نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۹، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۹، ص. ۷۲-۵۹

مقاله پژوهشی

تحلیل غیرخطی نانوصفحات دایروی به کمک تئوری‌های الاستیسیته سه‌بعدی و تنش کوپل اصلاح شده به روش عددی نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای

زهرا باروئی و مهرداد جبارزاده*
مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۷/۰۸)

چکیده– در این مقاله، تحلیل خمش غیرخطی نانوصفحات دایروی سوراخ‌دار به کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و تنش کوپل اصلاح شده، بررسی شده است. به این منظور معادلات تعادل با در نظر گرفتن عبارت‌های غیرخطی کرنش به روش حداقل انرژی پتانسیل محاسبه و به روش عددی نیمه تحلیلی چندجمله‌ای حل شده است. طبق بررسی‌های انجام شده، تاکنون، تحقیقی که در آن به روش الاستیسیته سه‌بعدی تمام شرایط مرزی به روش عددی محاسبه شده باشند، ملاحظه نشد. به‌طور معمول، تحقیقات در زمینه الاستیسیته سه‌بعدی یا به‌صورت المان محدود بوده و یا اکثراً فقط برای شرط مرزی مفصلی انجام شده است. در این تحقیق، برای اولین مرتبه، تحلیل غیرخطی خمش به کمک الاستیسیته سه‌بعدی برای انواع شرط مرزی ارائه شده است. همچنین، به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح شده، نتایج در مقیاس نانو بررسی شده است. در ادامه، ضمن اعتبارسنجی نتایج، بررسی تغییرات خیز نسبت به پارامتر مقیاس برای انواع شرط مرزی، اثر تغییر پارامتر مقیاس در ضخامت‌های مختلف و اثر پارامتر مقیاس بر نتایج خطی و غیرخطی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: خمش غیرخطی، نانوصفحات دایروی، الاستیسیته سه‌بعدی، تنش کوپل اصلاح شده، روش عددی نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای.

The Nonlinear Bending Analysis for Circular Nano Plates Based on Modified Coupled Stress and Three- Dimensional Elasticity Theories

Z. Barouei and M. Jabbarzadeh*

Department of Mechanical Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

Abstract: *In this paper, the nonlinear bending analysis for annular circular nano plates is conducted based on the modified coupled stress and three-dimensional elasticity theories. For this purpose, the equilibrium equations, considering nonlinear strain terms, are calculated using the least energy potential method and solved by the numerical semi-analytical polynomial method. According to the previous works, there have been no studies calculating all boundary conditions numerically based on three-dimensional elasticity. Typically, the research done on three-dimensional elasticity is either finite element or only for a simply-supported boundary condition. In this research, for the first time, the nonlinear analysis of bending is calculated with the help of three-dimensional elasticity for a variety of boundary conditions. Also, with the help of the modified couple stress theory, the results on the nano-scale scale have been studied. In the following, while validating the results, we investigate the changes in the scale parameter for the types of boundary conditions, the effect of changing the parameter of scale in different thicknesses, and the impact of the parameter of scale on the linear and nonlinear results.*

Keywords: *Nonlinear bending, Circular Nano plates, Three-dimensional elasticity theory, Modified coupled stress, Semi-analytical polynomial method.*

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.2.4.4]

[DOI: 10.47176/jcme.39.2.7491]

فهرست علائم

E	مدول یانگ (الاستیسیته)	$\vec{U}$	بردار جابه‌جایی
$\ddot{E}$	تانسور کرنش	V	حجم
G	مدول برشی	W	کار انجام شده به‌وسیله نیروهای خارجی
h	ضخامت صفحه	w	مؤلفه بردار جابه‌جایی $\vec{U}$ در راستای z
L	پارامتر مقیاس طول ماده	z	محور مختصاتی در سیستم مختصات استوانه‌ای (r-θ-z)
m	بخش انحرافی تانسور تنش کوپل	δ	نماد تغییرات مجازی/ فرضی
q	بار اعمالی بر صفحه	$\ddot{\varepsilon}$	تانسور کرنش گرین
r	محور مختصاتی در سیستم مختصات استوانه‌ای (r-θ-z)	θ	محور مختصاتی در سیستم مختصات استوانه‌ای (r-θ-z)
r_i	شعاع داخلی صفحه	$\vec{\theta}$	بردار چرخش
r_o	شعاع خارجی صفحه	ν	ضریب (نسبت) پوآسون
T	نماد ترانهاده	$\ddot{\sigma}$	تانسور تنش کوشی
U	انرژی کرنشی	$\ddot{\chi}$	تانسور متقارن پیچش
$\mathbf{u}$	مؤلفه بردار جابه‌جایی $\vec{U}$ در راستای r		

۱- مقدمه

عبارت تئوری صفحات الاستیک به یک تئوری تقریبی گفته می‌شود که تنش‌ها و تغییر شکل صفحات را محاسبه می‌کند. تئوری‌های تحلیل صفحه عبارتند از: تئوری کلاسیک صفحات، تئوری مرتبه اول برشی[1]، تئوری‌های مرتبه بالاتر برشی و تئوری الاستیسیته سه‌بعدی. در ساختارهای با ابعاد کوچک نیروهای چسبندگی بین مولکولی و بین‌اتمی قابل چشم‌پوشی نیست، زیرا اثرات زیادی بر خواص استاتیکی و دینامیکی مواد دارد. برای تحلیل مواد نانوساختار با استفاده از تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته، از آنجا که این تئوری‌ها مستقل از ابعاد هستند، نمی‌توانند اثرات اندازه را پیش‌بینی کنند. استفاده از تئوری محیط پیوسته برای تحلیل در ابعاد کوچک منجر به نتایج بیش از حد تقریبی می‌شود. در همین راستا پژوهشگران به اصلاح روش‌های متّکی بر مکانیک محیط پیوسته پرداخته‌اند [۱]. تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلی، مدل اصلاح شده تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک هستند که در آنها اثر مقیاس کوچک به‌صورت ضریبی، رابطه بین تنش غیرمحلی و تنش کلاسیک را بیان می‌کند. تعدادی از تئوری‌های محیط پیوسته که اثرات

اندازه را درنظر می‌گیرند عبارتند از: تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن[2] [۲]، تئوری گرادیان کرنشی[3] [۳]، تنش کوپل اصلاح شده[4] [۴ و ۵]. مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی که ابتدا توسط ارینگن و ادلن [۶] معرفی شد براساس وابستگی تنش در یک نقطه به کرنش در تمام نقاط است درصورتی که در تئوری‌های کلاسیک، تنش در یک نقطه فقط به کرنش در آن نقطه وابسته است. در تئوری گرادیان کرنشی، میندلین با درنظر گرفتن تفاوت‌هایی در عبارات متناظر با انرژی جنبشی و چگالی انرژی کرنشی در مقیاس نانو و میکرو، مدل الاستیسیته متفاوتی را استخراج کرد. علاوه بر جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های موجود در ابعاد ماکرو عبارات اضافه‌تری چون تغییر شکل‌های در اندازه میکرو و همچنین تغییر شکل‌های نسبی که اختلاف تغییر شکل های در مقیاس ماکرو و میکرو هستند و گرادیان عبارات مربوط به تغییر شکل‌های میکرو را لحاظ کرد. همچنین، در تئوری تنش کوپل اصلاح شده بیان می‌شود که در ابعاد نانو، نیروهای واندروالسی باعث ایجاد گشتاور زوج نیرویی در جسم می‌شوند که قابل چشم‌پوشی نیستند. در این روش با درنظر گرفتن المان حجمی اطراف ذره، زوج نیرو و گشتاور حاصل از آن به این المان وارد می‌شود. از آنجا که لازمه تجاری‌سازی نانوساختارها، تحلیل رفتار آنها است، مطالعه روی رفتار آنها توجه کثیری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. تاکنون پژوهش‌های زیادی درباره خمش، کمانش و ارتعاشات نانوساختارها، برمبنای تئوری‌های محیط پیوسته انجام شده است که به تعدادی از آنها اشاره خواهد شد. گلمکانی و رضاطلب [۷] خمش غیرخطی نانوصفحات ارتوتروپیک مستطیلی را بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های غیرخطی ون کارمن با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن بررسی کردند. جبارزاده و همراهان [۸] خمش غیرخطی نانوصفحات ایزوتروپیک دایره‌ای را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی برمبنای تئوری مرتبه اول برشی، ارینگن و کرنش‌های غیرخطی ون کارمن، تأثیر پارامتر غیرمحلی را بر خیز حداکثری بررسی کرده‌اند.

