

## پاسخ غیرخطی و تحلیل کماتش دینامیکی پانل استوانه‌ای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر تحت بارگذاری انفجار

سیدعلی احمدی، محمدهادی پشایی\* و رمضان‌علی جعفری تلوکلانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۱۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۵/۷)

چکیده- در این مقاله پاسخ غیرخطی تغییرمکان یک پانل استوانه‌ای ساندویچی تحت بارگذاری دینامیکی ضربانی با در نظر گرفتن قابلیت تغییر شکل هسته مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از تئوری مرتبه بالای ارائه شده برای هسته پانل‌های ساندویچی، معادلات حاکم بر حرکت بر مبنای نظریه ارتجاعی سه‌بعدی به کار گرفته شده است. همچنین رفتار کماتش دینامیکی ضربانی صفحات جانبی پانل با استفاده از معیار بادپانسکی-راس، بررسی شده است. برای لایه‌های داخلی و خارجی پانل مواد اورتوتروپیک و برای لایه میانی مواد همسانگرد ویسکوالاستیک از جنس فوم پلی‌وینیل کلراید در نظر گرفته شد. تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد پانل، ضخامت هسته و لایه‌های جانبی، مدت ضربان و بیشینه فشار وارد شده روی پاسخ دینامیکی غیرخطی و مقاومت کماتشی پانل ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج به دست آمده در این مقاله با نتایج ارائه شده در مقالات دیگر و همچنین نتایج به دست آمده از حل المان محدود در نرم‌افزار Ansys برای پانل‌های سه لایه مقایسه شده و دقت خوبی مشاهده شده است. نشان داده شده است که با افزایش ضخامت پانل یا کاهش شعاع آن، مقاومت کماتش دینامیکی ضربانی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: کماتش دینامیکی، پانل ساندویچی استوانه‌ای، هسته انعطاف‌پذیر، انفجار، پاسخ غیرخطی.

## Non-linear Response and Dynamic Buckling Analysis of a Cylindrical Sandwich Panel with a Flexible Core under Blast Loading

S. A. Ahmadi, M. H. Pashaei\*, and R. A. Jafari-Talookolaei

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

**Abstract:** In this paper, three-dimensional displacement response of a cylindrical sandwich panel with compressible core under the action of dynamic pulse loading is addressed using the extended high order sandwich panel theory. Also, local dynamic pulse buckling of facesheets is studied by considering the Budiansky-Roth buckling criterion. It is assumed that the sandwich panels consist of orthotropic face sheets and an isotropic viscoelastic foam core layer. The effects of various parameters including the panel span, core and facing thickness, pulse duration and maximum pressure on the non-linear dynamic response and buckling strength of the sandwich cylindrical panel are studied. The results obtained from the present method are compared with finite element solutions using the commercial software ANSYS and those reported in the literature, showing a good agreement. It is revealed that applied core non-linear theory could be satisfactory for the dynamic pulse response of sandwich

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mpashaei@nit.ac.ir

viscoelastic panels. It is also shown that the pulse buckling strength of panel increases with a decrease of the panel radius or an increase of the panel thickness.

**Keywords:** Dynamic buckling, Cylindrical sandwich panel, Compressible core, Blast, Nonlinear response.

## فهرست علائم

$A(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای محیطی	$t_d$	زمان اعمال بار دینامیکی
$a_c$	شعاع میانی پانل	$u$	مؤلفه محوری تغییر مکان
$B(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای شعاعی	$u_0$	مؤلفه محوری تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
$C(t)$	ثابت زمانی تغییر مکان در راستای محوری	$v$	مؤلفه محیطی تغییر مکان
$C_{ij}$	ثابت‌های ماتریس سختی پانل برای لایه‌های مختلف	$v_0$	مؤلفه محیطی تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
$E_{ij}$	مدول الاستیسیته	$w$	مؤلفه شعاعی تغییر مکان
$h_b$	ضخامت لایه جانبی پایینی	$w_0$	مؤلفه شعاعی تغییر مکان در سطح میانی هر لایه
$h_t$	ضخامت لایه جانبی بالایی	$x$	مختصات محوری پانل
$h_c$	ضخامت هسته	$z$	مختصات شعاعی پانل
$H$	ضخامت کل پانل	$\beta$	زاویه پانل
$L$	طول پانل	$\epsilon_{ij}$	کرنش در لایه‌ها
$m$	تعداد مود تغییر شکل در راستای محیطی	$\eta$	ضریب ویسکوالاستیک
$n$	تعداد مود تغییر شکل در راستای طولی	$\theta$	مختصات محیطی پانل
$P(t)$	بارگذاری ضربانی	$v_{ij}$	ضریب پواسون
$P_0$	بیشینه فشار ضربانی	$\sigma_{ij}$	تنش در لایه‌ها
$t$	زمان		

## ۱- مقدمه

ساختارهای ساندویچی به دلیل ویژگی‌هایی از جمله نسبت سختی و مقاومت به وزن بالا در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کنار این موارد، ویژگی‌هایی مانند مقاومت به خوردگی بهتر، خواص راداری و مغناطیسی عالی و غیره موجب شد این ساختارها به‌طور گسترده‌ای در صنایع دریایی و به‌ویژه شناورهای نظامی مورد توجه قرار داده شوند. با در نظر گرفتن این چنین کاربردهایی احتمال فرارگیری در معرض شوک‌های انفجار در هوا و یا زیر آب برای سازه‌های ساندویچی وجود دارد. بنابراین تحلیل پاسخ آن به بارگذاری وارد شده به‌منظور تحلیل ایمنی و بهینه‌سازی‌های مورد نظر ضروری خواهد بود.

تحقیقات انجام شده در زمینه مواد مورد استفاده در صنایع دریایی نظامی نشان می‌دهد فوم‌های پلی‌وینیلی کلراید (PVC) که به‌عنوان هسته در سازه‌های ساندویچی به‌طور فراوان مورد استفاده قرار می‌گیرند به دلیل ساختار سلولی خاص، در شرایط قبل و بعد از خرابی از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند [۱].

مطالعات گسترده‌ای در حوزه تحلیل رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی در معرض بارگذاری انفجار انجام شده است که بررسی آنها نشان می‌دهد ورق‌های ساندویچی بیشتر از سازه‌های دیگر مورد توجه قرار گرفته‌اند. کشاو و پاتل [۲] یک حل المان محدود برای تحلیل کمانش دینامیکی

پوسته‌های منحنی کامپوزیتی در معرض بارهای داخل صفحه‌ای ارائه دادند. در این مطالعه از معیار ولمیر به منظور پیش‌بینی ناپایداری دینامیکی سازه استفاده شده است. تحلیل غیرخطی کمانش دینامیکی حرارتی در شرایط متقارن محوری روی پوسته‌های بیضوی و مخروطی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی توسط سانکار و همکاران انجام شد [۳].

نگوین و همکاران [۴] به تحلیل عددی رفتار دینامیکی و کمانش ورق‌های ساندویچی با لایه‌های جانبی چندتکه تحت بارگذاری انفجار پرداختند. اثر انحنای ورق و پاسخ پوسته‌های ساندویچی در معرض فشار انفجار توسط شن و همکاران [۵] به صورت آزمایشگاهی مورد توجه قرار گرفت و نشان داده شد سه تفاوت عمده بین پاسخ ورق و پوسته استوانه‌ای ساندویچی تحت بارگذاری انفجار وجود دارد که عبارتند از:

- ۱) کاهش ضربه بر روی لایه بیرونی، ۲) چروکیدگی لایه درونی به عنوان یک مدل جدید خرابی و ۳) الگوی تغییرشکل متفاوت پانل استوانه‌ای ساندویچی نسبت به دو الگوی موجود در ورق ساندویچی. هوفت و پالا [۶] یک مدل تحلیلی به منظور تحلیل رفتار دینامیکی و شروع خرابی پانل‌های استوانه‌ای ساندویچی دایره‌ای با هسته‌ای از جنس پلی وینیل کلراید تحت بارگذاری انفجار ارائه کردند. آنها همچنین مدل‌های تحلیلی به منظور پیش‌بینی پاسخ تغییرمکان پانل‌های تخت، یک انحنای دو انحنای ارائه دادند [۹-۷]. یک حل عددی برای کمانش موضعی ضربانی پانل‌های ساندویچی کامپوزیتی تک‌انحنا با استفاده از معادلات حرکت لاگرانژ توسط ژائو و هو [۱۰] ارائه شد. در این مطالعه از معیار بادبانسکی-راس بهره گرفته شد تا بتوان حالت ناپایداری پانل ساندویچی را پیش‌بینی کرد. برای پانل‌های با ضخامت بیشتر، احتمال رخداد کمانش دینامیکی کاهش پیدا می‌کند و پانل در معرض شکست لایه‌ها جانبی قرار خواهد گرفت. در مطالعه دیگری که توسط سیریولو و هو [۱۱] ارائه شد، کمانش دینامیکی ضربانی و رفتار ارتعاشی یک پانل کامپوزیتی دو انحنای تحت بارگذاری انفجار بررسی شد. در این تحقیق معادلات حاکم با

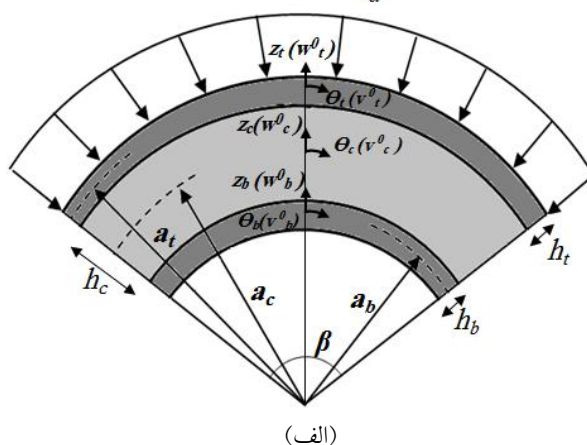
روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۹، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۹

استفاده از تئوری غیرخطی نووژیلوف و معادلات حرکت لاگرانژ و به کارگیری معیار بادبانسکی-راس به دست آمد. بیرمن و اسمیتسز [۱۲] از تئوری پوسته‌های ساندوز استفاده کردند تا پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای بلند ساندویچی را تحت بارگذاری فشار دوره‌ای هیدرودینامیکی بررسی کنند.

