نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

یک شرط مرزی منحنی ساده شده در مرزهای ساکن یا متحرک برای روش بولتزمن شبکه‌ای

سیدمهدی نقوی[۱] و قنبرعلی شیخ‌زاده[*۲و۳]

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

۲. گروه حرارت و سیالات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

۳. گروه سیستم‌های انرژی، پژوهشکده انرژی، دانشگاه کاشان، کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۱۳ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۲/۱۶)

چکیده– روش بولتزمن شبکه‌ای یکی از زیرشاخه‌های دینامیک سیالات محاسباتی است. با وجود اینکه این روش زمینه ریاضـی پیچیـده‌ای دارد، روابط نهایی نسبتا ساده‌ای بر آن حکم‌فرماست، از این‌رو برنامه رایانه‌ای ساده‌تری نسبت به روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی نیـاز دارد. با توجه به ویژگی‌های روش بولتزمن شبکه‌ای برای پردازش موازی، این روش به‌عنوان روشی کارامد برای شبیه‌سازی جریان سیال در هندسـه‌های پیچیده، که نیاز به حافظه محاسباتی زیادی دارند، در نظر گرفته می‌شود. به‌خاطر وجود مرزهای منحنی در هندسه‌های پیچیده، یـافتن شـرط مـرزی مناسب در روش بولتزمن شبکه‌ای اجتناب‌ناپذیر است. برای این منظور پژوهش‌های زیادی انجام شده و شرایط مرزی مختلفی پیشنهاد شـده اسـت. در پژوهش حاضر، ابتدا تعدادی از شرایط مرزی منحنی مرور و سپس شرط مرزی ساده‌شده‌ای پیشنهاد شده است. برنامه‌ای به زبان فرترن، بر مبنای روش بولتزمن شبکه‌ای تهیه شده، که شرط مرزی پیشنهادی به‌همراه چند شرط مرزی دیگر در آن اعمال شده است. برای بررسـی صـحت و دقـت شرط مرزی پیشنهادی، جریان داخل حفره دوبعدی شبیه‌سازی و با نتایج عددی موجود مقایسه شده است. تطابق نتایج حاصل از پژوهش حاضر بـا نتایج پژوهشگران قبلی، صحت برنامه تهیه شده را تأیید می‌کند. همچنین دو جریان سیال، یکی جریان اطراف استوانه ساکن در کانـالی دوبعـدی و دیگری جریان بین دو استوانه ساکن و متحرک، شبیه‌سازی شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی‌ها با شرط مرزی پیشنهادی، به‌همراه نتایج شرایط مرزی قبلی، با نتایج در دسترس مقایسه شده است. مقایسه‌ها نشان می‌دهند که جواب‌هایی با دقت مناسب توسط شرط مرزی پیشنهادی به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: روش بولتزمن شبکه‌ای، شرط مرزی، کمانه کردن، مدل تراکم‌ناپذیر.

A Simplified Curved Boundary Condition in Stationary/Moving Boundaries for the Lattice Boltzmann Method

S.M. Naghavi[1] and G.A. Sheikhzadeh[*2, 3]

1. Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.
2. Heat and Fluids Department, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.
3. Energy Systems Department, Energy Research Institute, University of Kashan, Kashan, Iran.

Abstract*: Lattice Boltzmann method is one of computational fluid dynamic subdivisions. Despite complicated mathematics*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Sheikhz@kashanu.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]

involved in its background, end simple relations dominate on it; so in comparison to the conventional computational fluid dynamic methods, simpler computer programs are needed. Due to its characteristics for parallel programming, this method is considered efficient for the simulation of complex geometry flows, in which a large amount of computational memories is needed. Because of the curved boundaries in the complex geometries, detecting the proper curved boundary condition is unavoidable for the lattice Boltzmann method. For this purpose, more works have been done, and different curved boundary conditions have been proposed. At the present work, first, some curved boundary conditions have been reviewed; then a simplified curved boundary condition is proposed. A computer program based on the lattice Boltzmann method, in FORTRAN language, has been prepared; in this program, the boundary condition along with some others applied on it is proposed. To verify the accuracy and correctness of the proposed boundary condition, 2D cavity flow has been simulated and compared to the available numerical results. Adaptation of the achieved results with those of previous researchers verifies the prepared program correctness. Also, two fluid flows have been simulated, a flow around a stationary cylinder in a 2D channel and one between two stationary and moving cylinders. The results of simulations with the proposed boundary condition, along with the previous boundary conditions, have been compared to the available results. Comparisons demonstrate that solutions with proper accuracy could be obtained by the proposed boundary condition.

Keywords: *Lattice Boltzmann method, Boundary condition, Bounce back, Incompressible model.*

فهرست علائم

C_s	سرعت صوت، (m/s)	V	مؤلفه سرعت قائم، (m/s)
C_D	ضریب پسا، بی‌بعد	w_α	ضریب وزنی، بی‌بعد
C_L	ضریب برا، بی‌بعد	$\vec{x}$	بردار مکان، (m)
D	قطر استوانه، (m)	$\vec{x}_{ff}$	نقطه سیال دومی کنار مرز جامد، (m)
$\vec{e}_\alpha$	سرعت گسسته مدل، (m/s)	β	نسبت شعاع‌ها، بی‌بعد
e_V	خطای سرعت، بی‌بعد	δx	اندازه شبکه، (m)
e_P	خطای فشار، بی‌بعد	δt	گام زمانی، (s)
f	تابع توزیع ذره، بی‌بعد	λ	زمان آرامش، (s)
f_α	مقدار تابع توزیع قبل از برخورد	ρ_0	چگالی متوسط، (kg/m^3)
$\tilde{f}_\alpha$	تابع توزیع پس از برخورد	ρ	چگالی، (kg/m^3)
f^{eq}	تابع توزیع تعادلی	τ	زمان آرامش بی بعد، بی‌بعد
J	عملگر برخورد، بی‌بعد	υ	لزجت جنبشی سیال، (m^2/s)
L_r	طول جریان برگشتی (m)	Δ	نسبت فاصله، بی‌بعد
N	تعداد نقاط محدوده سیال	ΔP	اختلاف فشار دو طرف استوانه، (Pa)
P	فشار، (Pa)	χ	ضریب، بی‌بعد
Re	عدد رینولدز، بی‌بعد		زیرنویس‌ها
r_1	شعاع استوانه، (m)	b	زیرنویس مرز
r_2	شعاع استوانه، (m)	f	زیرنویس سیال
t	زمان، (s)	i	زیرنویس (شمارنده)
$\vec{u}$	بردار سرعت، (m/s)	t	زیرنویس تحلیلی
U	مؤلفه سرعت افقی، (m/s)	w	زیرنویس دیوار

α	زیرنویس جهت تابع توزیع	$\bar{\alpha}$	جهت برعکس α
	بالانویس‌ها	~	نشان‌دهنده تابع توزیع پس از برخورد
eq	حالت تعادل		

۱- مقدمه

کاربرد روش بولتزمن شبکه‌ای، در شبیه‌سازی جریان سیال، روز به روز در حال افزایش است. در این روش، سیال به‌صورت ماده‌ای پیوسته بررسی نمی‌شود، بلکه مجموعه‌ای از ذرات در نظر گرفته می‌شود. توصیف رفتار این ذرات، توسط تابع توزیع ذره انجام می‌شود. تابع توزیع ذره تابعی از زمان، مکان و سرعت ذره است. ذرات در داخل شبکه محاسباتی حرکت می‌کنند و در حین حرکت با یکدیگر برخورد می‌کنند. حرکت و برخورد ذرات در روش بولتزمن شبکه‌ای در دو گام جاری شدن[1] و برخورد[2] مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در گام برخورد تابع توزیع هر ذره به‌صورت موضعی تغییر می‌کند ولی در گام جاری شدن، ذرات همسایه در راستای خط واصل بین آنها، مقادیری از تابع توزیع را با هم مبادله می‌کنند. مقادیر تابع توزیع به‌دست آمده برای هر ذره، در محاسبه چگالی، اندازه حرکت و بقیه متغیرهای ماکروسکوپی موجود در مسئله، مورد استفاده قرار می‌گیرند. ثابت شده است که با شرط ناچیز بودن اثرات تراکم‌پذیری، روش بولتزمن شبکه‌ای یک روش مرتبه دوم در مکان و زمان، برای شبیه‌سازی جریان سیال است [۱]. از آنجا که در روش بولتزمن شبکه‌ای، گام برخورد برای هر نقطه موضعی انجام می‌شود، و در گام جاری شدن نیز هر نقطه فقط به اطلاعات نقاط کناری نیاز دارد، این روش برای اعمال پردازش موازی[3] بسیار مناسب است. لذا این روش در شبیه‌سازی جریان سیال برای مسائلی که هندسه پیچیده و به‌دنبال آن نیاز به حافظه و دامنه محاسباتی وسیعی دارند، به‌خوبی قابل استفاده است [۲]. در هندسه‌های پیچیده دو نوع مرز مسطح و مرز منحنی وجود دارند، از این‌رو پژوهشگران مختلف بارها برای یافتن شرط مرزی مناسب در روش بولتزمن شبکه‌ای تلاش کرده‌اند [۶-۳]. برای مرز مسطح شرایط مرزی مناسبی، بسته به اینکه مرز جامد، محور تقارن، مرز باز ورودی، و یا مرز خروجی سیال باشد در مراجع مختلف ارائه شده‌اند. از بین آنها می‌توان کار زو و هی [۷] را به‌عنوان مرجعی مناسب، برای شرایط مرزی مرزهای مسطح نام برد. در مورد مرز منحنی، شرایط مرزی مختلفی ارائه شده است؛ ولی هیچکدام را نمی‌توان یک شرط مرزی جامع و بدون نقص در نظر گرفت. از این‌رو هنوز هم شرط مرزی منحنی توسط پژوهشگران در حال اصلاح و تغییر است [۸ و ۹]. ساده‌ترین شرط مرزی منحنی، شرط کمانه‌کردن[4] است که برای مرزهای منحنی از دقت مرتبه یک در مکان برخوردار است؛ بنابراین از دقت شبیه‌سازی بولتزمن شبکه‌ای کاسته می‌شود. به‌همین دلیل بارها تلاش شده است روشی برای شرط مرزی منحنی به‌دست آید که دقت روش کمانه‌کردن در مرزهای منحنی را به مرتبه دو افزایش دهد. تا کنون روش‌های بسیار کارامدی مطرح شده‌اند [۱۳-۱۰]، که تقریباً دقت مرتبه دوم در مکان را دارند. اعمال این روش‌ها با سختی‌هایی همراه است و کاربر باید با توجه به هزینه محاسباتی اضافی، که در این روش‌ها به برنامه تحمیل می‌شود، روش مناسب را انتخاب کند.

