نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

پاسخ غیرخطی و تحلیل کمانش دینامیکی پانل استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر تحت بارگذاری انفجار

سیدعلی احمدی، محمدهادی پاشایی* و رمضانعلی جعفری تلوکلائی
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۱۲ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۵/۷)

چکیده– در این مقاله پاسخ غیرخطی تغییرمکان یک پانل استوانه‌ای ساندویچی تحت بارگذاری دینامیکی ضربانی با درنظر گرفتن قابلیت تغییرشکل هسته مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از تئوری مرتبه بالای ارائه شده برای هسته پانل‌های ساندویچی، معادلات حاکم بر حرکت بر مبنای نظریه ارتجاعی سه‌بعدی به‌کار گرفته شده است. همچنین رفتار کمانش دینامیکی ضربانی صفحات جانبی پانل با استفاده از معیار بادیانسکی- راس، بررسی شده است. برای لایه‌های داخلی و خارجی پانل مواد اورتوتروپیک و برای لایه میانی مواد همسانگرد ویسکوالاستیک از جنس فوم پلی‌وینیل‌کلراید در نظر گرفته شد. تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد پانل، ضخامت هسته و لایه‌های جانبی، مدت ضربان و بیشینه فشار وارد شده روی پاسخ دینامیکی غیرخطی و مقاومت کمانشی پانل ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده در این مقاله با نتایج ارائه شده در مقالات دیگر و همچنین نتایج به‌دست آمده از حل المان محدود در نرم‌افزار **Ansys** برای پانل‌های سه لایه مقایسه شده و دقت خوبی مشاهده شده است. نشان داده شده است که با افزایش ضخامت پانل یا کاهش شعاع آن، مقاومت کمانش دینامیکی ضربانی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: کمانش دینامیکی، پانل ساندویچی استوانه‌ای، هسته انعطاف‌پذیر، انفجار، پاسخ غیرخطی.

Non-linear Response and Dynamic Buckling Analysis of a Cylindrical Sandwich Panel with a Flexible Core under Blast Loading

S. A. Ahmadi, M. H. Pashaei*, and R. A. Jafari-Talookolaei

Department of Mechanical Engineering, Babol Noushirvani University of Technology, Babol, Iran.

Abstract: *In this paper, three-dimensional displacement response of a cylindrical sandwich panel with compressible core under the action of dynamic pulse loading is addressed using the extended high order sandwich panel theory. Also, local dynamic pulse buckling of facesheets is studied by considering the Budiansky-Roth buckling criterion. It is assumed that the sandwich panels consist of orthotropic face sheets and an isotropic viscoelastic foam core layer. The effects of various parameters including the panel span, core and facing thickness, pulse duration and maximum pressure on the non-linear dynamic response and buckling strength of the sandwich cylindrical panel are studied. The results obtained from the present method are compared with finite element solutions using the commercial software ANSYS and those reported in the literature, showing a good agreement. It is revealed that applied core non-linear theory could be satisfactory for the dynamic pulse response of sandwich*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:mpashaei@nit.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]

viscoelastic panels. It is also shown that the pulse buckling strength of panel increases with a decrease of the panel radius or an increase of the panel thickness.

Keywords: *Dynamic buckling, Cylindrical sandwich panel, Compressible core, Blast, Nonlinear response.*

فهرست علائم

$A(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای محیطی	t_d	زمان اعمال بار دینامیکی
a_c	شعاع میانی پانل	u	مؤلفه محوری تغییر مکان
$B(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای شعاعی	u_0	مؤلفه محوری تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
$C(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای محوری	v	مؤلفه محیطی تغییر مکان
C_{ij}	ثابت‌های ماتریس سختی پانل برای لایه‌های مختلف	v_0	مؤلفه محیطی تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
E_{ij}	مدول الاستیسیته	w	مؤلفه شعاعی تغییر مکان
h_b	ضخامت لایه جانبی پایینی	w_0	مؤلفه شعاعی تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
h_t	ضخامت لایه جانبی بالایی	x	مختصات محوری پانل
h_c	ضخامت هسته	z	مختصات شعاعی پانل
H	ضخامت کل پانل	$\boldsymbol{\beta}$	زاویه پانل
L	طول پانل	ε_{ij}	کرنش در لایه‌ها
m	تعداد مود تغییرشکل در راستای محیطی	η	ضریب ویسکوالاستیک
n	تعداد مود تغییرشکل در راستای طولی	θ	مختصات محیطی پانل
$P(t)$	بارگذاری ضربانی	ν_{ij}	ضریب پواسون
P_0	بیشینه فشار ضربانی	σ_{ij}	تنش در لایه‌ها
t	زمان		

۱- مقدمه

ساختارهای ساندویچی به‌دلیل ویژگی‌هایی از جمله نسبت سختی و مقاومت به وزن بالا در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کنار این موارد، ویژگی‌هایی مانند مقاومت به خوردگی بهتر، خواص راداری و مغناطیسی عالی و غیره موجب شد این ساختارها به‌طور گسترده‌ای در صنایع دریایی و به‌ویژه شناورهای نظامی مورد توجه قرار داده شوند. با درنظر گرفتن این چنین کاربردهایی احتمال قرارگیری در معرض شوک‌های انفجار در هوا و یا زیر آب برای سازه‌های ساندویچی وجود دارد. بنابراین تحلیل پاسخ آن به بارگذاری وارد شده به‌منظور تحلیل ایمنی و بهینه‌سازی‌های مورد نظر ضروری خواهد بود.

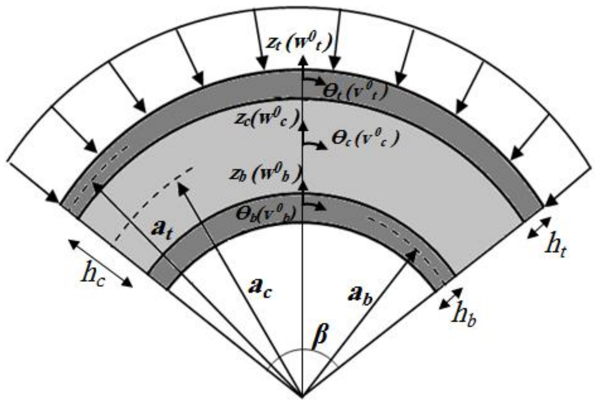
تحقیقات انجام شده در زمینه مواد مورد استفاده در صنایع دریایی نظامی نشان می‌دهد فوم‌های پلی‌وینلی کلراید (PVC) که به‌عنوان هسته در سازه‌های ساندویچی به‌طور فراوان مورد استفاده قرار می‌گیرند به‌دلیل ساختار سلولی خاص، در شرایط قبل و بعد از خرابی از خود رفتار ویسکو الاستیک نشان می‌دهند [۱].

مطالعات گسترده‌ای در حوزه تحلیل رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی در معرض بارگذاری انفجار انجام شده است که بررسی آنها نشان می‌دهد ورق‌های ساندویچی بیشتر از سازه‌های دیگر مورد توجه قرار گرفته‌اند. کشاو و پاتل [۲] یک حل المان محدود برای تحلیل کمانش دینامیکی

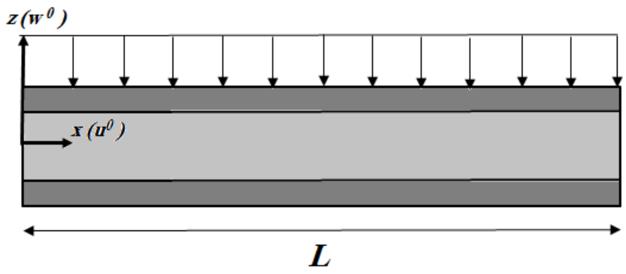
پوسته‌های منحنی کامپوزیتی در معرض بارهای داخل صفحه‌ای ارائه دادند. در این مطالعه از معیار ولمیر به‌منظور پیش‌بینی ناپایداری دینامیکی سازه استفاده شده است. تحلیل غیرخطی کمانش دینامیکی حرارتی در شرایط متقارن محوری روی پوسته‌های بیضوی و مخروطی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی توسط سانکار و همکاران انجام شد [۳]. نگوین و همکاران [۴] به تحلیل عددی رفتار دینامیکی و کمانش ورق‌های ساندویچی با لایه‌های جانبی چندتکه تحت بارگذاری انفجار پرداختند. اثر انحنا روی پاسخ پوسته‌های ساندویچی در معرض فشار انفجار توسط شن و همکاران [۵] به‌صورت آزمایشگاهی مورد توجه قرار گرفت و نشان داده شد سه تفاوت عمده بین پاسخ ورق و پوسته استوانه‌ای ساندویچی تحت بارگذاری انفجار وجود دارد که عبارتند از: ۱) کاهش ضربه بر روی لایه بیرونی، ۲) چروکیدگی لایه درونی به‌عنوان یک مدل جدید خرابی و ۳) الگوی تغییرشکل متفاوت پانل استوانه‌ای ساندویچی نسبت به دو الگوی موجود در ورق ساندویچی. هو فت و پالا [۶] یک مدل تحلیلی به منظور تحلیل رفتار دینامیکی و شروع خرابی پانل‌های استوانه‌ای ساندویچی دایره‌ای با هسته‌ای از جنس پلی وینلی‌کلراید تحت بارگذاری انفجار ارائه کردند. آنها همچنین مدل‌های تحلیلی به‌منظور پیش‌بینی پاسخ تغییرمکان پانل‌های تخت، یک انحنا و دو انحنا ارائه دادند [۹-۷]. یک حل عددی برای کمانش موضعی ضربانی پانل‌های ساندویچی کامپوزیتی تک‌انحنا با استفاده از معادلات حرکت لاگرانژ توسط ژائو و هو [۱۰] ارائه شد. در این مطالعه از معیار بادیانسکی- راس بهره گرفته شد تا بتوان حالت ناپایداری پانل ساندویچی را پیش‌بینی کرد. برای پانل‌های با ضخامت بیشتر، احتمال رخداد کمانش دینامیکی کاهش پیدا می‌کند و پانل در معرض شکست لایه‌ها جانبی قرار خواهد گرفت. در مطالعه دیگری که توسط سیریولو و هو [۱۱] ارائه شد، کمانش دینامیکی ضربانی و رفتار ارتعاشی یک پانل کامپوزیتی دوانحنا تحت بارگذاری انفجار بررسی شد. در این تحقیق معادلات حاکم با استفاده از تئوری غیرخطی نووژیلوف و معادلات حرکت لاگرانژ و به کارگیری معیار بادیانسکی-راس به‌دست آمد. بیرمن و اسمیتسز [۱۲] از تئوری پوسته‌های ساندرز استفاده کردند تا پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای بلند ساندویچی را تحت بارگذاری فشار دوره‌ای هیدرودینامیکی بررسی کنند.