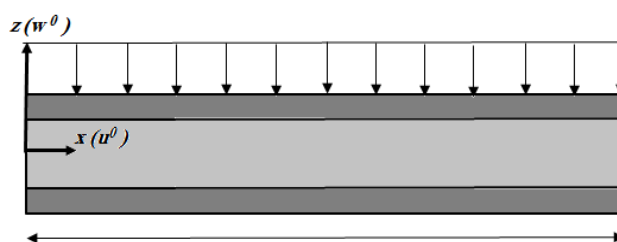
مطالعه منابع مختلف نشان می‌دهد در زمینه تحلیل رفتار دینامیکی پانل‌های ساندویچی استوانه‌ای تشکیل شده از هسته با خواص ویسکوالاستیک تحت بارگذاری انفجار کارهای اندکی صورت گرفته است. بالکان و همکاران [۱۳] پاسخ گذرای ورق‌های ساندویچی با تکیه‌گاه ساده تحت بار انفجار را مورد بررسی قرار دادند. در پژوهش ذکر شده از مدل ساختاری خطی کلونین-وویت برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک هسته استفاده شد. پاسخ بسامدی و ضریب اتلاف پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک توسط مختاری و همکاران [۱۴] مورد توجه قرار گرفت. از روش لاگرانژ و رایلی-ریتز جهت حل معادلات دیفرانسیل حرکت در این مطالعه استفاده شد. محمدی و صداقتی [۱۵] با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی به مطالعه ارتعاشات خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک پرداختند.

در بیشتر تحلیل‌های موجود صورت گرفته روی پانل‌های ساندویچی از تئوری‌های کلاسیک و یا برشی مرتبه اول استفاده می‌شود که به دلیل در نظر نگرفتن قابلیت تغییرشکل در هسته، موجب ایجاد خطاهایی در پیش‌بینی تغییرشکل، مودهای خرابی و همچنین ظرفیت جذب انرژی این سازه‌ها شده است. شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده توسط لیانگ و همکاران [۱۶] و نتایج آزمایشگاهی [۱۷] نشان می‌دهد که هنگامی که پانل ساندویچی در معرض بارگذاری انفجار قرار می‌گیرد، هسته دستخوش تغییرات قابل توجهی می‌شود. کاردومیتس و همکاران [۱۸] با استفاده از نظریه ارتجاعی سه‌بعدی خطی، پاسخ انفجاری ورق ساندویچی را بررسی کردند. مقایسه نتایج آنها نشان داد تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نمی‌تواند به

$$P(t) = P_o \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{t}{t_d}}$$



(الف)



(ب)

شکل ۱- مشخصات هندسی و مختصات پانل ساندویچی، (الف) نمای دوبعدی در صفحه  $(z, \theta)$  و

(ب) نمای دوبعدی در صفحه  $(x, z)$

کمانش دینامیکی صفحات جانبی روی آن انجام شد. یک تئوری پوسته ساندویچی مرتبه بالا جهت مدل‌سازی تغییرشکل هسته در طول فرایند بارگذاری در نظر گرفته شده است. لایه‌های داخلی و خارجی پانل از مواد اورتوتروپیک و لایه میانی آن از فوم‌های پلی‌وینیل کلراید تشکیل شده است. معادلات دیفرانسیل سه‌بعدی حاکم بر مسئله با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی لایه‌ها به دست آمده و با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا حل شده‌اند.

## ۲- معادلات حاکم بر مسئله

در شکل (۱) یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی به شعاع میانی  $a_c$ ، طول  $L$  و ضخامت لایه‌های جانبی  $h_t$  و  $h_b$  و لایه میانی  $h_c$

درستی رفتار پوسته ساندویچی را نشان دهد. لی و کاردومیتس [۱۹] یک تئوری مرتبه بالای جدید برای ورق‌های ساندویچی در حالت الاستیک ارائه کردند که قابلیت فشرده‌سازی هسته را در نظر می‌گیرد. نظریه ارائه شده با نتایج به دست آمده از نظریه ارتجاعی، مطابقت بسیار خوبی داشت. لی و همکاران [۲۰] پاسخ غیرخطی یک پوسته دو انحنا را با استفاده از تئوری مرتبه بالای ارائه شده توسط لی و کاردومیتس تحت بارگذاری انفجاری مطالعه کردند.

در این مقاله رفتار دینامیکی غیرخطی پانل استوانه‌ای ساندویچی با هسته فوم تحت بارگذاری انفجار در هوا مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از معیار بادبانسکی-راس [۲۱]، رفتار دینامیکی پانل مورد بررسی قرار گرفت و تحلیل

برای لایه میانی به کار برده می شود. همچنین  $z$  مختص شعاعی هر لایه در صفحه میانی همان لایه است. در نظر گرفتن قابلیت فشرده سازی هسته در راستای شعاعی عاملی تأثیرگذار در محاسبات جذب انرژی پانل ساندویچی در بارگذاری انفجار محسوب می شود. به این منظور تئوری های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و همچنین نظریه ارتجاعی سه بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در این مقاله از تئوری مرتبه بالای برشی ارائه شده در مرجع [۱۹] برای هسته انعطاف پذیر، استفاده شده است که بر اساس آن رابطه (۴) برای جابه جایی های هسته به دست آمده است:

$$u^c(z, \theta, x, t) = \frac{1}{\psi} \left( u^t_*(\theta, x, t) + u^b_*(\theta, x, t) \right) + \frac{z}{h_c} \left( u^t_*(\theta, x, t) - u^b_*(\theta, x, t) \right) + \frac{zh_t}{h_c} \frac{\partial}{\partial x} w^c(z, \theta, x, t)$$

$$v^c(z, \theta, x, t) = \frac{1}{\psi} \left( v^t_*(\theta, x, t) + v^b_*(\theta, x, t) \right) + \frac{z}{h_c} \left( v^t_*(\theta, x, t) - v^b_*(\theta, x, t) \right) + \frac{zh_t}{(z+a_c)h_c} \frac{\partial}{\partial \theta} w^c(z, \theta, x, t) + \dots$$

$$-\frac{h_c}{\psi} < z < \frac{h_c}{\psi}$$

$$w^c(z, \theta, x, t) = \frac{1}{\psi} \left( \frac{\gamma z^2}{h_c^2} + \frac{\lambda z^4}{h_c^4} \right) \left( w^t_*(\theta, x, t) + w^b_*(\theta, x, t) \right) + \frac{1}{\psi} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z^3}{h_c^3} \right) \left( w^t_*(\theta, x, t) - w^b_*(\theta, x, t) \right) + \left( 1 - \frac{\gamma z^2}{h_c^2} - \frac{\lambda z^4}{h_c^4} \right) w^c_*(\theta, x, t) \quad (4)$$

مطابق با روابط ساختاری ارائه شده برای مواد اورتوتروپیک می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}^{b,t,c} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix}^{b,t,c} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}^{b,t,c} \quad (5)$$

در این رابطه اندیس های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب برای راستاهای شعاعی، محیطی و محوری استفاده شده است و  $C_{ij}$  ثوابت

(ضخامت کل  $H=h_t+h_b+h_c$ ) تحت اثر بار انفجاری روی سطح بیرونی پانل نشان داده شده است. فرض شده لایه های بیرونی و درونی پانل از جنس مواد اورتوتروپیک بوده و لایه میانی آن از فوم تشکیل شود. بارگذاری فشار یکنواخت خارجی ناشی از یک انفجار به صورت رابطه (۱) تعریف می شود:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{t}{t_d}} & , t < t_d \\ 0 & , t > t_d \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $P_0$  بیان کننده بیشینه فشار اعمال شده و  $t_d$  برابر با زمان اعمال فشار ضربانی است. مطابق با آنچه در شکل (۱) نشان داده شده است مؤلفه های تغییر مکان  $w$  و  $v$  برای سه راستای محوری  $(x)$ ، محیطی  $(\theta)$  و شعاعی  $(z)$  پانل برای هر کدام از لایه ها در نظر گرفته می شود. با در نظر گرفتن این مورد که لایه های بالایی و پایینی فرضیات کیرشهف-لاو را ارضا کنند، مؤلفه های جابه جایی برای این لایه ها برحسب جابه جایی های صفحه میانی آنها بر اساس تئوری دائل [۲۲] به صورت زیر بیان می شوند.

لایه بالایی:

$$u_t(z, \theta, x, t) = u^t_*(\theta, x, t) - \left( z - \frac{h_c + h_t}{\psi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} w^t_*(\theta, x, t) \right)$$

$$v_t(z, \theta, x, t) = v^t_*(\theta, x, t) - \frac{1}{a_t} \left( z - \frac{h_c + h_t}{\psi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} w^t_*(\theta, x, t) - v^t_*(\theta, x, t) \right)$$

$$\frac{h_c}{\psi} < z < \frac{h_c}{\psi} + h_t$$

$$w_t(z, \theta, x, t) = w^t_*(\theta, x, t) \quad (2)$$

لایه پایینی:

$$u_b(z, \theta, x, t) = u^b_*(\theta, x, t) - \left( z + \frac{h_c + h_b}{\psi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} w^b_*(\theta, x, t) \right)$$

$$v_b(z, \theta, x, t) = v^b_*(\theta, x, t) - \frac{1}{a_b} \left( z + \frac{h_c + h_b}{\psi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} w^b_*(\theta, x, t) - v^b_*(\theta, x, t) \right)$$

$$-\frac{h_c}{\psi} - h_b < z < -\frac{h_c}{\psi}$$

$$w_b(z, \theta, x, t) = w^b_*(\theta, x, t) \quad (3)$$

که در آن اندیس  $t$  و  $b$  به ترتیب برای لایه بالایی و پایینی و  $i=c$

ماتریس سختی برای هر لایه است که با استفاده از این روابط محاسبه می‌شوند:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_{22}E_{33}\Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_{11}E_{33}\Delta}, \quad C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_{11}E_{33}\Delta}$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_{22}E_{11}\Delta}, \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_{22}E_{11}\Delta}$$

$$C_{24} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{31}, \quad C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_{11}E_{22}E_{33}} \quad (6)$$

