نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰، ص. ۱۵-۱

نشریه علمی - پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

مقاله پژوهشی

بررسی پاسخ دینامیکی تیرهای تک و چند دهانه تحت تحریک پایه به روش باقیمانده وزنی زمانی

مصطفی صادقی گوغری و بشیر موحدیان عطار*
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۱۲/۴)

چکیده- تعیین دقیق پاسخ سازه‌ها تحت بارهای دینامیکی از جمله بار زلزله نقش بسزایی در طراحی ایمن و اقتصادی سازه‌ها دارد. هدف این مقاله، بهره‌گیری از یک روش حل جدید بر مبنای استفاده از توابع پایه نمایی برای تحلیل دینامیکی تیر برنولی در مقابل تحریک‌های تکیه گاهی است. این روش نخستین بار در حل مسائل انتشار موج اسکالر و با عنوان روش گام به گام باقیمانده وزنی زمانی معرفی شد. پاسخ مسئله در روش پیشنهادی به‌صورت یک سری متشکل از توابع پایه نمایی با ضرایب ثابت مجهول در نظر گرفته شده و پیشروی حل در زمان بدون نیاز به گسسته‌سازی مکانی تیر و با استفاده از یک رابطه بازگشتی مناسب برای اصلاح ضرایب پایه‌های نمایی انجام می‌شود. به منظور اعمال تحریک زلزله نیز ابتدا با استفاده از رابطه تفاوت محدود مرکزی، تاریخچه شتاب زلزله به تاریخچه جابه‌جایی تبدیل می‌شود. در ادامه تاریخچه جابجایی به‌عنوان شرط مرزی دریشله متغیر در زمان به تیر اعمال می‌شود. در این مطالعه، قابلیت‌های روش پیشنهادی در حل چند مسئله نمونه از ارتعاش تیرهای تک و چند دهانه تحت انواع تحریک‌های تکیه گاهی از جمله تغییرات شتاب زلزله با نتایج سایر روش‌های موجود، مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: تیر برنولی، روش گام به گام باقیمانده وزنی زمانی، توابع پایه نمایی، تحریک پایه ناشی از زلزله.

Study on the Dynamic Response of Single and Multi-Spans Beam Subjected to the Base Excitation Using Time Weighted Residual Method

M. Sadeghi and B. Movahedian Attar*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

Abstract: *Accurate determination of the response of structures under dynamic loads such as earthquake loads plays an important role in the safe and economical design of structures. The purpose of this paper is to utilize a novel solution method based on the use of exponential basis functions for dynamic analysis of Bernoulli beam subjected to different types of base excitations. This method was firstly introduced for solving scalar wave propagation problems, named as stepwise time-weighted*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: b.movahedian@iut.ac.ir

[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]

residual method. The proposed method considers the solution as a series of exponential basis functions with unknown constant coefficients; and the problem is solved in time without the need for spatial discretization of the beam and by using an appropriate recursive relation to correct the coefficients of the exponential bases. In order to apply the earthquake excitation, first by using the central finite difference relation, the earthquake acceleration history is converted to displacement history. Moreover, the displacement history is applied to the beam as a time-varying boundary condition. In this study, the capabilities of the proposed method in solving several sample problems of vibration of single and multi-span beams under various stimuli such as earthquake acceleration variations are compared with the results of other existing methods.

Keywords: *Euler-Bernoulli beam, Time weighted residual method, Exponential basis functions, Earthquake base excitation.*

فهرست علائم

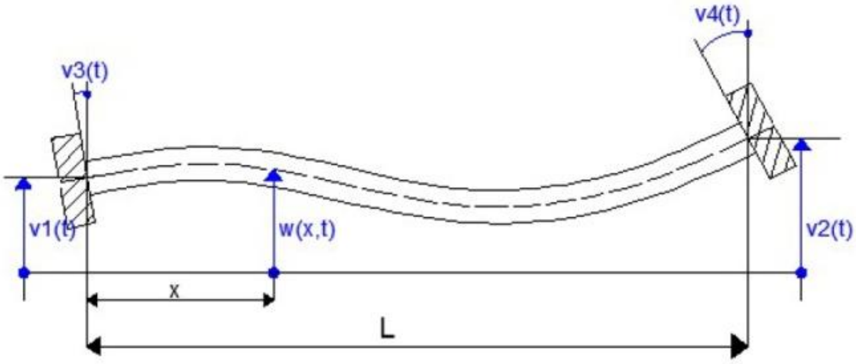
A	مساحت، m^2	$w(x,t)$	تابع تغییر مکان تیر، m
c_b	پارامتر موج خمشی	$W(\tau)$	تابع وزن
E	مدول الاستیسیته، N/m^2	x	متغیر مکانی، m
$\mathbf{F}$	ماتریس نیرو	α_i	ضریب x در پایه نمایی i ام
I	ممان اینرسی، m^4	β_i	ضریب t در پایه نمایی i ام
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی	ρ	چگالی، kg/m^3
L	طول تیر، m	ε	پارامتر تعیین کننده بعد اثر تحریک
M	تعداد پایه‌های نمایی	Δt	مقدار گام زمانی، sec
N	تعداد بازه زمانی در روش باقیمانده وزنی زمانی	$\Delta w_j(x,t)$	تابع نمو جابه‌جایی موج خمشی
T	زمان پایانی حل مسئله، sec	$\Delta \dot{w}_j(x,t)$	تابع نمو جابه‌جایی موج خمشی
t	متغیر زمانی، sec		

