

## بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر در روتور با یاتاقان‌های غیرخطی

موسی رضائی\*، میر محمد اتفاق و رضا فتحی  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۳/۱۱)

**چکیده-** اتوبالانسر<sup>۱</sup> دینامیکی ساچمه‌ای علاوه بر مزیت‌های مختلف، دارای دو عیب اساسی یعنی محدود بودن ناحیه بالانس<sup>۲</sup> پایدار و افزایش دامنه روتور در ناحیه گذرا است که سبب محدودیت استفاده از این نوع اتوبالانسر می‌شود. به همین منظور به‌تازگی مدل جدیدی از این اتوبالانسر با نام اتوبالانسر ساچمه- فنر ارائه شده است که تا حد قابل ملاحظه‌ای عیب‌های مذکور را رفع کرده است. با توجه به مزیت اتوبالانسر جدید و برای کاربردی کردن آن لازم است رفتار دینامیکی آن به‌طور دقیق بررسی شود. در مطالعات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های خطی و مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر بررسی شده ولی در عمل ممکن است یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرخطی باشند. لذا در مقاله حاضر به‌منظور بررسی دقیق‌تر، برای اولین بار رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر برای بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرخطی با روش مقیاس‌های چندگانه مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که یاتاقان‌های غیرخطی خللی در مزیت‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر ایجاد نمی‌کند.

واژه‌های کلیدی: اتوبالانسر ساچمه- فنر، یاتاقان‌های غیرخطی، روش مقیاس‌های چندگانه، رفتار دینامیکی.

## Investigating the Dynamics of a Ball-Spring Autobalancer in a Rotor with Non-Linear Bearings

M. Rezaee\*, M. M. Etefaghi and R. Fathi

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

**Abstract:** Although the traditional automatic ball balancer (ABB) has numerous advantages, it has two major deficiencies, i.e., it has a limited balance stable region and it increases the vibration amplitude of the rotor at transient state. These deficiencies limit the applicability of ABBs. In this regard, a new type of ABB called "the Ball-spring autobalancer" has been proposed to resolve the mentioned deficiencies of the traditional ABBs. In order to investigate the capability of the Ball-spring AB in balancing rotors, it is necessary to study its dynamics accurately. The dynamics of a rotor with linear bearing equipped with a Ball-spring AB has been studied previously; however, in real situations, the bearings have nonlinear characteristics. Here, the dynamics of a rotor with nonlinear bearings equipped with a Ball-spring AB is investigated by the multiple scales method for the

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m\_rezaee@tabrizu.ac.ir

first time. The results show that the nonlinearity at the rotor bearings does not impair the advantages of the Ball-spring AB.

**Keywords:** Automatic ball-spring balancer, Nonlinear bearings, Multiple scale method, Dynamic behavior.

## فهرست علائم

نسبت میرایی بالانس	$\beta$	خروج از مرکزی بی بعد	$\bar{e}$
ضریب بی بعد معرف اثر غیرخطی یاتاقانها	$\rho$	ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم، $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	J
فرکانس بی بعد سیستم	$\bar{\omega}$	سفتی فنرهای محیطی، $\text{N}/\text{m}$	$K_p$
فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی، $\text{rad}/\text{s}$	$\omega_b$	سفتی فنرهای شعاعی، $\text{N}/\text{m}$	$K_r$
نسبت میرایی روتور	$\zeta$	جرم روتور، $\text{kg}$	$m_d$
جابه جایی بی بعد ساچمهها در راستای شعاعی	$\bar{\delta}_i$	جرم هر یک از ساچمهها، $\text{kg}$	$m_b$
		جرم بی بعد ساچمهها	$\bar{m}$

## ۱- مقدمه

نابالانسی<sup>۳</sup> یکی از عوامل مخرب و از دلایل اصلی ارتعاشات ناخواسته در سیستمهای دوار است. با توجه به اینکه سیستمهای دوار یکی از پرکاربردترین تجهیزات مورد استفاده در صنایع مختلف از جمله نیروگاهها، صنایع هوافضا، ماشینابزارها، ماشینهای لباسشویی و ... است، بنابراین رفع نابالانسی در این سیستمها حائز اهمیت است. نابالانسی وقتی اتفاق می افتد که محورهای اینرسی اصلی روتور منطبق بر محور دوران آن نباشد. در روش معمول، عملیات بالانس سیستم پس از متوقف کردن دستگاه و وزنه گذاری یا برداشتن جرم از صفحاتی خاص که جهت انجام این کار روی روتور تعبیه شده اند انجام می پذیرد. ولی اگر نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند دیگر با یکبار بالانس کردن، مشکل حل نمی شود. در چنین شرایطی، استفاده از اتوبالانسر ساچمه ای دینامیکی که زیر مجموعه ای از روشهای بالانس غیرفعال است، توصیه می شود [۱]. اتوبالانسر ساچمه ای از یک دیسک دوار شیاردار پر شده از مایع لزج تشکیل یافته است که در داخل آن ساچمه هایی قرار دارند. تحت شرایطی این ساچمه ها با قرارگیری در موقعیت مناسب، نابالانسی سیستم را جبران کرده و آن را به حالت بالانس در می آورند. نحوه عملکرد سیستم به این صورت است

که نیروی گریز از مرکز وارد بر ساچمه ها به دلیل عدم انطباق مرکز دوران روتور و مرکز هندسی آن به دو مؤلفه مماسی و عمودی تجزیه می شود. در اثر مؤلفه مماسی، ساچمه ها در جهت مقابل نابالانسی حرکت کرده و با رسیدن به موقعیت تعادل خود که در خلاف جهت نابالانسی قرار دارد، باعث کاهش میزان نابالانسی می شود. استفاده از این نوع اتوبالانسر بدون نیاز به منبع انرژی و سیستم کنترلی خاص، قادر است سیستم دوار دارای نابالانسی را به صورت خودکار و بدون نیاز به توقف سیستم، بالانس کند. اتوبالانسر ساچمه ای به دلیل توانایی رفع نابالانسی های متغیر با شرایط کاری، در سیستم های مختلف از جمله در دی وی دی، ماشین های ابزار و ... مورد استفاده قرار می گیرد [۵-۲].

مطالعات اولیه در زمینه بالانس اتوماتیک ساچمه ای توسط تیارل [۶]، الکساندر [۷] و کید [۸] انجام شده است. در سال ۱۹۹۹ چانگ و رو [۹] با به کارگیری مختصات قطبی توانستند معادلات روتور صفحه ای مجهز به اتوبالانسر را به شکل خودگردان تبدیل کرده و پایداری سیستم را به طور کامل بررسی کنند. چانگ و جانگ [۱۰] به بررسی اثر ژيروسکوپ روی رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آنها نشان داد اتوبالانسر علاوه بر بالانس سیستم

قادر است زوایای اوایل ناشی از اثر ژيروسکوپي را مي‌راند. لو و همکارانش [۱۱] به بررسی تحلیلی پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با دو ساچمه پرداختند. آنها محدوده پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را به وسیله معادلات خطی سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مساله مقدار ویژه بررسی کردند. همچنین لو و هانگ [۱۲] در تحقیقی دیگر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با سه ساچمه را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ احيایی و مقدم [۱۳] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف پذیر دوار نابالانس روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی و مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. در سال ۲۰۱۱ چان و همکارانش [۱۴] تأثیر غیرخطی بودن سیستم تعلیق بر پایداری سیستم مجهز به بالانسر ساچمه‌ای متداول را بدون استخراج پاسخ دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳ سانگ و همکارانش [۱۵] تأثیر تحریک خارجی بر عملکرد اتوبالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج تحلیلی نشان می‌دهد که ساچمه‌ها می‌توانند نابالانسی ناشی از تحریک خارجی را با تغییر موقعیت‌های خود رفع کنند. در همان سال بایکو [۱۶] به بررسی رفتار روتور انعطاف پذیر ارتوتروپیک<sup>۴</sup> مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداخت. نتایج تحلیل ایشان نشان داد که ناحیه پایدار برای روتور ارتوتروپیک کمتر از ناحیه پایدار روتور ایزوتروپیک است. در سال ۲۰۱۴ رضایی و فتحی [۱۷] تأثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور مجهز به اتوبالانسر در غیاب اثر ژيروسکوپي را بررسی کردند. رضایی و فتحی [۱۸] در تحقیق دیگر با لحاظ کردن اثرات ژيروسکوپي<sup>۵</sup> رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ ماجسکی و همکارانش [۱۹] به بررسی رفتار دیسک صلب نصب شده روی محور الاستیک مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آنها نشان داد که عملکرد اتوبالانسر کاملاً وابسته به محل نصب آن روی محور است و در صورت نزدیکی اتوبالانسر به محل نابالانسی، اتوبالانسر عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۶