بر اساس مطالعات تحلیلی و آزمایشگاهی انجام شده در مرجع [۱]، فوم‌ها پلی‌وینیل کلراید که به‌عنوان هسته در سازه‌های ساندویچی در صنایع دریایی کاربرد فراوانی دارند، در فرایند تغییرشکل از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند. بر اساس این مطالعه این فوم‌ها در محدوده تغییرشکل‌های کوچک و قبل از رسیدن به تسلیم، دارای رفتار ویسکوالاستیک خطی هستند. بعد از رسیدن به تسلیم رفتار پلاستیک کامل از آنها دیده می‌شود. در این مقاله به‌منظور مطالعه تأثیر خاصیت ویسکوالاستیک روی پاسخ غیرخطی تغییر مکان و رفتار کمانش دینامیکی یک پانل ساندویچی، یک مدل ساده ویسکوالاستیک خطی مورد توجه قرار داده شده است. برای مدل‌سازی خواص مکانیکی هسته از مدل خطی کلووین-وویت [۲۳] استفاده می‌شود. بر این اساس تنش‌های برشی با کرنش‌های برشی و نرخ تغییرات آن مطابق با رابطه (۷) مرتبط می‌شود:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} + \eta \cdot \frac{d}{dt} \{\varepsilon\} \quad (7)$$

که در آن  $\eta$  ضریب ویسکوالاستیک ماده هسته است. روابط غیرخطی کرنش-جابجایی برای لایه‌ها بر اساس مؤلفه‌های غیرخطی ون-کارمن بیان می‌شوند. فرض شده است صفحات جانبی، رفتار پوسته نازک را داشته باشند. بنابراین طبق فرضیات کیرشهف-لاو تغییر مکان‌ها در راستای طولی  $u$  و محیطی  $v$  کوچک بوده و می‌توان از مشتقات مراتب بالای آن در روابط صرف‌نظر کرد. بنابراین تنها مشتقات مرتبه بالای  $w$  در معادلات باقی می‌مانند. فرم معادلات کرنش-جابجایی برای صفحات

جانبی چنین بیان شده است [۲۲]:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(z+a_i)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{z+a_i} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{z+a_i} + \frac{1}{2(z+a_i)^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8)$$

در رابطه (۸)،  $a_i$  شعاع میانی هر کدام از لایه‌ها است. از معادلات حرکت حاکم بر اساس روابط سه‌بعدی نظریه ارتجاعی در این مطالعه استفاده شده است [۱۸]:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}}{z+a_i} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{z\theta}}{z+a_i} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{z+a_i} \frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zx}}{z+a_i} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9)$$

### ۳- روش حل مسئله

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، شرایط مرزی ساده در چهار لبه پانل در نظر گرفته شده است. بر اساس آن می‌توان مؤلفه‌های جابه‌جایی در سه راستا را برای هرکدام از لایه‌ها به‌صورت سری زیر بازنویسی کرد:

$$u^t_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B^t_{mn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$v^t_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^t_{mn}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$w^t_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^t_{mn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$w^c_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B^c_{mn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$u^b_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B^b_{mn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$v^b_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^b_{mn}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi\theta}{\beta}$$

$$w^b_*(\theta, x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^b_{mn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi\theta}{\beta} \quad (10)$$

احتمال وجود دارد که شکل مودهای بالاتر سازه برانگیخته شود. از این رو با مطالعه همگرایی روی نتایج به دست آمده، برای تحلیل کماتش دینامیکی ضربانی پنج جمله از سری یعنی  $m=n=0$  تا  $m=n=4$  استفاده شده است. بر این اساس، معادلات دیفرانسیل معمولی برحسب متغیرهای زمانی به صورت زیر نوشته می شود.

$$[M_{mn}] \ddot{x}_{mn}(t) + [C_{mn}] \dot{x}_{mn}(t) + [K_{mn}] x_{mn}(t) = P_{mn}(t) \quad (12)$$

که در آن  $[M_{mn}]$  ماتریس جرمی معادل،  $[C_{mn}]$  ماتریس ضرایب میرایی و  $[K_{mn}]$  ماتریس سختی است. این دستگاه معادلات با استفاده از بسته حلگر رانگ-کوتا حل می شود.

#### ۴- نتایج و بحث

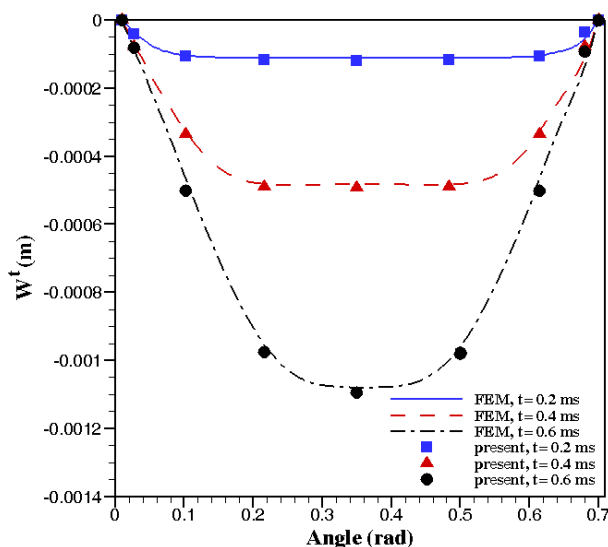
در مقاله ارائه شده پاسخ یک پوسته ساندویچی استوانه‌ای با هسته ویسکوالاستیک تحت تأثیر بار انفجاری مورد مطالعه قرار گرفته است. از عبارات‌های غیرخطی کرنش-جابجایی به منظور شبیه‌سازی رفتار هسته استفاده شده است. همچنین به منظور نظر گرفتن قابلیت فشرده‌سازی هسته در طول فرایند بارگذاری، یک تئوری مرتبه بالا جهت مدل‌سازی رفتار جابه‌جایی هسته به کار گرفته شده است. از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم در نرم‌افزار Maple جهت حل معادلات استفاده شد. به منظور اعتبارسنجی نتایج، تغییر مکان خط مرکزی پانل به دست آمده از حل غیرخطی ارائه شده در مقاله و حل المان محدود توسط نرم‌افزار Ansys در شکل (۲) آورده شده است. پانل مورد نظر دارای ضخامت صفحات جانبی  $h_{t,b} = 5 \text{ mm}$ ، ضخامت هسته  $h_c = 40 \text{ mm}$ ، شعاع صفحه میانی  $a_c = 1 \text{ m}$  و طول و عرض  $L = b(a_c \times \beta) = 0.7 \text{ m}$  است. خواص مواد به کار رفته برای لایه‌های این پانل و پانل‌های ساندویچی که در کل مقاله نتایج آنها ارائه می شود در جدول (۱) ارائه شده است. با توجه به همخوانی مناسب نتایج در شکل (۲) می توان چنین برداشت کرد که فرمول‌بندی ارائه شده و روش حل مورد نظر دارای دقت خوبی در محاسبه نتایج تغییر شکل برای پانل‌های

با جایگذاری عبارات (۱۰) در روابط کرنش-جابجایی و تنش کرنش برای هر لایه و انتگرال‌گیری از معادلات حرکت (۹) در راستای ضخامت، در نهایت هفت معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر حرکت پوسته ساندویچی برای مؤلفه‌ها  $(u^t, v^t, w^t, w^c, u^b, v^b, w^b)$  به دست خواهند آمد. ضرایب این معادلات در پیوست ارائه شده است.

$$\begin{aligned} & P_c \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{t}{t_d}} - c_{11}^c L_{11} - c_{12}^c L_{12} + c_{13}^c L_{13} \\ & + c_{22}^t L_{14} + c_{23}^t L_{15} - c_{24}^t L_{16} - \rho_t L_{17} = 0 \\ & c_{25}^c L_{21} + \eta \frac{\partial L_{21}}{\partial t} + c_{22}^t L_{22} + c_{23}^t L_{23} + c_{24}^t L_{24} \\ & + c_{25}^t L_{25} - \rho_t L_{26} = 0 \\ & c_{33}^c L_{31} - \eta \frac{\partial L_{31}}{\partial t} + c_{34}^t L_{32} + c_{33}^t L_{33} \\ & + c_{34}^t L_{34} - \rho_t L_{35} = 0 \\ & c_{11}^c L_{41} + c_{12}^c L_{42} + c_{13}^c L_{43} + c_{14}^c L_{44} + c_{15}^c L_{45} \\ & + c_{25}^c L_{46} + c_{26}^c L_{47} \\ & + \eta \frac{\partial (L_{46} + L_{47})}{\partial t} + \rho_c L_{48} = 0 \\ & c_{55}^c L_{51} + \eta \frac{\partial L_{51}}{\partial t} + c_{54}^b L_{52} + c_{53}^b L_{53} + c_{54}^b L_{54} \\ & - \rho_b L_{55} = 0 \\ & c_{56}^c L_{61} + \eta \frac{\partial L_{61}}{\partial t} + c_{52}^b L_{62} + c_{53}^b L_{63} + c_{54}^b L_{64} \\ & + c_{55}^b L_{65} + \rho_b L_{66} = 0 \\ & c_{11}^c L_{71} + c_{12}^c L_{72} + c_{13}^c L_{73} + c_{14}^c L_{74} - \rho_b L_{75} \\ & - c_{24}^b L_{76} - c_{23}^b L_{77} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

برای حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مختلف روش‌های تک‌گامی، چندگامی و روش‌های برون‌یابی قابل استفاده است. در این مقاله از روش رانگ-کوتای موجود در بسته نرم‌افزاری Maple برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آمده، استفاده می شود. دلیل استفاده از روش رانگ کوتا با خطای مرتبه چهارم در این مقاله این نکته است که به دلیل سرعت بالای زمان اعمال بارگذاری و همچنین بازه زمانی کوتاه اعمال بار و در نتیجه بازه کوتاه تحلیل مسئله این روش دارای دقت محاسباتی بیشتری است. پانل‌های مورد تحلیل در این مقاله جزو پانل‌های کم عمق هستند و زاویه دهانه کوچک‌تر از  $30^\circ$  درجه دارند. بنابراین در رفتار پاسخ دینامیکی الاستیک از تقریب تک‌جمله استفاده شده است. در تحلیل کماتش دینامیکی تحت بارگذاری ضربانی مطابق با آنچه در [۲۴] آمده است، این