مطالعه منابع مختلف نشان می‌دهد در زمینه تحلیل رفتار دینامیکی پانل‌های ساندویچی استوانه‌ای تشکیل شده از هسته با خواص ویسکوالاستیک تحت بارگذاری انفجار کارهای اندکی صورت گرفته است. بالکان و همکاران [۱۳] پاسخ گذرای ورق‌های ساندویچی با تکیه‌گاه ساده تحت بار انفجار را مورد بررسی قرار دادند. در پژوهش ذکر شده از مدل ساختاری خطی کلوین- وویت برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک هسته استفاده شد. پاسخ بسامدی و ضریب اتلاف پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته ویسکو الاستیک توسط مختاری و همکارن [۱۴] مورد توجه قرار گرفت. از روش لاگرانژ و رایلی- ریتز جهت حل معادلات دیفرانسیل حرکت در این مطالعه استفاده شد. محمدی و صداقتی [۱۵] با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی به مطالعه ارتعاشات خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک پرداختند.

در بیشتر تحلیل‌های موجود صورت گرفته روی پانل‌های ساندویچی از تئوری‌های کلاسیک و یا برشی مرتبه اول استفاده می‌شود که به‌دلیل در نظر نگرفتن قابلیت تغییرشکل در هسته، موجب ایجاد خطاهایی در پیش‌بینی تغییرشکل، مودهای خرابی و همچنین ظرفیت جذب انرژی این سازه‌ها شده است. شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده توسط لیانگ و همکاران [۱۶] و نتایج آزمایشگاهی [۱۷] نشان می‌دهد که هنگامی که پانل ساندویچی در معرض بارگذاری انفجار قرار می‌گیرد، هسته دستخوش تغییرات قابل توجهی می‌شود. کاردومیتس و همکاران [۱۸] با استفاده از نظریه ارتجاعی سه‌بعدی خطی، پاسخ انفجاری ورق ساندویچی را بررسی کردند. مقایسه نتایج آنها نشان داد تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نمی‌تواند به



(الف)



(ب)

شکل ۱- مشخصات هندسی و مختصات پانل ساندویچی، الف) نمای دوبعدی در صفحه (z, θ) و ب) نمای دوبعدی در صفحه (x, z)

درستی رفتار پوسته ساندویچی را نشان دهد. لی و کاردومیتس [۱۹] یک تئوری مرتبه بالای جدید برای ورق‌های ساندویچی در حالت الاستیک ارائه کردند که قابلیت فشرده‌سازی هسته را در نظر می‌گیرد. نظریه ارائه شده با نتایج به‌دست آمده از نظریه ارتجاعی، مطابقت بسیار خوبی داشت. لی و همکاران [۲۰] پاسخ غیرخطی یک پوسته دو انحنا را با استفاده از تئوری مرتبه بالای ارائه شده توسط لی و کاردومیتس تحت بارگذاری انفجاری مطالعه کردند.

در این مقاله رفتار دینامیکی غیرخطی پانل استوانه‌ای ساندویچی با هسته فوم تحت بارگذاری انفجار در هوا مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از معیار بادیانسکی- راس [۲۱]، رفتار دینامیکی پانل مورد بررسی قرار گرفت و تحلیل کمانش دینامیکی صفحات جانبی روی آن انجام شد. یک تئوری پوسته ساندویچی مرتبه بالا جهت مدل‌سازی تغییرشکل هسته در طول فرایند بارگذاری در نظر گرفته شده است. لایه‌های داخلی و خارجی پانل از مواد اورتوتروپیک و لایه میانی آن از فوم‌های پلی‌وینیل کلراید تشکیل شده است. معادلات دیفرانیسل سه‌بعدی حاکم بر مسئله با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی لایه‌ها به‌دست آمده و با استفاده از روش عددی رانگ- کوتا حل شده‌اند.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

در شکل (۱) یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی به شعاع میانی a_c، طول L و ضخامت لایه‌های جانبی h_b و h_t و لایه میانی h_c

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]

(ضخامت کل $H=h_t+h_b+h_c$) تحت اثر بار انفجاری روی سطح بیرونی پانل نشان داده شده است. فرض شده لایه‌های بیرونی و درونی پانل از جنس مواد اورتوتروپیک بوده و لایه میانی آن از فوم تشکیل شود. بارگذاری فشار یکنواخت خارجی ناشی از یک انفجار به‌صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$P(t)=\begin{cases} P_0(1-\dfrac{t}{t_d})e^{-\frac{t}{t_d}} & ,\quad t<t_d \\ 0 & ,\quad t>t_d \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن P_0 بیان کننده بیشینه فشار اعمال شده و t_d برابر با زمان اعمال فشار ضربانی است. مطابق با آنچه در شکل (۱) نشان داده شده است مؤلفه‌های تغییرمکان u، v و w برای سه راستای محوری (x)، محیطی (θ) و شعاعی (z) پانل برای هر کدام از لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن این مورد که لایه‌های بالایی و پایینی فرضیات کیرشهف-لاو را ارضا کنند، مؤلفه‌های جابه‌جایی برای این لایه‌ها برحسب جابه‌جایی‌های صفحه میانی آنها بر اساس تئوری دانل [۲۲] به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

لایه بالایی:

$$\begin{aligned} u_t(z,\theta,x,t) &= u^t_0(\theta,x,t)-\left(z-\frac{h_c+h_t}{۲}\right).\left(\frac{\partial}{\partial x}w^t_0(\theta,x,t)\right) \\ v_t(z,\theta,x,t) &= v^t_0(\theta,x,t)-\frac{۱}{a_t}\left(z-\frac{h_c+h_t}{۲}\right).\left(\frac{\partial}{\partial\theta}w^t_0(\theta,x,t)-v^t_0(\theta,x,t)\right) \\ &\frac{h_c}{۲}<z<\frac{h_c}{۲}+h_t \\ w_t(z,\theta,x,t) &= w^t_0(\theta,x,t) \end{aligned} \qquad (۲)$$

لایه پایینی:

$$\begin{aligned} u_b(z,\theta,x,t) &= u^b_0(\theta,x,t)-\left(z+\frac{h_c+h_b}{۲}\right).\left(\frac{\partial}{\partial x}w^b_0(\theta,x,t)\right) \\ v_b(z,\theta,x,t) &= v^b_0(\theta,x,t)-\frac{۱}{a_b}\left(z+\frac{h_c+h_b}{۲}\right).\left(\frac{\partial}{\partial\theta}w^b_0(\theta,x,t)-v^b_0(\theta,x,t)\right) \\ &-\frac{h_c}{۲}-h_b<z<-\frac{h_c}{۲} \\ w_b(z,\theta,x,t) &= w^b_0(\theta,x,t) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن اندیس t و b به‌ترتیب برای لایه بالایی و پایینی و i=c برای لایه میانی به‌کار برده می‌شود. همچنین z مختص شعاعی هر لایه در صفحه میانی همان لایه است. در نظر گرفتن قابلیت فشرده‌سازی هسته در راستای شعاعی عاملی تأثیرگذار در محاسبات جذب انرژی پانل ساندویچی در بارگذاری انفجار محسوب می‌شود. به این منظور تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالا و همچنین نظریه ارتجاعی سه‌بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله از تئوری مرتبه بالای برشی ارائه شده در مرجع [۱۹] برای هسته انعطاف‌پذیر، استفاده شده است که بر اساس آن رابطه (۴) برای جابه‌جایی‌های هسته به‌دست آمده است:

$$\begin{aligned} u^c(z,\theta,x,t) &= \frac{۱}{۲}\left(u^t_0(\theta,x,t)+u^b_0(\theta,x,t)\right)+ \\ &\frac{z}{h_c}\left(u^t_0(\theta,x,t)-u^b_0(\theta,x,t)\right)+ \\ &\frac{zh_t}{h_c}\frac{\partial}{\partial x}w^c(z,\theta,x,t) \\ v^c(z,\theta,x,t) &= \frac{۱}{۲}\left(v^t_0(\theta,x,t)+v^b_0(\theta,x,t)\right)+ \\ &\frac{z}{h_c}\left(v^t_0(\theta,x,t)-v^b_0(\theta,x,t)\right) \\ &\frac{zh_t}{(z+a_c)h_c}\frac{\partial}{\partial\theta}w^c(z,\theta,x,t)+\quad , \\ &-\frac{h_c}{۲}<z<\frac{h_c}{۲} \\ w^c(z,\theta,x,t) &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲z^۲}{h_c^۲}+\frac{۸z^۴}{h_c^۴}\right)\left(w^t_0(\theta,x,t)+w^b_0(\theta,x,t)\right)+ \\ &\frac{۱}{۲}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{۴z^۳}{h_c^۳}\right)\left(w^t_0(\theta,x,t)-w^b_0(\theta,x,t)\right)+ \\ &\left(۱-\frac{۲z^۲}{h_c^۲}-\frac{۸z^۴}{h_c^۴}\right)w^c_0(\theta,x,t) \end{aligned} \qquad (۴)$$

مطابق با روابط ساختاری ارائه شده برای مواد اورتوتروپیک می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{۱۱} \\ \sigma_{۲۲} \\ \sigma_{۳۳} \\ \tau_{۲۳} \\ \tau_{۳۱} \\ \tau_{۱۲} \end{bmatrix}^{b,t,c} = \begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} & C_{۱۳} & 0 & 0 & 0 \\ C_{۱۲} & C_{۲۲} & C_{۲۳} & 0 & 0 & 0 \\ C_{۱۳} & C_{۲۳} & C_{۳۳} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{۴۴} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{۵۵} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{۶۶} \end{bmatrix}^{b,t,c} \begin{bmatrix} \varepsilon_{۱۱} \\ \varepsilon_{۲۲} \\ \varepsilon_{۳۳} \\ \varepsilon_{۲۳} \\ \varepsilon_{۳۱} \\ \varepsilon_{۱۲} \end{bmatrix}^{b,t,c} \qquad (۵)$$

در این رابطه اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب برای راستاهای شعاعی، محیطی و محوری استفاده شده است و C_{ij} ثوابت