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۹، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۹

یانگ و اسمیت [۲۰] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر تحت اثر نیروی آلفورد پرداختند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که افزایش ضریب میرایی اتوبالانسر می‌تواند ارتعاشات مخرب ناشی از چرخه حدی سیستم تحت اثر نیروی آلفورد را از بین ببرد. مطالعات مختلف نشان داده است که اتوبالانسر متداول علاوه بر مزیت‌های ذکر شده، دارای دو عیب اساسی به شرح زیر است:

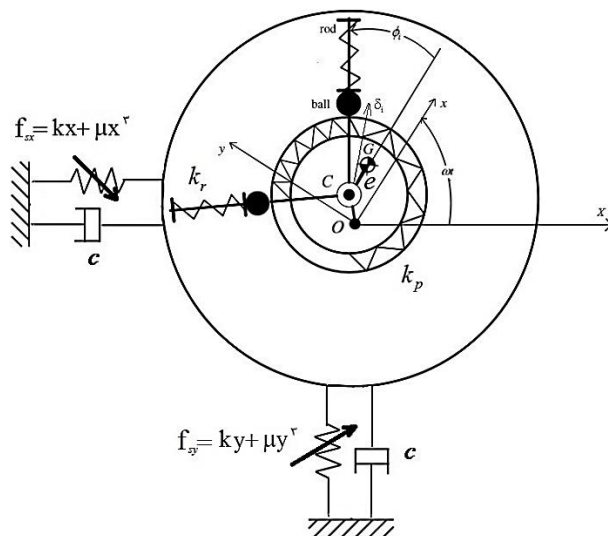
#### الف- محدود بودن ناحیه بالانس پایدار

اولین عیب عمده در این نوع اتوبالانسرها محدود بودن ناحیه بالانس پایدار است. بررسی‌های مختلف [۹-۱۲] نشان داده است که محدوده مشخصی به‌ازای پارامترهای سیستم (روتور مجهز به اتوبالانسر) از جمله جرم ساچمه‌ها، جرم روتور، میزان نابالانسی، میرایی روتور و ... وجود دارد که اتوبالانسر می‌تواند روتور را بالانس کند. بنابراین محدود بودن این ناحیه سبب می‌شود اتوبالانسر قادر به بالانس روتورها با مقدار پارامترهای معین شود که این امر سبب محدود شدن گستره کاربرد این نوع اتوبالانسر می‌شود.

#### ب- افزایش دامنه ارتعاشی روتور در دوره‌های زیر دور بحرانی اول

با توجه به اینکه این نوع اتوبالانسرها معمولاً برای سیستم‌هایی به‌کار می‌رود که در یک روز ممکن است دور سیستم چندبار از ناحیه گذرا عبور کند (به‌دلیل خاموش/ روشن کردن سیستم) به‌همین خاطر افزایش دامنه در ناحیه گذرا سبب کاهش عمر خستگی، ایجاد صدا و ... می‌شود. برای رفع ایرادهای مذکور مدل‌های مختلفی توسط محققان ارائه شده است ولی تنها مدلی که هر دو عیب را به‌طور همزمان تا حد قابل ملاحظه‌ای رفع می‌کند اتوبالانسر ساچمه- فنر است [۲۱].

در تحقیقات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های خطی و مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش‌های عددی بررسی شده است [۲۱]. با توجه به اینکه یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرخطی هستند، و همچنین روش‌های نیمه‌تحلیلی دارای مزیت‌های متعددی هستند، به‌همین منظور در این مقاله برای



شکل ۱- نمادین اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقانهای غیرخطی

حرکت، دستگاه مختصات  $OXY$  متصل به روتور فرض شده است که با سرعت زاویه‌ای روتور چرخش می‌کند. خط واصل محور یاتاقان‌ها از نقطه  $O$  می‌گذرد که برای روتور ساکن،  $C$  بر  $O$  منطبق است. مکانیزم عملکرد اتوبالانسر ساچمه- فنر به این صورت است که فنرهای محیطی در ناحیه گذرا از همگرایی ساچمه‌ها جلوگیری می‌کند. در سرعت‌های زاویه‌ای بالاتر از دور بحرانی، با افزایش نیروی گریز از مرکز، نیروی مماسی افزایش یافته و با فشردن فنرها، ساچمه‌ها به موقعیت تعادل پایدار خود منتقل شده و سبب بالانس سیستم می‌شوند.

معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت اتوبالانسر جدید را می‌توان با استفاده از معادلات لاگرانژ که در رابطه (۱) نشان داده شده است به دست آورد:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

که در آن  $T$  انرژی جنبشی،  $V$  انرژی پتانسیل،  $F$  تابع اتلاف ریلی و  $q_k$  مختصات تعمیم یافته هستند که عبارتند از  $x$ ،  $y$ ،  $\phi_i$  و  $\delta_i$  که  $i = 1, 2, \dots, n$  است. بردارهای مکان مرکز جرم روتور و موقعیت ساچمه‌ها در دستگاه مختصات  $xy$  را می‌توان به صورت روابط (۲) و (۳) بیان کرد:

$$\vec{r}_G = x \vec{i} + y \vec{j} + e \vec{i} \quad (2)$$

اولین بار رفتار دینامیکی روتور با یاتاقانهای غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. بدین منظور، معادلات غیرخطی حاکم بر روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقانهای غیرخطی استخراج شده است. محدوده پایداری سیستم با روش مقیاس‌های چندگانه استخراج و با محدوده پایداری سیستم متداول مقایسه شده است. در نهایت پاسخ سیستم غیرخطی مورد نظر با روش مقیاس‌های چندگانه به صورت تحلیلی استخراج و با پاسخ حاصل از روش عددی مقایسه شده است.

## ۲- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقانهای غیرخطی در شکل (۱) نشان داده شده است. سیستم یاتاقان‌ها با فنر غیرخطی سفت شونده و دمپر ویسکوز با ثابت میرایی  $C$  مدل شده است. مرکز جرم روتور با  $G$  و خروج از مرکزیت  $e$  با  $CG$  نشان داده شده است. موقعیت ساچمه‌ها به وسیله شعاع  $\delta_i$  و زاویه  $\phi_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  تعیین می‌شود که  $n$  تعداد ساچمه‌ها است. مرکز هندسی روتور،  $C$ ، با استفاده از مختصات  $x$  و  $y$  تعیین می‌شود. برای خودگردان کردن معادلات

اتوبالانسرهاست. فرض می‌شود که ثابت‌های میرایی لزج برای همه ساچمه‌ها یکسان است. معادلات غیرخطی حرکت روتور مجهز به اتوبالانسرها جدید با استفاده از معادلات لاگرانژ به صورت روابط (۷) تا (۱۱) به دست می‌آیند:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + (k - M\omega^2)x + \mu x^3 + m_b \sum_{i=1}^n [(\ddot{\delta}_i - \delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2) \cos \phi_i - (\delta_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)) \sin \phi_i] - m_d e \omega^2 - 2M\omega \dot{y} - c\omega y = 0 \quad (7)$$

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + (k - M\omega^2)y + \mu y^3 + m_b \sum_{i=1}^n [(\ddot{\delta}_i - \delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2) \sin \phi_i + (\delta_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)) \cos \phi_i] + 2M\omega \dot{x} + c\omega x = 0 \quad (8)$$

$$m_b \delta_i [(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) \cos \phi_i - (\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \sin \phi_i + \delta_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)] + c_r \delta_i \dot{\phi}_i + k_p d^2 q_i(\phi_i) = 0 \quad (9)$$

$$q_1(\phi) = \left( \phi_1 - \phi_r - \frac{2\pi}{n} \right) \\ q_i(\phi) = (2\phi_i - \phi_{i-1} - \phi_{i+1}) \\ q_n(\phi) = \left( \phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right) \\ i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (10)$$

$$m_b [(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) \sin \phi_i + (\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \cos \phi_i - \delta_i(\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \ddot{\delta}_i] + c_r \dot{\delta}_i + k_r(\delta_i - a) = 0 \quad (11)$$