تحلیل ارتعاش آزاد قطعه ساندویچ استوانه‌ای با هسته مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، توسط علی‌بیگلو و لئو [۹] انجام شد؛ در این بررسی، براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، یک حل ارتعاش آزاد برای قطعه ساندویچ استوانه‌ای برای شرط مرزی مفصلی ارائه شده است. برای حل، یک تکنیک جفت کردن[5]، با استفاده از بسط سری فوریه در امتداد محور و جهت‌های پیرامونی و روش فاصله تعادل در جهت شعاعی، استفاده شده است. صالحی‌پور و همکاران، در چهار تحقیق مجزا [۱۳-۱۰] خمش و ارتعاش آزاد میکرو/ نانو صفحات مستطیلی مدرج تابعی را به کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بررسی کردند؛ در این مقالات با فرض مفصلی بودن شرایط مرزی، یک سری فوریه دوگانه برای جابه‌جایی‌ها در راستای محورهای مختصات درنظر گرفته و حل بسته برای تغییر شکل خمشی صفحات را با استفاده از تئوری غیرموضعی ارینگن [۱۰] و تنش کوپل اصلاح شده [۱۱]، همچنین ارتعاشات آزاد این صفحات را با استفاده از تئوری غیرموضعی ارینگن [۱۲] و تنش کوپل اصلاح شده [۱۳] ارائه کرده‌اند. حل الاستیسیته سه‌بعدی برای تحلیل استاتیک و دینامیک صفحات قطاع دایره ضخیم مدرج تابعی چندجهتی برای انواع شرایط مرزی به روش المان محدود به‌وسیله ظفرمند و کدخدایان [۱۴] بررسی شد؛ در این تحقیق، به کمک تئوری همیلتن و روش انرژی ریلی – ریتز، روابط حاکم برای المان محدود محاسبه شده است. انصاری و همکاران [۱۵]، حل تحلیلی ارتعاشات آزاد نانوصفحات مدرج تابعی را به کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و تئوری غیرمحلی ارائه کرده‌اند. تحلیل ترموالاستیک سه‌بعدی و واکنش دینامیک یک صفحه نامتوازن مدرج تابعی چندجهتی روی پایه الاستیک توسط آدینه و کدخدایان [۱۶]، انجام شد. حل دقیق خمش صفحات ضخیم چندلایه ارتوتروپیک بر اساس تئوری‌های الاستیسیته سه‌بعدی و تغییر شکل برشی مرتبه اول، توسط آتشی‌پور و همکاران [۱۷]، بررسی شده است؛ در این تحقیق، روش جداسازی متغیرها استفاده شد و برای شرط مرزی مفصلی ساده به کمک تئوری لِوی[6]، یک حل

تحلیلی دقیق ارائه شده است. حل الاستیسیته سه‌بعدی برای صفحات ساندویچی دارای هسته‌های چین‌دار با استفاده از روش انرژی به‌وسیله شعبان و علی‌بیگلو انجام شده است [۱۸].

در تحقیق حاضر، تحلیل خمش غیرخطی نانوصفحات دایروی سوراخ‌دار تحت بارگذاری عرضی به‌کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی که فاقد فرضیات ساده‌کننده تئوری‌های برشی است بررسی می‌شود. برای محاسبه معادلات تعادل از روش حداقل انرژی پتانسیل استفاده شده و نتایج عددی با استفاده از روش عددی نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای[۷] برای انواع شرط مرزی گیردار، مفصلی و آزاد، ارائه شده است. در کلیه تئوری‌های صفحات، از تغییرات در جهت ضخامت صرف‌نظر شده $(\varepsilon_z = 0)$ و همچنین $\sigma_z = 0$ درنظر گرفته می‌شود همچنین هر تئوری برشی برای یک گستره از ضخامت صفحه مناسب است اما این محدودیت‌ها در تئوری سه‌بعدی وجود ندارد. طبق بررسی مقالاتی که از این تئوری استفاده می‌کنند ملاحظه می‌شود که به‌علت محدودیت‌های محاسباتی، نتایج به روش المان محدود و یا نتایج عددی فقط برای شرط مرزی مفصلی ارائه شده است. در این تحقیق به کمک روش نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای نتایج عددی این تئوری برای تمامی شرایط مرزی ارائه شده است. روش استفاده شده مشابه روش مربعات دیفرانسیلی بوده، با این تفاوت که به‌جای استفاده از مقادیر گره‌ای برای محاسبات، از مختصات گره‌ای استفاده کرده که امتیازات مختلفی در محاسبات ایجاد می‌کند که یکی از امتیازات آن امکان تحلیل به کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی برای انواع شرط مرزی است. امتیازات دیگر این روش، در بخش مربوطه توضیح داده خواهد شد.

۲- معادلات حاکم

در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، انرژی کرنشی یک جسم پیوسته الاستیک خطی با تابعی از هر دو تانسور کرنش و تانسور پیچش تعیین می‌شود [۱۱].

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma:\varepsilon + m:\chi\right)dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\right)dV \qquad (۱)$$

در این رابطه، U انرژی کرنشی، V حجم، $\vec{\sigma}$ تانسور تنش کوشی، $\vec{\varepsilon}$ تانسور کرنش گرین لاگرانژ، $\vec{m}$ بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و $\vec{\chi}$ تانسور متقارن پیچش بوده که $\vec{\chi}$ با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{\chi} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{\theta} + (\vec{\nabla}\vec{\theta})^T\right) \qquad (۲)$$

$$\vec{\theta} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{curl}(\vec{U})\right) \qquad (۳)$$

در روابط فوق $\vec{\nabla}$ گرادیان، $\vec{\theta}$ بردار چرخش و $\vec{U}$ بردار جابه‌جایی هستند.

مؤلفه‌های تانسور متقارن پیچش عبارتند از:

$$\chi_{rr} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial z} \qquad (۴)$$

$$\chi_{r\theta} = \chi_{\theta r} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{4r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial z} - \frac{1}{4r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{4r}\frac{\partial w}{\partial r} \qquad (۵)$$

$$\chi_{rz} = \chi_{zr} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{4r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{4r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{4r^2} + \frac{1}{4r}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \theta} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad (۶)$$

$$\chi_{\theta\theta} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial z} - \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta\partial r} \qquad (۷)$$

$$\chi_{\theta z} = \chi_{z\theta} = \frac{1}{4r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r} - \frac{1}{4r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial r} \qquad (۸)$$

$$\chi_{zz} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial r} - \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \theta} + \frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (۹)$$

u، v و w مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی $\vec{U}$ در راستای سه محور مختصات r، θ و z هستند.