ماتریس سختی برای هر لایه است که با استفاده از این روابط محاسبه می‌شوند:

$$C_{11}=\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta},\quad C_{12}=\frac{\nu_{21}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_{22}E_{33}\Delta}$$
$$C_{22}=\frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_{11}E_{33}\Delta},\quad C_{13}=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_{11}E_{33}\Delta}$$
$$C_{33}=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_{22}E_{11}\Delta},\quad C_{23}=\frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_{22}E_{11}\Delta}$$
$$C_{44}=G_{23},\ C_{55}=G_{31},\ C_{66}=G_{12}$$

$$\Delta=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2.\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_{11}E_{22}E_{33}} \qquad (۶)$$

بر اساس مطالعات تحلیلی و آزمایشگاهی انجام شده در مرجع [۱]، فوم‌ها پلی‌وینلی‌کلراید که به‌عنوان هسته در سازه‌های ساندویچی در صنایع دریایی کاربرد فراوانی دارند، در فرایند تغییرشکل از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند. بر اساس این مطالعه این فوم‌ها در محدوده تغییرشکل‌های کوچک و قبل از رسیدن به تسلیم، دارای رفتار ویسکوالاستیک خطی هستند. بعد از رسیدن به تسلیم رفتار پلاستیک کامل از آنها دیده می‌شود. در این مقاله به‌منظور مطالعه تأثیر خاصیت ویسکوالاستیک روی پاسخ غیرخطی تغییر مکان و رفتار کمانش دینامیکی یک پانل ساندویچی، یک مدل ساده ویسکوالاستیک خطی مورد توجه قرار داده شده است. برای مدل‌سازی خواص مکانیکی هسته از مدل خطی کلووین– وویت [۲۳] استفاده می‌شود. بر این اساس تنش‌های برشی با کرنش‌های برشی و نرخ تغییرات آن مطابق با رابطه (۷) مرتبط می‌شود:

$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}+\eta.\frac{d}{dt}.\{\varepsilon\} \qquad (۷)$$

که در آن η ضریب ویسکوالاستیک ماده هسته است. روابط غیرخطی کرنش– جابه‌جایی برای لایه‌ها بر اساس مؤلفه‌های غیرخطی ون– کارمن بیان می‌شوند. فرض شده است صفحات جانبی، رفتار پوسته نازک را داشته باشند. بنابراین طبق فرضیات کیرشهف– لاو تغییر مکان‌ها در راستای طولی u و محیطی v کوچک بوده و می‌توان از مشتقات مراتب بالای آن در روابط صرف‌نظر کرد. بنابراین تنها مشتقات مرتبه بالای w در معادلات باقی می‌مانند. فرم معادلات کرنش– جابه‌جایی برای صفحات جانبی چنین بیان شده است [۲۲]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}\\
\varepsilon_{\theta x}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)+\frac{1}{2(z+a_i)}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big)\\
\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\\
\varepsilon_{z\theta}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{v}{z+a_i}\Big)\\
\varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{z+a_i}+\frac{1}{2(z+a_i)^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big)^2\\
\varepsilon_{zx}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)
\end{aligned} \qquad (۸)$$

در رابطه (۸)، a_i شعاع میانی هر کدام از لایه‌ها است. از معادلات حرکت حاکم براساس روابط سه‌بعدی نظریه ارتجاعی در این مطالعه استفاده شده است [۱۸]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{zz}-\sigma_{\theta\theta}}{z+a_i}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\sigma_{\theta x}}{\partial x}+\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\sigma_{z\theta}}{z+a_i}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{z+a_i}\frac{\partial\sigma_{x\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+\frac{\sigma_{zx}}{z+a_i}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned} \qquad (۹)$$

۳- روش حل مسئله

همان‌طور که قبلا اشاره شد، شرایط مرزی ساده در چهار لبه پانل در نظر گرفته شده است. بر اساس آن می‌توان مؤلفه‌های جابه‌جایی در سه راستا را برای هرکدام از لایه‌ها به‌صورت سری زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
u^t_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}B^t_{mn}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
v^t_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A^t_{mn}(t)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
w^t_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C^t_{mn}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
w^c_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}B^c_{mn}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
u^b_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}B^b_{mn}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
v^b_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A^b_{mn}(t)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi\theta}{\beta}\\
w^b_0(\theta,x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C^b_{mn}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi\theta}{\beta}
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]

با جایگذاری عبارات (۱۰) در روابط کرنش– جابه‌جایی و تنش کرنش برای هر لایه و انتگرال‌گیری از معادلات حرکت (۹) در راستای ضخامت، درنهایت هفت معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر حرکت پوسته ساندویچی برای مؤلفه‌ها $(u^t, v^t, w^t, w^c, u^b, v^b, w^b)$ به‌دست خواهند آمد. ضرایب این معادلات در پیوست ارائه شده است.

$$
\begin{aligned}
&P_0(1-\frac{t}{t_d})e^{-\frac{t}{t_d}} - c^c_{11}.L11 - c^c_{12}.L12 + c^c_{13}.L13 \\
&+c^t_{66}.L14 + c^t_{22}.L15 - c^t_{23}.L16 - \rho_t.L17 = 0 \\
&c^c_{66}.L21 + \eta.\frac{\partial L21}{\partial t} + c^t_{22}L22 + c^t_{23}.L23 + c^t_{44}.L24 \\
&+c^t_{66}.L25 - \rho_t.L26 = 0 \\
&c^c_{55}.L31 - \eta.\frac{\partial L31}{\partial t} + c^t_{44}.L32 + c^t_{23}.L33 \\
&+c^t_{33}.L34 - \rho_t.L35 = 0 \\
&c^c_{11}.L41 + c^c_{12}.L42 + c^c_{13}.L43 + c^c_{22}.L44 + c^c_{23}.L45 \\
&+c^c_{55}.L46 + c^c_{66}.L47 \\
&+\eta.\frac{\partial(L46 + L47)}{\partial t} + \rho_c.L48 = 0 \\
&c^c_{55}.L51 + \eta\frac{\partial L51}{\partial t} + c^b_{44}.L52 + c^b_{23}.L53 + c^b_{33}.L54 \\
&-\rho_b.L55 = 0 \\
&c^c_{66}.L61 + \eta\frac{\partial L61}{\partial t} + c^b_{22}.L62 + c^b_{23}.L63 + c^b_{44}.L64 \\
&+c^b_{66}.L65 + \rho_b.L66 = 0 \\
&c^c_{11}.L71 + c^c_{12}.L72 + c^c_{13}.L73 + c^b_{66}.L74 - \rho_b.L75 \\
&-c^b_{22}.L76 - c^b_{23}.L77 = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

برای حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مختلف روش‌های تک‌گامی، چندگامی و روش‌های برون‌یابی قابل استفاده است. در این مقاله از روش رانگ– کوتای موجود در بسته نرم‌افزاری Maple برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به‌دست آمده، استفاده می‌شود. دلیل استفاده از روش رانگ کوتا با خطای مرتبه چهارم در این مقاله این نکته است که به‌دلیل سرعت بالای زمان اعمال بارگذاری و همچنین بازه زمانی کوتاه اعمال بار و در نتیجه بازه کوتاه تحلیل مسئله این روش دارای دقت محاسباتی بیشتری است. پانل‌های مورد تحلیل در این مقاله جزو پانل‌های کم‌عمق هستند و زاویه دهانه کوچک‌تر از ۳۰ درجه دارند. بنابراین در رفتار پاسخ دینامیکی الاستیک از تقریب تک‌جمله استفاده شده است. در تحلیل کمانش دینامیکی تحت بارگذاری ضربانی مطابق با آنچه در [۲۴] آمده است، این احتمال وجود دارد که شکل مودهای بالاتر سازه برانگیخته شود. از این‌رو با مطالعه همگرایی روی نتایج به‌دست آمده، برای تحلیل کمانش دینامیکی ضربانی پنج جمله از سری یعنی m=n=۰ تا m=n=۴ استفاده شده است. بر این اساس، معادلات دیفرانسیل معمولی برحسب متغیرهای زمانی به صورت زیر نوشته می‌شود.

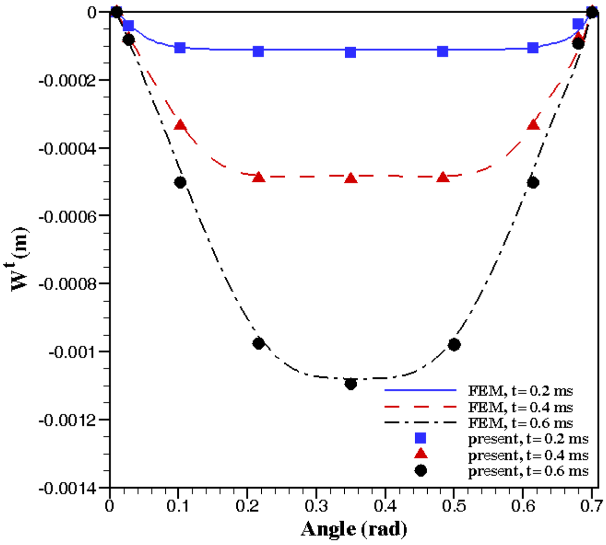
$$
[M_{mn}]\ddot{x}_{mn}(t) + [C_{mn}]\dot{x}_{mn}(t) + [K_{mn}]x_{mn}(t) = P_{mn}(t)
\tag{12}
$$

که در آن $[M_{mn}]$ ماتریس جرمی معادل، $[C_{mn}]$ ماتریس ضرایب میرایی و $[K_{mn}]$ ماتریس سختی است. این دستگاه معادلات با استفاده از بسته حلگر رانگ-کوتا حل می‌شود.