صحت روابط اخیر با قرار دادن  $\delta_i = R$ ،  $\dot{\delta}_i = 0$ ،  $\mu = 0$  و  $k_r = k_d = 0$  در روابط (۷) تا (۱۱)، که به روابط موجود در مراجع [۱۱ و ۱۲] منجر می‌شود تأیید می‌شود. به منظور به دست آوردن نتایج عمومی‌تر، مختصه‌ها و پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شوند:

$$\vec{r}_{B_i} = x \vec{i} + y \vec{j} + (\delta_i \cos \phi_i) \vec{i} + (\delta_i \sin \phi_i) \vec{j} \quad (3)$$

در ادامه با فرض یکسان بودن جرم ساچمه‌ها و کوچک بودن قطر آنها، انرژی جنبشی اتوبالانسرها ساچمه‌ای به همراه روتور از رابطه (۴) به دست می‌آید [۲۱]:

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + (x^2 + y^2)\omega^2] + \frac{1}{2} m_d (2x e \omega^2 + e^2 \omega^2 + 2e y \omega) + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^n [2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{y} + \omega x) \cos \phi_i - 2\dot{\delta}_i(\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{x} - \omega y) \sin \phi_i + \delta_i^2(\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \delta_i^2 + 2\dot{\delta}_i(\dot{x} - \omega y) \cos \phi_i + 2\dot{\delta}_i(\dot{y} + \omega x) \sin \phi_i] \quad (4)$$

که در آن  $J$  ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم،  $M$  جرم کل،  $m_d$  جرم روتور،  $m_b$  جرم هر یک از ساچمه‌ها،  $\omega$  سرعت دورانی روتور و  $e$  خروج از مرکزیت روتور است. با صرف نظر کردن از انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان به صورت رابطه (۵) بیان کرد. اگر به جای  $\mu$  در رابطه (۵) صفر قرار داده شود، رابطه انرژی پتانسیل ارائه شده در مرجع [۲۱] حاصل می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \mu (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} k_r \sum_{i=1}^n (\delta_i - a)^2 + \frac{1}{2} k_p d^2 \left[ \left( \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n} \right)^2 + \dots + \left( \phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right] \quad (5)$$

که در آن  $k$  سفتی معادل روتور،  $\mu x^2$  و  $\mu y^2$  جملات غیرخطی ناشی از یاتاقان‌های غیرخطی،  $k_d$  سفتی فنرهای محیطی و  $k_r$  سفتی فنرهای شعاعی است. پارامتر  $a$  طول آزاد اولیه فنرهای شعاعی و  $d$  فاصله مرکز دیسک تا محل قرارگیری فنرهای محیطی است. تابع اتلاف ریلی را می‌توان به صورت رابطه (۶) بیان کرد:

$$F = \frac{1}{2} c [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + \omega^2(x^2 + y^2)] + \frac{1}{2} c_r \sum_{i=1}^n (\dot{\delta}_i^2 + \delta_i^2 \dot{\phi}_i^2) \quad (6)$$

که در آن  $c$  ثابت میرایی معادل روتور و  $c_r$  ثابت میرایی لزج

حاضر با توجه به مزیت‌های روش‌های نیمه‌تحلیلی از روش مقیاس‌های چندگانه برای بررسی استخراج پاسخ دینامیکی اتوبالانسر مذکور استفاده شده است.

### ۳-۱- بررسی پایداری

با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به صورت رابطه (۱۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \bar{y}(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \phi_i(\tau; \varepsilon) &= \phi_{i0} + \varepsilon \phi_{i1}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \phi_{i2}(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \bar{\delta}_i(\tau; \varepsilon) &= \delta_{i0} + \varepsilon \delta_{i1}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \delta_{i2}(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن مقیاس‌های زمانی به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$T_l = \varepsilon^l \tau, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

مشتقات اول و دوم زمانی به شکل بی‌بعد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + o(\varepsilon^3) \\ \frac{d}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + o(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

برای بررسی پایداری با در نظر گرفتن دو جمله از روابط (۱۷) و جایگذاری آنها در روابط (۱۳) تا (۱۶)، و از برابر قرار دادن ضرایب جملات هم‌درجه از  $\varepsilon$ ، دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های  $\varepsilon$  به دست می‌آید. دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه  $\varepsilon$  طبق روابط (۲۱) تا (۲۴) هستند:

$$(1 - \bar{\omega}^2) x_0 - 2\zeta \bar{\omega} y_0 - (1 - \bar{m}) \bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2 \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i0} \cos \phi_{i0}) = 0 \quad (21)$$

$$(1 - \bar{\omega}^2) y_0 - \bar{\omega}^2 \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i0} \sin \phi_{i0}) + 2\zeta \bar{\omega} x_0 = 0 \quad (22)$$

$$\bar{\omega}^2 \bar{m} \delta_{i0} (x_0 \sin \phi_{i0} - y_0 \cos \phi_{i0}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

$$\bar{m} \left[ (f^2 - \bar{\omega}^2) (\delta_{i0} - 1) - \bar{\omega}^2 (x_0 \cos \phi_{i0} + y_0 \sin \phi_{i0}) \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_n t, \quad \bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\lambda}, \quad \bar{\delta}_i = \frac{\delta_i}{\lambda}, \\ \bar{e} &= \frac{e}{\lambda}, \quad f = \frac{\omega_b}{\omega_n}, \quad \bar{m} = \frac{m_b}{M}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n} \\ \zeta &= \frac{c}{r\sqrt{Mk}}, \quad \beta = \frac{c_r}{r m_b \omega_n}, \\ \eta &= \frac{k_p d^2}{m_b \lambda^2 \omega_n^2}, \quad \rho = \frac{\lambda^2 \mu}{M \omega_n^2}, \quad r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $\omega_n$  فرکانس طبیعی روتور،  $\zeta$  بیانگر نسبت میرایی سیستم،  $\beta$  نشان‌دهنده نسبت میرایی بالانسر،  $\bar{\delta}$  جابه‌جایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی و  $\lambda$  طول تعادل فنرهای شعاعی است. همچنین  $\omega_b$  فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی و  $\rho$  ضریب بی‌بعد معرف اثر غیرخطی یا تاقان‌ها است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده به صورت روابط (۱۳) تا (۱۶) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} + 2\zeta \dot{\bar{x}} + (1 - \bar{\omega}^2) \bar{x} + \rho \bar{x}^3 + \\ \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\bar{\delta}}_i - \bar{\delta}_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \right) \cos \phi_i - \right. \\ \left. \left( \bar{\delta}_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\bar{\delta}}_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega}) \right) \sin \phi_i \right] - \\ (1 - \bar{m}) \bar{e} \bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} - 2\zeta \bar{\omega} \dot{\bar{y}} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{y}} + 2\zeta \dot{\bar{y}} + (1 - \bar{\omega}^2) \bar{y} + \rho \bar{y}^3 + \\ \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\bar{\delta}}_i - \bar{\delta}_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega})^2 \right) \sin \phi_i + \right. \\ \left. \left( \bar{\delta}_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\bar{\delta}}_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega}) \right) \cos \phi_i \right] + \\ 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} + 2\zeta \bar{\omega} \dot{\bar{x}} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{m} \bar{\delta}_i [(\ddot{\bar{y}} + 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} - \bar{\omega}^2 \bar{y}) \cos \phi_i + \\ (\ddot{\bar{x}} - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} - \bar{\omega}^2 \bar{x}) \sin \phi_i + \\ \bar{\delta}_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\bar{\delta}}_i (\dot{\phi}_i + \bar{\omega})] + \\ 2\bar{m} \beta \bar{\delta}_i^2 \dot{\phi}_i + \eta \bar{m} q_i(\phi_i) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{m} [(\ddot{\bar{y}} + 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} - \bar{\omega}^2 \bar{y}) \sin \phi_i + \\ (\ddot{\bar{x}} - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} - \bar{\omega}^2 \bar{x}) \cos \phi_i - \\ \bar{\delta}_i \dot{\phi}_i^2 - 2\bar{\omega} \bar{\delta}_i \dot{\phi}_i + \ddot{\bar{\delta}}_i] + \\ 2\bar{m} \beta \dot{\bar{\delta}}_i + \bar{m} (\bar{\delta}_i - 1) (f^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

### ۳- اعمال روش مقیاس‌های چندگانه

در پژوهش‌های پیشین از روش عددی برای بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه- فنر استفاده شده است. در مقاله

$$(1 - \bar{\omega}^T) r_s \sin \theta_s + \nu \zeta \bar{\omega} r_s \cos \theta_s - \bar{\omega}^T \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i_s} \sin \phi_{i_s}) = 0 \quad (30)$$

$$\bar{\omega}^T \bar{m} \delta_{i_s} r_s \sin(\phi_{i_s} - \theta_s) = 0 \quad (31)$$

$$\bar{m} \left[ (f^T - \bar{\omega}^T) (\delta_{i_s} - 1) - \bar{\omega}^T r_s \cos(\phi_{i_s} - \theta_s) \right] = 0 \quad (32)$$