در پژوهش حاضر سعی بر این است که روشی با هزینه کمتر، ولی در عین حال با همان قابلیت‌های روش‌های قبلی مطرح شود، تا بتواند به خوبی مرزهای منحنی ساکن و متحرک را شبیه‌سازی کند. از این‌رو چندین شرط مرزی مختلف، در چندین هندسه متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرند و ضمن بررسی نتایج این روش‌ها، یک نقطه ضعف جزئی نشان داده می‌شود و روش جدیدی برای اعمال شرط مرزی منحنی مطرح می‌شود. روش مطرح شده در هندسه‌های گفته شده اعمال می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها صحت

روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند.

۲- روش بولتزمن شبکه‌ای

روش بولتزمن شبکه‌ای، روشی بر پایه تئوری جنبشی گازهاست، که برای شبیه‌سازی جریان‌های سیال مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش در متون مختلف به تفصیل شرح داده شده است [۱۶-۱۴]. در این بخش به‌طور خلاصه مروری بر این روش بیان می‌شود و معادلات مورد نیاز برای شرایط مرزی تشریح می‌شوند. در روش بولتزمن شبکه‌ای معادله تابع توزیع، تابع توزیع احتمال وجود ذره ($f(\vec{x},\vec{e},t)$)، در یک مکان $\vec{x}$، سرعت $\vec{e}$ و لحظه t حل می‌شود؛ شکل ساده شده این معادله، در رابطه (۱) نشان داده شده است.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{e}\cdot\vec{\nabla} f=J(f) \qquad (۱)$$

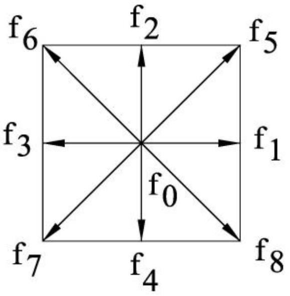
در رابطه (۱) که به معادله بولتزمن معروف است، $J(f)$ عملگر برخورد است و از آنجا که تابع پیچیده‌ای دارد، معمولاً با تابعی ساده تقریب زده می‌شود. یک تقریب ساده برای عملگر برخورد، تقریب بی‌جی‌کی[5] است که با یک زمان آرامش[6] گسسته‌سازی می‌شود. شکل بی‌جی‌کی معادله بولتزمن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{e}\cdot\vec{\nabla} f=-\frac{۱}{\lambda}(f-f^{eq}) \qquad (۲)$$

که در آن f^{eq}، تابع توزیع تعادلی (توزیع تعادلی ماکسول-بولتزمن) و λ زمان آرامش است. در حالت طبیعی یک ذره سیال در بی‌نهایت جهت مجاز به حرکت است. اولین گام برای حل عددی رابطه (۲) و محاسبه f، گسسته‌سازی سرعت $\vec{e}$ (سرعت حرکت ذره) است. برای این منظور با لحاظ کردن قوانین بقا، ذره به حرکت با سرعت‌های خاصی ($\vec{e}_\alpha$) محدود می‌شود [۱۷]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\vec{e}_\alpha\cdot\vec{\nabla} f_\alpha=-\frac{۱}{\lambda}(f_\alpha-f_\alpha^{eq}) \qquad (۳)$$

در رابطه (۳) $f_\alpha=f(\vec{x},\vec{e}_\alpha,t)$، تابع توزیع مربوط به αامین سرعت گسسته ذره ($\vec{e}_\alpha$) است. f_α بیانگر احتمال وجود ذره‌ای



شکل ۱- یک مدل دوبعدی، شبکه ۹ سرعتی ($D_۲Q_۹$)

در زمان t و در مکان $\vec{x}$ است که دارای سرعتی برابر $\vec{e}_\alpha$ است و f_α^{eq} تابع توزیع تعادلی متناظر با آن است. مدل ۹ سرعتی دوبعدی بولتزمن شبکه‌ای، که به مدل $D_۲Q_۹$ معروف است (شکل ۱)، یکی از مدل‌های دوبعدی است که در حل بسیاری از مسائل دوبعدی جریان سیال مورد استفاده قرار گرفته است. تابع توزیع تعادلی برای شبکه $D_۲Q_۹$ از طریق چگالی (ρ) و سرعت سیال ($\vec{u}$) طبق معادله (۴) محاسبه می‌شود:

$$f_\alpha^{eq}=\rho w_\alpha\{۱+۳(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u})+۴/۵(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u})^۲ -۱/۵(\vec{u}\cdot\vec{u})\} \qquad (۴)$$

که در آن، w_α ضریب وزنی و $\vec{e}_\alpha$ سرعت گسسته ذره هستند، و طبق جدول (۱) جایگذاری می‌شوند. رابطه (۵) شکل کاملا گسسته‌شده رابطه (۲) را نشان می‌دهد.

$$f_\alpha(\vec{x}_i+\vec{e}_\alpha\delta t,t+\delta t)-f_\alpha(\vec{x}_i,t)= -\frac{۱}{\tau}\left\{f_\alpha(\vec{x}_i,t)-f_\alpha^{eq}(\vec{x}_i,t)\right\} \qquad (۵)$$

که در آن، $\tau=\lambda/\delta t$ زمان آرامش بدون بعد و $\vec{x}_i$ مختصات یک نقطه در فضای فیزیکی است. رابطه معادله (۵)، معادله گسسته‌شده بولتزمن با تقریب بی‌جی‌کی گفته می‌شود. این معادله معمولاً در دو گام برخورد رابطه (۶) و جاری شدن رابطه (۷) حل می‌شود:

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_i,t+\delta t)=f_\alpha(\vec{x}_i,t) -\frac{۱}{\tau}\left\{f_\alpha(\vec{x}_i,t)-f_\alpha^{eq}(\vec{x}_i,t)\right\} \qquad (۶)$$

$$f_\alpha(\vec{x}_i+\vec{e}_\alpha\delta t,t+\delta t)=\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_i,t+\delta t) \qquad (۷)$$

در روابط (۶) و (۷)، $\tilde{f}_\alpha$ مقدار تابع توزیع پس از گام برخورد و f_α مقدار تابع توزیع قبل از برخورد (پس از جاری شدن) است. از روی متغیرهای بولتزمن شبکه‌ای، چگالی، ممنتوم، فشار و لزجت جنبشی طبق معادلات (۸) تا (۱۱) قابل محاسبه هستند:

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]

[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]

جدول ۱- ضرایب وزنی (w_α) و سرعت‌های شبکه ($\vec{e}_\alpha$) برای مدل D_2Q_9

α	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
w_α	$4/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/9$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$\vec{e}_\alpha$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$

$$\rho=\sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha=\sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha^{eq} \tag{۸}$$

$$\rho\vec{u}=\sum_{\alpha=0}^{8} \vec{e}_\alpha f_\alpha=\sum_{\alpha=0}^{8} \vec{e}_\alpha f_\alpha^{eq} \tag{۹}$$

$$P=\rho C_S^2 \tag{۱۰}$$

$$\upsilon=(\tau-0/5)C_S^2\delta t \tag{۱۱}$$

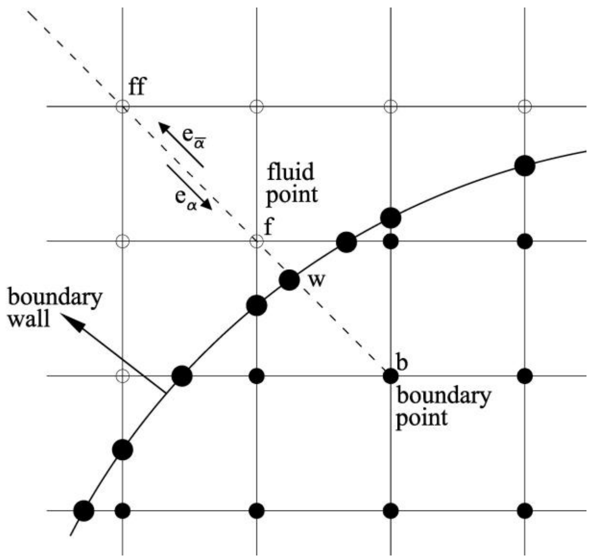
در ایـــن روابـــط، $C_S=c/\sqrt{3}$ ســـرعت صـــوت در مـــدل و $c=\delta x/\delta t$ اندازه سرعت شبکه هستند. گفتنی است کـه بـرای ساده شدن روابط، گام مکانی و گام زمانی شـبکه معمـولاً برابـر یک فرض می‌شوند. روش بولتزمن شبکه‌ای با مدل بی‌جی‌کـی، به‌همراه معـادلات فـوق جریـان سـیال را بـا دقـت مرتبـه دوم، شبیه‌سازی می‌کند [۱۸]. لازم به ذکـر اسـت کـه روش بـولتزمن شبکه‌ای، در مسائل تراکم‌ناپـذیر، از خـود خطـای تراکم‌پـذیری نشان می‌دهد. در مراجع بیان شده اسـت کـه وقتـی عـدد مـاخ[۷] کوچک باشد خطای تراکم‌پذیری، که مضربی از ماخ به تـوان ۲ است، ناچیز خواهد بود. برای برطـرف کـردن ایـن خطـا، چنـد روش بولتزمن شبکه‌ای برای جریان تراکم‌ناپـذیر پیشـنهاد شـده است؛ به‌عنوان مثال گو و همکاران [۱۹] روشی مطـرح کرده‌انـد که در آن، معادلات محاسبه سرعت و چگـالی تغییـر می‌کننـد و تابع توزیع تعادلی با یک تابع توزیـع تعـادلی جدیـد جـایگزین می‌شود؛ این روش با روش مرسوم بولتزمن شبکه‌ای تا حدودی متفاوت است. هی و لیو [۲۰] روش ساده‌تری پیشـنهاد کرده‌انـد که خیلی مشابه روش مرسوم بولتزمن شبکه‌ای است و فقط یک تغییر جزیی در تابع توزیع تعادلی انجام می‌شـود. در ایـن روش رابطه (۴) با رابطه (۱۲) جایگزین می‌شود.

$$f_\alpha^{eq}=\rho w_\alpha+\rho_0 w_\alpha\{3(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u})+4/5(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u})^2-1/5(\vec{u}\cdot\vec{u})\} \tag{۱۲}$$