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۹، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۹



شکل ۲- مقایسه نتایج به دست آمده از تحلیل غیرخطی با نتایج حل المان محدود در نرم افزار Ansys

جدول ۱- ابعاد هندسی و خواص مواد به کارگرفته شده برای لایه‌های جانبی و هسته پانل ساندویچی

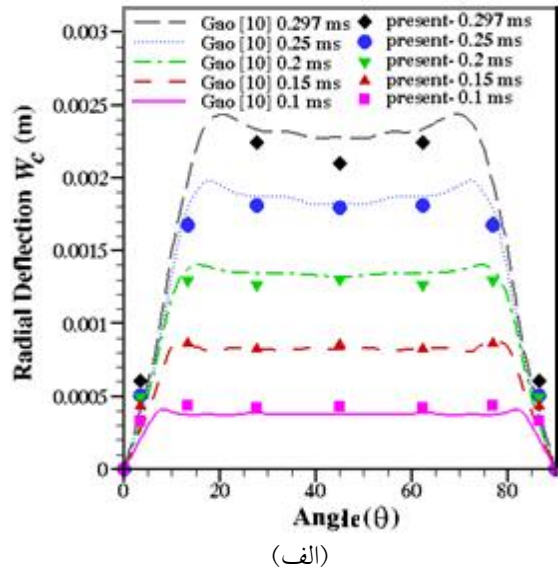
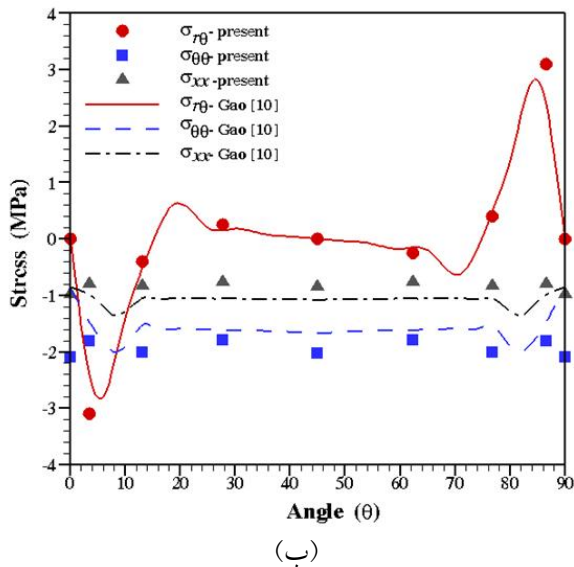
$\rho$	$G_{12}$	$G_{31}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$	$E_{33}$	$E_{22}$	$E_{11}$	
kg/m <sup>3</sup>	(GPa)	(GPa)	(GPa)				(GPa)	(GPa)	(GPa)	
۱۳۹۱	۱/۷۳	۱/۷۳	۴	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۲۸	۱۷	۱۷	۷/۴۸	شیشه / اپوکسی
۲۵۰	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۳۴	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	PVC فوم

هسته و ۲۵۰۰۰ برای لایه‌های جانبی در نظر گرفته شده است. در راستای صحت‌سنجی نتایج غیرخطی ارائه شده، تغییر مکان‌های راستای مرکزی یک پانل ساندویچی بلند به همراه تنش‌های ایجاد شده در هسته در زمان  $t=0/295$  s تحت بارگذاری، مطابق با آنچه در [۱۰] بدان اشاره شده است، در شکل (۳) مشاهده می‌شود. مقایسه تغییر مکان‌های به دست آمده در این شکل نشان از دقت بالای معادلات و روش ارائه شده در این مقاله دارد.

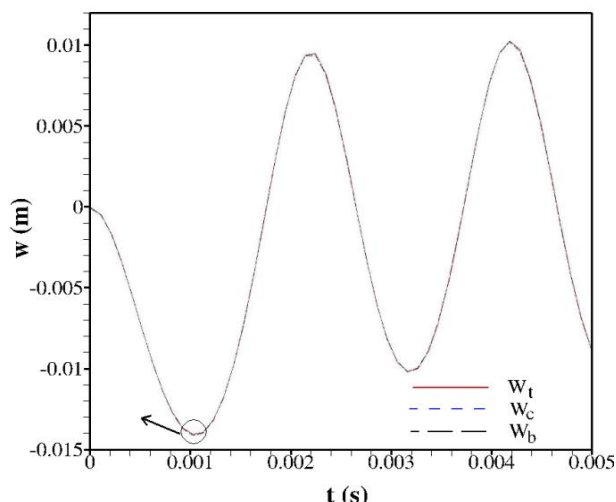
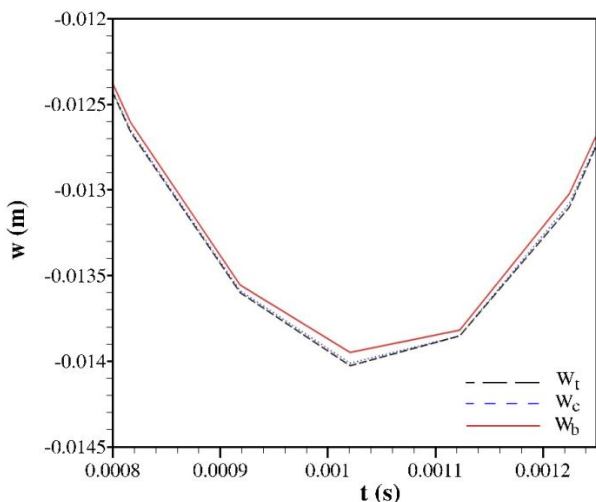
پس از بررسی صحت روش ارائه شده، در ادامه به منظور مطالعه قابلیت فشرده شدن هسته نتایج برای تغییر مکان‌های سطح میانی پوسته ساندویچی در بین زمان‌های صفر تا ۵ میلی ثانیه ارائه می‌شود. به این منظور ابعاد ثابتی از پانل به ضخامت صفحات جانبی  $h_{t,b}=5$  mm، ضخامت هسته  $h_c=40$  mm شعاع صفحه میانی  $a_c=1$  m و طول و عرض  $L=b=(a_c \times \beta)=0/5$  m

ساندویچی در معرض بارگذاری دینامیکی ضربانی است. همچنین نمایان است تقریب تک‌جمله استفاده شده برای تحلیل پاسخ دینامیکی نتایج قابل قبولی برای این دسته از پانل‌ها ارائه می‌دهد. از المان سه‌بعدی غیرخطی سالیید<sup>۱</sup> که از خود رفتار تغییر مکان مرتبه دوم را نشان می‌دهد و برای مدل‌سازی رفتار الاستیک که تغییر شکل و کرنش‌های بزرگ مناسب است، در نرم‌افزار Ansys استفاده شده است. با توجه به در نظر گرفتن شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های پانل، مؤلفه‌های تغییر مکان و مشتقات مرتبه دوم آنها در چهار لبه صفر در نظر گرفته شده‌اند. در بسته نرم‌افزار Ansys، از روش حل ضمنی ترنزینت<sup>۲</sup> استفاده شده است که انتگرال زمانی در آن با استفاده از الگوریتم نیومارک تخمین زده می‌شود. با مطالعه همگرایی نتایج در نرم‌افزار Ansys، برای تحلیل‌های دینامیکی در شرایط مختلف و تعداد نقاط شبکه‌بندی متفاوت، تعداد المان‌های ۵۰۰۰۰ برای





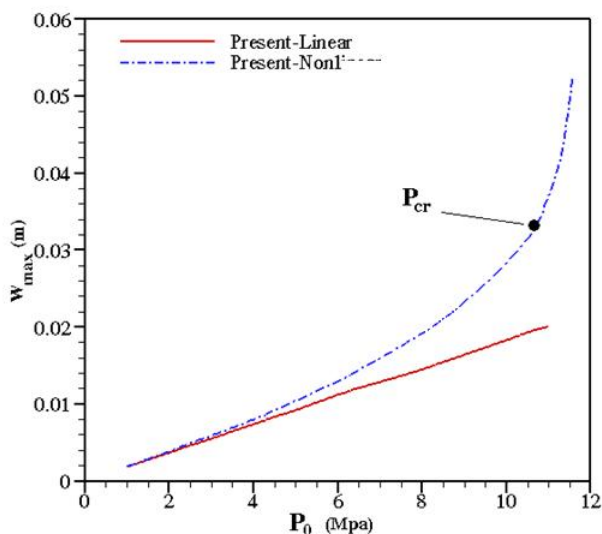
شکل ۳- مقایسه نتایج به دست آمده از حل غیرخطی با نتایج مرجع [۱۰]، (الف) جابه‌جایی مرکز پانل در راستای محیطی، (ب) تنش‌های هسته در راستای محیطی



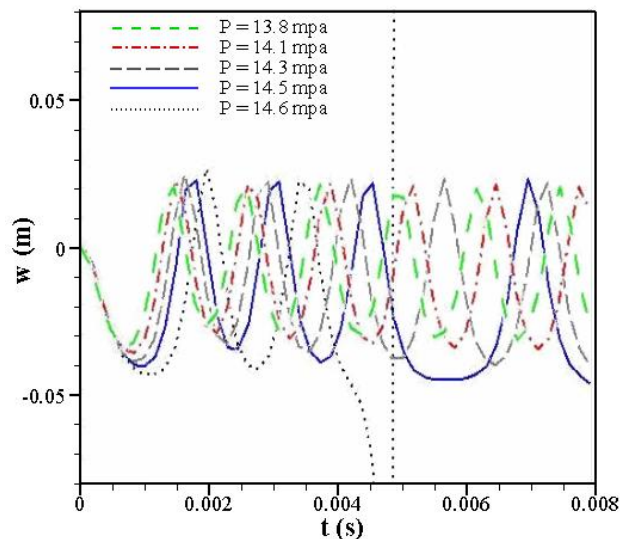
شکل ۴- تغییر مکان شعاعی مرکز لایه‌های پانل به دست آمده از حل معادلات در حالت غیرخطی