بر اساس معادلات به دست آمده از روابط (29) تا (32) می توان وضعیت های تعادل سیستم را برای دو مقدار  $r_s = 0$  و  $r_s \neq 0$  استخراج کرد. با توجه به اهمیت حالت بالانس، در اینجا فقط وضعیت بالانس،  $r_s = 0$ ، مورد بررسی قرار می گیرد. در حالت بالانس، روابط (29) تا (32) سه رابطه (33) تا (35) حاصل می شود:

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{i_s} \cos \phi_{i_s}) + \frac{(1 - \bar{m}) \bar{e}}{\bar{m}} = 0 \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \phi_{i_s} = 0 \quad (34)$$

$$\delta_{i_s} = 1 \quad (35)$$

با در نظر گرفتن دو ساچمه و با توجه به همگن بودن معادلات (25) تا (28)، پاسخ به صورت نمایی و مطابق روابط (36) در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda T} & y_1 &= c_2 e^{\lambda T} \\ \phi_{11} &= c_3 e^{\lambda T} & \phi_{21} &= c_4 e^{\lambda T} \\ \delta_{11} &= c_5 e^{\lambda T} & \delta_{21} &= c_6 e^{\lambda T} \end{aligned} \quad (36)$$

که با جایگذاری در معادلات داریم:

$$[A]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = 0 \quad (37)$$

که در آن  $[A]$  ماتریس مربعی است که جهت رعایت اختصار، از آوردن آن خودداری شده است. شرط وجود جواب غیربندی برای  $c_i$  ها در دستگاه معادلات (37)، صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب است. به این ترتیب، ۱۲ جواب برای  $\lambda$  به دست می آید. هنگامی که همه  $\lambda$  ها دارای قسمت حقیقی منفی باشند سیستم به صورت مجانبی پایدار است. اگر حداقل یکی

در روابط (21) تا (24) نقاط  $x_s, y_s, \phi_s$  و  $\delta_{i_s}$  نشان دهنده نقطه تعادل سیستم بوده و مقدار آنها ثابت و مشتق آنها برابر صفر است. معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه  $\varepsilon^1$  مطابق روابط (25) تا (28) به دست می آید:

$$\begin{aligned} D_s^T x_1 + \nu \zeta D_s x_1 + (1 - \bar{\omega}^T + \nu \rho x_s^T) x_1 - \nu \bar{\omega} D_s y_1 - \nu \zeta \bar{\omega} y_1 + \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ (D_s^T \delta_{i1} - \nu \delta_{i_s} \bar{\omega} D_s \phi_{i1} - \bar{\omega}^T \delta_{i1}) \cos \phi_{i_s} + (\delta_{i_s} \bar{\omega}^T \phi_{i1} - \delta_{i_s} D_s^T \phi_{i1} - \nu \bar{\omega} D_s \delta_{i1}) \sin \phi_{i_s} \right] &= 0 \quad (25) \end{aligned}$$

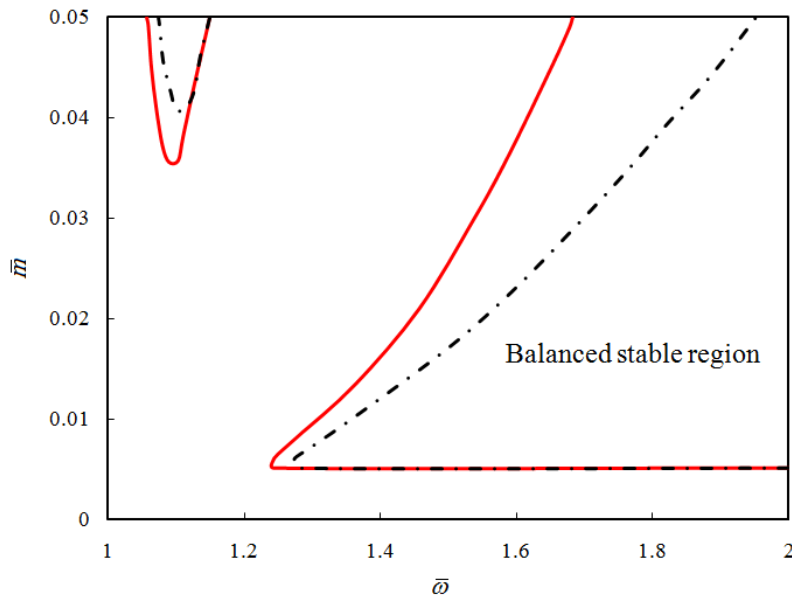
$$\begin{aligned} D_s^T y_1 + \nu \zeta D_s y_1 + (1 - \bar{\omega}^T + \nu \rho y_s^T) y_1 + \nu \bar{\omega} D_s x_1 + \nu \zeta \bar{\omega} x_1 + \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ (D_s^T \delta_{i1} - \nu \delta_{i_s} \bar{\omega} D_s \phi_{i1} - \bar{\omega}^T \delta_{i1}) \sin \phi_{i_s} + (\delta_{i_s} D_s^T \phi_{i1} - \delta_{i_s} \bar{\omega}^T \phi_{i1} + \nu \bar{\omega} D_s \delta_{i1}) \cos \phi_{i_s} \right] &= 0 \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m} [(\delta_{i_s} D_s^T y_1 + \nu \delta_{i_s} \bar{\omega} D_s x_1 - \delta_{i_s} \bar{\omega}^T y_1 + \bar{\omega}^T \delta_{i_s} x_s \phi_{i1} - \delta_{i1} \bar{\omega}^T y_s \phi_{i1}) \cos \phi_{i_s} + (\nu \delta_{i_s} \bar{\omega} D_s y_1 - \delta_{i_s} D_s^T x_1 + \delta_{i_s} \bar{\omega}^T x_1 + \bar{\omega}^T \delta_{i_s} y_s \phi_{i1} + \delta_{i1} \bar{\omega}^T x_s) \sin \phi_{i_s} + \delta_{i1} D_s^T \phi_{i1}] + \nu \beta \delta_{i_s}^T \bar{m} D_s \phi_{i1} + \nu \delta_{i_s} \bar{\omega} \bar{m} D_s \delta_{i1} + \eta \bar{m} q_i(\phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{m} [(D_s^T x_1 - \bar{\omega}^T \phi_{i1} y_s - \bar{\omega}^T x_1 - \nu \bar{\omega} D_s y_1) \cos \phi_{i_s} + (D_s^T y_1 + \bar{\omega}^T \phi_{i1} x_s - \bar{\omega}^T y_1 + \nu \bar{\omega} D_s x_1) \sin \phi_{i_s}] + \nu \beta \bar{m} D_s \delta_{i1} + \bar{m} D_s^T \delta_{i1} - \nu \delta_{i_s} \bar{\omega} \bar{m} D_s \phi_{i1} + \bar{m} \bar{\omega} \delta_{i1} (f^T - \bar{\omega}^T) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (28)$$

پس از استخراج جملات هم مرتبه از  $\varepsilon$ ، برای به دست آوردن نقاط تعادل سیستم، با تبدیل  $x_s$  و  $y_s$  به صورت قطبی  $x_s = r_s \cos \theta_s$  و  $y_s = r_s \sin \theta_s$  که  $r_s$  نشان دهنده دامنه ارتعاشات روتور در حالت پایا است، و با جایگذاری آنها در روابط (21) تا (24)، روابط (29) تا (32) به دست می آید:

$$\begin{aligned} (1 - \bar{\omega}^T) r_s \cos \theta_s - \nu \zeta \bar{\omega} r_s \sin \theta_s - (1 - \bar{m}) \bar{e} \bar{\omega}^T - \bar{\omega}^T \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i_s} \cos \phi_{i_s}) &= 0 \quad (29) \end{aligned}$$



شکل ۲- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---): تغییرات  $\bar{m}$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\zeta = 0/05$ ،  $\beta = 0/05$ ،  $\bar{e} = 0/01$  و  $f = 4$

پارامترهای  $\zeta$ ،  $\bar{e}$  و  $\beta$  برحسب  $\bar{\omega}$  آورده شده است. همان‌طور که از این شکل‌ها مشاهده می‌شود محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مزیت اول ادعائی برای اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی بیشتر بودن ناحیه بالانس پایداری، با یاتاقان‌های خطی در مورد روتور با یاتاقان‌های غیرخطی نیز برقرار است.