۴- نتایج و بحث

در مقاله ارائه شده پاسخ یک پوسته ساندویچی استوانه‌ای با هسته ویسکوالاستیک تحت تأثیر بار انفجاری مورد مطالعه قرار گرفته است. از عبارت‌های غیرخطی کرنش- جابه‌جایی به‌منظور شبیه‌سازی رفتار هسته استفاده شده است. همچنین به‌منظور در نظر گرفتن قابلیت فشرده‌سازی هسته در طول فرایند بارگذاری، یک تئوری مرتبه بالا جهت مدل‌سازی رفتار جابه‌جایی هسته به‌کار گرفته شده است. از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم در نرم‌افزار Maple جهت حل معادلات استفاده شد. به‌منظور اعتبارسنجی نتایج، تغییرمکان خط مرکزی پانل به‌دست آمده از حل غیرخطی ارائه شده در مقاله و حل المان محدود توسط نرم‌افزار Ansys در شکل (۲) آورده شده است. پانل مورد نظر دارای ضخامت صفحات جانبی $h_{t,b}$= ۵ mm، ضخامت هسته h_c= ۴۰ mm، شعاع صفحه میانی a_c= ۱ m و طول و عرض L=b(a_c×β) = ۰/۷ m است. خواص مواد به‌کار رفته برای لایه‌های این پانل و پانل‌های ساندویچی که در کل مقاله نتایج آنها ارائه می‌شود در جدول (۱) ارائه شده است. با توجه به همخوانی مناسب نتایج در شکل (۲) می‌توان چنین برداشت کرد که فرمول‌بندی ارائه شده و روش حل مورد نظر دارای دقت خوبی در محاسبه نتایج تغییرشکل برای پانل‌های

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]



شکل ۲- مقایسه نتایج به‌دست آمده از تحلیل غیرخطی با نتایج حل المان محدود در نرم‌افزار Ansys

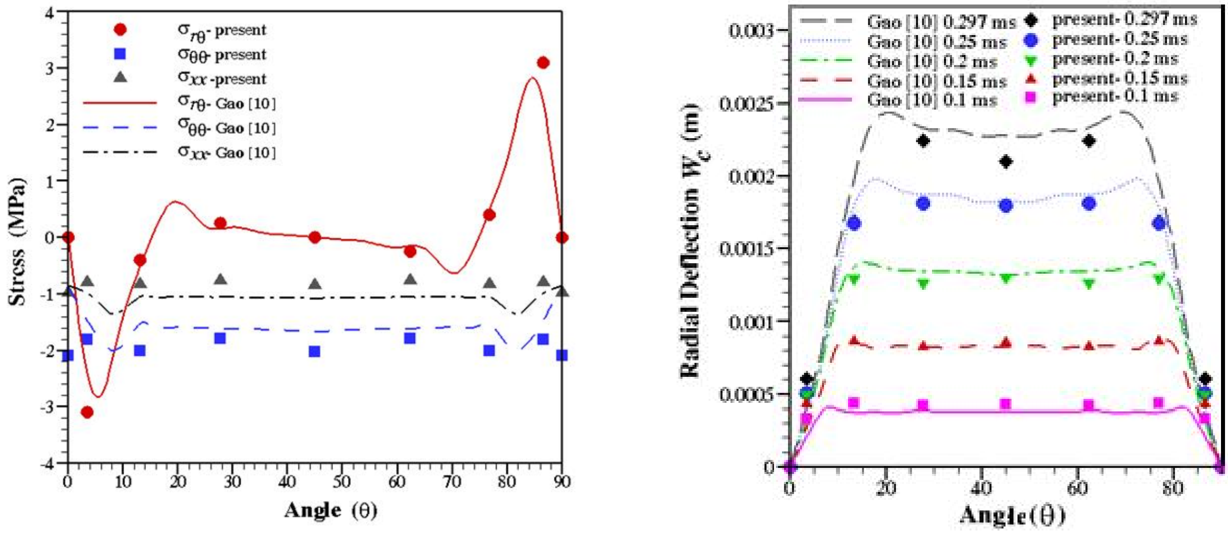
جدول ۱- ابعاد هندسی و خواص مواد به کارگرفته شده برای لایه‌های جانبی و هسته پانل ساندویچی

	$E_{۱۱}$ (GPa)	$E_{۲۲}$ (GPa)	$E_{۳۳}$ (GPa)	$\nu_{۱۳}$	$\nu_{۲۳}$	$\nu_{۱۲}$	$G_{۲۳}$ (GPa)	$G_{۳۱}$ (GPa)	$G_{۱۲}$ (GPa)	ρ $kg/m^۳$
شیشه / اپوکسی	۷/۴۸	۱۷	۱۷	۰/۲۸	۰/۱۲	۰/۱۲	۴	۱/۷۳	۱/۷۳	۱۳۹۱
فوم PVC	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵	۲۵۰

ساندویچی در معرض بارگذاری دینامیکی ضربانی است. همچنین نمایان است تقریب تک‌جمله استفاده شده برای تحلیل پاسخ دینامیکی نتایج قابل قبولی برای این دستهاز پانل‌ها ارائه می‌دهد. از المان سه‌بعدی غیرخطی سالید[1] که از خود رفتار تغییر مکان مرتبه دوم را نشان می‌دهد و برای مدلسازی رفتار الاستیک که تغییرشکل و کرنش‌های بزرگ مناسب است، در نرم‌افزار Ansys استفاده شده است. با توجه به در نظر گرفتن شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های پانل، مؤلفه‌های تغییر مکان و مشتقات مرتبه دوم آنها در چهار لبه صفر در نظر گرفته شده‌اند. در بسته نرم‌افزار Ansys، از روش حل ضمنی ترنزینت[2] استفاده شده است که انتگرال زمانی در آن با استفاده از الگوریتم نیومارک تخمین زده می‌شود. با مطالعه همگرایی نتایج در نرم‌افزار Ansys، برای تحلیل‌های دینامیکی در شرایط مختلف و تعداد نقاط شبکه‌بندی متفاوت، تعداد المان‌های ۵۰۰۰۰ برای هسته و ۲۵۰۰۰ برای لایه‌های جانبی در نظر گرفته شده است

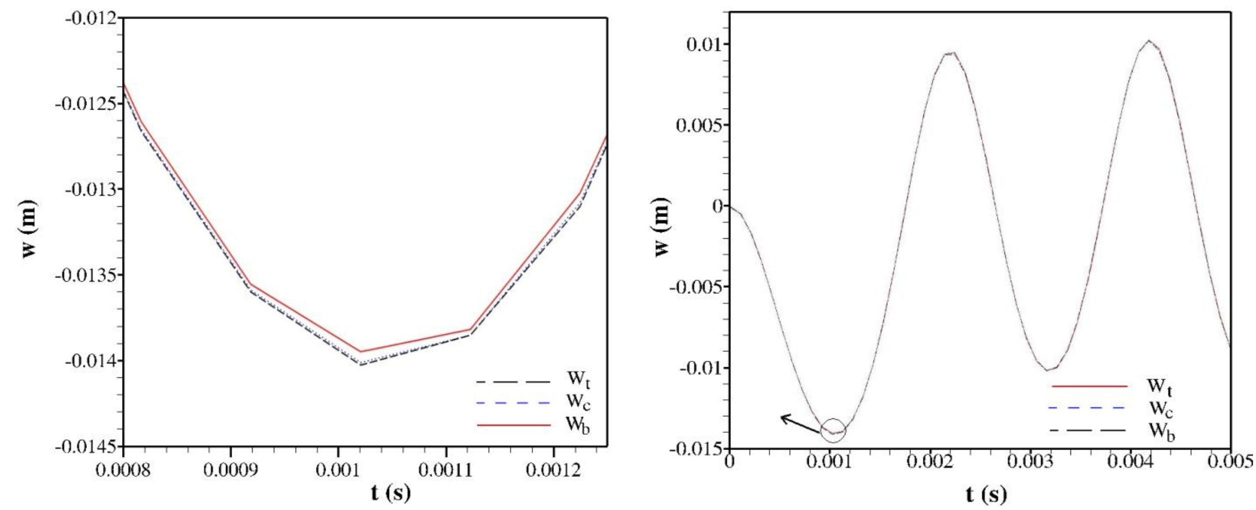
در راستای صحت‌سنجی نتایج غیرخطی ارائه شده، تغییرمکان‌های راستای مرکزی یک پانل ساندویچی بلند به‌همراه تنش‌های ایجاد شده در هسته در زمان t=۰/۲۹۵ s تحت بارگذاری، مطابق با آنچه در [۱۰] بدان اشاره شده است، در شکل (۳) مشاهده می‌شود. مقایسه تغییرمکان‌های به‌دست آمده در این شکل نشان از دقت بالای معادلات و روش ارائه شده در این مقاله دارد.

پس از بررسی صحت روش ارائه شده، در ادامه به‌منظور مطالعه قابلیت فشرده‌شدن هسته نتایج برای تغییرمکان‌های سطح میانی پوسته ساندویچی در بین زمان‌های صفر تا ۵ میلی‌ثانیه ارائه می‌شود. به این منظور ابعاد ثابتی از پانل به ضخامت صفحات جانبی $h_{t,b}$= ۵ mm، ضخامت هسته h_c= ۴۰ mm، شعاع صفحه میانی a_c= ۱ m و طول و عرض $L=b=(a_c \times \beta)$ = ۰/۵ m



(ب) (الف)

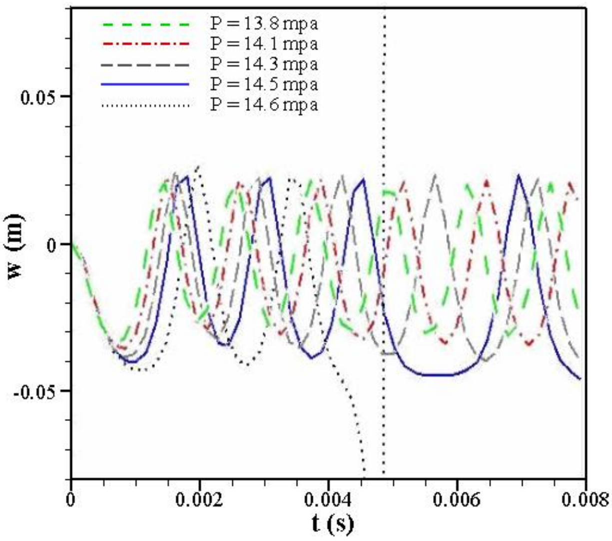
شکل ۳- مقایسه نتایج به‌دست آمده از حل غیرخطی با نتایج مرجع [۱۰]، الف) جابه‌جایی مرکز پانل در راستای محیطی، ب) تنش‌های هسته در راستای محیطی



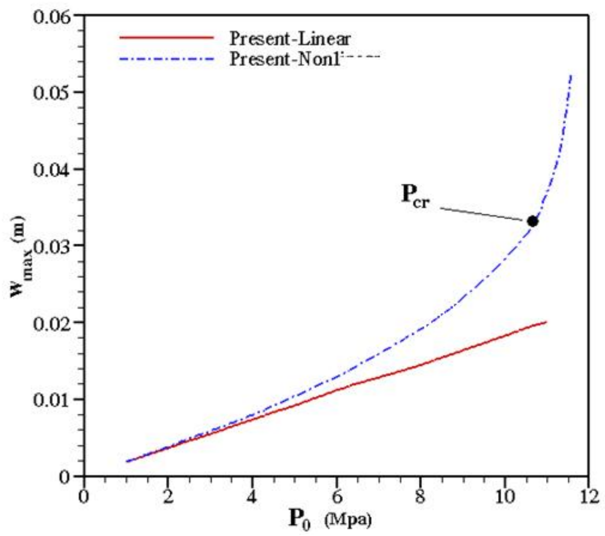
شکل ۴- تغییرمکان شعاعی مرکز لایه‌های پانل به‌دست آمده از حل معادلات در حالت غیرخطی

مدنظر قرار گرفته است. فشار جانبی ضربانی روی سطح بیرونی پانل اعمال می‌شود و در تمامی موارد پانل دارای شعاع داخلی R_1=۱m است. همچنین فشار بیشینه اعمالی به مقدار P_0=۲MPa و زمان ضربان t_d =۲ میلی‌ثانیه خواهد بود. خواص مواد لایه‌های جانبی و همین طور هسته در جدول (۱) داده شده است. تغییر مکان شعاعی وابسته به زمان مرکز لایه‌های پانل که با استفاده از حل معادلات غیرخطی به‌دست آمده‌اند، در شکل (۴) قابل مشاهده است. مطابق با آنچه در شکل‌های سمت چپ برای محدوده زمانی بسیار کوچک مشخص شده است، میزان تغییرمکان درلایه‌های مختلف پانل با یکدیگر متفاوت است و وابسته به میزان بارگذاری و ابعاد پانل می‌تواند مقادیر قابل توجهی به خود گیرند.