(۴) قابل مشاهده است. مطابق با آنچه در شکل‌های سمت چپ برای محدوده زمانی بسیار کوچک مشخص شده است، میزان تغییر مکان در لایه‌های مختلف پانل با یکدیگر متفاوت است و وابسته به میزان بارگذاری و ابعاد پانل می‌تواند مقادیر قابل توجهی به خود گیرند. یکی از مزایای استفاده از روابط غیرخطی در حل معادلات پاسخ زمانی سازه، تحلیل رفتار تغییر شکل‌های بزرگ و

مدنظر قرار گرفته است. فشار جانبی ضربانی روی سطح بیرونی پانل اعمال می‌شود و در تمامی موارد پانل دارای شعاع داخلی  $R_1=1\text{m}$  است. همچنین فشار بیشینه اعمالی به مقدار  $P_0=2\text{MPa}$  و زمان ضربان  $t_d=2$  میلی‌ثانیه خواهد بود. خواص مواد لایه‌های جانبی و همین‌طور هسته در جدول (۱) داده شده است. تغییر مکان شعاعی وابسته به زمان مرکز لایه‌های پانل که با استفاده از حل معادلات غیرخطی به دست آمده‌اند، در شکل



شکل ۶- نمودار پایداری پانل ساندویچی

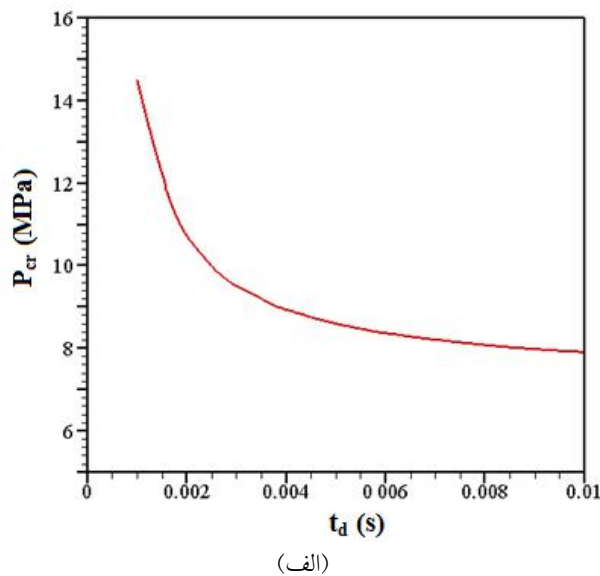
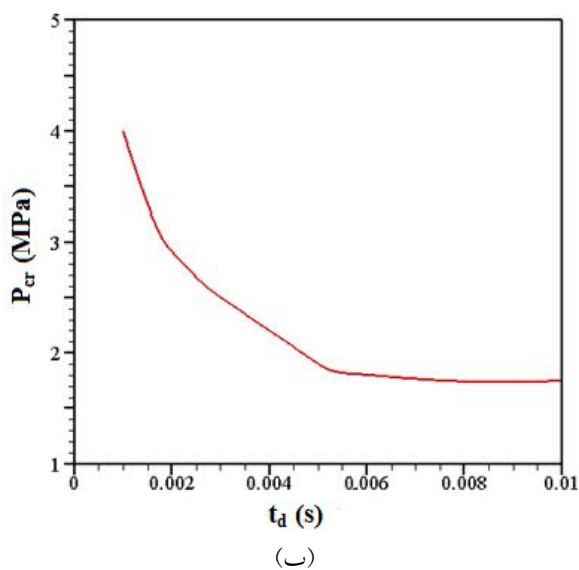


شکل ۵- پاسخ زمانی جابه‌جایی شعاعی مرکز پانل به ازای مقادیر مختلف دامنه فشار ضربانی

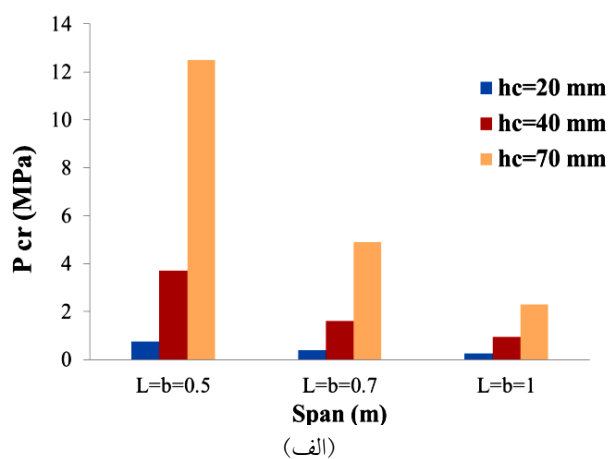
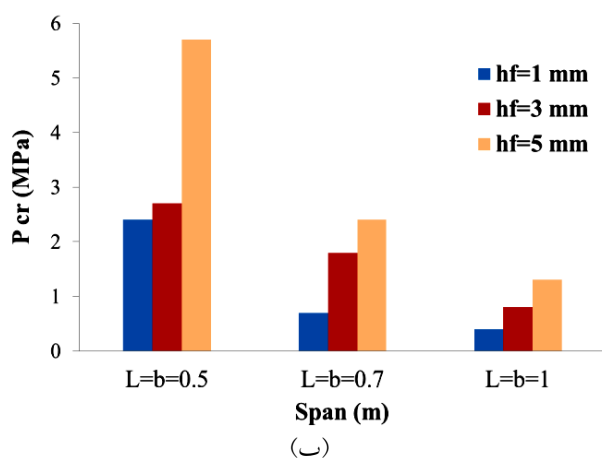
در ادامه نمودار پایداری برای پانل‌های ساندویچی با ضخامت‌های مشابه و دو طول و عرض  $0/3$  و  $0/5$  متر برای زمان‌های ضربان مختلف در شکل (۷) آورده شده‌اند. مشاهده می‌شود با افزایش زمان اعمال بار دینامیکی و در نتیجه حرکت به سمت بارگذاری‌های استاتیکی و شبه‌استاتیکی، فشار کمانشی دینامیکی کاهش یافته و به یک مقدار مجانبی میل می‌کند. از دیگر پارامترهای مهم در تعیین رفتار پانل‌های استوانه‌ای، ضخامت لایه‌های آن است. بدین منظور در شکل (۸) برای یک پانل ساندویچی استوانه‌ای با شعاع میانی یک متر که تحت بارگذاری با زمان ضربان ۲ میلی‌ثانیه قرار دارد، تحلیل کمانش دینامیکی برای ضخامت‌های مختلف لایه میانی و لایه‌های جانبی انجام شده است. با توجه به نتایج مشخص است برای پانل‌های ساندویچی ضخیم، فشار بحرانی کمانشی بسیار بزرگ است و بنابراین احتمال فروپاشی پانل به دلیل از دست دادن پایداری دینامیکی آن به ندرت اتفاق خواهد افتاد. در این پانل‌های ساندویچی با هسته نرم مواردی همچون شکست لایه‌های جانبی و تسلیم و تغییر شکل پلاستیک هسته می‌توانند عامل خرابی اصلی تلقی شوند.

همان‌گونه که اشاره شد، فوم‌های PVC به‌عنوان یک ماده

ناپایداری آنها تحت بارگذاری‌های مختلف است. در این مقاله به‌منظور تخمین حالت ناپایداری پانل ساندویچی از معیار بادیانسکی-راس [۲۱] استفاده شده است. بر این اساس زمانی سازه به حالت ناپایداری خواهد رسید که به‌ازای یک تغییر کوچک در مقدار فشار دینامیکی ضربانی، تغییرات زیادی در تغییر مکان آن حاصل شود. در شکل (۵) نتایج برای یک پانل ساندویچی با ضخامت صفحات جانبی  $h_{t,b} = 5$  mm، ضخامت هسته  $h_c = 40$  mm، شعاع صفحه میانی  $a_c = 1$  m و طول و عرض  $L = b = (a_c \times \beta) = 0/3$  m تحت بارگذاری فشار دینامیکی ضربانی با زمان اعمال بار  $t_d = 0/001$  s نشان داده شده است. در شکل می‌توان دید به‌ازای یک تغییر کوچک در بیشینه فشار اعمالی از  $14/5$  به  $14/6$  مگاپاسگال، تغییر مکان لایه جانبی بسیار بزرگ می‌شود. منحنی تغییرات جابه‌جایی بیشینه لایه جانبی پانل به‌ازای مقادیر مختلف دامنه بارگذاری برای بار ضربانی با زمان اعمال بار  $t_d = 0/002$  s در شکل (۶) نشان داده شده است. شکل (۶) به روشنی نشان می‌دهد تحلیل خطی پاسخ تغییر مکان پانل، توانایی نشان دادن رفتار واقعی آن را ندارد. همچنین مشخص است که در فشار  $10/7$  مگاپاسگال پانل به شرایط ناپایداری دینامیکی خود خواهد رسید.



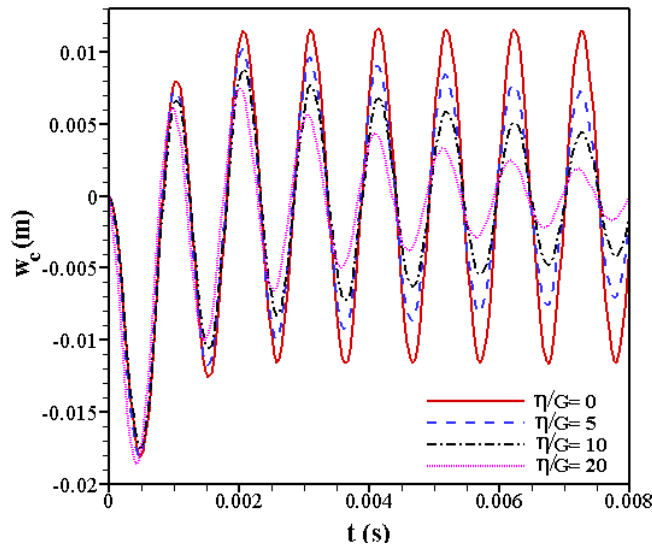
شکل ۷- تأثیر زمان بارگذاری ضربانی بر روی فشار بحرانی کمانشی، الف)  $L=b=0.3$  m و ب)  $L=b=0.5$  m.