که در آن، ρ_0 چگالی متوسط سیال در دامنه حـل و ρ چگـالی سیال در نقاط دامنه محاسباتی است کـه خیلـی نزدیـک بـه ρ_0 است. لازم به ذکر است که همین تابع توزیع تعادلی، بـا توجیـه دیگـری توسـط اسـکوردوس [۲۱] و دلار [۲۲] پیشـنهاد شـده اسـت. در ایـن مراجـع بیـان شـده اسـت کـه وقتـی در یـک چندجمله‌ای، مرتبه جملات با هم فرق داشته باشند، در جمـع و تفریق خطای محاسباتی پیش می‌آید، این‌رو باید مرتبه جمـلات یکسان شوند. با این پیش‌فرض و پس از یک سری توضـیحات، معادله‌ای مشابه معادله (۱۲) به‌عنوان تابع توزیع تعـادلی مطـرح شده است. البته معادلات و مراحل اثبات آنها دقیقاً مشابه معادله فوق نیستند. اگر به اندازه $\rho_0 w_\alpha$ به تابع توزیع مورد استفاده در دو مرجع [۲۱] و [۲۲] اضافه شود، معادله (۱۲) به‌دست می‌آید. از این‌رو یکسان بودن نتیجه بحـث و اعمـال معـادلات یکسـان قابل تشخیص است. در کار حاضر حین شبیه‌سازی مسائلی کـه مورد بررسی قرار می‌گیرند روش مرسوم بـولتزمن شـبکه‌ای بـا تقریب بی‌جی‌کـی، و روش تـراکم ناپـذیر فـوق، کـه در اینجـا هی‌لیو[۸] نامیده می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳- شـیوۀ اعمـال مـرز منحنـی در روش بـولتزمن شبکه‌ای

ساده‌ترین شـرط مـرزی بـرای اعمـال مـرز منحنـی، در روش بولتزمن شبکه‌ای، شرط مرزی کمانه‌کردن اسـت. در ایـن روش، برای نقطه سیال کنار دیوار، مرحله برخورد طبق معمـول انجـام می‌شود ولی در مرحله جاری شدن برای این نقطه، تابع توزیعی که به سمت دیوار است داخل تابع توزیع در جهتی که از دیـوار دور می‌شود ریخته می‌شود. به‌عنوان مثال اگر در شکل (۲)، تابع توزیع f_8 قبل از انجام گام جاری شدن بـه‌سـمت دیـوار جامـد برود، در گام جاری شدن روی همین گره سـیال، f_6 برابـر f_8



شکل ۲- تصویر یک شبکه یکنواخت دوبعدی و مرز منحنی داخل آن [۳۰]

قرار داده می‌شود (شماره‌گذاری زیرنویس‌ها مطابق شکل (۱) است). لازم به ذکر است که اگر دیوار جامد متحرک باشد، علاوه بر تغییر جهت دادن تابع توزیع ورودی، مقدار خروجی نیز متناسب با سرعت دیوار متفاوت خواهد بود و طبق رابطه (۱۳) مقدار تابع توزیع در جهت خروجی تعیین می‌شود.

$$f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_f,t)=\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_f,t)-6w_\alpha\rho(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u}_w) \qquad (13)$$

در این رابطه $\bar{\alpha}$ جهت برعکس α، w_α ضریب وزنی، ρ چگالی سیال، $\vec{e}_\alpha$ جهت ورودی، $\vec{u}_w$ سرعت حرکت مرز جامد و زیرنویس f مربوط به سیال است. گفتنی است که رابطه (۱۳) برای مرز مسطح، وقتی مرز دقیقاً وسط فاصله دو گره[9] قرار داشته باشد، از مرتبهٔ دوم دقت برخوردار است، ولی برای سطوح منحنی دارای مرتبه اول دقت است. برای اصلاح این نقطه ضعف چند نوع شرط مرزی پیشنهاد شده است. یک روش، روش برون‌یابی سرعت به گره مرز جامد است که توسط گو و همکاران [۲۳ و ۲۴] مطرح شده است. در این روش تابع توزیع به دو بخش تعادلی و غیرتعادلی تقسیم می‌شود و هر بخش با توجه به اطلاعات نقطه مورد نظر و نقاط جامد و سیال اطراف آن محاسبه می‌شود و تابع توزیع مجهول از جمع آنها به‌دست می‌آید. روش دیگر روش مرز شناور[10] [۲۵] یا روش میدان نیرو[11] [۲۶] است، در این روش مرز جامد از درون میدان حل، حذف می‌شود و در عوض تعدادی نیروی حجمی به نقاط شبکه حل، در اطراف مرز جامد اعمال می‌شود طوری که سرعت مرز جامد در آن نقطه، در داخل سیال اعمال شود. با این کار اعمال مرز منحنی به‌نسبت راحت است زیرا کل دامنه حل، حاوی سیال فرض می‌شود، ولی از آنجا که برای محاسبه نیروهای حجمی تعداد زیادی میانیابی لازم می‌شود، هزینه محاسباتی بالا می‌رود. همچنین خاصیت موضعی بودنِ روش بولتزمن شبکه‌ای، و قابلیت روش برای پردازش موازی کمتر می‌شود [۲۷]. از طرفی چون میان‌یابی‌ها باعث نوسانی شدن یا واگرایی حل می‌شوند، معمولاً نیروهای حجمی با ضریب زیرتخفیف اعمال می‌شوند [۲۶] که به‌نوبه خود باعث افزایش زمان شبیه‌سازی و کاهش دقت روش می‌شود [۲۸]. روش دیگری به نام روش کمانه کردن اصلاح شده، توسط فیلیپووا و هانل [۲۹] پیشنهاد شده، که بعدها اصلاحاتی در آن صورت گرفته و بارها مورد استفاده قرار گرفته است ([۳۲-۳۰]). در این روش، برای یک مرز منحنی که داخل سیال قرار گرفته است (شکل ۲)، مقدار $f_{\bar{\alpha}}$ طبق رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_f,t+\Delta t)=(1-\chi)\tilde{f}_\alpha(\vec{x}_f,t)+\chi f^*_\alpha(\vec{x}_b,t)-6w_\alpha\rho(\vec{e}_\alpha-\vec{u}_w) \qquad (14)$$

پارامترهای ذکرشده در رابطه (۱۴)، توسط می و همکاران [۳۰]

مطابق روابط (۱۵) تا (۱۸) جایگذاری می‌شوند:

$$f_{\alpha}^{*}(\vec{x}_b,t)=\rho w_{\alpha}\{1+3(\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{u}_{bf})+4/5(\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{u}_f)^2-1/5(\vec{u}_f\cdot\vec{u}_f)\} \quad (15)$$

$$\vec{u}_{bf}=\frac{(\Delta-1)\vec{u}_f}{\Delta}+\frac{\vec{u}_w}{\Delta},\chi=\frac{2\Delta-1}{\tau},\Delta\geq 0/5 \quad (16)$$

$$\vec{u}_{bf}=\vec{u}_{ff}=\vec{u}_f(\vec{x}_{ff},t),\chi=\frac{2\Delta-1}{\tau-2},\Delta<0/5 \quad (17)$$

$$\Delta=\frac{|\vec{x}_f-\vec{x}_w|}{|\vec{x}_f-\vec{x}_b|} \quad (18)$$

پس از گام جاری شدن، با اعمال معادلات فوق اثر مرز منحنی و شرط عدم لغزش اعمال می‌شود. اگر نتایج شبیه‌سازی توسط این روش، در نزدیک مرز منحنی دقیق بررسی شود، معمولاً نوسانات کوچکی در کنار مرز دیده می‌شود. دلیل این نوسانات، تغییر ناگهانی شرط مرزی در Δ کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از نیم است که در نزدیک یکدیگر اتفاق می‌افتند. این ایراد با افزایش عدد رینولدز بزرگ‌تر می‌شود [۱۰]. در مورد این ایراد در مرجع [۳۱] نیز اشاره شده است. در این مرجع، نمودار خطای نسبی سرعت، برای جریان داخل لوله، دارای نوسان است. مرجع گفته‌شده دلیل این نوسان در کنار مرز را، اختلاف در تابع توزیع Δ و میان‌یابی‌های مربوط به آن بیان کرده است. با توجه به نکات ذکر شده، برای افزایش دقت شبیه‌سازی مرز منحنی، روش‌های دیگری نیز پیشنهاد شده‌اند، به‌عنوان مثال ورشاو و مولر [۱۱] روشی برای کاهش خطای میان‌یابی، در کنار مرز مطرح کرده‌اند. با وجود اینکه روش مذکور نسبت به روش‌های قبلی پاسخ‌های دقیق‌تری ارائه می‌دهد، ولی همانند آنها دارای دو معادله برای Δهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از نیم است. از این‌رو در کنار مرز هنوز هم نتایج نوسانی دیده می‌شوند. بوزیدی و همکاران [۳۳] روش دیگری برای اعمال مرز منحنی مطرح کرده‌اند، که با روش‌های قبل تا حدودی متفاوت است. به‌دلیل اینکه که به جای میان‌یابی یا برون‌یابی سرعت و خواص، خود تابع توزیع میان‌یابی یا برون‌یابی شده و تابع توزیع در جهت مجهول به‌دست آمده است. این روش به‌نسبت روش مناسبی است، ولی ایرادی که دارد این است که در این روش هم دو معادله برای Δهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از نیم ارائه شده است و نوسان در جواب هنوز هم در نتایج دیده می‌شود. یو و همکاران [۱۰] روش دیگری برای اعمال مرز منحنی مطرح کرده‌اند. در این روش برای همه مقادیر Δ، از معادلات یکسانی استفاده شده است. معادلات مورد استفاده در این روش به‌ترتیب در معادلات (۱۹) تا (۲۱) ارائه می‌شوند. در این روش تمام مقادیر تابع توزیع در یک لحظه مورد بررسی قرار می‌گیرند، از این‌رو زیرنویس زمان و یا علامت بعد از برخورد یا قبل از برخورد در توابع دیده نمی‌شود.

$$f_{\alpha}(\vec{x}_w)=f_{\alpha}(\vec{x}_f)+\Delta\{f_{\alpha}(\vec{x}_b)-f_{\alpha}(\vec{x}_f)\} \quad (19)$$

$$f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_w)=f_{\alpha}(\vec{x}_w)-6w_{\alpha}\rho_w(\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{u}_w) \quad (20)$$

$$f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_f)=f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_w)+\frac{\Delta}{1+\Delta}\{f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_{ff})-f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_w)\} \quad (21)$$

در روابط (۲۰) و (۲۱)، $\vec{u}_w$ سرعت دیوار در نقطه تماس با سیال، $\vec{x}_{ff}$ نقطه سیال با دو فاصله از مرز جامد و ρ_w چگالی سیال در محل دیوار است که باید با میان‌یابی یا برون‌یابی از نقاط اطراف به‌دست آید. در مرجع ذکر شده برای جلوگیری از ناپایداری عددی، ρ_w تقریباً برابر چگالی سیال در نقطه $\vec{x}_f$ قرار داده شده است. با اعمال معادلات (۱۹) تا (۲۱) شرط مرزی منحنی برای تمام Δها توسط روابط یکسانی اعمال می‌شود. به‌طور کلی تک‌معادله‌ای بودن برای تمام Δها ویژگی روش یو و همکاران نسبت به دیگر روش‌هاست. در ابتدای شبیه‌سازی که اطلاعات در دامنه حل صحیح نیست، وقتی از روش یو و همکاران استفاده می‌شود، نسبت به دیگر روش‌ها، که دو معادله برای Δهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از نیم دارند، برنامه همگرایی بهتری از خود نشان می‌دهد.