یکی از مزایای استفاده از روابط غیرخطی در حل معادلات پاسخ زمانی سازه، تحلیل رفتار تغییرشکل‌های بزرگ و



شکل ۵- پاسخ زمانی جابه‌جایی شعاعی مرکز پانل به ازای مقادیر مختلف دامنه فشار ضربانی

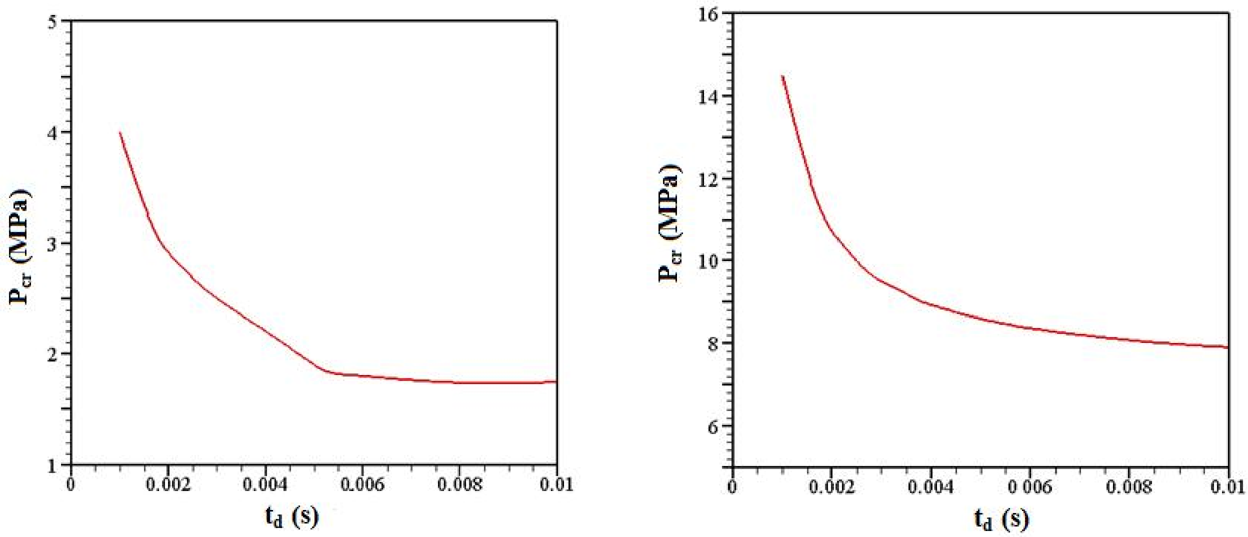


شکل ۶- نمودار پایداری پانل ساندویچی

ناپایداری آنها تحت بارگذاری‌های مختلف است. در این مقاله به‌منظور تخمین حالت ناپایداری پانل ساندویچی از معیار بادیانسکی- راس [۲۱] استفاده شده است. بر این اساس زمانی سازه به حالت ناپایداری خواهد رسید که به‌ازای یک تغییر کوچک در مقدار فشار دینامیکی ضربانی، تغییرات زیادی در تغییر مکان آن حاصل شود. در شکل (۵) نتایج برای یک پانل ساندویچی با ضخامت صفحات جانبی $h_{t,b}$= ۵ mm، ضخامت هسته h_c= ۴۰ mm، شعاع صفحه میانی a_c= ۱ m و طول و عرض $L=b=(a_c\times\beta)$ = ۰/۳ m تحت بارگذاری فشار دینامیکی ضربانی با زمان اعمال بار t_d = ۰/۰۰۱ s نشان داده شده است. در شکل می‌توان دید به‌ازای یک تغییر کوچک در بیشینه فشار اعمالی از ۱۴/۵ به ۱۴/۶ مگاپاسگال، تغییرمکان لایه جانبی بسیار بزرگ می‌شود. منحنی تغییرات جابه‌جایی بیشینه لایه جانبی پانل به‌ازای مقادیر مختلف دامنه بارگذاری برای بار ضربانی با زمان اعمال بار t_d = ۰/۰۰۲ s در شکل (۶) نشان داده شده است. شکل (۶) به روشنی نشان می‌دهد تحلیل خطی پاسخ تغییرمکان پانل، توانایی نشان دادن رفتار واقعی آن را ندارد. همچنین مشخص است که در فشار ۱۰/۷ مگاپاسگال پانل به شرایط ناپایداری دینامیکی خود خواهد رسید.

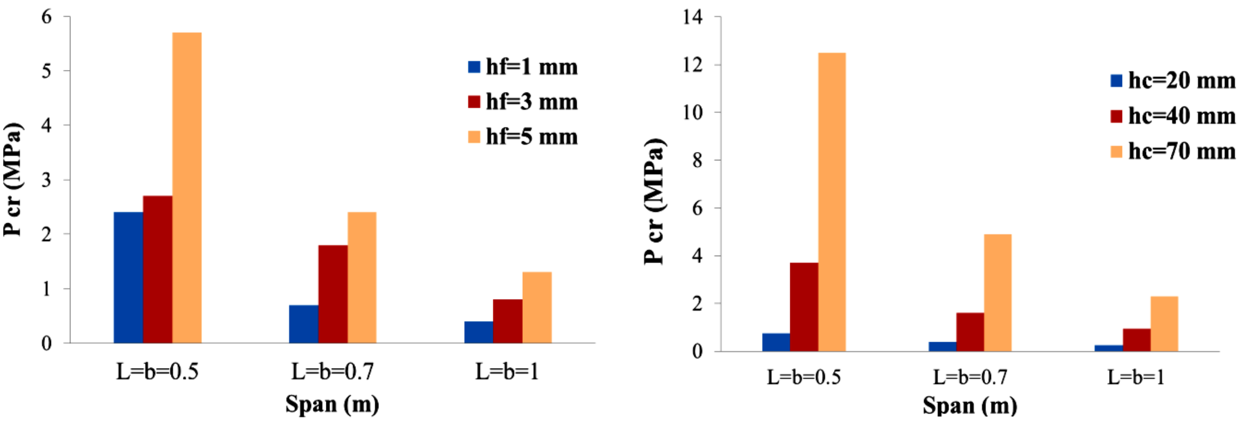
در ادامه نمودار پایداری برای پانل‌های ساندویچی با ضخامت‌های مشابه و دو طول و عرض ۰/۳ و ۰/۵ متر برای زمان‌های ضربان مختلف در شکل (۷) آورده شده‌اند. مشاهده می‌شود با افزایش زمان اعمال بار دینامیکی و در نتیجه حرکت به سمت بارگذاری‌های استاتیکی و شبه‌استاتیکی، فشار کمانشی دینامیکی کاهش یافته و به یک مقدار مجانبی میل می‌کند. از دیگر پارامترهای مهم در تعیین رفتار پانل‌های استوانه‌ای، ضخامت لایه‌های آن است. بدین منظور در شکل (۸) برای یک پانل ساندویچی استوانه‌ای با شعاع میانی یک متر که تحت بارگذاری با زمان ضربان ۲ میلی‌ثانیه قرار دارد، تحلیل کمانش دینامیکی برای ضخامت‌های مختلف لایه میانی و لایه‌های جانبی انجام شده است. با توجه به نتایج مشخص است برای پانل‌های ساندویچی ضخیم، فشار بحرانی کمانشی بسیار بزرگ است و بنابراین احتمال فروپاشی پانل به‌دلیل از دست دادن پایداری دینامیکی آن به‌ندرت اتفاق خواهد افتاد. در این پانل‌های ساندویچی با هسته نرم مواردی همچون شکست لایه‌های جانبی و تسلیم و تغییرشکل پلاستیک هسته می‌توانند عامل خرابی اصلی تلقی شوند.

همان‌گونه که اشاره شد، فوم‌های PVC به‌عنوان یک ماده



(ب) (الف)

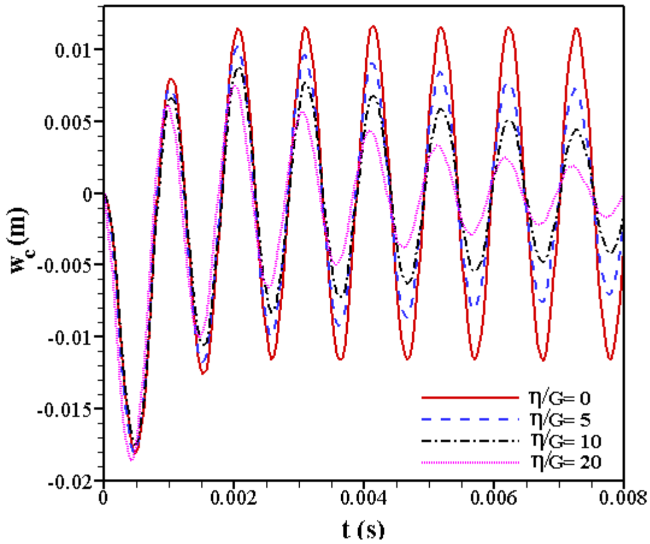
شکل ۷- تأثیر زمان بارگذاری ضربانی بر روی فشار بحرانی کمانشی، الف) L=b= ۰/۳ m و ب) L=b=۰/۵ m.