همچنین همان‌طور که در ادامه آمده m_{ij} با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۱]:

$$m_{ij} = \frac{E}{1+\nu}L^2\chi_{ij} \quad \xrightarrow{2G=\frac{E}{1+\nu}} \quad m_{ij} = 2GL^2\chi_{ij} \qquad (۱۰)$$

در رابطه فوق، m_{ij} مؤلفه‌های بخش انحرافی تانسور تنش کوپل، E مدول یانگ (الاستیسیته)، ν ضریب پوآسون، L پارامتر مقیاس طول ماده، χ_{ij} مؤلفه‌های تانسور متقارن پیچش و

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.2.4.4]

[DOI: 10.47176/jcme.39.2.7491]

G مدول برشی هستند.

بردار جابه‌جایی $\vec{U}$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{U} = u\vec{e_r} + v\vec{e_\theta} + w\vec{e_z} \tag{۱۱}$$

در این صورت روابط کرنش غیرخطی در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left[(\vec{\nabla}\vec{U}) + (\vec{\nabla}\vec{U})^T + (\vec{\nabla}\vec{U}).(\vec{\nabla}\vec{U})^T\right] \tag{۱۲}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{۱۳}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right] \tag{۱۴}$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \tag{۱۵}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \tag{۱۶}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{۱۷}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \tag{۱۸}$$

برای به‌دست آوردن معادلات تعادل و شرایط مرزی از روش حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود؛ بر اساس این روش [۱۹]:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \tag{۱۹}$$

در رابطه فوق، δ نماد تغییرات مجازی/ فرضی، Π انرژی پتانسیل کل، U انرژی کرنشی و W کار انجام شده در اثر بارهای خارجی است. با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned}\delta U = &\int_V \big(\sigma_{rr}\delta\varepsilon_{rr} + \sigma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta} + \sigma_{rz}\delta\gamma_{rz} + \sigma_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta\theta} \\ &+ \sigma_{\theta z}\delta\gamma_{\theta z} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz}\big)dV + \\ &\int_V \big(m_{rr}\delta\chi_{rr} + m_{r\theta}\delta 2\chi_{r\theta} + m_{rz}\delta 2\chi_{rz} + m_{\theta\theta}\delta\chi_{\theta\theta} \\ &+ m_{\theta z}\delta 2\chi_{\theta z} + m_{zz}\delta\chi_{zz}\big)dV\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_o} q\delta w r dr d\theta \tag{۲۱}$$

در رابطه (۲۱)، r_i شعاع داخلی صفحه، r_o شعاع خارجی صفحه و q بار اعمالی بر صفحه، است.

در این صورت معادلات حاکم، شامل معادلات تعادل (۲۴) – (۲۲) و شرایط مرزی (۲۹) – (۲۷) را خواهیم داشت:

δu :

$$\begin{aligned}&-\sigma_{rr} - r\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - r\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\left(\frac{r}{2}m_{r\theta}\right) \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial z} - \frac{1}{2r}\frac{\partial m_{rz}}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{rz}}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{\theta\theta}}{\partial z\partial \theta} - \\ &\frac{1}{2r}\frac{\partial^2 m_{\theta z}}{\partial \theta^2} + \frac{r}{2}\frac{\partial^2 m_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{zz}}{\partial z\partial \theta} = 0\end{aligned} \tag{۲۲}$$

δw :

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rr}\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) \\ &-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rz}\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\sigma_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\ &-\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma_{\theta z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{\theta z}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_{zz}) \\ &-\frac{\partial}{\partial z}\left(r\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial m_{rr}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{rr}}{\partial \theta\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{r}{2}m_{r\theta}\right) \\ &+\frac{1}{2r}\frac{\partial^2 m_{r\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{rz}}{\partial \theta\partial z} - \frac{1}{2r}\frac{\partial m_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{\theta\theta}}{\partial r\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{r}{2}m_{\theta z}\right) = 0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

δv :

$$\begin{aligned}&-\sigma_{r\theta} - r\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \sigma_{r\theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - r\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\left(\frac{r}{2}m_{rr}\right) - \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{r\theta}}{\partial z\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{r}{2}m_{rz}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{rz}}{\partial r} - \frac{m_{rz}}{2r} - \frac{r}{2}\frac{\partial^2 m_{rz}}{\partial z^2} + \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial m_{\theta\theta}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m_{\theta z}}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{2r}\frac{\partial m_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\left(\frac{r}{2}m_{zz}\right) \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial m_{zz}}{\partial z} = 0\end{aligned} \tag{۲۴}$$

لازم به توضیح است معادلات تعادل، به‌صورت کلی با درنظر گرفتن جابه‌جایی در مختصات r، θ و z استخراج شده است، منتهی با توجه به انجام تحلیل روی صفحه دایره‌ای متقارن و تحت بار متقارن، تغییرات نسبت به θ صفر بوده و جابه‌جایی در راستای v نیز صفر خواهد بود. با توجه به روش حداقل انرژی پتانسیل، شرایط مرزی عبارتند از:

at $\quad r = r_i \quad$ and $\quad r = r_o$

$u = 0 \qquad$ or $\qquad r\sigma_{rr} - \frac{\partial}{\partial z}(rm_{r\theta}) = 0$

$w = 0 \qquad$ or

$r\sigma_{rz} + r\sigma_{rr}\frac{\partial w}{\partial r} + r\sigma_{rz}\frac{\partial w}{\partial z} +$

$$\frac{1}{2}\left[m_{r\theta}+\frac{\partial}{\partial r}\left(rm_{r\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rm_{\theta z}\right)\right]=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{or} \quad m_{r\theta}=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad \text{or} \quad m_{r\theta}=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{or} \quad m_{\theta z}=0 \tag{۲۵}$$

$$\text{at} \quad z=\frac{h}{2} \quad \text{and} \quad z=-\frac{h}{2}$$
$$u=0 \quad \text{or}$$
$$r\sigma_{rz}+\frac{1}{2}\left[-m_{r\theta}-\frac{\partial\left(rm_{r\theta}\right)}{\partial r}-\frac{\partial\left(rm_{\theta z}\right)}{\partial z}\right]=0$$
$$w=0 \quad \text{or}$$
$$r\sigma_{zz}+r\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+r\sigma_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(rm_{\theta z}\right)-rq\left(r.\theta\right)=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}=0 \quad \text{or} \quad m_{r\theta}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{or} \quad m_{\theta z}=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad \text{or} \quad m_{\theta z}=0 \tag{۲۶}$$

در رابطه (۲۶)، h ضخامت صفحه است.