روش پیشنهادی کار حاضر

با توجه به مزایای روش مطرح شده توسط یو و همکاران، در اینجا روش مشابهی مطرح می‌شود که ویژگی‌های روش مذکور را، بدون تقریب مربوط به مقدار ρ_w داشته باشد و هزینه محاسباتی کمتری داشته باشد. تاکید می‌شود که اساس این روش مشابه روش یو و همکاران است. در روش یو و

همکاران، مطابق شکل (۲) ابتدا تابع توزیع $f_\alpha(\vec{x}_w)$ در نقطه مماس بر مرز جامد ($\vec{x}_w$)، با میان‌یابی از نقطه سیال ($\vec{x}_f$) و نقطه داخل مرز جامد ($\vec{x}_b$) به‌دست می‌آید (رابطه ۱۹). سپس کمانه کردن به‌صورت موضعی در نقطه $\vec{x}_w$ که سرعت آن معلوم است اعمال شده و مقدار $f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_w)$ به‌دست می‌آید (رابطه ۲۰)، پس از آن تابع توزیع مجهول $f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_f)$ با میان‌یابی از مقدار $f_{\bar{\alpha}}$ در نقطه روی مرز جامد و نقطه سیال با دو فاصله از مرز جامد ($\vec{x}_{ff}$) میان‌یابی می‌شود (رابطه ۲۱). ایده کار حاضر این است که کمانه کردن به جای اینکه در نقطه $\vec{x}_w$ اعمال شود، به‌صورت موضعی روی خود نقطه سیال که سرعتش مجهول ولی چگالی آن در هر تکرار معلوم است اعمال شود. تابع توزیع در جهت مجهول برای نقطه سیال کنار مرز جامد طبق رابطه (۲۲) به‌دست آید:

$$f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_f) = f_\alpha(\vec{x}_f) - ۶w_\alpha\rho_f(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}_f) \quad (۲۲)$$

که در آن ρ_f چگالی سیال است که به‌صورت موضعی برای نقطه $\rho_f = \rho(\vec{x}_f)$ در هر تکرار در دسترس است، و $\vec{u}_f$ سرعت سیال در نقطه مورد نظر است که از نقطه جامد و نقطه سیال کناری توسط رابطه (۲۳) میان‌یابی می‌شود:

$$\vec{u}_f = (\vec{u}_w + \Delta\vec{u}_{ff}) / (۱+\Delta) \quad (۲۳)$$

اگر معادله تابع توزیع تعادلی رابطه (۴)، برای یک نقطه در دو جهت α و $\bar{\alpha}$ به‌صورت روابط (۲۴) و (۲۵) نوشته شود:

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha\{۱+۳(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) + ۴/۵(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^۲ - ۱/۵(\vec{u}\cdot\vec{u})\} \quad (۲۴)$$

$$f_{\bar{\alpha}}^{eq} = \rho w_{\bar{\alpha}}\{۱+۳(\vec{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{u}) + ۴/۵(\vec{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{u})^۲ - ۱/۵(\vec{u}\cdot\vec{u})\} \quad (۲۵)$$

سپس رابطه (۲۵) با توجه به $\vec{e}_{\bar{\alpha}} = -\vec{e}_\alpha$ و $w_{\bar{\alpha}} = w_\alpha$ به‌صورت رابطه (۲۶) ساده شود:

$$f_{\bar{\alpha}}^{eq} = \rho w_\alpha\{۱-۳(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) + ۴/۵(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^۲ - ۱/۵(\vec{u}\cdot\vec{u})\} \quad (۲۶)$$

هنگامی که رابطه (۲۶) منهای رابطه (۲۴) شود و جملات مشابه حذف گردند، رابطه (۲۷) به‌دست می‌آید که پس از مرتب کردن، رابطه (۲۸) حاصل می‌شود:

$$f_{\bar{\alpha}}^{eq} - f_\alpha^{eq} = -۳w_\alpha\rho(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) - ۳w_\alpha\rho(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) \quad (۲۷)$$

$$f_{\bar{\alpha}}^{eq} = f_\alpha^{eq} - ۶w_\alpha\rho(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) \quad (۲۸)$$

رابطه (۲۸) اگر برای نقطه $\vec{x}_w$ روی مرز جامد که سرعت آن $\vec{u}_w$ و چگالی آن ρ_w است نوشته شود، رابطه (۲۹) به‌دست می‌آید:

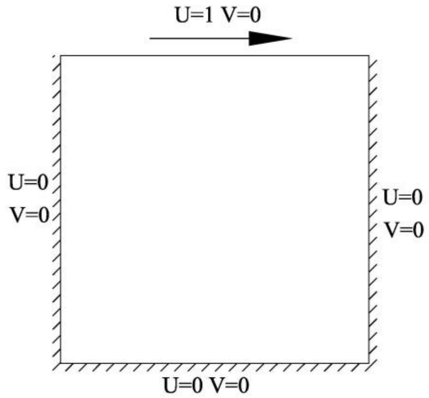
$$f_{\bar{\alpha}}^{eq}(\vec{x}_w) = f_\alpha^{eq}(\vec{x}_w) - ۶w_\alpha\rho_w(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}_w) \quad (۲۹)$$

این رابطه مشابه رابطه (۲۰) است که در روش یو و همکاران، با حذف نمای تعادلی به‌صورت تقریبی مورد استفاده قرار گرفته است. اگر رابطه (۲۸) برای اولین نقطه سیال در کنار مرز جامد ($\vec{x}_f$)، که سرعت آن $\vec{u}_f$ و چگالی آن ρ_f است نوشته شود، رابطه (۳۰) به‌دست می‌آید:

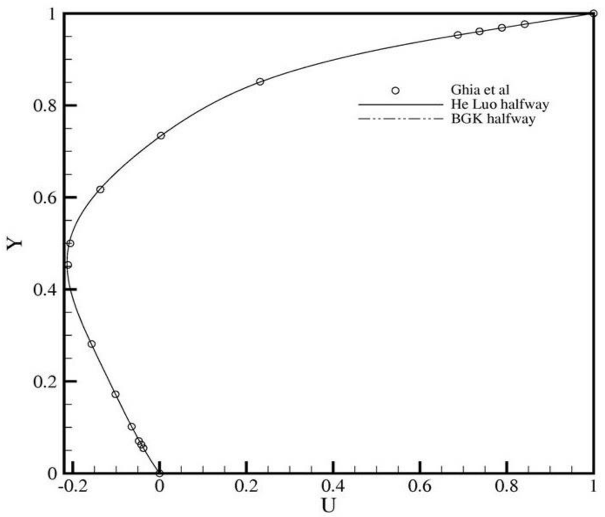
$$f_{\bar{\alpha}}^{eq}(\vec{x}_f) = f_\alpha^{eq}(\vec{x}_f) - ۶w_\alpha\rho_f(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}_f) \quad (۳۰)$$

این رابطه نیز مشابه رابطه (۲۲) است که در روش پیشنهادی همانند روش یو و همکاران، با حذف نمای تعادلی به‌صورت تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. گفتنی است که روابط (۲۰) و (۲۲) در هر نقطه، در حالت تعادل برقرار هستند. در حین شبیه‌سازی مسائل، هر چه شبیه‌سازی به انتهای حل نزدیک شود، چون مسئله به سمت مقادیر تعادلی میل می‌کند، روابط (۲۰) و (۲۲) دقیق‌تر برقرار می‌شوند.

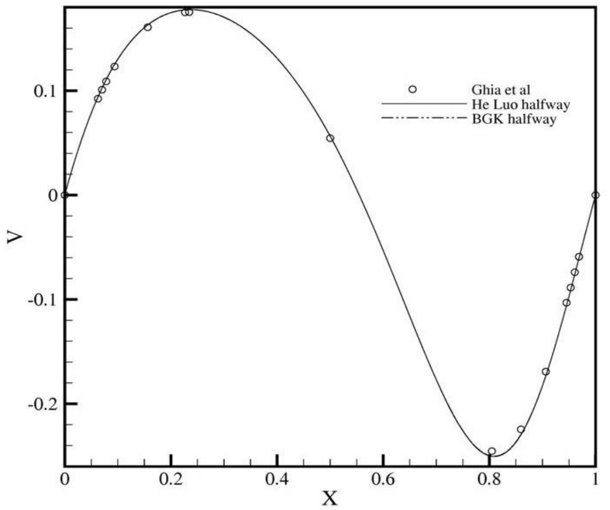
مقایسه روش پیشنهادی با روش یو و همکاران نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به روش یو و همکاران معادلات کمتری دارد. از این‌رو در مسائلی که هندسه پیچیده‌ای دارند و اعمال شرط مرزی منحنی برای تعداد زیادی از نقاط نیاز می‌شود، در هزینه محاسباتی صرفه‌جویی خواهد شد. علاوه‌بر این در روش پیشنهادی تقریب مربوط به مقدار ρ_w، که در روش یو و همکاران وجود داشت برطرف شده است، زیرا در رابطه (۲۰) چگالی سیال در نقطه روی مرز جامد (ρ_w) نیاز است، که یا از روی نقاط کنار آن میان‌یابی می‌شود و باعث ناپایداری عددی می‌شود، یا طبق توصیه مرجع گفته شده برای جلوگیری از ناپایداری عددی، تقریباً برابر چگالی نقطه سیال کناری، $\rho_w \approx \rho(\vec{x}_f)$ قرار داده می‌شود. اما در روش پیشنهادی طبق رابطه (۲۲) به چگالی سیال، در نقطه سیال کنار مرز جامد (ρ_f) نیاز است که در هر تکرار برای این نقطه $\rho_f = \rho(\vec{x}_f)$ در دسترس است. از این‌رو تقریب ذکر شده برطرف می‌شود. در بخش‌های بعد چند