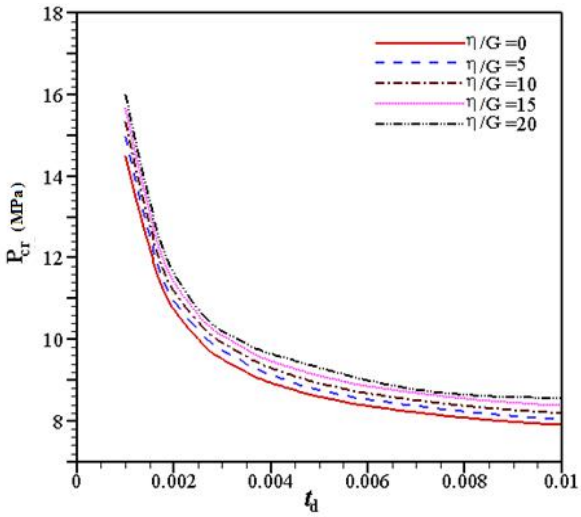
(ب) (الف)

شکل ۸- تأثیر ضخامت لایه‌ها روی فشار بحرانی کمانشی پانل ساندویچی، الف) $h_t=h_b=$ ۰/۰۰۵ m و ب) $h_c=$۰/۰۵ m.

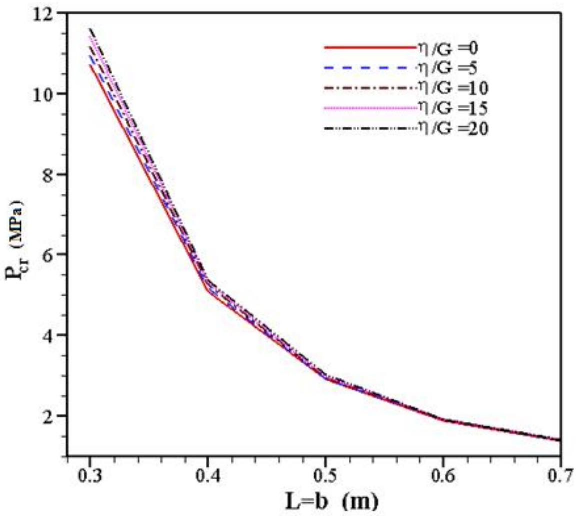
پرکاربرد در پانل‌های ساندویچی نظامی دریایی به شمار می‌روند. مطالعات آزمایشگاهی که به‌تازگی انجام شده است نشان داد این مواد در حالت‌های قبل و بعد از خرابی از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند [۱]. آنها دریافتند هنگامی که فوم تحت کرنش‌های کوچک قرار دارد، رفتار ویسکوالاستیک خطی از خود نشان می‌دهد و سپس وارد تغییرشکل‌های دائمی با رفتار پلاستیک کامل می‌شود. در این مقاله مشابه با کار انجام شده در [۱۳]، از مدل ویسکوالاستیک خطی کلوین- ویت به‌عنوان یکی از روابط کاربردی برای این دسته از مواد استفاده شده است. به‌منظور مطالعه تأثیر خواص ویسکوالاستیک هسته روی رفتار دینامیکی پانل ساندویچی، تغییرات مؤلفه شعاعی تغییر مکان مرکز پانل برای مقادیر مختلف ضریب ویسکوالاستیک η با در نظر گرفتن روابط غیرخطی کرنش- تغییرمکان در شکل (۹) رسم شده است. از نتایج می‌توان تشخیص داد ضریب ویسکوالاستیک که به‌عنوان یک عامل مستهلک کننده عمل می‌کند، تأثیر قابل توجهی روی رفتار دینامیکی پانل دارد و دامنه تغییر مکان‌های آن را کاهش می‌دهد.



شکل ۹- تأثیر ضریب ویسکوالاستیک بر روی پاسخ دینامیکی غیرخطی تغییرمکان شعاعی پوسته، t_d= ۰/۰۰۲ s، L=b= ۰/۵ m



شکل ۱۰- تأثیر ضریب ویسکوالاستیک هسته روی فشار کمانشی ضربانی موضعی پانل ساندویچی L=b= ۰/۳ m



شکل ۱۱- تأثیر خاصیت ویسکوالاستیک هسته روی فشار کمانشی ضربانی موضعی پانل ساندویچی t_d=۰/۰۰۲ s

تغییر مکان شعاعی مرکز لایه‌های جانبی پانل در مقابل تغییرات مدت زمان اعمال بار مورد توجه قرار داده شد و با رسم منحنی‌های پایداری برای مقادیر مختلف ضریب ویسکوالاستیک، منحنی فشار کمانشی ضربانی در برابر مدت زمان اعمال فشار دینامیکی مطابق شکل (۱۰) به‌دست آمد. همچنین در شکل (۱۱) نمودار تغییرات فشار کمانشی در برابر اندازه‌های مختلف دهانه پانل برای مقادیر مختلف پارامتر ویسوالاستیک ترسیم شده است. مشاهدات شکل (۹) نشان داده‌اند که تغییرات پارامتر ویسکوالاستیک در مدل ویسکوالاستیک خطی استفاده شده در این مقاله، تأثیر قابل توجهی روی تغییر مکان‌های به‌دست آمده برای پاسخ ارتعاشی لایه‌های پانل دارد. از آنجایی که افزایش خاصیت میرایی سیستم موجب می‌شود بسامد طبیعی آن کاهش یابد. بنابراین می‌توان انتظار داشت تغییرات پارامتر ویسکوالاستیک هسته روی

کمانش دینامیکی پانل ساندویچی استوانه‌ای نیز تأثیرگذار باشد. نتایج ارائه شده در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) تأیید کننده موضوع قبل است و نشان می‌دهند رفتار پایداری پانل وابسته به پارامتر ویسکوز بوده و با افزایش آن، مقاومت کمانشی سازه افزایش می‌یابد. مطابق شکل (۱۱) می‌توان گفت با افزایش ابعاد پانل، اثرگذاری پارامتر ویسکوز روند کاهشی پیدا می‌کند. به عبارت دیگر، تأثیر پارامترهایی همچون طول و عرض پانل ساندویچی، روی کمانش دینامیکی آن بیش از پارامتر ویکوالاستیک هسته است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل عددی غیرخطی به‌منظور بررسی پاسخ دینامیکی تغییر شکل الاستیک پانل ساندویچی استوانه‌ای کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر تحت بارگذاری انفجار ارائه شده است. همچنین با استفاده از معیار بادیانسکی- راس، پایداری دینامیکی پانل ساندویچی تحت فشار خارجی مورد ارزیابی قرار گرفت. از مدل ویسکوالاستیک خطی کلوین- ویت برای مدل‌سازی رفتار هسته استفاده شد. به‌منظور در نظر گرفتن قابلیت تغییرشکل هسته، از تئوری مرتبه بالای برشی بهبودیافته استفاده شد. از روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم در نرم‌افزارMaple برای حل معادلات غیرخطی استفاده شد. با بررسی نتایج می‌توان گفت در نظر گرفتن خاصیت ویسکوالاستیک هسته تأثیر زیادی روی پاسخ زمانی تغییر مکان پانل ساندویچی می‌گذارد و همچنین در پایداری دینامیکی آن نقش مهی ایفا می‌کند. ضخامت لایه‌ها، ابعاد پانل و مدت زمان اعمال فشار ضربانی از پارامترهای مهم در بررسی رفتار ناپایداری دینامیکی پانل‌های ساندویچی هستند.

واژه‌نامه

1. solid 186
2. implicit transient

مراجع

1. HooFatt, M. S., and Chen, L., “A Viscoelastic Damage Model for Hysteresis in PVC H100 Foam Under Cyclic Loading, ” *Journal of Cellular Plastic*, Vol. 51, No. 3, pp. 269-287, 2015.
2. Keshav, V., and Patel, S. N., “Dynamic Buckling of Laminated Composite Curved Panels Subjected to In-plane Compression,” *Recent Advances in Structural Engineering*, Vol. 2, pp. 735-744, 2018.
3. Sankar, A., Natarajan, S., Merzouki, T., and Ganapathi, M., “Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets,” *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 17, No. 9, 2017.
4. Nguyen, C. H., Butukuri, R. R., Chandrashekhara, K., Birman, V., “Dynamic and Buckling of Sandwich Panels with Stepped Facings,” *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 11, No. 4, pp. 697-716, 2011.
5. Shen, J., Lu, G., Wang, Zh., and Zhao, L., “Experiments on Curved Sandwich Panels under Blast Loading,” *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 37, pp. 960-970, 2010.
6. HooFatt, M. S., and Palla.,L., “Analytical Modeling of Composite Sandwich Panels under Blast Loads,” *Journal of Sandwich Structures and Materials,* Vol. 11, pp. 357-380, 2009.
7. HooFatt, M. S., Surabhi, H., and Gao, Y., “Blast Response of Sandwich Shells with Crushable Foam Cores”, *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 3174–3185, 2012.
8. HooFatt, M. S., and Chapagain, P., “Pressure Pulse Response of Composite Sandwich Panels with Plastic Core Damping,” *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 14, No. 4, pp. 392-429. 2012.
9. HooFatt, M. S., Gao, Y., and Sirivolu, D., “Foam-Core Composite Sandwich Shells under Blast,” *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 15, No. 3, pp. 261–291, 2013.
10. Gao, Y., and HooFatt, M. S., “Local Facesheet Pulse Buckling in a Curved, Composite Sandwich Panel,” *Composite Structures*, Vol. 104, pp. 249-60, 2013.
11. Sirivolu, D., HooFatt, M.S., “Dynamic stability of double-curvature composite shells under external

blast," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 77, pp. 281-90, 2015.