۱- مقدمه

بررسی پاسخ سازه‌ها تحت تحریک پایه در موارد متعددی از قبیل طراحی پل‌های چند دهانه در برابر بار زلزله، طراحی قطعات ماشین، هواپیماها و... کاربرد دارد. از این‌رو تا کنون مطالعات گسترده‌ای از سال ۱۹۸۵ برای بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها در مقابل تحریک‌های تکیه‌گاهی انجام شده است [۱]. کین و همکاران [۲] نیز در سال ۱۹۸۷ به بررسی پاسخ دینامیکی تیر یک سرگیردار تحت تحریک‌های سه‌بعدی پرداخته‌اند. در ادامه دو و همکاران [۳ و ۴] پاسخ دینامیکی تیر برنولی تحت انواع دلخواه تحریک پایه را به روش المان محدود[۱] برآورد کردند. تان و همکاران [۵] با استفاده از روش آنالیز مودال تیر یک سرگیردار تحت تحریک‌های تکیه‌گاهی را حل نمودند. یوکسل و اکسوی [۶] پاسخ تیر چرخشی تحت تحریک پایه را بررسی کردند. لی [۷] با استفاده از روش آنالیز مودال به حل مسئله انتشار موج درتیر برنولی با در نظر گرفتن اثرات نیروی محوری در حضور تحریک‌های تکیه‌گاهی پرداخت.

در یک تقسیم‌بندی کلی روش‌های حل مسائل انتشار موج در مکانیک جامدات به دو دسته روش‌های مبتنی بر حل در حوزه بسامد و حل در حوزه زمان تقسیم می‌شوند. ایده اصلی روش‌های حوزه بسامد اعمال یک تبدیل مناسب مانند تبدیل لاپلاس یا فوریه بر متغیر زمانی معادله حاکم و سپس حل معادله دیفرانسیل مقدار مرزی با یک روش مناسب عددی یا تحلیل است. به این ترتیب درنهایت پاسخ مسئله با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس یا فوریه پاسخ به حوزه زمان بازگردانده می‌شود. استفاده از این تبدیلات ضمن افزایش هزینه محاسبات، امکان حل مسائل با شرایط اولیه غیرهمگن را نیز با پیچیدگی‌هایی همراه می‌کند. مطالعات بسکاس و بولی [۸]، مانولیس و بسکاس [۹ و ۱۰]، بسکاس و ناریان [۱۱ و۱۲]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.4.9]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]



شکل ۱- تیر تحت اثر تحریک تکیه‌گاهی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

نمونه‌هایی از پژوهش‌های انجام شده در این زمینه جهت برآورد پاسخ دینامیکی سازه‌های قابی هستند.

روش باقیمانده وزنی زمانی[۲] نخستین بار در سال ۲۰۱۸ برای حل مستقیم مسائل انتشار موج در حوزه زمان ارائه شد [۱۳]. ایده اصلی در این روش بیان جواب درون دامنه به صورت سری متشکل از توابع پایه نمایی و ذخیره‌سازی اطلاعات گام‌های زمانی بر روی ضرایب سری جواب است. به این ترتیب روند حل در زمان بدون نیاز به گسسته‌سازی مکانی دامنه و با استفاده از ارضاء وزنی زمانی معادله دیفرانسیل در کنار روابط پیش انتگرال‌گیری، تعیین خواهد شد. همچنین استفاده از فرمول‌بندی پیشنهادی برای تحلیل سازه‌های متشکل از اعضا یک‌بعدی نظیر تیرهای چند دهانه، با برقراری شرایط پیوستگی و تعادل در محل گره‌های مشترک اعضا نیز امکان پذیر است. در ادامه، برجی و همکاران نیز در سال ۲۰۱۹ به بررسی پاسخ تیر تیموشینکو تحت بارهای متحرک و با استفاده از روش باقیمانده وزنی زمانی پرداختند [۱۴].