با توجه به روابط فوق، شرایط مرزی برای مرزهای گیردار، مفصلی و آزاد عبارتند از:

گیردار

$$u=w=m_{r\theta}=m_{\theta z}=0 \tag{۲۷}$$

مفصلی

$$r\sigma_{rr}-\frac{r}{2}\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial z}=w=m_{r\theta}=m_{\theta z}=0 \tag{۲۸}$$

آزاد

$$r\sigma_{rr}-\frac{r}{2}\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial z}=$$
$$r\sigma_{rr}\frac{\partial w}{\partial r}+r\sigma_{rz}+r\sigma_{rz}\frac{\partial w}{\partial z}+m_{r\theta}+\frac{r}{2}\frac{\partial m_{r\theta}}{\partial r}=0 \tag{۲۹}$$

۳- روش حل

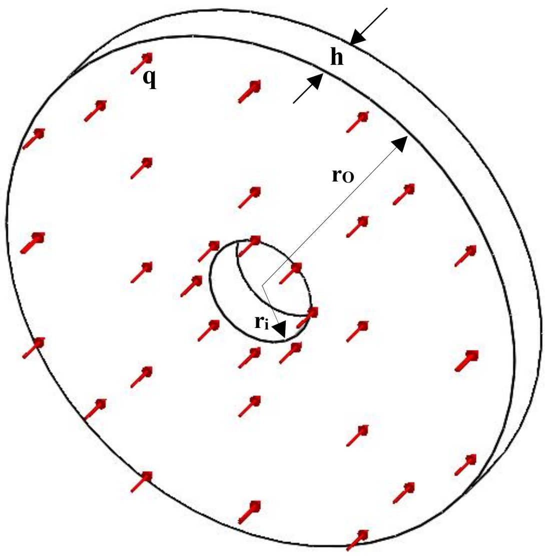
با توجه به معادلات حاکم، می‌توان مشاهده کرد که یک سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به‌دست می‌آید. حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یکی از موضوعات زمان‌بر و چالش‌برانگیز بوده که محققان روش‌های مختلفی را به‌کار می‌گیرند تا مسائل را با دقت و سرعت حل کنند. هر روش مزایا و معایب خود را دارد. در این تحقیق، از روش نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای که برای اولین مرتبه توسط دستجردی و جبارزاده [۲۰] ارائه شده است، استفاده می‌شود. در این روش، هر تابع در معادلات دیفرانسیل با یک چندجمله‌ای به فرم کلی که به توزیع شبکه نقاط گره‌ای وابسته است تخمین زده می‌شود. در این روش مانند روش مربعات دیفرانسیلی از یک درون‌یاب استفاده می‌شود که بر خلاف روش مربعات دیفرانسیلی که بر اساس مقادیر گره‌ای است، در این روش، چندجمله‌ای بر اساس مختصات گره‌ای پیشنهاد می‌شود که امتیازات مختلفی در حل ایجاد می‌کند. بر خلاف روش‌هایی نظیر برهم‌گذاری نقطه‌ای[۸]، هیچ نیازی به معرفی توابع چندجمله‌ای برای ارضای شرایط مرزی وجود ندارد. هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۹] یا مجموعه‌ای از سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی به‌راحتی و به‌سرعت با توجه به انواع مختلف شرایط مرزی قابل حل است [۲۰]. برای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ابتدا یک چندجمله‌ای برای متغیرهای مجهول بر اساس ضرایب خیام – نیوتن و با توجه به تعداد گره‌ها در هر راستا در نظر گرفته می‌شود. در حل مسئله فوق متغیرها، توابع جابه‌جایی u و w بوده و با توجه به اینکه صفحه مورد تحلیل دایره‌ای و متقارن است تغییرات در راستای r و z خواهند بود و چندجمله‌ای به فرم کلی f(r,z) تخمین زده می‌شود. رابطه پیشنهادی چنین است [۲۰ و ۲۱]:

$$f\left(r,z\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{\left(i+j-\left[1-(i-1)(M-1)\right]\right)}r^{(i-1)}z^{(j-1)} \tag{۳۰}$$

N و M تعداد گره‌های در نظر گرفته شده در راستای محورهای r و z هستند.

بنابراین میدان جابه‌جایی u و w بر اساس متغیرهای (r, z) عبارتند از:

$$u(r,z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{\left(i+j-\left[1-(i-1)(M-1)\right]\right)}r^{(i-1)}z^{(j-1)} \tag{۳۱}$$



شکل ۱- طرح کلی نانوصفحه سوراخ‌دار بارگذاری شده

$$w(r,z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{\left(i+j-\left[1-(i-1)(M-1)\right]+2MN\right)}r^{(i-1)}z^{(j-1)} \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری متغیرهای فوق در معادلات تعادل، معادلات بر اساس ضرایب ثابت به‌دست آمده و با اعمال شرایط مرزی، مشابه روش مربعات دیفرانسیلی، توابع جابه‌جایی محاسبه می‌شوند. از آنجا که شرایط مرزی از روش حداقل انرژی پتانسیل به‌دست می‌آیند؛ ممکن است در هنگام اعمال بعضی از تئوری‌ها نظیر تئوری‌های مرتبه بالاتر صفحات و یا حل در مقیاس نانو نظیر همین تحقیق، به‌خصوص در شرط مرزی آزاد، تعداد شرایط مرزی از تعداد معادلات دیفرانسیل بیشتر باشد. یکی از مزایای این روش عددی آن است که بدون هیچ محدودیتی در تعداد، می‌توان در هر گره شرایط مرزی مازاد را اعمال کرد.

۴- نتایج عددی

صفحه دایره‌ای متقارن سوراخ‌دار به شعاع داخلی r_i و r_o با ضخامت h را در نظر بگیرید (شکل ۱). برای بررسی نتایج، روابط حاکم بی‌بعد شده و از ابعاد بی‌بعد برای نتیجه‌گیری استفاده شده است و نتایج برای هر سه نوع شرط مرزی گیردار، مفصلی و آزاد بررسی شده است.

در ابتدا جهت بررسی دقت روش، تأثیر تعداد گره‌ها بر نتایج در شکل (۲) ارائه شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد گره‌ها نتایج به عدد ثابتی میل می‌کند و در این تحقیق تعداد گره‌ها در راستای شعاع ۱۵ در نظر گرفته شده است (شکل ۲).

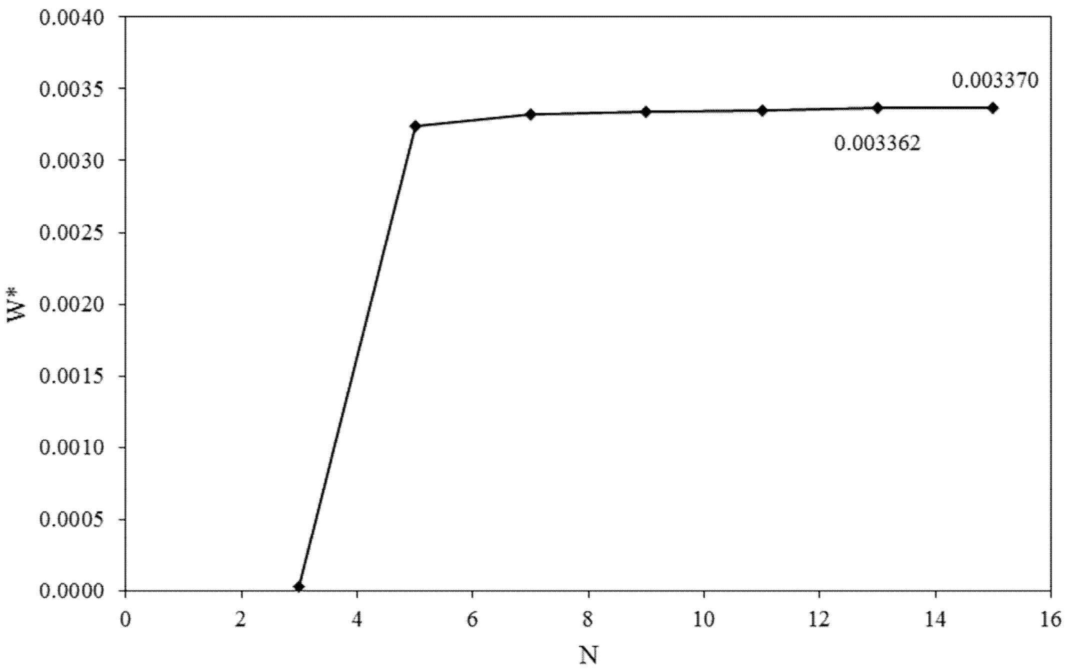
جهت اعتبارسنجی نتایج به‌دست آمده، مثالی در مقیاس ماکرو حل شده و با نتایج نرم‌افزارهای المان محدود مقایسه شده است. جهت این موضوع ابعاد و مشخصات زیر انتخاب شده است:

$$r_i=10\,\text{mm}$$
$$r_o=50\,\text{mm}$$
$$h=1\,\text{mm}$$
$$E=2/05\times10^{11}\ \text{Pa}$$
$$\nu=0/29$$
$$q=10000\ \text{Pa}$$