شکل ۳- هندسه حفره دوبعدی و شرایط مرزی آن



شکل ۴- مقایسه مؤلفه افقی سرعت، در خط قائم مرکز حفره، با نتایج قیا و همکاران [۳۴]



شکل ۵- مقایسه مؤلفه عمودی سرعت، در خط افقی مرکز حفره، با نتایج قیا و همکاران [۳۴]

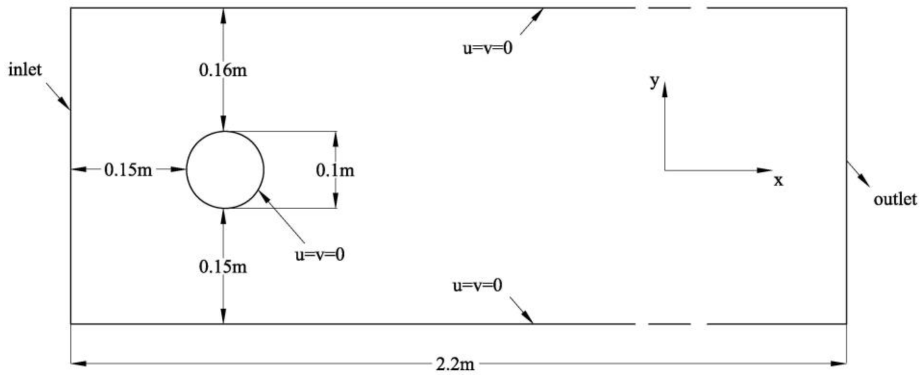
مسئله با شرط مرزی پیشنهادی حل می‌شوند و با نتایج شرایط مرزی دیگر مقایسه می‌شوند.

۴- اعتبارسنجی

۴-۱- اعتبارسنجی برنامه تهیه شده در مرزهای مسطح

برای اینکه اعتبار برنامه تهیه شده در شبیه‌سازی مسائل با مرزهای مسطح مورد بررسی قرار گیرد، ابتدا جریان در حفره دوبعدی شبیه‌سازی شده و نتایج آن با نتایج کار قیا و همکاران [۳۴] مقایسه می‌شود. در کار حاضر همانند کار قیا و همکاران دامنه حل یک محدوده مربعی در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳)، که مرز بالایی آن با سرعت ثابت به سمت راست حرکت می‌کند و بقیه مرزها ساکن هستند. همچنین عدد رینولدز برابر ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود. شبکه‌بندی هندسه مورد نظر، یکنواخت است و هر ضلع ۱۲۸ قسمت مساوی است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان سیال داخل حفره، با دو روش بی‌جی‌کی و هی‌لیو با نتایج حاصل از کار قیا و همکاران [۳۴] مقایسه می‌شود. در شکل (۴) مؤلفه افقی سرعت در خط قائم مرکز حفره و در شکل (۵) مؤلفه عمودی سرعت در خط افقی مرکز حفره نمایش داده شده است.

همان‌طور که در شکل‌های (۴) و (۵) ملاحظه می‌شود، تفاوت



شکل ۶- هندسه جریان اطراف استوانه و شرایط مرزی مورد استفاده [۳۵]

بسیار ناچیزی بین نتایج حاصل از کار قیا و همکاران، با کار حاضر که توسط دو روش بی‌جی‌کی و هی‌لیو انجام شده است، وجود دارد و انطباق خوبی بین جواب‌ها دیده می‌شود. لازم به ذکر است برای نشان دادن میزان اختلاف بین نتایج کار قیا و همکاران و نتایج حاصل از دو روش بی‌جی‌کی و هی‌لیو، بیشترین اختلاف مؤلفه افقی سرعت و همچنین مؤلفه عمودی سرعت برای کار حاضر با کار قیا و همکاران استخراج و درصد اختلاف نسبی محاسبه شد. محاسبات نشان می‌دهند که بیشترین اختلاف در روش بی‌جی‌کی با نتایج قیا و همکاران، برای مؤلفه افقی سرعت ۱/۰۶ درصد و برای مؤلفه عمودی سرعت ۲/۰۱ درصد هستند. این مقادیر برای روش هی‌لیو به‌ترتیب برابر ۱/۱ و ۲/۲۳ درصد به‌دست آمد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود اختلاف بسیار ناچیزی نسبت به کار قیا و همکاران دیده می‌شود، از این‌رو صحت برنامه رایانه‌ای تهیه شده تأیید می‌شود.

۴-۲- اعتبارسنجی شرط مرزی پیشنهادی در شبیه‌سازی جریان اطراف استوانه ساکن داخل کانال دوبعدی

برای نشان دادن صحت و دقت روش پیشنهادی، در شبیه‌سازی مرز منحنی ساکن، جریان اطراف یک استوانه که داخل کانالی دوبعدی قرار دارد شبیه‌سازی می‌شود. هندسه مورد نظر توسط شافر و همکاران [۳۵] معرفی شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان در این هندسه ارائه شده است. شکل (۶) هندسه مورد بحث و شرایط مرزی مورد استفاده را نشان می‌دهد. در کار حاضر برای شبیه‌سازی میدان جریان با عدد رینولدز ۲۰، همانند اغلب کارهای روش بولتزمن شبکه‌ای، از شبکه یکنواخت مربعی استفاده شده است. برای انتخاب شبکه مناسب، تعداد نقاط شبکه در جهت طول و عرض کانال طوری انتخاب شده که قطر استوانه به ۱۰ قسمت مساوی ($D/\delta x=۱۰$)، ۲۰ قسمت مساوی ($D/\delta x=۲۰$)، ۴۰ قسمت مساوی ($D/\delta x=۴۰$) و ۸۰ قسمت مساوی ($D/\delta x=۸۰$) تقسیم شود. با این شبکه‌بندی‌ها و روش پیشنهادی جریان اطراف استوانه شبیه‌سازی شده است و ضریب پسا[۱۲] (C_D) و ضریب برا[۱۳] (C_L) وارد بر استوانه، محاسبه و با نتایج موجود مقایسه شده‌اند (جدول ۲). با مقایسه نتایج حاصل، همانند مرجع [۲۸]، شبکه حل برای اجراهای نهایی شبکه‌ای انتخاب شده، که قطر استوانه به هشتاد قسمت مساوی ($D/\delta x=۸۰$) تقسیم شود. پس از شبیه‌سازی جریان داخل کانال با روش‌های مختلف، تفاوت ظاهری در جواب‌ها ملاحظه نشد. از این‌رو برای اینکه به میزان دقت روش‌های اعمال شده پی برده شود، همانند کار شافر و تورک، اختلاف فشار دو طرف استوانه (ΔP)، طول جریان برگشتی (L_r)، ضریب پسا و ضریب برا وارد بر استوانه محاسبه شده و با نتایج موجود مقایسه شدند. نتایج حاصل به همراه درصد خطای نسبی، نسبت به مقادیر مبنا در جدول (۳) ارائه شده است. در این جدول مقادیر مبنا مانند مرجع [۱۱]، مقادیر متوسط حد بالا و پایین در کار شافر و تورک در نظر گرفته شده و درصد خطای نسبی نسبت به این مقدار مبنا نیز در

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]

جدول ۲- بررسی شبکه برای انتخاب شبکه‌بندی مناسب در جریان اطراف استوانه با روش پیشنهادی

$D/\delta x$	$Nx \times Ny$	C_D	C_L
۱۰	۲۲۲×۴۳	۶/۱۱۸	۰/۰۱۹۳
۲۰	۴۴۲×۸۴	۵/۴۶۵	۰/۰۱۰
۴۰	۸۸۲×۱۶۶	۵/۵۳۷	۰/۰۱۰۳
۸۰	۱۷۶۲×۳۳۰	۵/۵۶۷	۰/۰۱۰۶۵
Lower & upper Bounds [۳۵]		۵/۵۷–۵/۵۹	۰/۰۱۰۴–۰/۰۱۱۰

جدول ۳- نتایج حاصل از شبیه‌سازی جریان اطراف استوانه با روش‌های مختلف

$\frac{D}{\delta x}=۸۰$	Lower & upper Bounds [۳۵]	Ref value	Mei et al method [۳۰]	Peng et al results[۲۸]	Yu et al Method [۱۰]	Proposed method
C_D	۵.۵۷–۵.۵۹	۵.۵۸	۵/۵۴۶ (۰/۶۱٪)	۵/۵۶۵ (۰/۲۷٪)	۵.۵۷۵ (۰/۰۹٪)	۵/۵۶۷ (۰/۲۳٪)
C_L	۰/۰۱۰۴–۰/۰۱۱۰	۰/۰۱۰۷	۰/۰۰۹۹ (۷/۴۸٪)	۰/۰۱۰۴۶ (۲/۲۴٪)	۰/۰۱۰۸۵ (۱/۴٪)	۰/۰۱۰۶۵ (۰/۴۷٪)
ΔP	۰/۱۱۷۲–۰/۱۱۷۶	۰/۱۱۷۴	۰/۱۱۶ (۱/۱۹٪)	۰/۱۱۷۱ (۰/۲۵٪)	۰/۱۱۹۶ (۱/۸۷٪)	۰/۱۱۶۴ (۰/۸۵٪)
L_r	۰/۰۸۴۲–۰/۰۸۵۲	۰/۰۸۴۷	۰/۰۸۴۴ (۰/۳۵٪)	۰/۰۸۵۱ (۰/۴۷٪)	۰/۰۸۵۱ (۰/۴۷٪)	۰/۰۸۴۷ (۰٪)

داخل پرانتز نوشته شده است.

همان‌طور که در جدول (۳) دیده می‌شود، نتایج حاصل از روش پیشنهادی بسیار نزدیک به نتایج روش یو و همکاران به‌دست آمده و با دقت قابل قبولی با دیگر نتایج تطابق دارد. از این‌رو روش پیشنهادی در عین حال که ساده‌تر از روش یو و همکاران است از همان دقت برخوردار است و به‌دلیل اینکه همانند روش یو و همکاران برای تمام Δها یک معادله دارد و از روش مذکور ساده‌تر است، نسبت به دیگر روش‌ها ترجیح داده می‌شود. برای اینکه مرتبه دقت روش پیشنهادی بررسی شود، همانند مرجع [۲۸]، اختلاف ضریب پسا با مقدار مبنا برای شبکه‌های مختلف محاسبه و برای روش پیشنهادی و روش یو و همکاران در شکل (۷) ارائه شده است. این کار برای ضریب برا نیز انجام شده و نتیجه در شکل (۸) ارائه شده است. بررسی تغییرات ضرایب پسا و برا در شکل‌های (۷) و (۸) نسبت به تغییر تعداد تقسیم‌بندی قطر استوانه ($N = D/\delta x$)، نشان می‌دهد که مرتبه دقت روش پیشنهادی همانند روش یو و همکاران است و از مرتبه دوم دقت برخوردار است.