در این مقاله فرمول‌بندی روش باقیمانده وزنی زمانی در حل مسئله انتشار موج در تیر برنولی و در مقابل انواع حالات بارگذاری دینامیکی توسعه داده شده است. قابلیت تحلیل تاریخچه زمانی انتشار موج در مقابل تغییرات وابسته به زمان تکیه‌گاه، امتیاز مهمی برای روش پیشنهادی به‌ویژه در مدل‌سازی اثر زلزله بر سازه‌های مستقر بر ساختگاه‌های متفاوت محسوب می‌شود. به عبارت دیگر پاسخ دینامیکی انواع تیرهای تک و چند دهانه به‌ازای تحریک‌های متفاوت تکیه‌گاهی به‌صورت دقیق قابل برآورد است. در بخش نتایج عددی، پاسخ یک تیر تک دهانه دو سر مفصل تحت تحریک‌های مختلف از جمله تحریک هارمونیک و تحریک ناشی از تغییرات شتاب در زلزله، به سه روش حل دقیق با انتگرال‌گیری دوهامل[۳]، روش باقیمانده وزنی زمانی و روش المان محدود بررسی می‌شود. در ادامه نیز این مقایسه بر روی یک تیر سراسری چند دهانه به دو روش باقیمانده وزنی زمانی و المان محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. با مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی مشاهده خواهد شد که روش پیشنهادی ضمن کاهش هزینه محاسبات در مقایسه با روش‌های موجود مانند المان محدود از دقت بهتری نیز برخوردار است.

۲- بیان مسئله

مطابق شکل (۱) تیری با طول L تحت اثر تحریک تکیه‌گاهی شامل تغییر مکان‌های قائم تکیه‌گاه‌های سمت چپ و سمت راست، $v_1(t)$ و $v_2(t)$، و همچنین چرخش‌های تکیه‌گاه‌های سمت چپ و سمت راست، $v_3(t)$ و $v_4(t)$ نمایش داده شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر بر مبنای فرضیات برنولی برحسب تغییر مکان قائم تیر، $w(x,t)$، در رابطه (۱) ارائه شده است.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

در رابطه (۱)، c_b پارامتری است که به شکل ضمنی به سرعت امواج خمشی ارتباط دارد و برحسب مشخصات مکانیکی تیر شامل مدول الاستیسیته E، جرم واحد حجم ρ، و همچنین مشخصات هندسی مقطع شامل مساحت A، و ممان اینرسی I، به‌صورت $c_b = \sqrt{EI/\rho A}$ تعریف می‌شود. شرایط مرزی و شرایط اولیه جهت تعیین پاسخ دینامیکی تیر به‌ترتیب در روابط (۲) و (۳) معرفی شده‌اند.

$$\begin{aligned} &w(0,t) = v_1(t) \qquad w(L,t) = v_2(t) \\ &\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = v_3(t) \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(L,t) = v_4(t) \end{aligned} \tag{۲}$$

$$w(x,0) = I_1(x) \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = I_2(x) \tag{۳}$$

توابع $I_1(x)$ و $I_2(x)$ در رابطه (۳) به‌ترتیب بیانگر توزیع تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه در طول تیر هستند که در حالت کلی می‌تواند غیر صفر باشند.

۳- روش حل عددی

با توجه به عدم دسترسی به حل دقیق معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر تحت حالات کلی تغییرات شرایط نظیر تحریک زلزله، توسعه روش‌های عددی برای حل این دسته از مسائل ضرورت می‌یابد. در بخش حاضر فرمول‌بندی روش باقی‌مانده وزنی زمانی معرفی شده در مرجع [۱۳]، برای حل معادله ارتعاش تیر برنولی توسعه داده می‌شود. به این منظور ابتدا زمان حل مسئله به N زیربازه زمانی با طول Δt افراز می‌شود. سپس با معرفی متغیر زمانی τ درون زیربازه nام، روابط پیش انتگرال‌گیری بین متغیرهای وابسته شتاب، سرعت و جابه‌جایی، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\dot{w}_n(x,\tau) = \dot{w}_n(x,0) + \int_0^\tau \ddot{w}_n(x,s)ds, \tag{۴}$$

$$\begin{aligned} w_n(x,\tau) &= w_n(x,0) + \int_0^\tau \dot{w}_n(x,s)ds = \\ &w_n(x,0) + \dot{w}_n(x,0)\tau + \\ &\int_0^\tau \int_0^{s_2} \ddot{w}_n(x,s_1)ds_1 ds_2 \end{aligned} \tag{۵}$$