### ۳-۲- استخراج پاسخ ارتعاشی روتور

در این بخش پاسخ ارتعاشی روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه تحلیلی مقیاس‌ها چندگانه استخراج می‌شود. بدین منظور پاسخ معادلات غیرخطی به این صورت در نظر گرفته می‌شود:

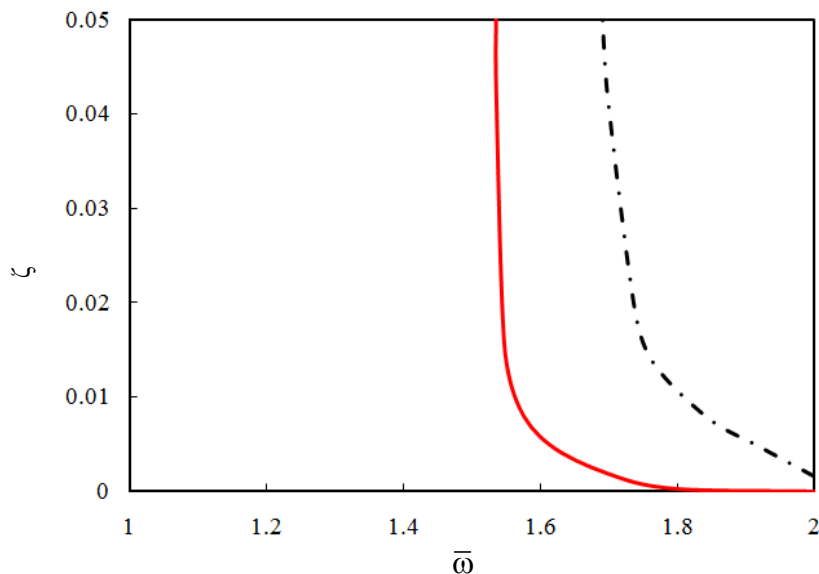
$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^3) \\ \bar{y}(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^3) \\ \bar{\phi}_1(\tau; \varepsilon) &= \phi_{10} + \varepsilon \phi_{11}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \phi_{12}(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^3) \\ \bar{\delta}_1(\tau; \varepsilon) &= \delta_{10} + \varepsilon \delta_{11}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \delta_{12}(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (38)$$

از  $\lambda$ ها دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است. پس با استفاده از ماتریس [A] ناحیه بالانس پایداری برای سیستم قابل استخراج است. با توجه به اینکه نواحی پایداری برحسب تمامی پارامترها را نمی‌توان در یک نمودار واحد نشان داد لذا نواحی پایداری برای دو به دوی پارامتر رسم می‌شود.

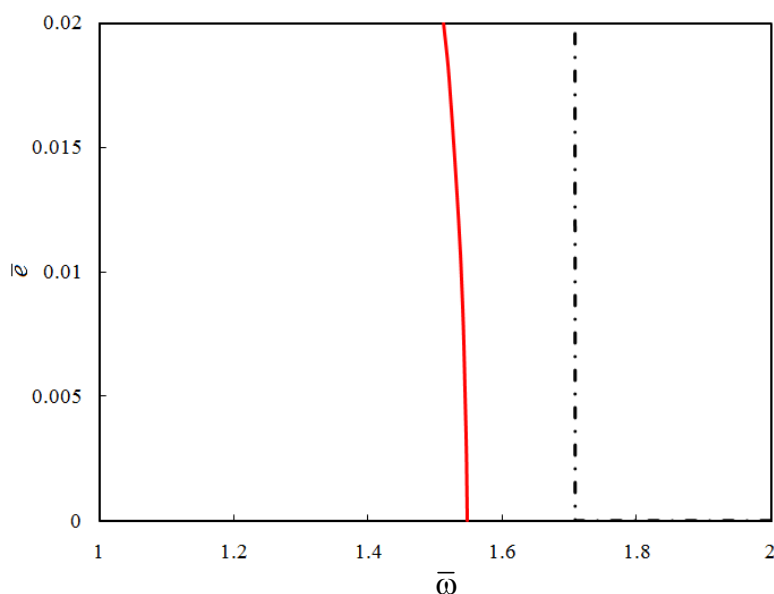
در شکل (۲) نواحی پایداری روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای  $\zeta = 0/05$ ،  $\beta = 0/05$ ،  $\bar{e} = 0/01$  و  $f = 4$  برحسب پارامترهای  $\bar{m}$  و  $\bar{\omega}$  نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر است روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرخطی را بالانس کند. همچنین برای بررسی مزیت این نوع اتوبالانسر، ناحیه پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر متداول به ازای شرایط یکسان در شکل (۲) نیز آورده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است.

در شکل‌های (۳) تا (۵) نواحی پایداری به ازای تغییر





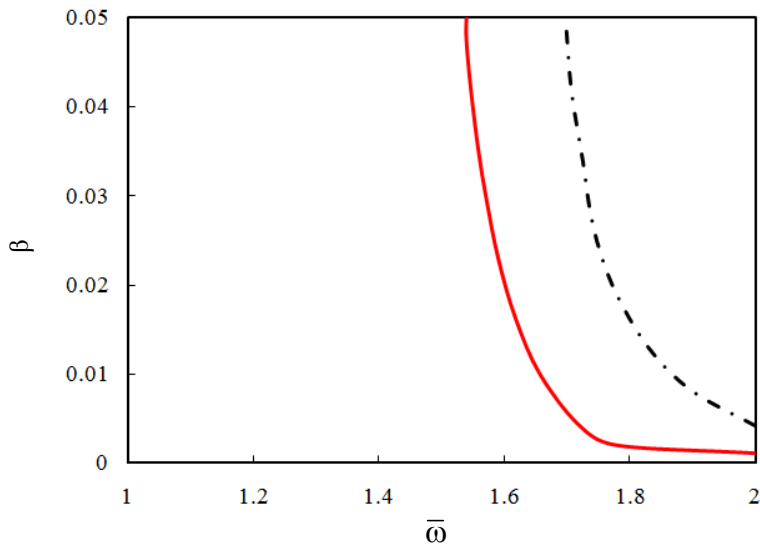
شکل ۳- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---): تغییرات  $\zeta$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m}=0.3$ ،  $\beta=0.5$ ،  $\bar{e}=0.1$  و  $f=4$



شکل ۴- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---): تغییرات  $\bar{e}$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m}=0.3$ ،  $\beta=0.5$ ،  $\zeta=0.5$  و  $f=4$

$\varepsilon^1$  به ترتیب مطابق روابط (۲۱) تا (۲۴) و (۲۵) تا (۲۸) هستند و معادلات مربوط به مرتبه  $\varepsilon^2$  مطابق روابط (۳۹) تا (۴۲) است:

مطابق بخش قبل با جایگذاری روابط (۳۸) در معادلات غیرخطی سیستم، معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های مختلف  $\varepsilon$  به دست می‌آید. معادلات دیفرانسیل مربوط به  $\varepsilon^0$  و



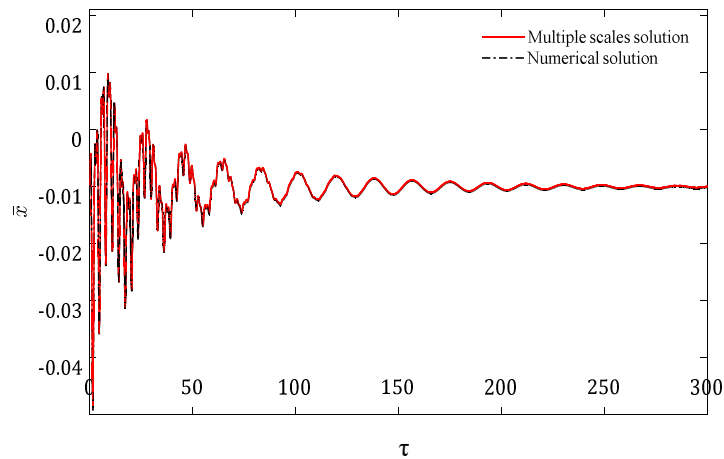
شکل ۵- محدوده بالانس پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر (—) و روتور مجهز به اتوبالانسر متداول (---): تغییرات  $\beta$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m} = 0.03$ ،  $\zeta = 0.05$ ،  $\bar{e} = 0.01$  و  $f = 4$