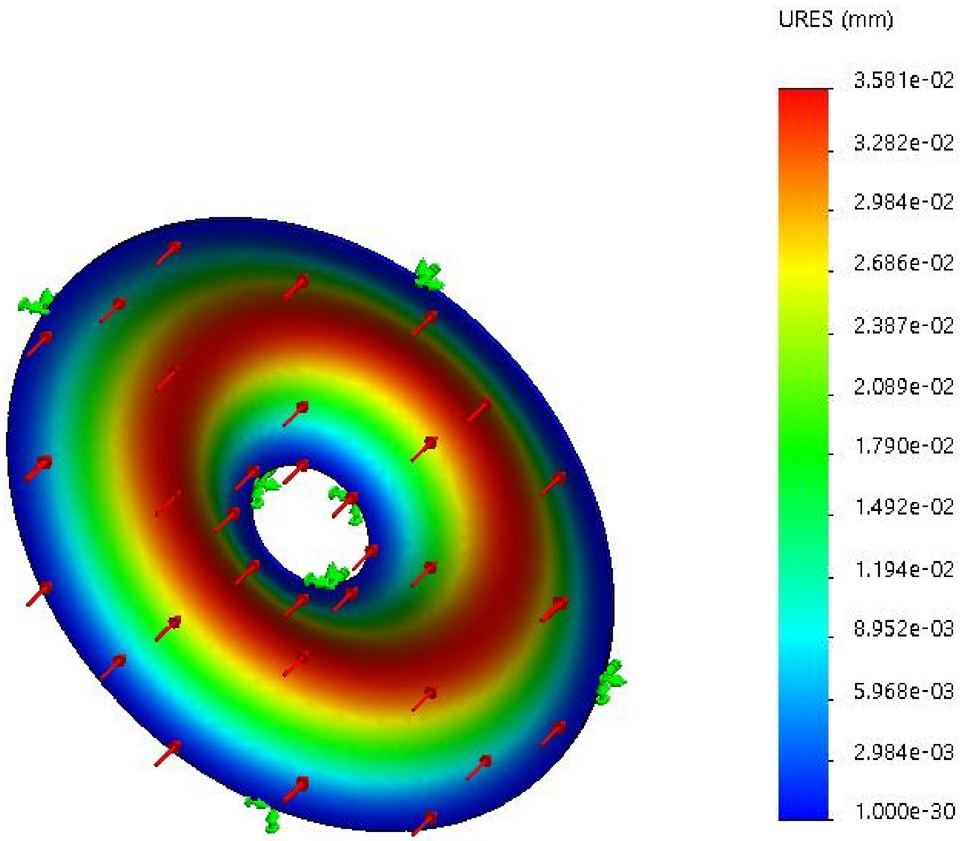
که خیز ماکزیمم به‌دست آمده بر اساس اطلاعات فوق برای شرط مرزی گیردار، مقداری برابر ۰/۰۳۵۸۱ میلی‌متر بوده و توسط حل عددی مقداری برابر ۰/۰۳۵۲۳۷ میلی‌متر است که تطابق خوبی با المان محدود نشان می‌دهد (شکل‌های ۳ و ۴)

حال برای بررسی دقت نتایج در ابعاد میکرو/ نانو، نتایج این تحقیق با مرجع [۲۲] مقایسه می‌شود. در مقاله‌ای که نتایج تحقیق کنونی با آن مقایسه شده از تئوری کلاسیک با کرنش‌های غیرخطی برای تحلیل صفحه و تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای تحلیل در ابعاد میکرو/ نانو استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل در شرایط مرزی گیردار در (جدول ۱) انجام شده است.

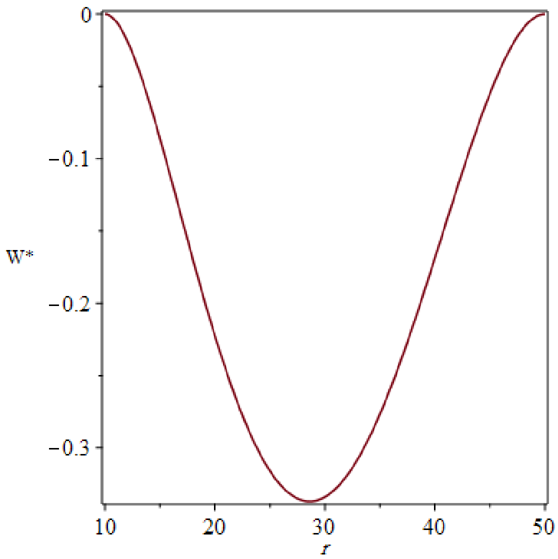
در ادامه نتایج حاصل از این تحقیق ارائه می‌شود. در نمودار شکل (۵)، با در نظر گرفتن شرایط مرزی گیردار در هر دو لبه داخلی و خارجی و با تغییر L (پارامتر مقیاس) مقدار خیز صفحه بررسی شده است. طبق تئوری تنش کوپل اصلاح شده ضریب پارامتر مقیاس (L) در بازه صفر تا یک تغییر می‌کند. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر مقیاس، مقدار خیز صفحه کاهش می‌یابد. به معنای دیگر با افزایش پارامتر مقیاس سختی صفحه افزایش می‌یابد.



شکل ۲- تأثیر تعداد گره در همگرایی



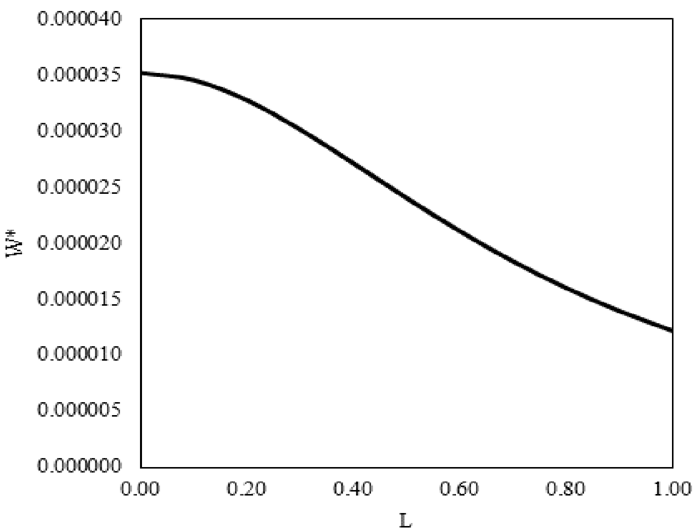
شکل ۳- شبیه‌سازی صفحه در محیط نرم‌افزار المان محدود