با توجه به معلوم بودن شرایط اولیه $w_n(x,0)$ و $\dot{w}_n(x,0)$ در ابتدای بازه، جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل حاکم، معادله دیفرانسیل- انتگرالی زیر برحسب میدان مجهول شتاب، $\ddot{w}_n(x,\tau)$، در گام زمانی n ام، برآورد می‌شود.

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \int_0^{s_2} \frac{\partial^4 \ddot{w}_n}{\partial x^4}(x,s_1)ds_1 ds_2 + \frac{1}{c_b^2}\ddot{w}_n(x,\tau) = \\ &-\frac{\partial^4 w_n(x,0)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \dot{w}_n(x,0)}{\partial x^4} \times \tau \end{aligned} \tag{۶}$$

به‌منظور حل معادله فوق، میدان شتاب در زیربازه زمانی nام برحسب ترکیب تابع مجهول $f_n(x)$ و دو سری متشکل از دو دسته M تایی از توابع پایه نمایی صدق کننده در فرم قوی معادله دیفرانسیل حاکم با ضرایب ثابت $h_{j,i}$ و $l_{j,i}$ به‌صورت رابطه (۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_n(x,\tau) &= f_n(x) + \\ &\sum_{j=1}^{2} C_{n,j} \times \left(\sum_{i=1}^{M} h_{j,i} e^{\alpha_i x + \beta_i \tau} + h_{j,0} \times \tau\right) + \\ &\sum_{j=1}^{2} \bar{C}_{n,j} \times \left(\sum_{i=1}^{M} l_{j,i} e^{\alpha_i x + \beta_i \tau} + l_{j,0} \times \tau\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

در روابط فوق ضرایب $C_{n,j}$ و $\bar{C}_{n,j}$ وظیفه ارضاء شرایط مرزی در انتهای هر گام زمانی را بر عهده دارند. با توجه به پیشنهاد مرجع [۱۳]، برای انتخاب پایه‌های نمایی رابطه بین ضرایب α_i و β_i به نحوی در نظر گرفته می‌شود که پایه‌نمایی حاصل، فرم قوی رابطه (۱) را ارضا کند، یعنی

$$\alpha_i^4 = -\frac{1}{c_b^2}\beta_i^2 \tag{۸}$$

در گام بعدی با استفاده از تعریف ارائه شده در رابطه (۷) و جایگذاری آن در رابطه (۶) معادله دیفرانسیل حاکم به فرم ساده شده در رابطه (۹) و برحسب تابع مجهول $f_n(x)$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 f_n(x)}{\partial x^4} \times \frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{c_b^2} f_n(x) = \\ &-\frac{\partial^4 w_n(x,0)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \dot{w}_n(x,0)}{\partial x^4} \times \tau + \\ &\frac{1}{c_b^2}\sum_{j=1}^{2} C_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M} h_{j,i} e^{\alpha_i x}(\beta_i \tau + 1) + h_{j,0}\tau\right) + \\ &\frac{1}{c_b^2}\sum_{j=1}^{2} \bar{C}_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M} l_{j,i} e^{\alpha_i x}(\beta_i \tau + 1) + l_{j,0}\tau\right) \end{aligned} \tag{۹}$$

بەمنظور برآورد تابع مجهول $f_n(x)$، از ایده ارضاء معادله دیفرانسیل (۹) با روش باقیمانده وزنی بەازای تابع وزن $W(\tau)$ در زیربازه nام مطابق رابطه (۱۰) استفاده می‌شود.

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau)\left\{\frac{\partial^4 f_n(x)}{\partial x^4}\frac{\tau^2}{2}+\frac{1}{c_b^2}f_n(x)\right\}d\tau = \int_0^{\Delta t} W(\tau)\left\{-\frac{\partial^4 w_n(x,0)}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 \dot{w}_n(x,0)}{\partial x^4}\tau\right\}d\tau + \frac{1}{c_b^2}\int_0^{\Delta t} W(\tau)\left\{\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}e^{\alpha_i x}(\beta_i\tau+1)+h_{j,0}\tau\right)\right\}d\tau + \frac{1}{c_b^2}\int_0^{\Delta t} W(\tau)\left\{\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}e^{\alpha_i x}(\beta_i\tau+1)+l_{j,0}\tau\right)\right\}d\tau \qquad (۱۰)$$