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} - \bar{\omega}^T \delta_{i1} \phi_{i1} + \phi_{i1} D_1^T \delta_{i1} + \nu \delta_{i1} D_1 D_1 \phi_{i1} \\
 & + \nu D_1 \delta_{i1} D_1 \phi_{i1} + \nu \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} - \nu \delta_{i1} \phi_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1}) \cos \phi_{i0} + \\
 & \nu D_1 D_1 y_1 + \nu \zeta D_1 y_1 + \nu \bar{\omega} D_1 x_1 + \nu \rho y_1 y_1^T = 0 \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{m} \left[ \left( \delta_{i1} D_1^T y_1 + \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 x_1 - \delta_{i1} \bar{\omega}^T y_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \bar{\omega}^T \delta_{i1} x_1 \phi_{i1} - \delta_{i1} \bar{\omega}^T y_1 \right) \cos \phi_{i0} + \right. \\
 & \left. \left( \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 y_1 - \delta_{i1} D_1^T x_1 + \delta_{i1} \bar{\omega}^T x_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \bar{\omega}^T \delta_{i1} y_1 \phi_{i1} + \delta_{i1} \bar{\omega}^T x_1 \right) \sin \phi_{i0} + \delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} \right] + \\
 & \nu \beta \delta_{i1}^T \bar{m} D_1 \phi_{i1} + \nu \delta_{i1} \bar{\omega} \bar{m} D_1 \delta_{i1} + \\
 & \bar{m} \left[ \left( \delta_{i1} D_1^T y_1 + \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 x_1 - \delta_{i1} \bar{\omega}^T y_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \bar{\omega}^T x_1 \delta_{i1} \phi_{i1} + \bar{\omega}^T \phi_{i1} \delta_{i1} x_1 + \nu \delta_{i1} \phi_{i1} \bar{\omega} D_1 y_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \phi_{i1} \delta_{i1} D_1^T x_1 + \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 x_1 + \nu \delta_{i1} D_1 D_1 y_1 \right) \cos \phi_{i0} - \right. \\
 & \left. \left( \delta_{i1} \phi_{i1} D_1^T y_1 - \bar{\omega}^T \phi_{i1} \delta_{i1} y_1 - \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 y_1 + \delta_{i1} D_1^T x_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \bar{\omega}^T y_1 \delta_{i1} \phi_{i1} + \nu \bar{\omega} \phi_{i1} \delta_{i1} D_1 x_1 - \bar{\omega}^T \delta_{i1} x_1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 y_1 + \nu \delta_{i1} D_1 D_1 x_1 \right) \sin \phi_{i0} + \nu \delta_{i1} \delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} \right] + \\
 & \eta \bar{m} q_{i1} (\phi_{i1}) + \nu \bar{m} \delta_{i1}^T D_1 D_1 \phi_{i1} + \nu \beta \delta_{i1} \delta_{i1} \bar{m} D_1 \phi_{i1} + \\
 & \nu \beta \delta_{i1}^T \bar{m} D_1 \phi_{i1} + \nu \delta_{i1} \bar{\omega} \bar{m} D_1 \delta_{i1} + \\
 & \nu \bar{m} \delta_{i1} D_1 \delta_{i1} D_1 \phi_{i1} + \nu \bar{m} \bar{\omega} \delta_{i1} D_1 \delta_{i1} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_1^T x_1 + \nu \zeta D_1 x_1 + \left( 1 - \bar{\omega}^T + \nu \rho x_1^T \right) x_1 - \nu \bar{\omega} D_1 y_1 - \\
 & \nu \zeta \bar{\omega} y_1 + \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( D_1^T \delta_{i1} - \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1} - \bar{\omega}^T \delta_{i1} \right) \right. \\
 & \left. \times \cos \phi_{i0} + \left( \delta_{i1} \bar{\omega}^T \phi_{i1} - \delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} - \nu \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} \right) \sin \phi_{i0} \right] + \\
 & \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \nu D_1 D_1 \delta_{i1} - \delta_{i1} \phi_{i1} D_1^T \phi_{i1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1} - \nu \bar{\omega} \delta_{i1} D_1 \phi_{i1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_{i1} (D_1 \phi_{i1})^T - \nu \phi_{i1} \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} \right) \cos \phi_{i0} + \right. \\
 & \left. \left( \bar{\omega}^T \delta_{i1} \phi_{i1} - \phi_{i1} D_1^T \delta_{i1} - \delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} - \nu \delta_{i1} D_1 D_1 \phi_{i1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \nu D_1 \delta_{i1} D_1 \phi_{i1} - \nu \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} + \nu \delta_{i1} \phi_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1} \right) \sin \phi_{i0} \right] + \\
 & \nu D_1 D_1 x_1 + \nu \zeta D_1 x_1 - \nu \bar{\omega} D_1 y_1 + \nu \rho x_1 x_1^T = 0 \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_1^T y_1 + \nu \zeta D_1 y_1 + \left( 1 - \bar{\omega}^T + \nu \rho y_1^T \right) y_1 + \\
 & \nu \bar{\omega} D_1 x_1 + \nu \zeta \bar{\omega} x_1 + \\
 & \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( D_1^T \delta_{i1} - \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1} - \bar{\omega}^T \delta_{i1} \right) \right. \\
 & \left. \times \sin \phi_{i0} + \left( \delta_{i1} \bar{\omega}^T \phi_{i1} + \delta_{i1} D_1^T \phi_{i1} + \nu \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} \right) \cos \phi_{i0} \right] + \\
 & \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \nu D_1 D_1 \delta_{i1} - \delta_{i1} \phi_{i1} D_1^T \phi_{i1} - \nu \delta_{i1} \bar{\omega} D_1 \phi_{i1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \nu \bar{\omega} \delta_{i1} D_1 \phi_{i1} - \delta_{i1} (D_1 \phi_{i1})^T - \nu \phi_{i1} \bar{\omega} D_1 \delta_{i1} \right) \sin \phi_{i0} + \right.
 \end{aligned}$$



شکل ۶- پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به‌ازای پارامترهای  $\bar{m} = 0.03$

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} \quad \bar{\mathbf{e}} = 0.01, \mu = 0.005, \rho = 0.02, \bar{\omega} = 3, \zeta = 0.05, \beta = 0.05$$

$$\delta_{1j} = b_{\delta j} e^{\lambda_j T_1} + cc \quad \delta_{2j} = b_{\epsilon j} e^{\lambda_j T_1} + cc \quad (44)$$

با جایگذاری معادلات (۴۳) و (۴۴) در معادلات مربوط به ضرایب  $\epsilon^2$  و انجام عملیات مفصل ریاضی مشخص می‌شود که  $\frac{dC_i(T_1)}{dT_1} = 0$  پس برای به‌دست آوردن جواب نهایی لازم

است ثابت  $C_i$  با اعمال شرایط اولیه محاسبه شود. بدین منظور با در نظر گرفتن دو جمله اول از روابط (۳۸) و در  $t = 0$  داریم:

$$\epsilon \mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_0) \quad (45)$$

که در آن  $\mathbf{B}$  ماتریسی بر حسب  $\lambda_i$  و  $c_{ij}$  است که چنین محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (46)$$

که  $M_{ij} = c_{ij}$  و  $N_{ij} = \lambda_i c_{ij}$  است. بدین ترتیب ثوابت  $C_i$  به‌دست می‌آیند، و در نهایت پاسخ سیستم استخراج می‌شود. با استفاده از روش توضیح داده شده در این بخش پاسخ ارتعاشی سیستم با در نظر گرفتن یک جمله از تقریب در روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمد. به‌منظور اطمینان از دقت روش حل نیمه تحلیلی و برای سنجش درستی نتایج، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به روش رانگ- کوتا نیز استخراج شد. شکل‌های (۶) و (۷) به ترتیب مؤلفه‌های  $x$  و  $y$