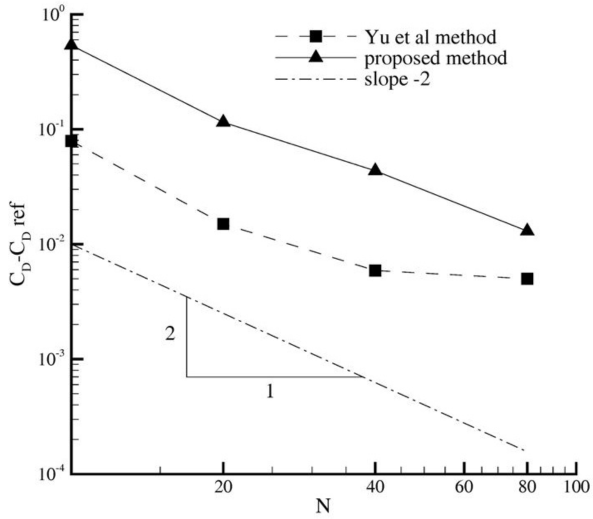
۴-۳- اعتبارسنجی شرط مرزی پیشنهادی در جریان آرام بین دو استوانه ساکن و متحرک

برای نشان دادن صحت و دقت روش پیشنهادی در شبیه‌سازی مرز منحنی متحرک، جریان بین دو استوانه ساکن و متحرک که به جریان تیلور- کوئت[۱۴] [۱۱] معروف است شبیه‌سازی می‌شود. در این مسئله، مطابق شکل (۹) سیال بین استوانه‌ای متحرک به شعاع r_1 و استوانه‌ای ساکن به شعاع r_2 قرار دارد. توزیع سرعت و فشار سیال، در حالی که استوانه داخلی با سرعت ثابت دوران می‌کند و استوانه بیرونی ساکن است، مجهول است. جواب این مسئله به‌صورت تحلیلی در مراجع ارائه شده است [۱۱]. در جریان سیال بین دو استوانه، توزیع سرعت و فشار بی‌بعد، با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۲) به‌دست می‌آیند:

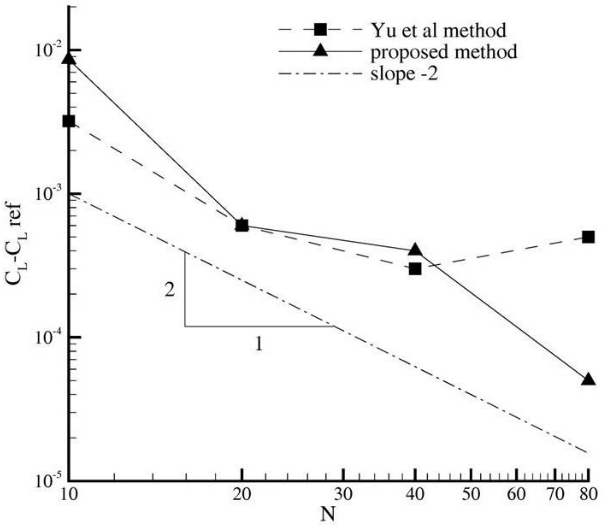
$$\frac{\vec{u}(r)}{U_0} = \frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{r_2}{r} - \frac{r}{r_2}\right)\vec{e}_\theta \qquad (۳۱)$$

$$\frac{P}{0/5\rho U_0^2} = \left(\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)^2\left\{\frac{r^2}{r_2^2} - \frac{r_2^2}{r^2} - 4\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right\} \qquad (۳۲)$$

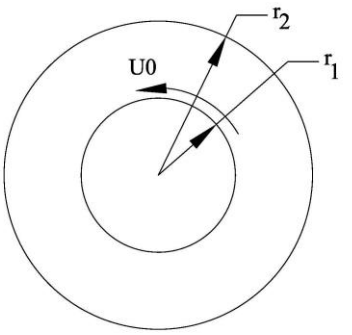
در این روابط U_0 سرعت دوران استوانه داخلی و $\beta = \frac{r_1}{r_2}$



شکل ۷- همگرایی ضریب پسا با تغییر تعداد تقسیم‌بندی قطر استوانه ($N = D/\delta x$)، در جریان اطراف استوانه به روش یو و همکاران [۱۰] و روش پیشنهادی



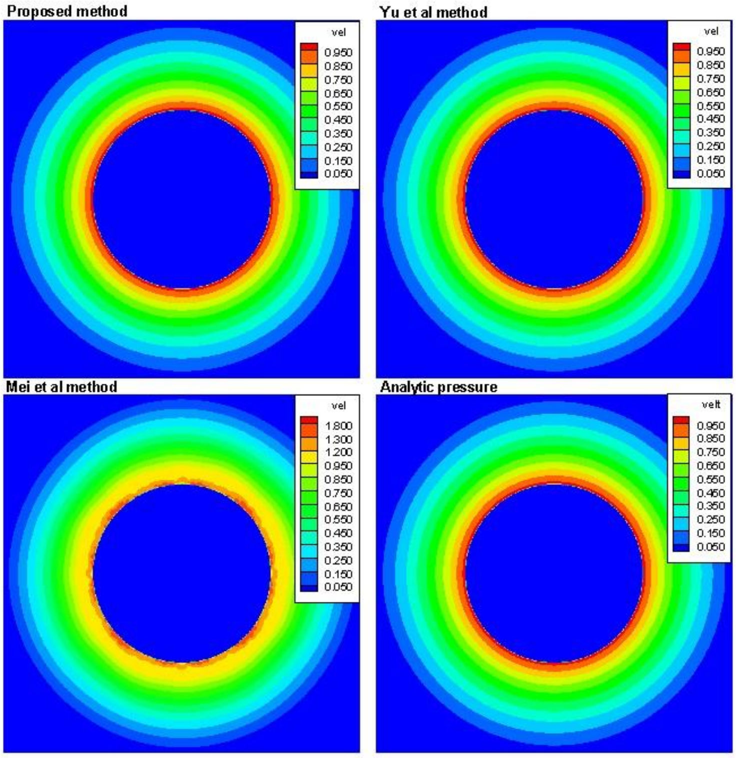
شکل ۸- همگرایی ضریب برا با تغییر تعداد تقسیم‌بندی قطر استوانه ($N = D/\delta x$)، در جریان اطراف استوانه به روش یو و همکاران [۱۰] و روش پیشنهادی



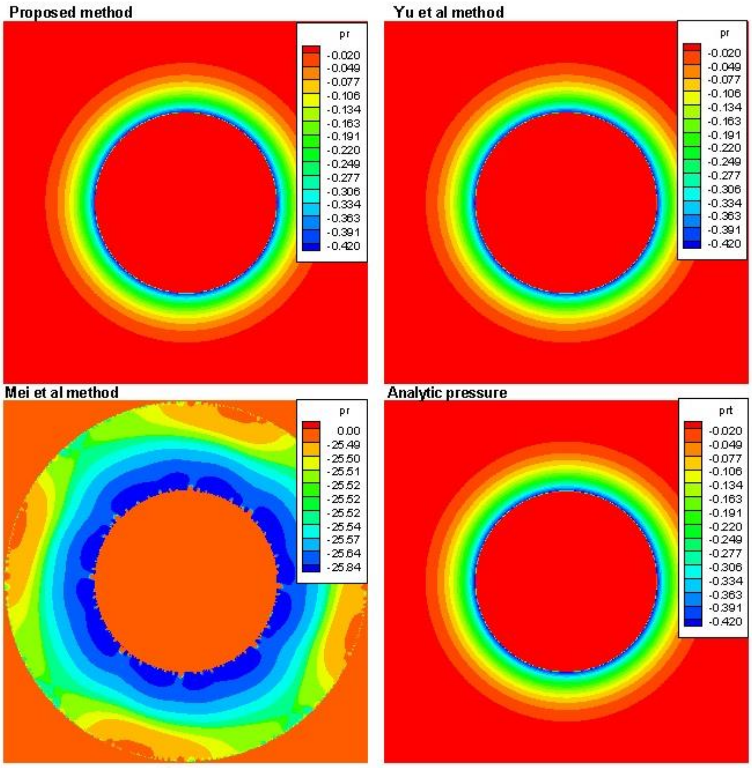
شکل ۹- هندسه جریان و شرایط مرزی در مسئله تیلور- کوئت

نسبت شعاع دو استوانه است. در کار حاضر همانند مرجع [۱۱]، برای شبیه‌سازی جریان سیال بین دو استوانه، عدد رینولدز که طبق معادله $Re = \frac{(r_۲ - r_۱)U_۰}{\upsilon}$ تعریف می‌شود، برابر ۱۰ و نسبت شعاع دو استوانه $\beta = ۰/۵$، در نظر گرفته می‌شود. همچنین شبکه یکنواخت مربعی با ۵۱۲ قسمت در جهت افقی و قائم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل (۱۰) اندازه سرعت تحلیلی، با اندازه سرعت شبیه‌سازی شده توسط روش می و همکاران، روش یو و همکاران و روش پیشنهادی در کار حاضر مقایسه می‌شود. در شکل گفته شده مشاهده می‌شود که سرعت محاسبه شده در دو روش یو و همکاران و روش پیشنهادی انطباق خوبی با نتایج تحلیلی دارند اما سرعت حاصل از روش می و همکاران با سرعت تحلیلی تفاوت زیادی دارد. اول اینکه اندازه سرعت بین صفر و یک به‌دست نیامده و دوم اینکه در کنار استوانه داخلی در سرعت نوسان دیده می‌شود. لازم به ذکر است که وقتی کنار مرز استوانه داخلی و بیرونی، نتایج حاصل برای سرعت، در دو روش یو و همکاران و روش پیشنهادی، دقیق‌تر نیز بررسی می‌شوند، هیچ نوسانی در سرعت ملاحظه نمی‌شود. در شکل (۱۱) اندازه فشار تحلیلی با اندازه فشار حاصل از شبیه‌سازی توسط روش می و همکاران [۳۰]، روش یو و همکاران [۱۰] و روش پیشنهادی در کار حاضر مقایسه شده است.