رابطه (۱۰) با استفاده از تعریف ارائه شده در رابطه (۱۱) به صورت معادله دیفرانسیل عادی مرتبه چهارم برحسب تابع مجهول $f_n(x)$ در رابطه (۱۲) ساده‌سازی شده است.

$$\langle m_1 \quad m_2 \quad m_3\rangle = \int_0^{\Delta t} W(\tau)\left\langle \tau^2/2 \quad \tau \quad 1\right\rangle d\tau \qquad (۱۱)$$

$$\frac{d^4 f_n(x)}{dx^4}m_1+\frac{1}{c_b^2}f_n(x)m_3 = -\frac{d^4 w_n(x,0)}{dx^4}m_3-\frac{d^4 \dot{w}_n(x,0)}{dx^4}m_2 + \frac{1}{c_b^2}\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}e^{\alpha_i x}(m_3+\beta_i m_2)+h_{j,0}m_2\right) + \frac{1}{c_b^2}\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}e^{\alpha_i x}(m_3+\beta_i m_2)+l_{j,0}m_2\right) \qquad (۱۲)$$

جواب $f_n(x)$ از معادله مقدار مرزی (۱۲) بەصورت ترکیبی از بخشی ناشی از شرایط اولیه و بخشی دیگر ناشی از دو سری با ضرایب ثابت در نظر گرفته می‌شود.

$$f_n(x)=f_n^1(x)+f_n^2(x) \qquad (۱۳)$$

چنانچه تغییرات میدان جابه‌جایی و سرعت درون تیر در ابتدای بازه زمانی nام ($\tau=0$) به صورت رابطه (۱۴) در دست باشد، بخش اول و دوم جواب، $f_n^1(x)$ و $f_n^2(x)$، با توجه به روند معرفی شده در مرجع [۱۳]، مطابق روابط (۱۵) و (۱۶) برآورد می‌شوند.

$$w_n(x,0)=\sum_{i=1}^{M}A_{n,i}\times e^{\alpha_i x}+A_{n,0}$$
$$\dot{w}_n(x,0)=\sum_{i=1}^{M}B_{n,i}\times e^{\alpha_i x}+B_{n,0} \qquad (۱۴)$$

$$f_n^1(x)=-\sum_{i=1}^{M}\frac{A_{n,i}\times m_3+B_{n,i}\times m_2}{-\beta_i^2\times m_1+m_3}\times\beta_i^2\times e^{\alpha_i x} \qquad (۱۵)$$

$$f_n^2(x)=\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}e^{\alpha_i x}-h_{j,0}\frac{m_2}{m_3}\right)+ \sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\left(\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}\frac{m_3+\beta_i\times m_2}{-\beta_i^2\times m_1+m_3}e^{\alpha_i x}-l_{j,0}\frac{m_2}{m_3}\right) \qquad (۱۶)$$

پس از محاسبه $f_n(x)$ و با استفاده از روابط پیش انتگرال‌گیری (۴) و (۵)، پاسخ ارتعاشی تیر در زیربازه زمانی nام حاصل از روش باقیمانده وزنی زمانی به شکل روابط زیر برای میدان جابه‌جایی و میدان سرعت بیان می‌شود.

$$w_n(x,\tau)=A_{n,0}+B_{n,0}\tau+ \sum_{i=1}^{M}\left[A_{n,i}+B_{n,i}\tau-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\tau^2}{2}\right]e^{\alpha_i x}+ \sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\Delta w_j^{\theta}(x,\tau)+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\Delta w_j^{w}(x,\tau) \qquad (۱۷)$$

$$\dot{w}_n(x,\tau)=B_{n,0}+\sum_{i=1}^{M}\left[B_{n,i}-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\tau\right]e^{\alpha_i x}+ \sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\Delta\dot{w}_j^{\theta}(x,\tau)+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\Delta\dot{w}_j^{w}(x,\tau) \qquad (۱۸)$$

در رابطه فوق $\Delta w_j(x,\tau)$ و $\Delta\dot{w}_j(x,\tau)$ بەترتیب دسته توابع مرتبط با نمو جابه‌جایی و نمو سرعت بوده که مطابق روابط (۱۹) و (۲۰) برای مؤلفه تغییر مکان (بالانویس w)، و روابط (۲۱) و (۲۲) برای مؤلفه چرخشی (بالانویس θ)، تعریف می‌شوند.