شکل ۴- تغییرات خیز به‌دست آمده برای شرایط مرزی گیردار

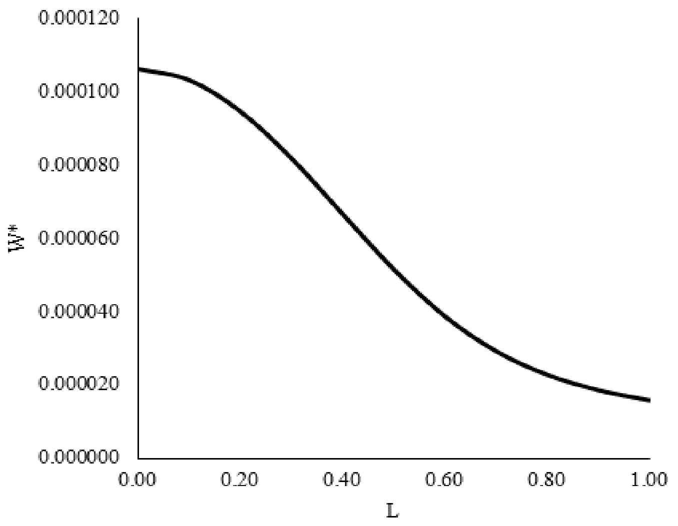
جدول ۱- مقایسه خیز بی‌بعد صفحه با مرجع [۲۲]

Q = ۵	کلاسیک	$\frac{h}{L}$ =۱۵	$\frac{h}{L}$ =۱۰	$\frac{h}{L}$ =۵	$\frac{h}{L}$ =۴	$\frac{h}{L}$ =۳	$\frac{h}{L}$ =۲	$\frac{h}{L}$ =۱
تحقیق حاضر	۰/۶۷۹۳	۰/۶۷۲۱	۰/۶۶۳۳	۰/۶۱۸۸	۰/۵۸۸۷	۰/۵۳۱۶	۰/۴۱۱۹	۰/۱۸۴۶
مرجع [۲۲]	۰/۶۷۹۶	۰/۶۷۲۵	۰/۶۶۳۸	۰/۶۱۸۷	۰/۵۸۷۴	۰/۵۲۶۹	۰/۳۹۹۲	۰/۱۶۳۶
Q = ۱۰	کلاسیک	$\frac{h}{L}$ =۱۵	$\frac{h}{L}$ =۱۰	$\frac{h}{L}$ =۵	$\frac{h}{L}$ =۴	$\frac{h}{L}$ =۳	$\frac{h}{L}$ =۲	$\frac{h}{L}$ =۱
تحقیق حاضر	۱/۰۵۱۹	۱/۰۴۰۷	۱/۰۲۷۱	۰/۹۵۸۲	۰/۹۱۱۶	۰/۸۲۳۲	۰/۶۳۷۸	۰/۲۸۵۸
مرجع [۲۲]	۱/۰۵۲۰	۱/۳۰۴۵	۱/۰۳۷۰	۰/۹۹۲۹	۰/۹۶۰۶	۰/۸۹۳۷	۰/۷۲۸۶	۰/۳۲۴۵

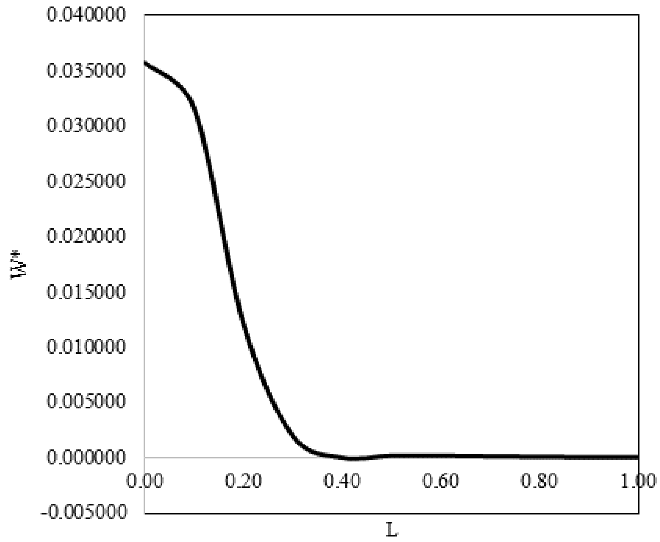


شکل ۵- تغییرات خیز برحسب پارامتر مقیاس طول برای شرایط مرزی گیردار

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.2.4.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.2.7491]