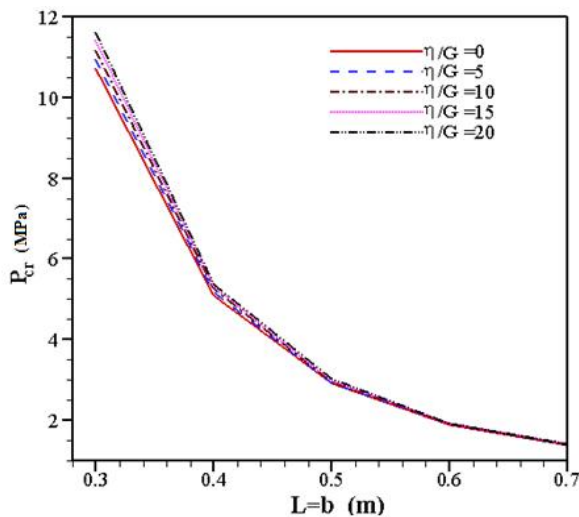
شکل ۸- تأثیر ضخامت لایه‌ها روی فشار بحرانی کمانشی پانل ساندویچی، الف)  $h_f=h_b=0.005$  m و ب)  $h_c=0.05$  m.

دسته از مواد استفاده شده است. به منظور مطالعه تأثیر خواص ویسکوالاستیک هسته روی رفتار دینامیکی پانل ساندویچی، تغییرات مؤلفه شعاعی تغییر مکان مرکز پانل برای مقادیر مختلف ضریب ویسکوالاستیک  $\eta$  با در نظر گرفتن روابط غیرخطی کرنش-تغییر مکان در شکل (۹) رسم شده است. از نتایج می‌توان تشخیص داد ضریب ویسکوالاستیک که به‌عنوان یک عامل مستهلک کننده عمل می‌کند، تأثیر قابل توجهی روی رفتار دینامیکی پانل دارد و دامنه تغییر مکان‌های آن را کاهش می‌دهد.

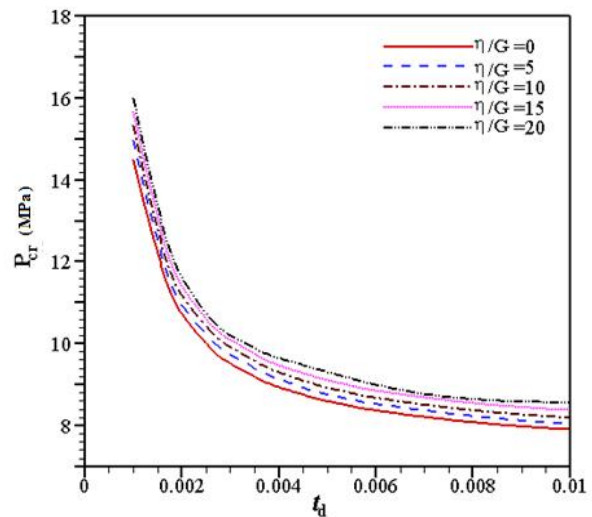
پرکاربرد در پانل‌های ساندویچی نظامی دریایی به شمار می‌روند. مطالعات آزمایشگاهی که به‌تازگی انجام شده است نشان داد این مواد در حالت‌های قبل و بعد از خرابی از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند [۱]. آنها دریافتند هنگامی که فوم تحت کرنش‌های کوچک قرار دارد، رفتار ویسکوالاستیک خطی از خود نشان می‌دهد و سپس وارد تغییر شکل‌های دائمی با رفتار پلاستیک کامل می‌شود. در این مقاله مشابه با کار انجام شده در [۱۳]، از مدل ویسکوالاستیک خطی کلین-ویت به‌عنوان یکی از روابط کاربردی برای این



شکل ۹- تأثیر ضریب ویسکوالاستیک بر روی پاسخ دینامیکی غیرخطی تغییر مکان شعاعی پوسته،  $t_d = 0.002$  s،  $L=b = 0.5$  m



شکل ۱۱- تأثیر خاصیت ویسکوالاستیک هسته روی فشار کماتشی ضربانی موضعی پانل ساندویچی  $t_d = 0.002$  s



شکل ۱۰- تأثیر ضریب ویسکوالاستیک هسته روی فشار کماتشی ضربانی موضعی پانل ساندویچی  $L=b = 0.3$  m

ویسوالاستیک ترسیم شده است. مشاهدات شکل (۹) نشان داده‌اند که تغییرات پارامتر ویسکوالاستیک در مدل ویسکوالاستیک خطی استفاده شده در این مقاله، تأثیر قابل توجهی روی تغییر مکان‌های به‌دست آمده برای پاسخ ارتعاشی لایه‌های پانل دارد. از آنجایی که افزایش خاصیت میرایی سیستم موجب می‌شود بسامد طبیعی آن کاهش یابد. بنابراین می‌توان انتظار داشت تغییرات پارامتر ویسکوالاستیک هسته روی

تغییر مکان شعاعی مرکز لایه‌های جانبی پانل در مقابل تغییرات مدت زمان اعمال بار مورد توجه قرار داده شد و با رسم منحنی‌های پایداری برای مقادیر مختلف ضریب ویسکوالاستیک، منحنی فشار کماتشی ضربانی در برابر مدت زمان اعمال فشار دینامیکی مطابق شکل (۱۰) به‌دست آمد. همچنین در شکل (۱۱) نمودار تغییرات فشار کماتشی در برابر اندازه‌های مختلف دهانه پانل برای مقادیر مختلف پارامتر

شده است. همچنین با استفاده از معیار بادیانسکی - راس، پایداری دینامیکی پانل ساندویچی تحت فشار خارجی مورد ارزیابی قرار گرفت. از مدل ویسکوالاستیک خطی کلونین - ویت برای مدل سازی رفتار هسته استفاده شد. به منظور در نظر گرفتن قابلیت تغییر شکل هسته، از تئوری مرتبه بالای برشی بهبود یافته استفاده شد. از روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم در نرم افزار Maple برای حل معادلات غیرخطی استفاده شد. با بررسی نتایج می توان گفت در نظر گرفتن خاصیت ویسکوالاستیک هسته تأثیر زیادی روی پاسخ زمانی تغییر مکان پانل ساندویچی می گذارد و همچنین در پایداری دینامیکی آن نقش مهمی ایفا می کند. ضخامت لایه ها، ابعاد پانل و مدت زمان اعمال فشار ضربانی از پارامترهای مهم در بررسی رفتار ناپایداری دینامیکی پانل های ساندویچی هستند.

کمانش دینامیکی پانل ساندویچی استوانه ای نیز تأثیرگذار باشد. نتایج ارائه شده در شکل های (۱۰) و (۱۱) تأیید کننده موضوع قبل است و نشان می دهند رفتار پایداری پانل وابسته به پارامتر ویسکوز بوده و با افزایش آن، مقاومت کمانشی سازه افزایش می یابد. مطابق شکل (۱۱) می توان گفت با افزایش ابعاد پانل، اثرگذاری پارامتر ویسکوز روند کاهشی پیدا می کند. به عبارت دیگر، تأثیر پارامترهایی همچون طول و عرض پانل ساندویچی، روی کمانش دینامیکی آن بیش از پارامتر ویسکوالاستیک هسته است.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل عددی غیرخطی به منظور بررسی پاسخ دینامیکی تغییر شکل الاستیک پانل ساندویچی استوانه ای کامپوزیتی با هسته انعطاف پذیر تحت بارگذاری انفجار ارائه

#### واژه نامه

1. solid 186
2. implicit transient

#### مراجع

1. HooFatt, M. S., and Chen, L., "A Viscoelastic Damage Model for Hysteresis in PVC H100 Foam Under Cyclic Loading," *Journal of Cellular Plastic*, Vol. 51, No. 3, pp. 269-287, 2015.
2. Keshav, V., and Patel, S. N., "Dynamic Buckling of Laminated Composite Curved Panels Subjected to In-plane Compression," *Recent Advances in Structural Engineering*, Vol. 2, pp. 735-744, 2018.
3. Sankar, A., Natarajan, S., Merzouki, T., and Ganapathi, M., "Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 17, No. 9, 2017.
4. Nguyen, C. H., Butukuri, R. R., Chandrashekhara, K., Birman, V., "Dynamic and Buckling of Sandwich Panels with Stepped Facings," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 11, No. 4, pp. 697-716, 2011.
5. Shen, J., Lu, G., Wang, Zh., and Zhao, L., "Experiments on Curved Sandwich Panels under Blast Loading," *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 37, pp. 960-970, 2010.
6. HooFatt, M. S., and Palla, L., "Analytical Modeling of Composite Sandwich Panels under Blast Loads," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 11, pp. 357-380, 2009.
7. HooFatt, M. S., Surabhi, H., and Gao, Y., "Blast Response of Sandwich Shells with Crushable Foam Cores," *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 3174-3185, 2012.
8. HooFatt, M. S., and Chapagain, P., "Pressure Pulse Response of Composite Sandwich Panels with Plastic Core Damping," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 14, No. 4, pp. 392-429, 2012.
9. HooFatt, M. S., Gao, Y., and Sirivolu, D., "Foam-Core Composite Sandwich Shells under Blast," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 15, No. 3, pp. 261-291, 2013.
10. Gao, Y., and HooFatt, M. S., "Local Facesheet Pulse Buckling in a Curved, Composite Sandwich Panel," *Composite Structures*, Vol. 104, pp. 249-60, 2013.
11. Sirivolu, D., HooFatt, M.S., "Dynamic stability of double-curvature composite shells under external

blast," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 77, pp. 281-90, 2015.

12. Birman, V., and Simitsev, G. J., "Dynamic Stability of Long Cylindrical Sandwich Shells and Panels Subject to Periodic-in-time Lateral Pressure," *Journal of Composite Materials*, Vol. 38, no. 7, pp. 591-607, 2004.
13. Balkan, D., Acar, O., Türkmen Z., and Mecitoğlu, H. S., "Transient Response of a Laminated Sandwich Plate with Viscoelastic Core Subjected to Air Blast: Theory and Experiment," *Structures under Shock and Impact XI*, Vol. 113, 2010.
14. Mokhtari, M., Permoon, M. R., and Haddadpour, H., "Dynamic Analysis of Isotropic Sandwich Cylindrical Shell with Fractional Viscoelastic Core Using Rayleigh-Ritz Method," *Composite Structures*, Vol. 186, pp.165-174, 2018.
15. Mohammadi, F., and Sedaghati, R., "Linear and Nonlinear Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shell with Constrained Viscoelastic Core Layer," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 54, pp. 156-17, 2012.
16. Liang, Y., Spuskanyuk, A. V., Flores, S. E., Hayhurst, D. R., Hutchinson, J. W., Mc Meeking, R. M., and Evans, A. G., "The Response of Metallic Sandwich Panels to Water Blast," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, No. 1, pp. 81-99, 2007.
17. Nemat-Nasser, S., Kang, W. J., and McGee, J. D.,

Guo, W. G., Issacs, J. B., "Experimental Investigation of Energy Absorption Characteristics of Components of Sandwich Structures," *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 34, No. 6, pp. 1119-1146, 2007.