12. Birman, V., and Simitses, G. J., "Dynamic Stability of Long Cylindrical Sandwich Shells and Panels Subject to Periodic-in-time Lateral Pressure," *Journal of Composite Materials*, Vol. 38, no. 7, pp. 591-607, 2004.
13. Balkan, D., Acar, O., Türkmen Z., and Mecitoğlu, H. S., "Transient Response of a Laminated Sandwich Plate with Viscoelastic Core Subjected to Air Blast: Theory and Experiment," *Structures under Shock and Impact XI*, Vol. 113, 2010.
14. Mokhtari, M., Permoon, M. R., and Haddadpour, H., "Dynamic Analysis of Isotropic Sandwich Cylindrical Shell with Fractional Viscoelastic Core Using Rayleigh-Ritz Method," *Composite Structures*, Vol. 186, pp.165-174, 2018.
15. Mohammadi, F., and Sedaghati, R., "Linear and Nonlinear Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shell with Constrained Viscoelastic Core Layer," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 54, pp. 156–17, 2012.
16. Liang, Y., Spuskanyuk, A. V., Flores, S. E., Hayhurst, D. R., Hutchinson, J. W., Mc Meeking, R. M., and Evans, A. G., "The Response of Metallic Sandwich Panels to Water Blast," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, No. 1, pp. 81-99, 2007.
17. Nemat-Nasser, S., Kang, W. J., and McGee, J. D., Guo, W. G., Issacs, J. B., "Experimental Investigation of Energy Absorption Characteristics of Components of Sandwich Structures," *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 34, No. 6, pp. 1119-1146, 2007.
18. Kardomateas, G.A., Rodcheuy, N., and Frostig, F., "Transient Blast Response of Plates by Dynamic Elasticity," *AIAA Journal*, Vol. 53, No. 6, 2015.
19. Li, R., Kardomateas, G.A., "Nonlinear high order core theory for sandwich plates with orthotropic phases," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 11, 2008.
20. Li, R., and Kardomateas, G. A., and Simitses, G. J., "Nonlinear Response of a Shallow Sandwich Shell with Compressible Core to Blast Loading," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, 2008.
21. Budiansky, B., and Hutchinson, J. W., "Dynamic Buckling Estimates," *AIAA Journal*, Vol. 4, no. 3, pp. 525-30, 1966.
22. Amabili, M., *Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University press, UK, 2008.
23. Shaw, M. T., and MacNight, W. J., *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, New Jersey, 2005.
24. Lindberg, H. E., Florence, A. L., *Dynamic Pulse Buckling*, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

پیوست

$$L_{۱۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{۶B_{mn}{}^{c}(t)}{h_c}+\frac{۵B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t)}{h_c}\right)$$

$$L_{۱۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{-A_{mn}{}^{t}(t)m+B^{t}(t)-\dfrac{B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}h_t}{a_c+\frac{h_c}{۲}}}{a_c+\frac{h_c}{۲}}\right)$$

$$L_{۱۳}=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{C_{mn}{}^{t}(t)n\pi}{L}-\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n^{۲}\pi^{۲}h_t}{۲L^{۲}}\right))$$

$$L_{۱۴}=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}+A_{mn}{}^{t}(t)m)}{(a_c+z)^{۲}}\right)dz$$

$$L_{۱۵}=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}+A_{mn}{}^{t}(t)m)}{(a_c+z)^{۲}}-\frac{A_{mn}{}^{t}(t)m+B_{mn}{}^{t}(t)}{a_c+z}\right)dz$$

$$L_{۱۶}=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{C_{mn}{}^{t}(t)n\pi}{L}+\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{t}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}\right)dz$$

$$L۱۷=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)\frac{\partial^۲ {B_{mn}}^t(t)}{\partial t^۲}dz$$

$$L۲۱=-۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+\frac{h_c}{۲})(\frac{{B_{mn}}^t(t)m}{۲(a_c+\frac{h_c}{۲})}+\frac{{A_{mn}}^t(t)-{A_{mn}}^b(t)}{۲h_c}+\frac{h_t{B_{mn}}^t(t)m}{۲(a_c+\frac{h_c}{۲})h_c}-\frac{h_t{B_{mn}}^t(t)m}{۴(a_c+\frac{h_c}{۲})^۲}$$

$$+\frac{h_t(-\frac{۶{B_{mn}}^c(t)}{h_c}+\frac{۵{B_{mn}}^t(t)+{B_{mn}}^b(t)}{h_c})}{۴(a_c+\frac{h_c}{۲})}-\frac{{A_{mn}}^t(t)+\frac{{B_{mn}}^t(t)mh_t}{a_c+\frac{h_c}{۲}}}{۲(a_c+\frac{h_c}{۲})})$$

$$L۲۲=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(\frac{-(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(-{B_{mn}}^t(t)m^۳+{A_{mn}}^t(t)m^۲)}{(a_c+z)^۲}-\frac{{A_{mn}}^t(t)m^۲+{B_{mn}}^t(t)m}{a_c+z})dz$$

$$L۲۳=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(-\frac{{C_{mn}}^t(t)mn\pi}{L}+\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲}){B_{mn}}^t(t)mn^۲\pi^۲}{L^۲})dz$$

$$L۲۴=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(\frac{-\frac{{C_{mn}}^t(t)mn\pi}{L}+\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲}){B_{mn}}^t(t)mn^۲\pi^۲}{L^۲}}{۲(a_c+z)}-\frac{{A_{mn}}^t(t)n^۲\pi^۲}{۲L^۲}$$

$$-\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(\frac{{B_{mn}}^t(t)mn^۲\pi^۲}{L^۲}+\frac{{A_{mn}}^t(t)n^۲\pi^۲}{L^۲})}{۲(a_c+z)})dz$$

$$L۲۵=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(\frac{۲(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})({B_{mn}}^t(t)m-{A_{mn}}^t(t))}{(a_c+z)^۲})dz$$

$$L۲۶=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(\frac{\partial^۲{A_{mn}}^t(t)}{\partial t^۲}-\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(\frac{\partial^۲{B_{mn}}^t(t)}{\partial t^۲}m-\frac{\partial^۲{A_{mn}}^t(t)}{\partial t^۲})}{(a_c+z)})dz$$

$$L۳۱=-۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+\frac{h_c}{۲})(-\frac{{B_{mn}}^t(t)n\pi}{L}+\frac{{C_{mn}}^t(t)+{C_{mn}}^b(t)}{h_c}+\frac{h_t{B_{mn}}^t(t)n\pi}{h_cL}$$

$$+\frac{h_t}{۴}(-\frac{۶{B_{mn}}^c(t)n\pi}{h_cL}+\frac{\frac{۵{B_{mn}}^t(t)n\pi}{L}+\frac{{B_{mn}}^b(t)n\pi}{L}}{h_c})$$

$$L۳۲=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(\frac{-{C_{mn}}^t(t)m^۲+\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲}){B_{mn}}^t(t)m^۲n\pi}{L}}{a_c+z}$$

$$-\frac{{A_{mn}}^t(t)mn\pi}{۲L}-\frac{\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})({B_{mn}}^t(t)m^۲n\pi+{A_{mn}}^t(t)mn\pi)}{L}}{۲(a_c+z)})dz$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]

[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]

$$L۳۳=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(-\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}n\pi+A_{mn}{}^{t}(t)mn\pi)}{L(a_c+z)^{۲}}$$

$$-\frac{A_{mn}{}^{t}(t)mn\pi}{L(a_c+z)}+\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n\pi}{L(a_c+z)})dz$$

$$L۳۴=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(-\frac{C_{mn}{}^{t}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{t}(t)n^{۳}\pi^{۳}}{L^{۳}})dz$$

$$L۳۵=\int_{\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}+h_t}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(\frac{\partial^{۲}C_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^{۲}}-\frac{(z-\frac{h_c}{۲}-\frac{h_t}{۲})\frac{\partial^{۲}B_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^{۲}}n\pi}{L})dz$$

$$L۴۱=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+\frac{۱}{۲}h_c)(-\frac{۶B_{mn}{}^{c}(t)}{h_c}+\frac{۵B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))}{h_c})-(a_c-\frac{۱}{۲}h_c)(\frac{۶B_{mn}{}^{c}(t)}{h_c}-\frac{۳((B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))}{h_c})$$

$$L۴۲=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+\frac{۱}{۲}h_c)(\frac{-A_{mn}{}^{t}(t)m+B_{mn}{}^{t}(t)-\frac{۱}{۲}\frac{h_tB_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}}{a_c+\frac{۱}{۲}h_c}}{a_c+\frac{۱}{۲}h_c})-(a_c-\frac{۱}{۲}h_c)(\frac{-A_{mn}{}^{b}(t)m+B_{mn}{}^{b}(t)+\frac{۱}{۲}\frac{h_tB_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}}{a_c-\frac{۱}{۲}h_c}}{a_c-\frac{۱}{۲}h_c})$$

$$+\int_{-\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}((\frac{۲z}{h_c^{۲}}+\frac{۱۶z^{۳}}{h_c^{۴}})(-۲B_{mn}{}^{c}(t)+B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{h_c}+\frac{۱۲z^{۲}}{h_c^{۳}})(B_{mn}{}^{t}(t)-B_{mn}{}^{b}(t))$$

$$L۴۳=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+\frac{۱}{۲}h_c)(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)np}{L}+\frac{۱}{۲}\frac{h_tB_{mn}{}^{t}(t)n^{۲}p^{۲}}{L^{۲}})-(a_c-\frac{۱}{۲}h_c)(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)np}{L}+\frac{۱}{۲}\frac{h_tB_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}p^{۲}}{L^{۲}})$$

$$L۴۴=\int_{-\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}((\frac{۱}{(a_c+z)}\cdot(-(\frac{m}{۲}-\frac{zm}{h_c})\frac{m(A_{mn}{}^{b}(t)+A_{mn}{}^{t}(t))}{۲}+\frac{۱}{h_c(a_c+z)}(zh_t((-(۱-\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}-\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})B_{mn}{}^{c}(t)m^{۲}$$

$$-(\frac{۱}{۲}(\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}+\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}}))(B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}+B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲})+(\frac{۱}{۲}(\frac{۲z}{h_c}+\frac{۴z^{۳}}{h_c^{۳}}))(-B_{mn}{}^{t}(t)m^{۲}+B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲})))$$

$$+\frac{۱}{(a_c+z)}((-(۱-\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}-\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})B_{mn}{}^{c}(t)+(\frac{۱}{۲}(\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}+\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}}))(B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))$$

$$+(\frac{۱}{۲}(\frac{۲z}{h_c}+\frac{۴z^{۳}}{h_c^{۳}}))(B_{mn}{}^{t}(t)-B_{mn}{}^{b}(t)))))dz$$

$$L۴۵=\int_{-\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}((\frac{C_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{۲L}+\frac{C_{mn}{}^{t}(t)n\pi}{۲L}-\frac{zn\pi}{h_cL}(\frac{C_{mn}{}^{b}(t)}{۲}-\frac{C_{mn}{}^{t}(t)}{۲})+\frac{۱}{h_c}(zh_t(-(۱-\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}-\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})\frac{B_{mn}{}^{c}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+$$

$$\frac{۱}{۲}(\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}+\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})\frac{n^{۲}p^{۲}}{L^{۲}}(-B_{mn}{}^{t}(t)-B_{mn}{}^{b}(t)))))dz$$

$$L۴۶=\int_{-\frac{h_c}{۲}}^{\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(۲(a_c+z)(-\frac{(۱-\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}-\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})B_{mn}{}^{c}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+\frac{۱}{۴}(\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}+\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})(-\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}$$