شکل ۶- تغییرات خیز برحسب پارامتر مقیاس طول برای شرایط مرزی گیردار – مفصلی

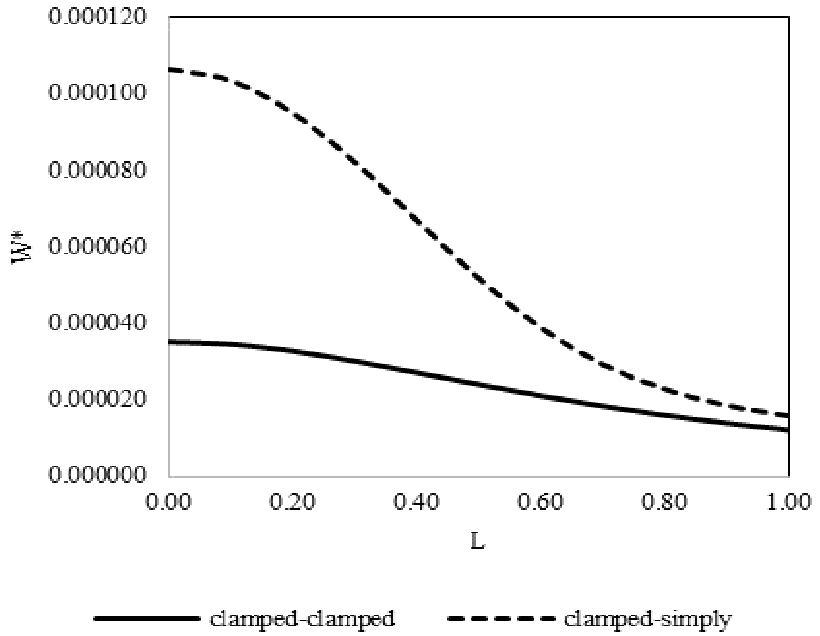


شکل ۷- تغییرات خیز برحسب پارامتر مقیاس طول برای شرایط مرزی آزاد – گیردار

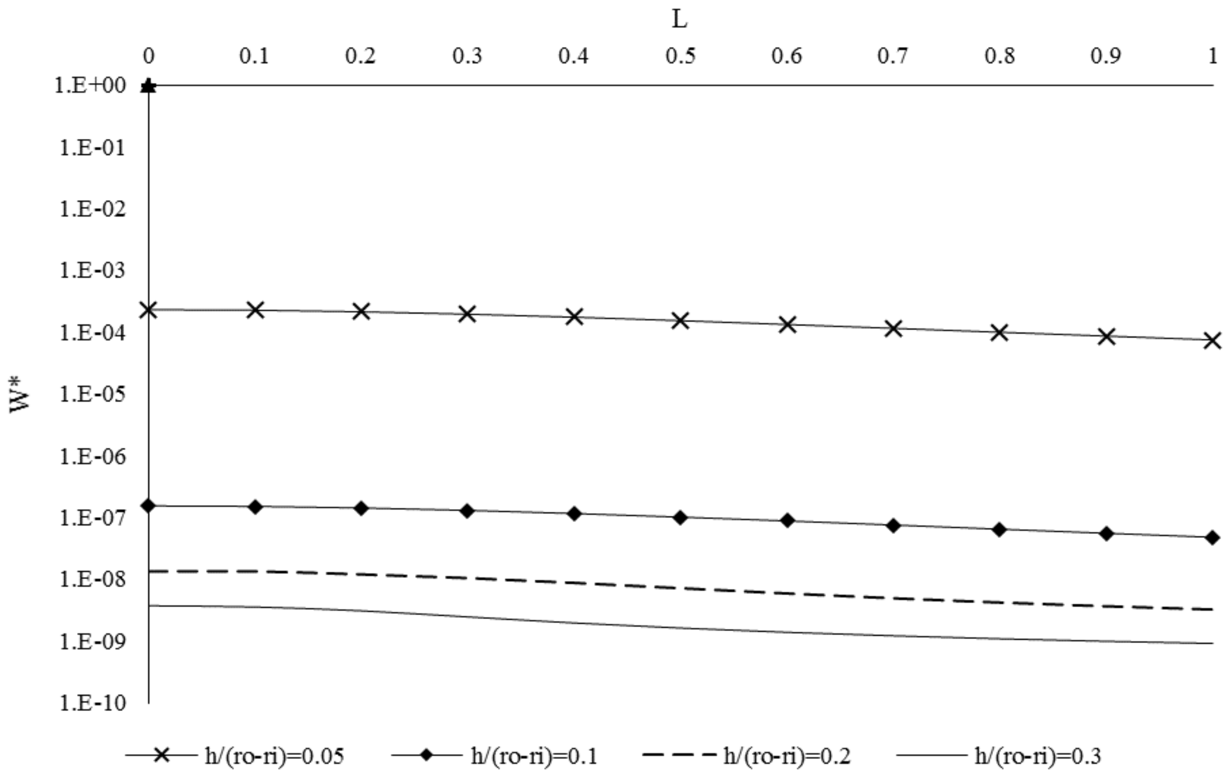
شکل‌های (۶) و (۷)، تغییرات خیز برای شرایط مرزی گیردار – مفصلی و گیردار – آزاد را به‌ازای تغییرات پارامتر مقیاس ارائه می‌کند. در این نمودارها، با افزایش پارامتر مقیاس خیز کاهش می‌یابد. با مقایسه سه نمودار (۵)-(۷)، ملاحظه می‌شود با افزایش درجات آزادی در شرایط مرزی، تأثیر پارامتر مقیاس بر نتایج خیز بیشتر شده به‌خصوص هنگامی که یکی از شرایط مرزی آزاد باشد، تغییرات منحنی زیاد شده و خیز با شیب زیاد کاهش می‌یابد.

جهت مقایسه تأثیر پارامتر مقیاس در شرایط مرزی مختلف شکل (۸) ارائه شده است؛ در این نمودار دو نوع شرط مرزی گیردار – گیردار و گیردار – مفصلی ارائه شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش پارامتر مقیاس، تأثیر شرط مرزی کاهش یافته و نتایج انواع شرط مرزی به‌صورت همگرا درمی‌آیند.

جهت بررسی تأثیر پارامتر مقیاس در ضخامت‌های مختلف، شکل (۹) ارائه شده است؛ از آنجا که به کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، می‌توان صفحات نازک تا ضخیم را تحلیل کرد؛

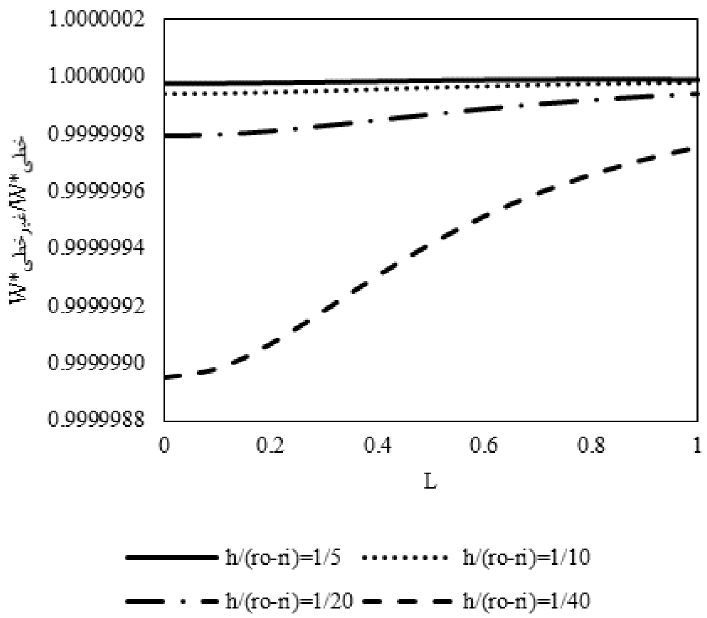


شکل ۸- مقایسه نتایج تأثیر پارامتر مقیاس برای دو شرط مرزی گیردار- گیردار و گیردار – مفصلی



شکل ۹- تأثیر پارامتر مقیاس برای ضخامت‌های مختلف ($\left(\frac{h}{r_o - r_i}\right)$)

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.2.4.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.2.7491]



شکل ۱۰- تغییرات نسبت خیز غیرخطی به خطی بر حسب (L) در ضخامت‌های مختلف

از این‌رو شکل (۹) برای بازه‌های مختلف از ضخامت ارائه شده است. این نمودار در شرایط مرزی گیردار – گیردار رسم شده است. نمودارها نشان می‌دهند هر چه ضخامت بیشتر شود تأثیر تغییرات پارامتر مقیاس بر نتایج کمتر شده و شیب منحنی کاهش می‌یابد.

در انتها در شکل (۱۰)، مقایسه نتایج حاصل از تأثیر پارامتر مقیاس بر نتایج تحلیل‌های خطی و غیرخطی بررسی شده است. شرط مرزی‌ها گیردار در نظر گرفته شده و منحنی خیز محاسبه شده به‌صورت نسبت نتایج غیرخطی به خطی در برابر تغییرات پارامتر مقیاس برای ضخامت‌های مختلف رسم شده است. در منحنی فوق، همان‌طور که انتظار می‌رود، هر چه ضخامت بیشتر می‌شود، به‌ازای بار ثابت اعمالی، نتایج خطی و غیرخطی به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. زیرا خیز و در نتیجه تأثیر جملات غیرخطی کرنش بر نتایج کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود، با افزایش پارامتر مقیاس، اختلاف نتایج خطی و غیرخطی در ضخامت‌های مختلف کاهش یافته و نتایج در ضخامت‌های مختلف به‌صورت همگرا درمی‌آیند.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش ارائه شده معادلات تعادل و شرایط مرزی صفحه بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و تنش کوپل اصلاح شده در مختصات استوانه‌ای به روش حداقل انرژی پتانسیل با در نظر گرفتن کرنش غیرخطی استخراج و به روش عددی نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای برای نانوصفحه دایره‌ای سوراخ‌دار برای انواع شرط مرزی حل شده است. برای بررسی دقت روش عددی ارائه شده برای حل الاستیسیته سه‌بعدی، نتایج تحقیق با نتایج در مقیاس ماکرو با خروجی نرم‌افزار المان محدود و همچنین تحقیقات دیگر مقایسه شده که حاکی از دقت روش مورد استفاده است.