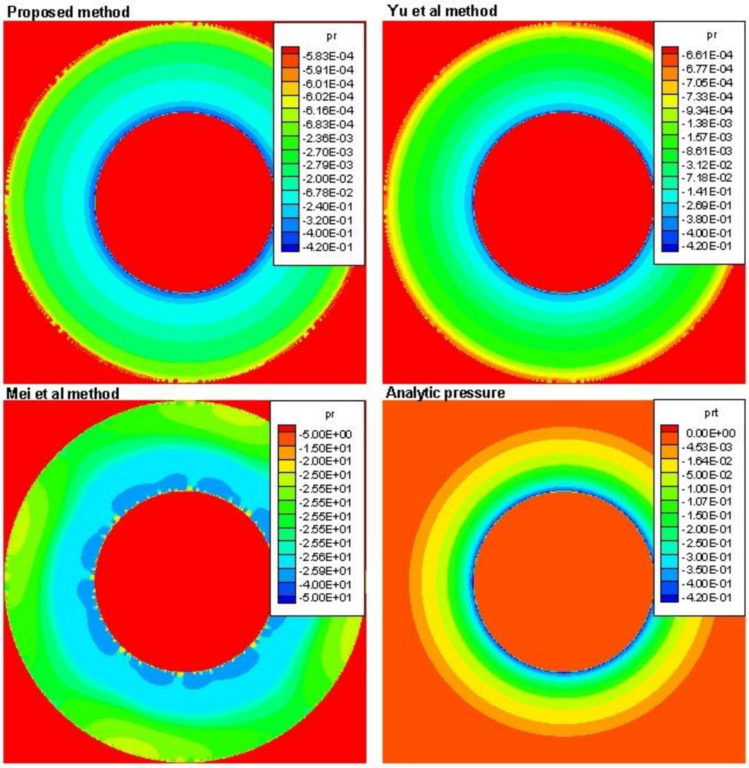
[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]



شکل ۱۰- مقایسه اندازه سرعت بین دو استوانه برای معادله تحلیلی و شبیه‌سازی‌های انجام شده (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۱- مقایسه اندازه فشار بین دو استوانه برای معادله تحلیلی و شبیه‌سازی‌های انجام شده (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۲- مقایسه اندازه فشار برای معادله تحلیلی و شبیه‌سازی‌های انجام شده، نزدیک سطح استوانه داخلی و بیرونی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

شکل (۱۱) نشان می‌دهد که فشار حاصل از روش پیشنهادی در کار حاضر و فشار حاصل از روش یـو و همکـاران [۱۰] خیلـی شبیه به نتایج تحلیلی به‌دست آمده اسـت. امـا فشـار حاصـل از روش می و همکاران [۳۰] در کنار استوانه داخلی و همچنین در کنار استوانه بیرونی، دارای نوسان است و در حل تحلیلی چنـین نوسانی دیده نمی‌شود. ایـن خطـای عـددی مربـوط بـه خطـای تراکم‌پذیری و دو معادله‌ای بـودن روش مـی و همکـاران بـرای Δ های بزرگ‌تر و کوچک‌تر از نیم اسـت. بـرای اینکـه تفـاوت جواب‌هـا بهتـر دیـده شـود، در کنـار مرزهـا کانتورهـای فشـار بیشتری رسم می‌شوند. با این کار شکل (۱۲) به‌دست می‌آید. در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود کـه در دو روش یـو و همکـاران و روش پیشنهادی در نزدیکی استوانه داخلی، فشار خیلی شبیه بـه فشار در حل تحلیلی به‌دست آمده اسـت. امـا در کنـار اسـتوانه بیرونی کانتورهای فشـار ایـن دو روش، دارای نوسـان نـاچیزی هستند و با حل تحلیلی تطابق ندارند. بررسی نشان می‌دهـد کـه این خطا مربوط به خطای تراکم‌پذیری است و مضـربی از عـدد ماخ به توان ۲ است. در کنار استوانه داخلی که متحـرک اسـت، خطای ناچیز تراکم‌پذیری، تحت تاثیر جمله مربوط بـه سـرعت ($6 w_\alpha \rho \vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}$)، که مضربی از عدد ماخ است قرار گرفته و اثـر آن حذف می‌شود. ولی در کنار استوانه بیرونی که ساکن است و جمله مربوط به سرعت وجود ندارد، خطای ناچیزی در چگـالی به وجود می‌آید. طبق معادله (۱۰)، خطای ناچیزی در فشار کنار مرز دیده می‌شود. مقـدار ایـن خطـا در روش مـی و همکـاران خیلـی بیشـتر اسـت، کـه بـه دلیـل خطـای تراکم‌پـذیری و دو معادله‌ای بودن روش می و همکاران، برای Δ هـای بزرگ‌تـر و کوچک‌تر از نیم ایجاد شده است. برای مقایسه مقدار خطـا بـین روش‌های ذکر شده، همانند مرجـع [۱۱] دو متغیـر خطـا بـرای سرعت رابطه (۳۳) و فشار رابطه (۳۴) تعریف می‌شوند.

$$e_V = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_N \left|\vec{u}-\vec{u}_t\right|^2} \qquad (۳۳)$$

$$e_P = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_N \left|P-P_t\right|^2} \qquad (۳۴)$$

در این روابـط $\vec{u}$، P و N بـه ترتیـب بـردار سـرعت سـیال،

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]

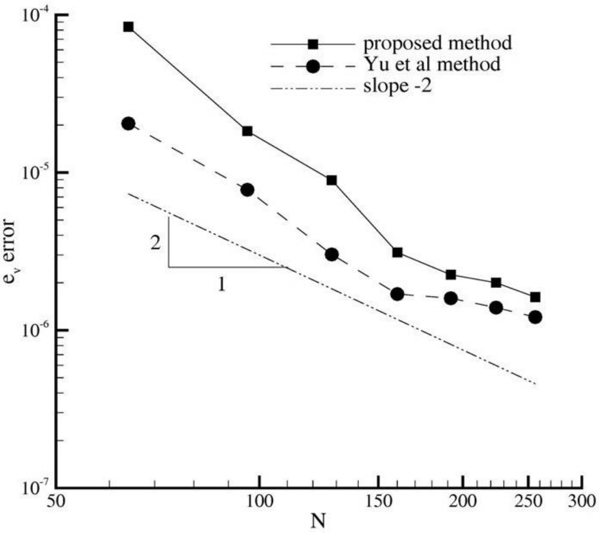
جدول ۴- مقایسه مقدار خطای هر روش در محاسبه فشار و سرعت (معادلات ۳۳ و ۳۴)

	e_P	e_V
Mei et al method [۳۰]	$۶/۵۰۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۰۳۲ \times ۱۰^{-۴}$
Yu et al method [۱۰]	$۵/۹۶۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۳۹۵ \times ۱۰^{-۵}$
Proposed method	$۶/۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۳۸۸ \times ۱۰^{-۵}$

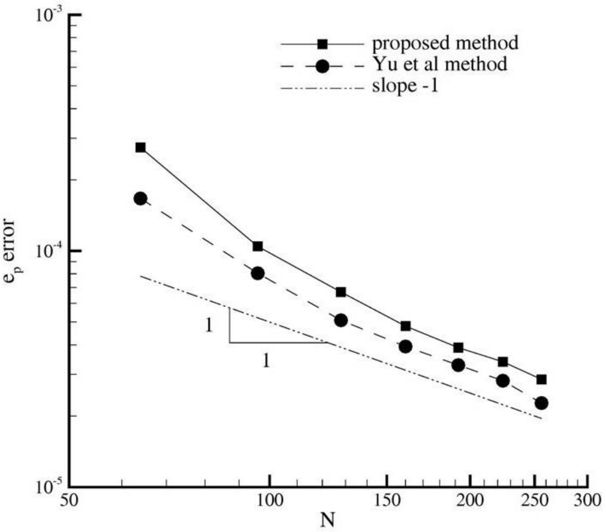
جدول ۵- زمان مورد نیاز در هر روش برای هر تکرار، در شبکه $۵۱۲^۲$ (ثانیه)، نسبت زمان مورد نیاز هر روش، به زمان مورد نیاز در روش می و همکاران بر حسب درصد

	t(s)	Time ratio (%)
Mei et al method [۳۰]	۰/۳۶۸۵	۱۰۰
Yu et al method [۱۰]	۰/۳۶۵۳	۹۹/۱
Proposed method	۰/۳۶۲۰	۹۸/۲

فشار سیال و تعداد نقاط داخل محدوده سیال را نشان می‌دهند و زیرنویس t نشان‌دهنده مقدار تحلیلی است. جدول (۴) نتایج حاصل از محاسبه خطا، برای سرعت و فشار را نشان می‌دهد. با توجه به جدول (۴) خطای روش یو و همکاران و روش پیشنهادی، بسیار کمتر از خطای روش می و همکاران است. همچنین جدول (۴) نشان می‌دهد که خطای فشار به‌دست آمده از روش یو و همکاران، کمتر از خطای فشار حاصل از روش پیشنهادی است، اما سرعت حاصل از روش پیشنهادی، دقیق‌تر از سرعت حاصل از روش یو و همکاران به‌دست آمده است. البته تفاوت جواب روش پیشنهادی و روش یو و همکاران، نسبت به روش می و همکاران، بسیار ناچیز است. لازم به ذکر است برای اینکه افزایش سرعت روش پیشنهادی، نسبت به روش‌های دیگر نشان داده شود، برنامه برای هر روش چند بار اجرا شده و زمان آن ثبت می‌شود. زمان متوسط مورد نیاز برای هر تکرار، در تک‌تک روش‌ها محاسبه شده و به‌همراه نسبت آن، نسبت به زمان مورد نظر در روش می و همکاران، در جدول (۵) ارائه شده است. مطابق زمان‌های ارائه شده در جدول (۵)، روش یو و همکاران ۰/۹ درصد، سریع‌تر از روش می و همکاران است، درحالی‌که روش پیشنهادی ۱/۸ درصد، سریع‌تر از روش می و همکاران است. لازم به ذکر است که این میزان افزایش سرعت در شبکه با ۵۱۲ فاصله در هر ضلع به‌دست آمد. اگر تعداد تقسیمات بیشتر شود یا هندسه مسئله، مرزهای منحنی بیشتری داشته باشد، افزایش سرعت ناشی از شرط مرزی منحنی بیشتر خواهد شد. از این‌رو روش پیشنهاد شده در کار حاضر به‌دلیل سادگی روش، حجم محاسبات کمتر و سریع‌تر بودن در محاسبات طولانی، نسبت به دیگر روش‌ها ترجیح داده می‌شود. برای اینکه مرتبه دقت روش پیشنهادی با مرتبه دقت روش یو وهمکاران در جریان تیلور- کوئت مقایسه شود، خطای میدان سرعت معادله (۳۳)، برای شبکه‌های مختلف محاسبه شده و در شکل (۱۳) نشان داده شده است. این خطا برای میدان فشار نیز در شکل (۱۴) نشان داده شده است. بررسی خطای میدان سرعت در شکل (۱۳) نشان می‌دهد که شبیه‌سازی میدان سرعت، برای روش پیشنهادی و همچنین روش یو و همکاران، با دقت مرتبه ۲ انجام شده است. اما بررسی خطای میدان فشار در شکل (۱۴) نشان می‌دهد که، میدان فشار در هر دو روش تقریباً با دقت مرتبه یک شبیه‌سازی شده است، البته با دقت در شکل (۱۴) می‌توان دید که در شبکه‌های درشت اولیه کاهش خطای فشار کمی سریع‌تر از مرتبه یک است ولی در شبکه‌های ریزتر کاهش خطا از مرتبه یک است. لازم به‌ذکر است که این موضوع دقیقاً در مرجع [۱۱]