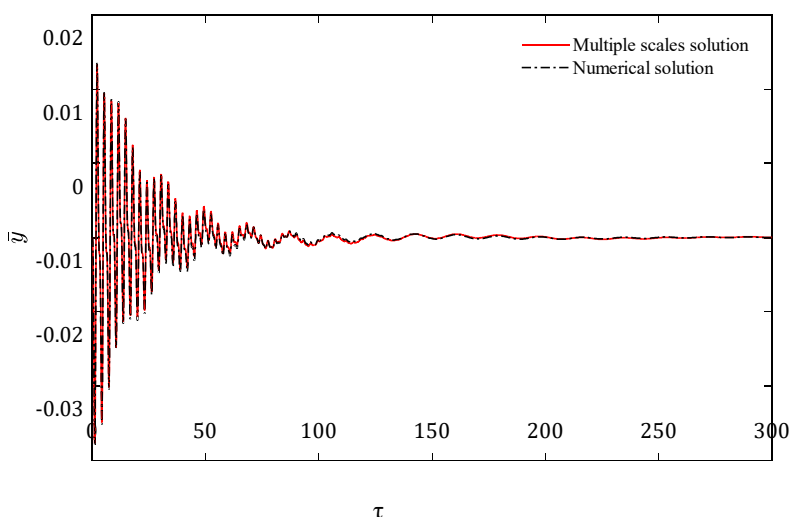
$$\begin{aligned} & \bar{m}[(D_1^* x_j + \bar{\omega}^* y_j \phi_{1j} - \bar{\omega}^* x_j - \nu \bar{\omega} D_1 y_j) \cos \phi_{1j} + \\ & (\bar{\omega}^* x_j \phi_{1j} - \bar{\omega}^* y_j + \nu \bar{\omega} D_1 x_j + D_1^* y_j) \sin \phi_{1j}] + \\ & \nu \beta \bar{m} D_1 \delta_{1j} - \nu \delta_{1j} \bar{\omega} \bar{m} D_1 \phi_{1j} + \bar{m} \bar{\delta}_{1j} (f^* - \bar{\omega}^*) + \\ & \bar{m} D_1^* \delta_{1j} + \bar{m}[(\nu D_1 D_1 x_1 - \bar{\omega}^* \phi_{1j} y_1 + \phi_{1j} D_1^* y_1 + \\ & \nu \phi_{1j} \bar{\omega} D_1 x_1 - \nu \bar{\omega} D_1 y_1) \cos \phi_{1j} + \\ & (\nu \phi_{1j} \bar{\omega} D_1 y_1 + \bar{\omega}^* \phi_{1j} x_1 + \nu D_1 D_1 y_1 - \\ & \phi_{1j} D_1^* x_1 + \nu \bar{\omega} D_1 x_1) \sin \phi_{1j}] + \\ & \nu \beta \bar{m} D_1 \delta_{1j} + \nu \bar{m} D_1 D_1 \delta_{1j} - \nu \delta_{1j} \bar{\omega} \bar{m} D_1 \phi_{1j} - \\ & \nu \bar{m} \bar{\omega} \delta_{1j} D_1 \phi_{1j} - \bar{m} \bar{\delta}_{1j} (D_1 \phi_{1j})^* = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (42)$$

پاسخ زمانی سیستم روتور و اتوبالانسر با دو ساچمه به صورت رابطه (۴۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1(T_1) c_{1j} e^{\lambda_j T_1} + cc & y_1 &= C_2(T_1) c_{2j} e^{\lambda_j T_1} + cc \\ \phi_{11} &= C_3(T_1) c_{3j} e^{\lambda_j T_1} + cc & \phi_{21} &= C_4(T_1) c_{4j} e^{\lambda_j T_1} + cc \\ \delta_{11} &= C_5(T_1) c_{5j} e^{\lambda_j T_1} + cc & \delta_{21} &= C_6(T_1) c_{6j} e^{\lambda_j T_1} + cc \end{aligned} \quad (43)$$

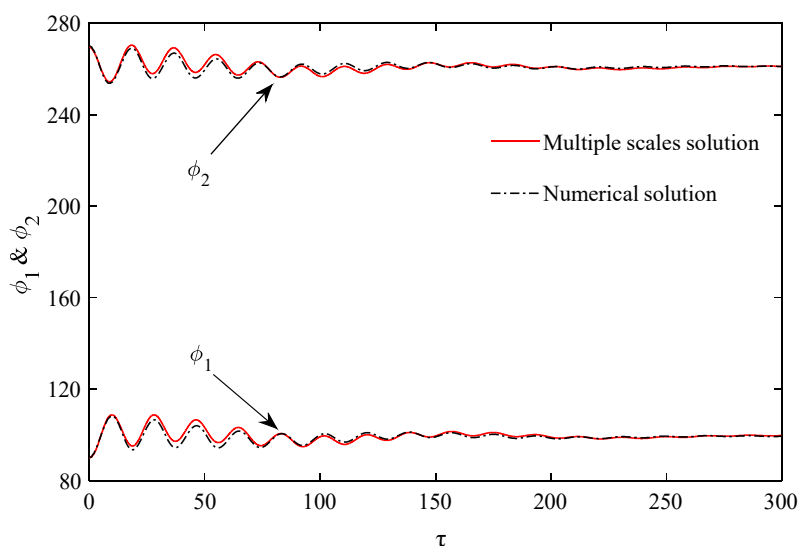
که در آن  $j = 1, 2, \dots, 6$  و  $\lambda_j$  و  $c_{ij}$  به ترتیب مقادیر و المان‌های بردارهای ویژه سیستم است که از ماتریس  $\mathbf{A}$  به دست آمده‌اند. برای استخراج پاسخ سیستم لازم است  $C_i(T_1)$  ها استخراج شوند. جمله دوم پاسخ به صورت رابطه (۴۴) فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} x_2 &= b_{1j} e^{\lambda_j T_1} + cc & y_2 &= b_{2j} e^{\lambda_j T_1} + cc \\ \phi_{12} &= b_{3j} e^{\lambda_j T_1} + cc & \phi_{22} &= b_{4j} e^{\lambda_j T_1} + cc \end{aligned}$$



شکل ۷- پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای پارامترهای  $\bar{m}=0/03$ ،  $\beta=0/05$ ،

$$f=4 \text{ و } \bar{e}=0/01, \mu=0/005, \rho=0/2, \bar{\omega}=3, \zeta=0/05$$



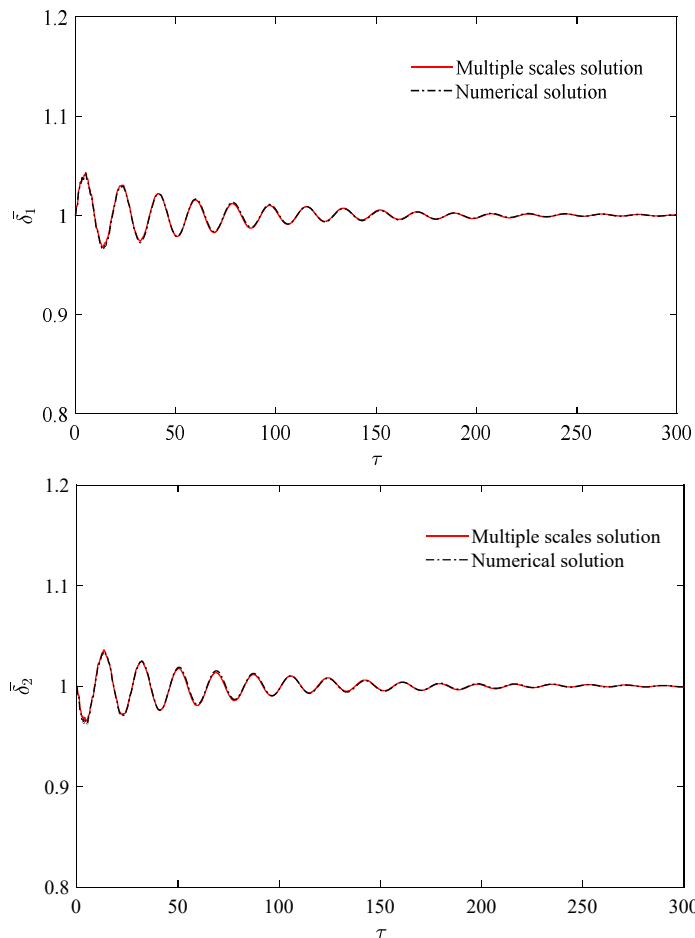
شکل ۸- پاسخ زمانی موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای پارامترهای

$$f=4 \text{ و } \bar{e}=0/01, \mu=0/005, \rho=0/2, \bar{\omega}=3, \bar{m}=0/03, \zeta=0/05, \beta=0/05, \bar{m}=0/03$$

از روش رانگ کوتاه دارد.