از مهم‌ترین نتایج این تحلیل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:
با روش عددی نیمه‌تحلیلی چندجمله‌ای می‌توان نتایج تئوری الاستیسیته سه‌بعدی را برای انواع شرط مرزی محاسبه کرد. از بررسی خیز صفحه در شرایط مرزی متنوع از جمله: گیردار، گیردار – مفصلی و آزاد – گیردار چنین استنباط می‌شود که با افزایش پارامتر مقیاس، در کلیه حالت‌ها خیز صفحه کاهش می‌یابد.

[DOR: 20.1001.1.22287698.1399.39.2.4.4]
[DOI: 10.47176/jcme.39.2.7491]

هرچـه شـرط مـرزی دارای درجـه آزادی بیشـتری باشـد تـأثیر افزایش پارامتر مقیاس بیشتر است. کاهش خیز بـا تغییـر شـرط مرزی از گیردار به مفصـلی و سـپس آزاد شـیب بیشـتری پیـدا می‌کند به عبارت دیگر خیز صفحه در شرایط مـرزی بـه‌ترتیـب گیردار، مفصلی و آزاد دامنه تغییرات بیشتری را تجربه می‌کند.

با بررسی افزایش ضخامت صفحه ملاحظه می‌شود هـر چـه صفحه ضخیم‌تر می‌شود تغییرات خیز با افزایش پارامتر مقیـاس دامنه کمتری را تجربه می‌کند به بیان دیگر در صـفحه نـازک‌تـر تأثیر پارامتر مقیاس موجب اختلاف خیز بیشتری با حالت ماکرو می‌شود.

نتیجه بررسـی نسـبت خیـز غیرخطـی بـه خطـی برحسـب تغییرات ضخامت به‌ازای بار ثابت نشان داد با افزایش ضـخامت صفحه نتایج تحلیل غیرخطی و خطی بسیار به یکدیگر نزدیـک خواهند شد و هـر چـه پـارامتر مقیـاس بیشـتر مـی‌شـود تـأثیر ضخامت صـفحه بـر اخـتلاف نتـایج خطـی و غیرخطـی کمتـر می‌شود.

واژه‌نامه

1. first order shear deformation theory
2. nonlocal elasticity theory of Eringen
3. strain-inertia gradient theory
4. modified couple stress
5. coupled technique
6. Levy
7. semi analytical polynomial method
8. point – collocation
9. partial differential equations

مراجع

1. Mousavi, Z., Shahidi, S. A., and Boroomand, B., "Bending Analysis of Nano Beam and Rectangular Nano Plate Based on Full Modified Nonlocal (FMNL) Theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 376-384, 2017 (in Persian).
2. Eringen, A. C., Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, NewYork, Inc., pp. 71-175, 2002.
3. Liang, X., Hu, S., and Shen, S., "A New Bernoulli–Euler Beam Model Based on a Simplified Strain Gradient Elasticity Theory and its Applications", *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 317-323, 2014.
4. Shakouri, A., Ng, T. Y., and Lin, R. M., "A Study of the Scale Effects on the Flexural Vibration of Graphene Sheets Using REBO Potential Based Atomistic Structural and Nonlocal Couple Stress Thin Plate Models", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 50, No. 1, pp. 22-28, 2013.
5. Ashoori, A., and Mahmoodi, M. J., "The Modified Version of Strain Gradient and Couple Stress Theories in General Curvilinear Coordinates", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 49, No. 1, pp. 441-454, 2015.
6. Eringen, A. C., and Edelen, D. G. B., "On Nonlocal Elasticity", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 233-248, 1972.
7. Golmakani, M. E., and Rezatalab, J., "Nonlinear Bending Analysis of Orthotropic Nanoplates Based on Nonlocal Model of Eringen Using DQM", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 122-136, 2012 (in Persian).
8. Jabbarzadeh, M., Talati, H., and Noroozi, A. R., "Nonlinear Analysis of Circular Graphene Sheet Using Nonlocal Continuum Mechanic Theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 57-66, 2012 (in Persian).
9. Alibeigloo, A., and Liew, K. M., "Free Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Panel with Functionally Graded Core Using Three-Dimensional Theory of Elasticity", *Composite Structures*, Vol. 113, pp. 23-30, 2014.
10. Salehipour, H., Nahvi, H., and Shahidi, A. R., "Closed-Form Elasticity Solution for Three-Dimensional Deformation of Functionally Graded Micro/ Nano Plates on Elastic Foundation", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 4, 2015.
11. Salehipour, H., Nahvi, H., Shahidi, A. R., and Mirdamadi, H. R., "3D Elasticity Analytical Solution for Bending of FG Micro Nanoplates Resting on Elastic Foundation Using Modified Couple Stress Theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 47, pp. 174-188, 2017.
12. Salehipour, H., Nahvi, H., and Shahidi, A. R., "Exact Analytical Solution for Free Vibration of Functionally Graded Micro/Nanoplates Via Three-Dimensional Nonlocal Elasticity", *Physica E*, Vol. 66, pp. 350-358, 2015.
13. Salehipour, H., Nahvi, H., and Shahidi, A. R., "Exact Closed-Form Free Vibration Analysis for Functionally Graded Micro/Nano Plates Based on Modified Couple Stress and Three-Dimensional

Elasticity Theories”, *Composite Structures*, Vol. 124, pp. 283-291, 2015.

14. Zafarmand, H., and Kadkhodayan, M., “Three Dimensional Elasticity Solution for Static and Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Thick Sector Plates with General Boundary Conditions”, *Composites: Part B*, Vol. 69, pp. 592-602, 2015.
15. Ansari, R., Shahabodini, A., and Faghih Shojaei, M., “Nonlocal Three-Dimensional Theory of Elasticity with Application to Free Vibration of Functionally Graded Nanoplates on Elastic Foundations”, *Physica E*, Vol. 76, pp. 70-81, 2016.
16. Adineh, M., and Kadkhodayan, M., “Three-Dimensional Thermo-Elastic Analysis and Dynamic Response of a Multi-Directional Functionally Graded Skew Plate on Elastic Foundation”, *Composites Part B*, Vol. 125, pp. 227-240, 2017.
17. Atashipour, S. R., Girhammar, U. A., and Al-Emrani, M., “Exact Lévy-type Solutions for Bending of Thick Laminated Orthotropic Plates Based on 3-D Elasticity and Shear Deformation Theories”, *Composite Structures*, Vol. 163, pp. 129-151, 2017.
18. Shaban, M., and Alibeigloo, A., “Three-Dimensional Elasticity Solution for Sandwich Panels with Corrugated Cores by Using Energy Method”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 119, pp. 404-411, 2017.
19. Asemi, K., Salehi, M., and Akhlaghi, M., “Post-Buckling Analysis of FGM Annular Sector Plates Based on Three Dimensional Elasticity Graded Finite Elements”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 67, pp. 164-177, 2014.
20. Dastjerdi, S., Lotfi, M., and Jabbarzadeh, M., “The Effect of Vacant Defect on Bending Analysis of Graphene Sheets Based on the Mindlin Nonlocal Elasticity Theory”, *Composites Part B*, Vol. 98, pp. 78-87, 2016.
21. Dastjerdi, S., Jabbarzadeh, M., and Aliabadi, S., “Nonlinear Static Analysis of Single Layer Annular/Circular Graphene Sheets Embedded in Winkler–Pasternak Elastic Matrix Based on Non-Local Theory of Eringen”, *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 7, pp. 873-884, 2016.
22. Wang, Y. G., Lin, W. H., and Zhou, C. L., “Nonlinear Bending of Size-Dependent Circular Micro Plates Based on the Modified Couple Stress Theory”, *Applied Mechanics*, Vol. 84, pp. 391-400, 2014.