18. Kardomateas, G.A., Rodcheuy, N., and Frostig, F., "Transient Blast Response of Plates by Dynamic Elasticity," *AIAA Journal*, Vol. 53, No. 6, 2015.
19. Li, R., Kardomateas, G.A., "Nonlinear high order core theory for sandwich plates with orthotropic phases," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 11, 2008.
20. Li, R., and Kardomateas, G. A., and Simitsev, G. J., "Nonlinear Response of a Shallow Sandwich Shell with Compressible Core to Blast Loading," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, 2008.
21. Budiansky, B., and Hutchinson, J. W., "Dynamic Buckling Estimates," *AIAA Journal*, Vol. 4, no. 3, pp. 525-30, 1966.
22. Amabili, M., *Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University press, UK, 2008.
23. Shaw, M. T., and MacNight, W. J., *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, New Jersey, 2005.
24. Lindberg, H. E., Florence, A. L., *Dynamic Pulse Buckling*, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

پیوست

$$L_{11} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\varepsilon B_{mn}^c(t)}{h_c} + \frac{\Delta B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t)}{h_c} - A_{mn}^t(t)m + B^t(t) - \frac{B_{mn}^t(t)m^\gamma h_t}{a_c + \frac{h_c}{\gamma}} \right)$$

$$L_{12} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{h_c}{a_c + \frac{h_c}{\gamma}} \right)$$

$$L_{13} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^t(t)n\pi}{L} - \frac{B_{mn}^t(t)n^\gamma \pi^\gamma h_t}{\gamma L^\gamma} \right)$$

$$L_{14} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma} + h_t} \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^t(t)m^\gamma + A_{mn}^t(t)m)}{(a_c + z)^\gamma} \right) dz$$

$$L_{15} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma} + h_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^t(t)m^\gamma + A_{mn}^t(t)m)}{(a_c + z)^\gamma} - \frac{A_{mn}^t(t)m + B_{mn}^t(t)}{a_c + z} \right) dz$$

$$L_{16} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma} + h_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^t(t)n\pi}{L} + \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^t(t)n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) dz$$

$$L^{\gamma\psi} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c+z) \frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^t(t)}{\partial t^{\gamma}} dz$$

$$L^{\gamma\chi} = -\gamma \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + \frac{h_c}{\gamma}) \left( \frac{B_{mn}^t(t)m}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})} + \frac{A_{mn}^t(t) - A_{mn}^b(t)}{\gamma h_c} + \frac{h_t B_{mn}^t(t)m}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})h_c} - \frac{h_t B_{mn}^t(t)m}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})^{\gamma}} \right. \\ \left. + \frac{h_t(-\varphi B_{mn}^c(t) + \delta B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t))}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})} - \frac{A_{mn}^t(t) + \frac{B_{mn}^t(t)mh_t}{a_c + \frac{h_c}{\gamma}}}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})} \right)$$

$$L^{\gamma\zeta} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^t(t)m^{\gamma} + A_{mn}^t(t)m^{\gamma})}{(a_c+z)^{\gamma}} - \frac{A_{mn}^t(t)m^{\gamma} + B_{mn}^t(t)m}{a_c+z} \right) dz$$

$$L^{\gamma\eta} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^t(t)m n \pi}{L} + \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^t(t)m n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) dz$$

$$L^{\gamma\theta} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c+z) \left( -\frac{C_{mn}^t(t)m n \pi}{L} + \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^t(t)m n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} - \frac{A_{mn}^t(t)n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{\gamma L^{\gamma}} \right. \\ \left. - \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(\frac{B_{mn}^t(t)m n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{A_{mn}^t(t)n^{\gamma} \pi^{\gamma}}{L^{\gamma}})}{\gamma(a_c+z)} \right) dz$$

$$L^{\gamma\delta} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(B_{mn}^t(t)m - A_{mn}^t(t))}{(a_c+z)^{\gamma}} \right) dz$$

$$L^{\gamma\phi} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c+z) \left( \frac{\partial^{\gamma} A_{mn}^t(t)}{\partial t^{\gamma}} - \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(\frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^t(t)}{\partial t^{\gamma}} m - \frac{\partial^{\gamma} A_{mn}^t(t)}{\partial t^{\gamma}})}{(a_c+z)} \right) dz$$

$$L^{\gamma\lambda} = -\gamma \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + \frac{h_c}{\gamma}) \left( -\frac{B_{mn}^t(t)n\pi}{L} + \frac{C_{mn}^t(t) + C_{mn}^b(t)}{h_c} + \frac{h_t B_{mn}^t(t)n\pi}{h_c L} \right. \\ \left. + \frac{h_t}{\gamma} \left( -\frac{\varphi B_{mn}^c(t)n\pi}{h_c L} + \frac{\delta B_{mn}^t(t)n\pi + B_{mn}^b(t)n\pi}{h_c} \right) \right)$$

$$L^{\gamma\mu} = \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^t(t)m^{\gamma} + \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^t(t)m^{\gamma} n \pi}{L}}{a_c+z} \right. \\ \left. - \frac{A_{mn}^t(t)m n \pi}{\gamma L} - \frac{(z - \frac{h_c}{\gamma} - \frac{h_t}{\gamma})(B_{mn}^t(t)m^{\gamma} n \pi + A_{mn}^t(t)m n \pi)}{\gamma(a_c+z)} \right) dz$$