شکل ۱۳- خطای میدان سرعت در چند شبکه مختلف، برای جریان تیلور- کوئت، به روش یو و همکاران [۱۰] و روش پیشنهادی



شکل ۱۴- خطای میدان فشار در چند شبکه مختلف، برای جریان تیلور- کوئت، به روش یو و همکاران [۱۰] و روش پیشنهادی

نیز، مشاهده و بر درستی آن تأکید شده است. از این‌رو دقت مرتبه ۲ برای شبیه‌سازی میدان سرعت و دقت مرتبه ۱ برای شبیه‌سازی میدان فشار در روش پیشنهادی و روش یو و همکاران تأیید می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر مروری بر روش بولتزمن شبکه‌ای ارائه شد و چند شرط مرزی، برای اعمال مرز منحنی مورد بررسی قرار گرفت. سپس یک روش ساده شده برای اعمال مرز منحنی پیشنهاد شد که در عین دارا بودن مزایای روش‌های موجود، از معادلات و مراحل ساده‌تری نسبت به بقیه روش‌ها برخوردار است. سپس روش پیشنهادی به همراه دو روش دیگر، برای شبیه‌سازی چند مسئله مورد استفاده قرار گرفت و درستی روش پیشنهادی، مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا جریان در حفره دوبعدی شبیه‌سازی شد، که درصد خطای نسبی کار حاضر نسبت به کار قیا، کمتر از دو درصد به‌دست آمد و از این‌رو درستی برنامه تهیه شده را تأیید کرد. سپس جریان اطراف استوانه، داخل کانال دوبعدی شبیه‌سازی شد، که در آن درصد خطای متغیرهای محاسبه شده، در روش پیشنهادی نسبت به مقادیر مبنا، کمتر از ۰/۸۵ درصد به‌دست آمد. پس از آن جریان بین دو استوانه ساکن و متحرک شبیه‌سازی شدند و نتایج نشان دادند که، خطای روش پیشنهادی و روش یو و همکاران، نسبت به نتایج تحلیلی بسیار ناچیز است و خیلی کمتر از خطای روش می و همکاران به‌دست آمد. همچنین نشان داده شد که زمان مورد نیاز برای روش پیشنهادی کمتر از زمان مورد نیاز برای دیگر روش‌هاست، از این‌رو برای مسائلی که مرزهای منحنی پیچیده‌ای دارند و نیاز به تعداد تکرار زیاد است، روش پیشنهادی، به‌دلیل سادگی معادلات و زمان محاسبات کمتر ترجیح داده می‌شود.

واژه‌نامه

1. streaming step
2. collision step
3. parallel processing
4. bounce back
5. Bhatnagar-Gross-Krook
6. relaxation time
7. Mach number
8. He-Luo
9. halfway
10. immersed boundary method
11. force field method
12. drag coefficient
13. lift coefficient
14. laminar Taylor-Couette flow

مراجع

1. Verschaeve, J. C. G., "Analysis of the Lattice Boltzmann Bhatnagar-Gross-Krook No-Slip Boundary Condition: Ways to Improve Accuracy and Stability", *Physical Review E,* Vol. 80, pp. 036703, 2009.
2. Naghavi, S. M., "Stirred Tank Fluid Flow Simulation with Two Lattice Boltzmann Methods", *Journal of Simulation & Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering,* Vol. 10, pp. 21-33, 2017.
3. Yu, D., Mei, R., Luo, L. S., and Shyy, W., "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation", *Progress in Aerospace Sciences,* Vol. 39, pp. 329-367, 2003.
4. Latt, J., Chopard, B., Malaspinas, O., Deville, M., and Michler, A., "Straight Velocity Boundaries in the Lattice Boltzmann Method", *Physical Review E,* Vol. 77, pp. 056703, 2008.
5. Chang, C., Liu, C.-H., and Lin, C.-A., "Boundary Conditions for Lattice Boltzmann Simulations with Complex Geometry Flows", *Computers & Mathematics with Applications,* Vol. 58, pp. 940-949, 2009.
6. Hu, K., Meng, J., Zhang, H., Gu, X.-J., Emerson, D. R., and Zhang, Y., "A Comparative Study of Boundary Conditions for Lattice Boltzmann Simulations of High Reynolds Number Flows", *Computers & Fluids,* Vol. 156, pp. 1-8, 2017.
7. Zou, Q. and He, X., "On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model", *Physics of Fluids,* Vol. 9, pp 1591-1598, 1997.
8. Lee, H. C., Bawazeer, S., and Mohamad, A. A., "Boundary Conditions for Lattice Boltzmann Method with Multispeed Lattices", *Computers & Fluids,* Vol. 162, pp. 152-159, 2018.
9. Sanjeevi, S. K. P., Zarghami, A., and Padding, J. T., "Choice of No-Slip Curved Boundary Condition for Lattice Boltzmann Simulations of High-Reynolds-Number Flows", *Physical Review E,* Vol. 97, pp. 043305, 2018.
10. Yu, D., Mei, R., and Shyy, W., "A Unified Boundary Treatment in Lattice Boltzmann Method", in *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 953, 2003.
11. Verschaeve, J. C. G. and Müller, B., "A Curved No-Slip Boundary Condition for the Lattice Boltzmann Method", *Journal of Computational Physics,* Vol. 229, pp. 6781-6803, 2010.
12. Rohde, M., Kandhai, D., Derksen, J. J., and Van Den Akker, H. E. A., "Improved Bounce-Back Methods for No-Slip Walls in Lattice-Boltzmann Schemes: Theory and Simulations", *Physical Review E,* Vol. 67, pp. 66703, 2003.
13. Oulaid, O. and Zhang, J., "On the Origin of Numerical Errors in the Bounce-Back Boundary Treatment of the Lattice Boltzmann Method: A Remedy for Artificial Boundary Slip and Mass Leakage", *European Journal of Mechanics-B/Fluids,* Vol. 53, pp. 11-23, 2015.
14. Wolf-Gladrow, D. A., *Lattice-gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction*: Springer, 2004.
15. Succi, S., *The lattice Boltzmann Equation: for Fluid Dynamics and Beyond*: Oxford University Press, 2001.
16. Mohamad, A. A., *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*: Springer Science & Business Media, 2011.
17. He, X. and Luo, L. S., "Theory of the Lattice Boltzmann Method: From the Boltzmann Equation to the Lattice Boltzmann Equation", *Physical Review E,* Vol. 56, pp. 6811-6817, 1997.
18. He, X. and Luo, L. S., "A Priori Derivation of the Lattice Boltzmann Equation", *Physical Review E,* Vol. 55, pp. 6333-6336, 1997.
19. Guo, Z., Shi, B., and Wang, N., "Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation", *Journal of Computational Physics,* Vol. 165, pp. 288-306, 2000.
20. He, X. and Luo, L. S., "Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier Stokes Equation", *Journal of Statistical Physics,* Vol. 88, pp. 927-944, 1997.
21. Skordos, P. A., "Initial and Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method", *Physical Review E,* Vol. 48, pp. 4823-4842, 1993.
22. Dellar, P. J., "Incompressible Limits of Lattice Boltzmann Equations Using Multiple Relaxation Times", *Journal of Computational Physics,* Vol. 190, pp. 351-370, 2003.
23. Guo, Z.-L., Zheng, C.-G., and Shi, B.-C., "Non-Equilibrium Extrapolation Method for Velocity and Pressure Boundary Conditions in the Lattice Boltzmann Method", *Chinese Physics,* Vol. 11, pp. 366, 2002.
24. Guo, Z.-L., Zheng, C.-G., and Shi, B.-C., "An Extrapolation Method for Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Method", *Physics of Fluids (1994-present),* Vol. 14, pp. 2007-2010, 2002.
25. Chen, D., Lin, K., and Lin, C., "Immersed Boundary Method Based Lattice Boltzmann Method to Simulate 2D and 3D Complex Geometry Flows", *International Journal of Modern Physics C,* Vol. 18, pp. 585-594, 2007.
26. Derksen, J. and Van Den Akker, H. E. A., "Large Eddy Simulations on The Flow Driven by a Rushton Turbine", *AICHE Journal,* Vol. 45, pp. 209-221, 1999.
27. Naghavi, S. M., and Ashrafizaadeh, M., "A Comparison of Two Boundary Conditions for the

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.1.6.4]

[DOI: 10.47176/jcme.39.1.1481]

Fluid Flow Simulation in a Stirred Tank", *JCME*, Vol. 33, pp. 15-30, 2014 (in persian).
28. Peng, Y. and Luo, L. S., "A Comparative Study of Immersed-Boundary and Interpolated Bounce-Back Methods in LBE", *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal,* Vol. 8, pp. 156-167, 2008.
29. Filippova, O. and Hanel, D., "Grid Refinement for Lattice-BGK Models", *Journal of Computational Physics,* Vol. 147, pp. 219-228, 1998.
30. Mei, R., Luo, L. S., and Shyy, W., "An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method", *Journal of Computational Physics,* Vol. 155, pp. 307-330, 1999.
31. Mei, R., Shyy, W., Yu, D., and Luo, L. S., "Lattice Boltzmann Method for 3-D Flows with Curved Boundary", *Journal of Computational Physics,* Vol. 161, pp. 680-699, 2000.
32. Mei, R., Yu, D., Shyy, W., and Luo, L. S., "Force Evaluation in the Lattice Boltzmann Method Involving Curved Geometry", *Physical Review E,* Vol. 65, pp. 041203, 2002.
33. Bouzidi, M., Firdaouss, M., and Lallemand, P., "Momentum Transfer of a Boltzmann-Lattice Fluid with Boundaries", *Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 3452-3459, 2001.
34. Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics,* Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
35. Schafer, M., Turek, S., Durst, F., Krause, E., and Rannacher, R., "Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder", *Notes on Numerical Fluid Mechanics,* Vol. 52, pp. 547-566, 1996.