$$\Delta w_j^{w}(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\tau}-\beta_i\tau-1}{\beta_i^2}\right]e^{\alpha_i x}+ l_{j,0}\left(-\frac{m_2}{m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6}\right) \qquad (۱۹)$$

$$\Delta\dot{w}_j^{w}(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\tau+\frac{e^{\beta_i\tau}-1}{\beta_i}\right]e^{\alpha_i x}+ l_{j,0}\left(-\frac{m_2}{m_3}\tau+\frac{\tau^2}{2}\right) \qquad (۲۰)$$

$$\Delta w_j^{\theta}(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\tau}-\beta_i\tau-1}{\beta_i^2}\right]e^{\alpha_i x}+ h_{j,0}\left(-\frac{m_2}{m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6}\right) \qquad (۲۱)$$

$$\Delta\dot{w}_j^{\theta}(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^{2}m_1+m_3}\tau+\frac{e^{\beta_i\tau}-1}{\beta_i}\right]e^{\alpha_i x}+ h_{j,0}\left(-\frac{m_2}{m_3}\tau+\frac{\tau^{2}}{2}\right) \qquad (۲۲)$$

دقت شود که اختلاف اساسی بین روابط (۱۹) و (۲۱)، و همچنین روابط (۲۰) و (۲۲)، پارامترهای $h_{j,i}$ و $l_{j,i}$ است. در سه بخش پیش رو جزییات روش پیشنهادی شامل انتخاب پارامترهای مؤثر در روش حل، نحوه برآورد ضرایب ثابت $C_{n,j}$ و $\bar{C}_{n,j}$ و همچنین رابطه بازگشتی اصلاح ضرایب پایه‌های نمایی جهت پیشروی حل در زمان شرح داده خواهد شد.

۳-۱- تعیین ضرایب $h_{j,i}$ و $l_{j,i}$ در دسته‌های پایه‌های نمایی

برای به دست آوردن ضرایب $h_{j,i}$ و $l_{j,i}$ لازم است ابتدا مفهومی تحت عنوان تابع تحریک بر اساس ایده ارائه شده در مرجع [۱۳] معرفی شود. نقش اصلی تابع تحریک، هدایت موج از نقطه مجاور مرز (نقطه منبع) در جهت مورد نظر به سمت داخل دامنه است. ضابطه پیشنهادی برای تابع تحریک در حل مسئله انتشار موج یک‌بعدی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_{\theta}(x,x_j)=\begin{cases}1-|x-x_j|/\varepsilon & 0\le|x-x_j|\le\varepsilon\\ 0 & \varepsilon\le|x-x_j|\end{cases} \qquad (۲۳)$$

$$I_w(x,x_j)=\int_0^{\varepsilon}I_{\theta}(x)dx \qquad (۲۴)$$

در روابط فوق x_j مختصات مرکز تحریک (نقطه منبع) jام، زیرنویس‌های θ و w به‌ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های خمشی و برشی و ε نیز پارامتر تعیین کننده بعد اثر تحریک هستند. با بازنویسی توابع تحریک روابط (۲۳) و (۲۴) به‌صورت سری فوریه کاهش یافته خواهیم داشت:

$$I_{\theta}(x,x_j^{\theta})=a_{j,0}+\sum_{i=1}^{M}a_{j,i}\times e^{\alpha_i x}$$
$$I_w(x,x_j^{w})=b_{j,0}+\sum_{i=1}^{M}b_{j,i}\times e^{\alpha_i x} \qquad (۲۵)$$

x_j^{θ} و x_j^{w} در دو رابطه اخیر معرف مراکز دو تابع تحریک هستند. به‌دلیل شباهت شکل تابع تحریک تمام نقاط منبع، بازنویسی تابع تحریک برحسب سری فوریه کاهش یافته فقط برای یکی از توابع انجام می‌شود و سری فوریه سایر توابع با تغییر مختصات نقطه منبع به‌دست می‌آید. در ادامه با برابر قرار دادن توابع نمو جابه‌جایی در انتهای هر گام زمان با توابع تحریک ضرایب $h_{j,i}$ و $l_{j,i}$ به‌دست می‌آیند.

