۰/۰۱ و $\mathbf{f}=$ ۴

پاسخ ارتعاشی در سیستم مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناحیه گذرا نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول کاهش یافته است، یعنی یاتاقان‌های غیرخطی خللی بر دومین مزیت اتوبالانسر یعنی کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا وارد نمی‌کند.

دلیل مزیت اول یعنی وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای شعاعی است. در اتوبالانسر نوع جدید برخلاف نوع متداول که ساچمه‌ها مقید به حرکت در مسیر دایره‌ای شکل هستند، ساچمه‌ها به‌دلیل متصل بودن به فنرهای شعاعی آزادی عمل بیشتری داشته که سبب افزایش ناحیه بالانس پایدار سیستم می‌شود. مزیت دوم اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای محیطی است. به‌طوری که در ناحیه گذرا وجود این فنرها سبب جلوگیری از همگرایی ساچمه‌ها به طرف نابالانسی شده و مانع افزایش دامنه سیستم در ناحیه گذرا می‌شوند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر مورد بررسی قرار گرفت. معادلات غیرخطی سیستم با استفاده از روش لاگرانژ استخراج شد. در ادامه با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه ناحیه بالانس پایدار و پاسخ ارتعاشی سیستم استخراج شد. اهم نتایج تحقیق حاضر به این شرح است:



شکل ۱۰- پاسخ زمانی روتور مجهز به بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای به‌ازای پارامترهای

$\bar{m}=۰/۰۳$، $\beta=۰/۰۵$، $\zeta=۰/۰۵$، $\bar{\omega}=۳$، $\rho=۰/۲$، $\mu=۰/۰۰۵$، $\bar{e}=۰/۰۱$ و $f=۴$

۱- اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر است به‌ازای محدوده خاصی از پارامترهای سیستم، روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرخطی را بالانس کند.

۲- مقایسه ناحیه بالانس پایدار روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول حاکی از این است که ناحیه بالانس پایدار سیستم اول نسبت به سیستم دوم به‌ازای شرایط یکسان بیشتر است. این امر سبب می‌شود که اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر به بالانس روتور با محدوده وسیع‌تری از پارامترهای سیستم شود.

۳- مقایسه پاسخ زمانی روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول نشان داد که وجود اثر غیرخطی یاتاقان‌ها در دومین مزیت ادعایی اتوبالانسر ساچمه- فنر که همان کاهش دامنه در ناحیه گذرا است، خللی وارد نمی‌کند.

واژه‌نامه

1. autobalancer
2. balance
3. imbalance
4. orthotropic
5. gyroscopic effect

مراجع

1. Ishida, Y., "Recent Development of The Passive Vibration Control Method", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 29, pp. 2-18, 2012.
2. Kim, W., chung, J., "Performance of Automatic Ball Balancers on Optical Disc Drives", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 216, No. 11, pp. 1071-1080, 2002.
3. Chao, P. C., Sung, C.-K., and Wang, C.-C., "Dynamic Analysis of The Optical Disk Drives Equipped With an Automatic Ball Balancer with Consideration of Torsional Motions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 826-842, 2005.
4. Chao, P. C.-P., Sung, C.-K., and Leu, H.-C., "Effects of Rolling Friction of the balancing balls on the Automatic Ball balancer for Optical Disk Drives", *Journal of Tribology*, Vol. 127, No. 4, pp. 845-856, 2005.
5. Rajalingham, C., and Rakheja, S., "Whirl Suppression In Hand-Held Power Tool Rotors Using Guided Rolling Balancers", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 3, pp. 453-466, 1998.

6. E. L, Thearle, “Automatic Dynamic Balancers”, *Machine Design*, Vol. 22, pp. 119-124, 1950.
7. Alexander, J., “An Automatic Dynamic Balancer", *Proceeding of 2nd Southeastern Conference*, 415-426.
8. Cade, J., “Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms”, *Design News*, Vol. 20, pp. 234-239, 1965.
9. Chung, J., and Ro, D., “Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035-1056, 1999.
10. Chung, J., and Jang, I., “Dynamic Response and Stability Analysis of an Automatic Ball Balancer for a Flexible Rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, pp. 31-43, 2003.
11. Lu, C.- J, Wang, M. –C, Huang, S. H., “Analytical Study of the Stability of a Two-Ball Automatic Balancer", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 3, pp. 884-896, 2009.
12. Lu, C.-J., and Hung, C.-H., “Stability Analysis of a Three-Ball Automatic Balancer”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 130, No. 5, pp. 1-7, 2008.
13. Ehyaei, J., Moghaddam, M. M., “Dynamic Response and Stability Analysis of an Unbalanced Flexible Rotating Shaft Equipped with an Automatic Ball-Balancers”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 321, No. 3, pp. 554-571, 2009.
14. Chan, T., Sung, C., and Chao, P. C., “Non-Linear Suspension of An Automatic Ball Balancer”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 2, pp. 415-424, 2011.
15. Sung, C., Chan, T., Chao, C., and Lu, C., “Influence of External Excitations on Ball Positioning of an Automatic Balancer”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 69, pp. 115-126, 2013.
16. Bykov, B., “Auto-Balancing of a Rotor With an Orthotropic Elastic Shaft”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 77, No. 4, pp. 369-379, 2013.
17. Rezaee, M., and Fathi, R., “The Effect of Damping Ratio and Balls Mass on the Stability of Automatic Ball-Balancer and Determining their Optimum Values”, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 110-118, 2014 (In Farsi).
18. Rezaee, M., and Fathi, R., “Dynamic Analysis of an Automatic Double-race Ball-balancer under the Gyroscopic Effect and Optimization of its Parameters Using the Genetic Algorithm”, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 46, No. 3, pp. 129-137, 2016 (In Farsi).
19. Majewski, T., Szwedowicz, D., and Melo, M. A. M., “Self-Balancing System of the Disk on an Elastic Shaft”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 359, pp. 2-20, 2015.
20. Jung, D., and DeSmidt, H., “Limit-Cycle Analysis of Planar Rotor/Autobalancer System Influenced by Alford's Force”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 138, No. 2, pp. 1-14, 2016.
21. Rezaee, M., and Fathi, R., “Improving the Working Performance of Automatic Ball Balancer by Modifying Its Mechanism”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 358, pp. 375-391, 2015.