بعد از اطمینان از نتایج حاصل از روش مقیاس‌های چندگانه در شکل (۱۰) پاسخ زمانی روتور در دو حالت به دست آمد: الف) روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر و ب) روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول. همان‌طور که از شکل (۸) مشاهده می‌شود

پاسخ زمانی روتور و شکل‌های (۸) و (۹) به ترتیب پاسخ زمانی موقعیت زاویه‌ای و شعاعی ساچمه‌ها را به ازای پارامترهای  $\bar{m}=0/03$ ،  $\beta=0/05$ ،  $\zeta=0/05$ ،  $\bar{\omega}=3$ ،  $\rho=0/2$ ،  $\bar{e}=0/01$ ،  $\mu=0/005$  و  $f=4$  نشان می‌دهند. همان‌طور از این شکل‌ها مشاهده می‌شود، پاسخ به دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه انطباق مناسبی با پاسخ به دست آمده



شکل ۹- پاسخ زمانی موقعیت شعاعی ساچمه‌های اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای پارامترهای  $\bar{m} = 0.03$ ،  $\beta = 0.05$ ،  $\zeta = 0.05$ ،  $\bar{\omega} = 3$ ،  $\rho = 0.2$ ،  $\mu = 0.005$ ،  $\bar{e} = 0.01$  و  $f = 4$

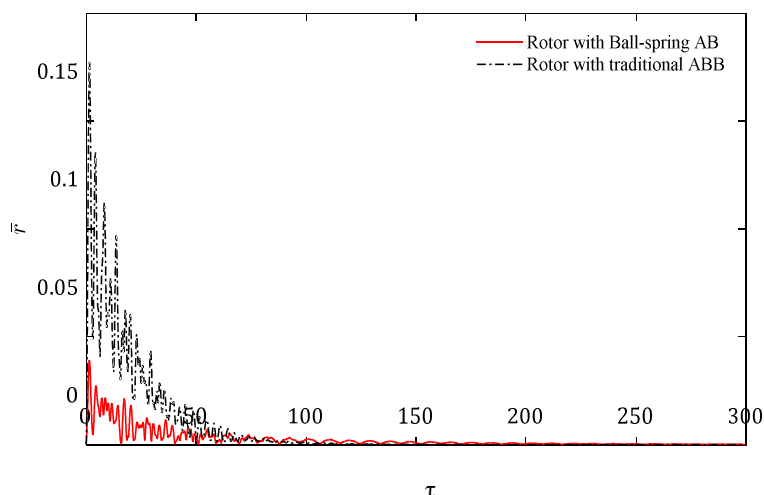
که در ناحیه گذرا وجود این فنرها سبب جلوگیری از همگرایی ساچمه‌ها به طرف نابالانسی شده و مانع افزایش دامنه سیستم در ناحیه گذرا می‌شوند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر مورد بررسی قرار گرفت. معادلات غیرخطی سیستم با استفاده از روش لاگرانژ استخراج شد. در ادامه با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه ناحیه بالانس پایدار و پاسخ ارتعاشی سیستم استخراج شد. اهم نتایج تحقیق حاضر به این شرح است:

پاسخ ارتعاشی در سیستم مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناحیه گذرا نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول کاهش یافته است، یعنی یاتاقان‌های غیرخطی خللی بر دومین مزیت اتوبالانسر یعنی کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا وارد نمی‌کند.

دلیل مزیت اول یعنی وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای شعاعی است. در اتوبالانسر نوع جدید برخلاف نوع متداول که ساچمه‌ها مقید به حرکت در مسیر دایره‌ای شکل هستند، ساچمه‌ها به دلیل متصل بودن به فنرهای شعاعی آزادی عمل بیشتری داشته که سبب افزایش ناحیه بالانس پایدار سیستم می‌شود. مزیت دوم اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای محیطی است. به‌طوری



شکل ۱۰- پاسخ زمانی روتور مجهز به بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای به‌ازای پارامترهای

$$\bar{m} = 0.03, \beta = 0.05, \zeta = 0.05, \bar{\omega} = 3, \rho = 0.2, \mu = 0.005, \bar{e} = 0.01, \text{ و } f = 4$$

ساچمه- فنر قادر به بالانس روتور با محدوده وسیع‌تری از پارامترهای سیستم شود.

۳- مقایسه پاسخ زمانی روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول نشان داد که وجود اثر غیرخطی یاتاقان‌ها در دومین مزیت ادعایی اتوبالانسر ساچمه- فنر که همان کاهش دامنه در ناحیه گذرا است، خللی وارد نمی‌کند.

۱- اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر است به‌ازای محدوده خاصی از پارامترهای سیستم، روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرخطی را بالانس کند.

۲- مقایسه ناحیه بالانس پایدار روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور با یاتاقان‌های غیرخطی مجهز به اتوبالانسر متداول حاکی از این است که ناحیه بالانس پایدار سیستم اول نسبت به سیستم دوم به‌ازای شرایط یکسان بیشتر است. این امر سبب می‌شود که اتوبالانسر

## واژه‌نامه

- |                 |                |                      |
|-----------------|----------------|----------------------|
| 1. autobalancer | 3. imbalance   | 5. gyroscopic effect |
| 2. balance      | 4. orthotropic |                      |

## مراجع

- Ishida, Y., "Recent Development of The Passive Vibration Control Method", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 29, pp. 2-18, 2012.
- Kim, W., chung, J., "Performance of Automatic Ball Balancers on Optical Disc Drives", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 216, No. 11, pp. 1071-1080, 2002.
- Chao, P. C., Sung, C.-K., and Wang, C.-C., "Dynamic Analysis of The Optical Disk Drives Equipped With an Automatic Ball Balancer with Consideration of Torsional Motions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 72, No. 6, pp. 826-842, 2005.
- Chao, P. C.-P., Sung, C.-K., and Leu, H.-C., "Effects of Rolling Friction of the balancing balls on the Automatic Ball balancer for Optical Disk Drives", *Journal of Tribology*, Vol. 127, No. 4, pp. 845-856, 2005.
- Rajalingham, C., and Rakheja, S., "Whirl Suppression In Hand-Held Power Tool Rotors Using Guided Rolling Balancers", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 3, pp. 453-466, 1998.

6. E. L. Thearle, "Automatic Dynamic Balancers", *Machine Design*, Vol. 22, pp. 119-124, 1950.
7. Alexander, J., "An Automatic Dynamic Balancer", *Proceeding of 2nd Southeastern Conference*, 415-426.
8. Cade, J., "Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms", *Design News*, Vol. 20, pp. 234-239, 1965.
9. Chung, J., and Ro, D., "Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035-1056, 1999.
10. Chung, J., and Jang, I., "Dynamic Response and Stability Analysis of an Automatic Ball Balancer for a Flexible Rotor", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, pp. 31-43, 2003.
11. Lu, C.-J., Wang, M.-C., Huang, S. H., "Analytical Study of the Stability of a Two-Ball Automatic Balancer", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 3, pp. 884-896, 2009.
12. Lu, C.-J., and Hung, C.-H., "Stability Analysis of a Three-Ball Automatic Balancer", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 130, No. 5, pp. 1-7, 2008.
13. Ehyaei, J., Moghaddam, M. M., "Dynamic Response and Stability Analysis of an Unbalanced Flexible Rotating Shaft Equipped with an Automatic Ball-Balancers", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 321, No. 3, pp. 554-571, 2009.
14. Chan, T., Sung, C., and Chao, P. C., "Non-Linear Suspension of An Automatic Ball Balancer", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 2, pp. 415-424, 2011.
15. Sung, C., Chan, T., Chao, C., and Lu, C., "Influence of External Excitations on Ball Positioning of an Automatic Balancer", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 69, pp. 115-126, 2013.
16. Bykov, B., "Auto-Balancing of a Rotor With an Orthotropic Elastic Shaft", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 77, No. 4, pp. 369-379, 2013.
17. Rezaee, M., and Fathi, R., "The Effect of Damping Ratio and Balls Mass on the Stability of Automatic Ball-Balancer and Determining their Optimum Values", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 110-118, 2014 (In Farsi).
18. Rezaee, M., and Fathi, R., "Dynamic Analysis of an Automatic Double-race Ball-balancer under the Gyroscopic Effect and Optimization of its Parameters Using the Genetic Algorithm", *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 46, No. 3, pp. 129-137, 2016 (In Farsi).
19. Majewski, T., Szwedowicz, D., and Melo, M. A. M., "Self-Balancing System of the Disk on an Elastic Shaft", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 359, pp. 2-20, 2015.
20. Jung, D., and DeSmidt, H., "Limit-Cycle Analysis of Planar Rotor/Autobalancer System Influenced by Alford's Force", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 138, No. 2, pp. 1-14, 2016.
21. Rezaee, M., and Fathi, R., "Improving the Working Performance of Automatic Ball Balancer by Modifying Its Mechanism", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 358, pp. 375-391, 2015.