$$h_{j,i}=\frac{a_{j,i}}{\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^{2}m_1+m_3}\frac{\Delta t^{2}}{2}+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-\beta_i\Delta t-1}{\beta_i^{2}}}$$
$$h_{j,0}=\frac{a_{j,0}}{\frac{m_2}{m_3}\frac{\Delta t^{2}}{2}+\frac{\Delta t^{3}}{6}} \qquad (۲۶)$$

$$l_{j,i}=\frac{b_{j,i}}{\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^{2}m_1+m_3}\frac{\Delta t^{2}}{2}+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-\beta_i\Delta t-1}{\beta_i^{2}}}$$
$$l_{j,0}=\frac{b_{j,0}}{\frac{m_2}{m_3}\frac{\Delta t^{2}}{2}+\frac{\Delta t^{3}}{6}} \qquad (۲۷)$$

۳-۲- ارضا شرایط مرزی و محاسبه ضرایب ثابت $C_{n,j}$ و $\bar{C}_{n,j}$

شرایط مرزی در ابتدا دو انتهای عضو و در انتهای هر بازه زمانی ارضا می‌شوند. در مسئله انتشار موج خمشی در تیر برنولی با شرایط انتهایی گیردار (شرایط مرزی ضروری)، $w(0,t)=\bar{w}_{1,n}$ و $\theta(0,t)=\bar{\theta}_{1,n}$ و $w(L,t)=\bar{w}_{2,n}$ و $\theta(L,t)=\bar{\theta}_{2,n}$، ضرایب $C_{n,j}$ و $\bar{C}_{n,j}$ با تعریف ماتریس ضرایب $\mathbf{K}$ و بردارهای $\mathbf{C}$، $\mathbf{W}$ و $\mathbf{F}$ مطابق روابط زیر از حل دستگاه معادله جبری در رابطه (۳۱) تعیین خواهند شد.

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\Delta w_1^{\theta}(0,\Delta t) & \Delta w_2^{\theta}(0,\Delta t) & \Delta w_1^{w}(0,\Delta t) & \Delta w_2^{w}(0,\Delta t)\\ \Delta\theta_1^{\theta}(0,\Delta t) & \Delta\theta_2^{\theta}(0,\Delta t) & \Delta\theta_1^{w}(0,\Delta t) & \Delta\theta_2^{w}(0,\Delta t)\\ \Delta w_1^{\theta}(L,\Delta t) & \Delta w_2^{\theta}(L,\Delta t) & \Delta w_1^{w}(L,\Delta t) & \Delta w_2^{w}(L,\Delta t)\\ \Delta\theta_1^{\theta}(L,\Delta t) & \Delta\theta_2^{\theta}(L,\Delta t) & \Delta\theta_1^{w}(L,\Delta t) & \Delta\theta_2^{w}(L,\Delta t)\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_{n,1} & C_{n,2} & \bar{C}_{n,1} & \bar{C}_{n,2}\end{bmatrix}^{T}$$
$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\bar{w}_{n,1} & \bar{\theta}_{n,1} & \bar{w}_{n,2} & \bar{\theta}_{n,2}\end{bmatrix}^{T} \qquad (۲۹)$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.4.9]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} A_{n,0}+B_{n,0}\Delta t+\sum_{i=1}^{M}\left[A_{n,i}+B_{n,i}\Delta t-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\Delta t^2}{2}\right] & \sum_{i=1}^{M}\alpha_i\left[A_{n,i}+B_{n,i}\Delta t-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\Delta t^2}{2}\right] \\ A_{n,0}+B_{n,0}\Delta t+\sum_{i=1}^{M}\left[A_{n,i}+B_{n,i}\Delta t-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\Delta t^2}{2}\right]e^{\alpha_i L} & \sum_{i=1}^{M}\alpha_i\left[A_{n,i}+B_{n,i}\Delta t-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\Delta t^2}{2}\right]e^{\alpha_i L}\end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

$$\mathbf{KC}=\mathbf{W}-\mathbf{F} \tag{۳۱}$$

در رابطه (۲۸) پارامترهای $\Delta\theta_j^w$ و $\Delta\theta_j^\theta$ مطابق رابطه (۳۲) و (۳۳) تعریف می‌شوند:

$$\Delta\theta_j^\theta(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_j^\theta(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}h_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\tau}-\beta_i\tau-1}{\beta_i^2}\right]\alpha_i e^{\alpha_i x} \tag{۳۲}$$

$$\Delta\theta_j^w(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_j^w(x,\tau)=\sum_{i=1}^{M}l_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\tau^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\tau}-\beta_i\tau-1}{\beta_i^2}\right]\alpha_i e^{\alpha_i x} \tag{۳۳}$$