$$\begin{aligned}
Lr\tau &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_c+z) \left( \frac{(z-\frac{h_c}{\gamma}-\frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^t(t)m^{\gamma}n\pi + A_{mn}^t(t)mn\pi)}{L(a_c+z)^{\gamma}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_{mn}^t(t)mn\pi}{L(a_c+z)} + \frac{B_{mn}^t(t)n\pi}{L(a_c+z)} \right) dz \\
Lr\epsilon &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^t(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{(z-\frac{h_c}{\gamma}-\frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^t(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) dz \\
Lr\delta &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c+h_t}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_c+z) \left( \frac{\partial^{\gamma} C_{mn}^t(t)}{\partial t^{\gamma}} - \frac{(z-\frac{h_c}{\gamma}-\frac{h_t}{\gamma})\partial^{\gamma} B_{mn}^t(t)}{L} n\pi \right) dz \\
Lr\lambda &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_c+\frac{1}{\gamma}h_c) \left( -\frac{\epsilon B_{mn}^c(t)}{h_c} + \frac{\delta B_{mn}^t(t)+B_{mn}^b(t)}{h_c} \right) - (a_c-\frac{1}{\gamma}h_c) \left( \frac{\epsilon B_{mn}^c(t)}{h_c} - \frac{\gamma((B_{mn}^t(t)+B_{mn}^b(t)))}{h_c} \right) \\
&\quad - A_{mn}^t(t)m + B_{mn}^t(t) - \frac{1}{\gamma} \frac{h_t B_{mn}^t(t)m^{\gamma}}{a_c+\frac{1}{\gamma}h_c} - A_{mn}^b(t)m + B_{mn}^b(t) + \frac{1}{\gamma} \frac{h_t B_{mn}^b(t)m^{\gamma}}{a_c-\frac{1}{\gamma}h_c} \\
Lr\varphi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_c+\frac{1}{\gamma}h_c) \left( \frac{1}{a_c+\frac{1}{\gamma}h_c} \right) - (a_c-\frac{1}{\gamma}h_c) \left( \frac{1}{a_c-\frac{1}{\gamma}h_c} \right) \\
&\quad + \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{1}{h_c} \right) (-\gamma B_{mn}^c(t) + B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t)) + \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{h_c} \right) (B_{mn}^t(t) - B_{mn}^b(t)) \right) \\
Lr\psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_c+\frac{1}{\gamma}h_c) \left( -\frac{C_{mn}^b(t)n\pi}{L} + \frac{1}{\gamma} \frac{h_t B_{mn}^t(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) - (a_c-\frac{1}{\gamma}h_c) \left( -\frac{C_{mn}^b(t)n\pi}{L} + \frac{1}{\gamma} \frac{h_t B_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) \\
Lr\chi &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{(a_c+z)} \cdot \left( -\left( \frac{m}{\gamma} - \frac{zm}{h_c} \right) \frac{m(A_{mn}^b(t)+A_{mn}^t(t))}{\gamma} + \frac{1}{h_c(a_c+z)} (zh_t \left( \left( -\left( \frac{\gamma Z}{h_c} - \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) B_{mn}^c(t)m^{\gamma} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \left. - \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) (B_{mn}^t(t)m^{\gamma} + B_{mn}^b(t)m^{\gamma}) + \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\gamma Z^{\gamma}}{h_c} \right) (-B_{mn}^t(t)m^{\gamma} + B_{mn}^b(t)m^{\gamma}) \right) \right) \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{(a_c+z)} \left( \left( -\left( \frac{\gamma Z}{h_c} - \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) B_{mn}^c(t) + \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) (B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\gamma Z^{\gamma}}{h_c} \right) (B_{mn}^t(t) - B_{mn}^b(t)) \right) \right) dz \\
Lr\omega &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{C_{mn}^b(t)n\pi}{\gamma L} + \frac{C_{mn}^t(t)n\pi}{\gamma L} - \frac{zn\pi}{h_c L} \left( \frac{C_{mn}^b(t)}{\gamma} - \frac{C_{mn}^t(t)}{\gamma} \right) + \frac{1}{h_c} (zh_t \left( -\left( \frac{\gamma Z}{h_c} - \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) \frac{B_{mn}^c(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \left. + \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) \frac{n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} (-B_{mn}^t(t) - B_{mn}^b(t)) \right) \right) \right) \right) dz \\
Lr\phi &= \int_{\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \gamma(a_c+z) \left( -\frac{\left( \frac{\gamma Z}{h_c} - \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) B_{mn}^c(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) \left( -\frac{B_{mn}^t(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{B_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma Z}{h_c} + \frac{\gamma Z^{\gamma}}{h_c} \right) \frac{(-B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t))n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \frac{(C_{mn}^b(t) - C_{mn}^t(t))n\pi}{h_c} + \frac{1}{\gamma h_c} \left( h_t \left( -\frac{\left( \frac{\gamma Z}{h_c} - \frac{\lambda Z^{\gamma}}{h_c} \right) B_{mn}^c(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) \left( -\frac{B_{mn}^t(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} - \frac{B_{mn}^b(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \left( -\frac{B_{mn}^t(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} + \frac{B_{mn}^b(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma h_c} (zh_t \\
& \left( -\frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\gamma \gamma z}{h_c^\gamma} \right) B_{mn}^c(t) n^\gamma \pi^\gamma \\
& \left( -\frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\gamma \gamma z}{h_c^\gamma} \right) \left( -\frac{B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \\
& \left( -\frac{B_{mn}^t(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} + \frac{B_{mn}^b(t) n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) dz \\
L^{\gamma \nu} = & \int_{-\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \gamma \left( \frac{1}{\gamma(a_c+z)} \left( -\left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) B_{mn}^c(t) m^\gamma + \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma - B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma + B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) + \frac{(-mA_{mn}^t(t) + mA_{mn}^b(t))}{\gamma h_c} + \frac{1}{\gamma h_c(a_c+z)} \left( h_t \left( -\left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) B_{mn}^c(t) m^\gamma \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma - B_{mn}^b(t) m^\gamma) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma + B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) \right) - \frac{1}{\gamma h_c(a_c+z)^\gamma} \right. \\
& \left. (zh_t \cdot \left( -\left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) B_{mn}^c(t) m^\gamma \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma - B_{mn}^b(t) m^\gamma) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma + B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\gamma h_c(a_c+z)} \left( zh_t \left( -\left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\gamma \gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot B_{mn}^c(t) m^\gamma + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\gamma \gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma - B_{mn}^b(t) m^\gamma) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma + B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\gamma h_c(a_c+z)} \left( -\frac{m}{\gamma} A_{mn}^b(t) \right) \right. \\
& \left. - \frac{m}{\gamma} A_{mn}^t(t) + \frac{z(-mA_{mn}^t(t) + mA_{mn}^b(t))}{h_c} + \frac{1}{h_c(a_c+z)} \left( zh_t \left( -\left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} - \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) B_{mn}^c(t) m^\gamma + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} + \frac{\lambda z}{h_c^\gamma} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-B_{mn}^t(t) m^\gamma - B_{mn}^b(t) m^\gamma) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{z}{h_c} + \frac{\gamma z}{h_c^\gamma} \right) \cdot (-B_{mn}^t(t) m^\gamma + B_{mn}^b(t) m^\gamma) \right) \right) \right) dz \\
L^{\gamma \lambda} = & \int_{-\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{h_c^\delta}{\lambda^\delta} \left( -a_c \left( \frac{\gamma}{h_c^\gamma} \left( \frac{\partial^\gamma B_{mn}^t(t)}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^\gamma B_{mn}^b(t)}{\partial t^\gamma} \right) - \frac{\lambda}{h_c^\gamma} \frac{\partial^\gamma B_{mn}^c(t)}{\partial t^\gamma} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma}{h_c^\gamma} \left( \frac{\partial^\gamma B_{mn}^t(t)}{\partial t^\gamma} - \frac{\partial^\gamma B_{mn}^b(t)}{\partial t^\gamma} \right) \right) - a_c h_c \frac{\partial^\gamma B_{mn}^c(t)}{\partial t^\gamma} \right. \\
& \left. + \frac{h_c^\gamma}{\gamma} \left( -a_c \left( \frac{1}{h_c^\gamma} \left( \frac{\partial^\gamma B_{mn}^t(t)}{\partial t^\gamma} + \frac{\partial^\gamma B_{mn}^b(t)}{\partial t^\gamma} \right) - \frac{\gamma}{h_c^\gamma} \frac{\partial^\gamma B_{mn}^c(t)}{\partial t^\gamma} \right) - \frac{1}{\gamma h_c} \left( \frac{\partial^\gamma B_{mn}^t(t)}{\partial t^\gamma} - \frac{\partial^\gamma B_{mn}^b(t)}{\partial t^\gamma} \right) \right) \right) dz \\
L^{\delta \nu} = & \gamma \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_c - \frac{h_c}{\gamma} \right) \left( \frac{B_{mn}^b(t) n \pi}{L} + \frac{C_{mn}^t(t) + C_{mn}^b(t)}{h_c} + \frac{h_t B_{mn}^b(t) n \pi}{h_c L} - \frac{h_t}{\gamma} \left( \frac{\partial^\gamma B_{mn}^c(t) n \pi}{h_c L} - \frac{\delta B_{mn}^t(t) n \pi}{L} + \frac{B_{mn}^b(t) n \pi}{L} \right) \right) \\
L^{\delta \gamma} = & \int_{-\frac{h_c}{\gamma}}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-C_{mn}^b(t) m^\gamma + \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma}) B_{mn}^b(t) m^\gamma n \pi}{L}}{a_c + z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^b(t)m^{\gamma}n\pi + A_{mn}^b(t)mn\pi)}{\gamma L} - \frac{A_{mn}^b(t)mn\pi}{\gamma L} - \frac{L}{\gamma(a_c + z)} dz \\
L\delta^{\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + z) \left( -\frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^b(t)m^{\gamma}n\pi + A_{mn}^b(t)mn\pi)}{L(a_c + z)^{\gamma}} - \frac{A_{mn}^b(t)mn\pi}{L(a_c + z)} + \frac{B_{mn}^b(t)n\pi}{L(a_c + z)} \right) dz \\
L\delta^{\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) dz \\
L\delta\delta &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + z) \left( \frac{\partial^{\gamma} C_{mn}^b(t)}{\partial t^{\gamma}} - \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma}) \frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^b(t)}{\partial t^{\gamma}} n\pi}{L} \right) dz \\
L\delta^{\gamma} &= \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c - \frac{h_c}{\gamma}) \left( \frac{B_{mn}^b(t)m}{\gamma(a_c + \frac{h_c}{\gamma})} + \frac{A_{mn}^t(t) - A_{mn}^b(t)}{\gamma h_c} + \frac{h_t B_{mn}^b(t)m}{\gamma(a_c - \frac{h_c}{\gamma})h_c} + \frac{h_t B_{mn}^b(t)m}{\gamma(a_c - \frac{h_c}{\gamma})^{\gamma}} - \frac{A_{mn}^b(t) - \frac{B_{mn}^b(t)mh_t}{a_c - \frac{h_c}{\gamma}}}{\gamma(a_c - \frac{h_c}{\gamma})} \right. \\
& \quad \left. - \frac{h_t (\frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^c(t)}{h_c} - \frac{\delta B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t)}{h_c})}{\gamma(a_c - \frac{h_c}{\gamma})} \right) \\
L\delta^{\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^b(t)m^{\gamma} + A_{mn}^b(t)m^{\gamma})}{(a_c + z)^{\gamma}} - \frac{A_{mn}^b(t)m^{\gamma} - B_{mn}^b(t)m}{a_c + z} \right) dz \\
L\delta^{\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^b(t)mn\pi}{L} + \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^b(t)mn^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} \right) dz \\
L\delta^{\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + z) \frac{A_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{\gamma L^{\gamma}} + \frac{-\frac{C_{mn}^b(t)mn\pi}{L} + \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^b(t)mn^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}}}{\gamma(a_c + z)} \\
& \quad - \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-\frac{B_{mn}^b(t)mn^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}} + \frac{A_{mn}^b(t)n^{\gamma}\pi^{\gamma}}{L^{\gamma}})}{\gamma(a_c + z)} dz \\
L\delta\delta &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(B_{mn}^b(t)m - A_{mn}^b(t))}{(a_c + z)^{\gamma}} \right) dz \\
L\delta\delta &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + z) \left( \frac{\partial^{\gamma} A_{mn}^b(t)}{\partial t^{\gamma}} - \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma}) (\frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^b(t)}{\partial t^{\gamma}} m - \frac{\partial^{\gamma} A_{mn}^b(t)}{\partial t^{\gamma}})}{(a_c + z)} \right) dz \\
L\gamma &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c - \frac{h_c}{\gamma}) \left( \frac{\partial^{\gamma} B_{mn}^c(t)}{h_c} - \frac{\delta B_{mn}^t(t) + B_{mn}^b(t)}{h_c} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{\nu\gamma} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{-A_{mn}^b(t)m + B^b(t) - \frac{B_{mn}^b(t)m^\gamma h_t}{a_c - \frac{h_c}{\gamma}}}{a_c - \frac{h_c}{\gamma}} \right) \\
L^{\nu\gamma} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^b(t)n\pi}{L} + \frac{B_{mn}^b(t)n^\gamma \pi^\gamma h_t}{\gamma L^\gamma} \right) \\
L^{\nu\gamma} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{-\frac{h_c}{\gamma}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^b(t)m^\gamma + A_{mn}^b(t)m)}{(a_c + z)^\gamma} \right) dz \right) \\
L^{\nu\delta} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{-\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_c + z) \frac{\partial^\gamma B_{mn}^b(t)}{\partial t^\gamma} dz \\
L^{\nu\varphi} &= \int_{-\frac{h_c}{\gamma} - h_b}^{-\frac{h_c}{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})(-B_{mn}^b(t)m^\gamma + A_{mn}^b(t)m)}{(a_c + z)^\gamma} - \frac{A_{mn}^b(t)m + B_{mn}^b(t)}{a_c + z} \right) dz \\
L^{\nu\psi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{C_{mn}^b(t)n\pi}{L} + \frac{(z + \frac{h_c}{\gamma} + \frac{h_t}{\gamma})B_{mn}^b(t)n^\gamma \pi^\gamma}{L^\gamma} \right) dz
\end{aligned}$$