$$-\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}})+\frac{۱}{۴}(\frac{۲z}{h_c}+\frac{۴z^{۳}}{h_c^{۳}})\frac{(-B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+\frac{۱}{۲}\frac{\frac{(C_{mn}{}^{b}(t)-C_{mn}{}^{t}(t))n\pi}{L}}{h_c}+\frac{۱}{۲h_c}(h_t(-\frac{(۱-\frac{۲z^{۲}}{h_c^{۲}}-\frac{۸z^{۴}}{h_c^{۴}})B_{mn}{}^{c}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}$$

$$
+\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2}{h_c^2}+\frac{8z^4}{h_c^4}\right)\left(-\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n^2\pi^2}{L^2}-\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n^2\pi^2}{L^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{4z^3}{h_c^3}\right)\left(-\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n^2\pi^2}{L^2}+\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n^2\pi^2}{L^2}\right)))+\frac{1}{2h_c}(zh_t.
$$

$$
\left(-\frac{\left(-\frac{4z}{h_c^2}-\frac{32z^3}{h_c^4}\right)B_{mn}{}^{c}(t)n^2\pi^2}{L^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{4z}{h_c^2}+\frac{32z^3}{h_c^4}\right)\left(-\frac{(B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t))n^2\pi^2}{L^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_c}+\frac{12z^2}{h_c^3}\right)\right.
$$

$$
\left.\left(-\frac{B_{mn}{}^{t}(t)n^2\pi^2}{L^2}+\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n^2\pi^2}{L^2}\right)\right)))dz
$$

$$
L47=\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(2\left(\frac{1}{2(a_c+z)}\left(-\left(1-\frac{2z^2}{h_c^2}-\frac{8z^4}{h_c^4}\right)B_{mn}{}^{c}(t)m^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2}{h_c^2}+\frac{8z^4}{h_c^4}\right).(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2-B_{mn}{}^{b}(t)m^2)\right.\right.\right.
$$

$$
+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{4z^3}{h_c^3}\right).
$$

$$
(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2+B_{mn}{}^{b}(t)m^2))+\frac{(-mA_{mn}{}^{t}(t)+mA_{mn}{}^{b}(t))}{2h_c}+\frac{1}{2h_c(a_c+z)}\left(h_t\left(-\left(1-\frac{2z^2}{h_c^2}-\frac{8z^4}{h_c^4}\right)B_{mn}{}^{c}(t)m^2\right.\right.
$$

$$
+\frac{1}{4}\left(\frac{2z^2}{h_c^2}+\frac{8z^4}{h_c^4}\right).
$$

$$
(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2-B_{mn}{}^{b}(t)m^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{4z^3}{h_c^3}\right).(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2+B_{mn}{}^{b}(t)m^2)))-\frac{1}{2h_c(a_c+z)^2}
$$

$$
\left(zh_t.\left(-\left(1-\frac{2z^2}{h_c^2}-\frac{8z^4}{h_c^4}\right)B_{mn}{}^{c}(t)m^2\right.\right.
$$

$$
+\frac{1}{4}\left(\frac{2z^2}{h_c^2}+\frac{8z^4}{h_c^4}\right).(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2-B_{mn}{}^{b}(t)m^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{4z^3}{h_c^3}\right)(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2+B_{mn}{}^{b}(t)m^2)))
$$

$$
+\frac{1}{2h_c(a_c+z)}\left(zh_t\left(-\left(-\frac{4z}{h_c^2}-\frac{32z^3}{h_c^4}\right).\right.\right.
$$

$$
B_{mn}{}^{c}(t)m^2+\frac{1}{2}\left(\frac{4z}{h_c^2}+\frac{32z^3}{h_c^4}\right)(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2-B_{mn}{}^{b}(t)m^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_c}+\frac{12z^2}{h_c^3}\right)(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2+B_{mn}{}^{b}(t)m^2))))
$$

$$
-\frac{1}{2h_c(a_c+z)}\left(-\frac{m}{2}A_{mn}{}^{b}(t)\right.
$$

$$
-\frac{m}{2}A_{mn}{}^{t}(t)+\frac{z(-mA_{mn}{}^{t}(t)+mA_{mn}{}^{b}(t))}{h_c}+\frac{1}{h_c(a_c+z)}\left(zh_t\left(-\left(1-\frac{2z^2}{h_c^2}-\frac{8z^4}{h_c^4}\right)B_{mn}{}^{c}(t)m^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2}{h_c^2}+\frac{8z^4}{h_c^4}\right)\right.\right.
$$

$$
(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2-B_{mn}{}^{b}(t)m^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h_c}+\frac{4z^3}{h_c^3}\right)(-B_{mn}{}^{t}(t)m^2+B_{mn}{}^{b}(t)m^2))))dz
$$

$$
L48=\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{h_c^5}{80}\left(-a_c\left(\frac{4}{h_c^4}\left(\frac{\partial^2B_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^2}\right)-\frac{8}{h_c^4}\frac{\partial^2B_{mn}{}^{c}(t)}{\partial t^2}\right)\right.\right.
$$

$$
-\frac{2}{h_c^3}\left(\frac{\partial^2B_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^2}\right))-a_ch_c\frac{\partial^2B_{mn}{}^{c}(t)}{\partial t^2}
$$

$$
+\frac{h_c^3}{12}\left(-a_c\left(\frac{1}{h_c^2}\left(\frac{\partial^2B_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^2}\right)-\frac{2}{h_c^2}\frac{\partial^2B_{mn}{}^{c}(t)}{\partial t^2}\right)-\frac{}{2h_c}\left(\frac{\partial^2B_{mn}{}^{t}(t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^2}\right)\right))))dz
$$

$$
L51=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_c-\frac{h_c}{2}\right)\left(\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{L}+\frac{C_{mn}{}^{t}(t)+C_{mn}{}^{b}(t)}{h_c}+\frac{h_tB_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{h_cL}-\frac{h_t}{4}\left(\frac{6B_{mn}{}^{c}(t)n\pi}{h_cL}-\frac{\frac{5B_{mn}{}^{t}(t)n\pi}{L}+\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{L}}{h_c}\right)\right)
$$

$$
L52=\int_{-\frac{h_c}{2}-h_b}^{-\frac{h_c}{2}}2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-C_{mn}{}^{b}(t)m^2+\frac{\left(z+\frac{h_c}{2}+\frac{h_t}{2}\right)B_{mn}{}^{b}(t)m^2n\pi}{L}}{a_c+z}\right.
$$

$$-\frac{A_{mn}{}^{b}(t)mn\pi}{۲L}-\frac{\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}n\pi+A_{mn}{}^{b}(t)mn\pi)}{L}}{۲(a_c+z)})dz$$

$$L۵۳=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(-\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}n\pi+A_{mn}{}^{b}(t)mn\pi)}{L(a_c+z)^{۲}}-\frac{A_{mn}{}^{b}(t)mn\pi}{L(a_c+z)}+\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{L(a_c+z)})dz$$

$$L۵۴=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{b}(t)n^{۳}\pi^{۳}}{L^{۳}})dz$$

$$L۵۵=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(\frac{\partial^{۲}C_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}}-\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})\frac{\partial^{۲}B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}}n\pi}{L}))dz$$

$$L۶۱=۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c-\frac{h_c}{۲})(\frac{B_{mn}{}^{b}(t)m}{۲(a_c+\frac{h_c}{۲})}+\frac{A_{mn}{}^{t}(t)-A_{mn}{}^{b}(t)}{۲h_c}+\frac{h_tB_{mn}{}^{b}(t)m}{۲(a_c-\frac{h_c}{۲})h_c}+\frac{h_tB_{mn}{}^{b}(t)m}{۴(a_c-\frac{h_c}{۲})^{۲}}-\frac{A_{mn}{}^{b}(t)-\frac{B_{mn}{}^{b}(t)mh_t}{a_c-\frac{h_c}{۲}}}{۲(a_c-\frac{h_c}{۲})}$$

$$-\frac{h_t(\frac{۶B_{mn}{}^{c}(t)}{h_c}-\frac{۵B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t)}{h_c})}{۴(a_c-\frac{h_c}{۲})})$$

$$L۶۲=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(\frac{-(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{b}(t)m^{۳}+A_{mn}{}^{b}(t)m^{۲})}{(a_c+z)^{۲}}-\frac{A_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}-B_{mn}{}^{b}(t)m}{a_c+z})dz$$

$$L۶۳=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)mn\pi}{L}+\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{b}(t)mn^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}})dz$$

$$L۶۴=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)\frac{A_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{۲L^{۲}}+\frac{-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)mn\pi}{L}+\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{b}(t)mn^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}}{۲(a_c+z)}$$

$$-\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-\frac{B_{mn}{}^{b}(t)mn^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}+\frac{A_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}})}{۲(a_c+z)})dz$$

$$L۶۵=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(\frac{۲(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(B_{mn}{}^{b}(t)m-A_{mn}{}^{b}(t))}{(a_c+z)^{۲}})dz$$

$$L۶۶=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)(\frac{\partial^{۲}A_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}}-\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(\frac{\partial^{۲}B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}}m-\frac{\partial^{۲}A_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}})}{(a_c+z)})dz$$

$$L۷۱=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c-\frac{h_c}{۲})(\frac{۶B_{mn}{}^{c}(t)}{h_c}-\frac{۵B_{mn}{}^{t}(t)+B_{mn}{}^{b}(t)}{h_c})$$

$$L۷۲=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{-A_{mn}{}^{b}(t)m+B^{b}(t)-\dfrac{B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}h_t}{a_c-\dfrac{h_c}{۲}}}{a_c-\dfrac{h_c}{۲}}\right)$$

$$L۷۳=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{L}+\frac{B_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}h_t}{۲L^{۲}}\right))$$

$$L۷۴=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}(۲\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}+A_{mn}{}^{b}(t)m)}{(a_c+z)^{۲}}\right)dz$$

$$L۷۵=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}(a_c+z)\frac{\partial^{۲}B_{mn}{}^{b}(t)}{\partial t^{۲}}dz$$

$$L۷۶=\int_{-\frac{h_c}{۲}-h_b}^{-\frac{h_c}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})(-B_{mn}{}^{b}(t)m^{۲}+A_{mn}{}^{b}(t)m)}{(a_c+z)^{۲}}-\frac{A_{mn}{}^{b}(t)m+B_{mn}{}^{b}(t)}{a_c+z}\right)dz$$

$$L۷۷=\sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\left(-\frac{C_{mn}{}^{b}(t)n\pi}{L}+\frac{(z+\frac{h_c}{۲}+\frac{h_t}{۲})B_{mn}{}^{b}(t)n^{۲}\pi^{۲}}{L^{۲}}\right)dz$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.5.3]

[DOI: 10.47176/jcme.39.1.5563]