۳-۳- رابطه بازگشتی ضرایب پایه‌های نمایی

برای حل مسائل به روش گام به گام زمانی، شرایط اولیه بازه زمانی $n+1$ ام از مقادیر جابه‌جایی و سرعت در انتهای بازه زمانی n ام به‌صورت $w_{n+1}(x,0)=w_n(x,\Delta t)$ و $\dot{w}_{n+1}(x,0)=\dot{w}_n(x,\Delta t)$ تعیین می‌شود. بنابراین:

$$A_{n+1,i}=A_{n,i}+B_{n,i}\Delta t-\frac{A_{n,i}m_3+B_{n,i}m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\beta_i^2\frac{\Delta t^2}{2}+\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}h_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-\beta_i\Delta t-1}{\beta_i^2}\right]+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}l_{j,i}\left[\frac{m_3+\beta_i m_2}{-\beta_i^2 m_1+m_3}\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-\beta_i\Delta t-1}{\beta_i^2}\right]$$

$$A_{n+1,0}=A_{n,0}+B_{n,0}\Delta t+\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}h_{j,0}\left[-\frac{m_2}{m_3}\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{\Delta t^3}{6}\right]+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}l_{j,0}\left[-\frac{m_2}{m_3}\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{\Delta t^3}{6}\right] \tag{۳۴}$$

$$B_{n+1,i}=B_{n,i}-\frac{A_{n,i}\times m_3+B_{n,i}\times m_2}{-\beta_i^2\times m_1+m_3}\beta_i^2\times\Delta t+\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\times h_{j,i}\times\left[\frac{m_3+\beta_i\times m_2}{-\beta_i^2\times m_1+m_3}\times\Delta t+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-1}{\beta_i}\right]+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\times l_{j,i}\times\left[\frac{m_3+\beta_i\times m_2}{-\beta_i^2\times m_1+m_3}\times\Delta t+\frac{e^{\beta_i\Delta t}-1}{\beta_i}\right]$$

$$B_{n+1,0}=B_{n,0}+\sum_{j=1}^{2}C_{n,j}\times h_{j,0}\times\left[-\frac{m_2}{m_3}\times\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\right]+\sum_{j=1}^{2}\bar{C}_{n,j}\times l_{j,0}\times\left[-\frac{m_2}{m_3}\times\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\right] \tag{۳۵}$$

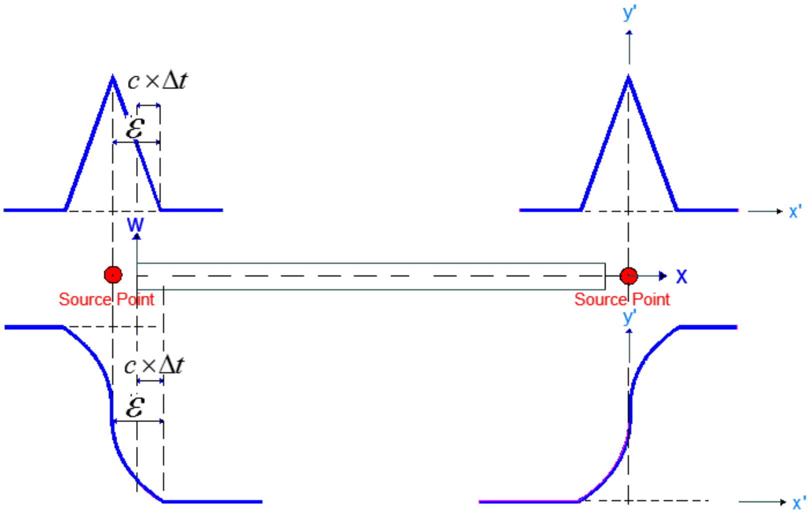
۳-۴- پارامترهای مؤثر در روش پیشنهادی

سه عامل مهم تابع وزن، تعداد پایه‌های مورد استفاده در بیان تابع تحریک و موقعیت تابع تحریک در ابتدا و انتهای عضو، پارامترهای تأثیر گذار بر دقت و پایداری روش پیشنهادی هستند. با توجه به بررسی‌های انجام گرفته در مرجع [۱۳]، از بین گزینه‌های مختلف انتخاب تابع وزن شامل تابع یکنواخت $W(\tau)=1$، تابع مثلثی $W(\tau)=\tau$ و تابع دلتای دیراک $W(\tau)=\delta(\tau-\Delta t)$ بهترین و پایدارترین نتایج به ازای انتخاب تابع وزن مثلثی حاصل می‌شوند. از این رو در مطالعه حاضر نتایج ارائه شده در بخش مثال‌های عددی با استفاده از تابع وزن مثلثی برآورد شده‌اند. در جدول (۱) پارامترهای m_1 و m_2 و m_3 نظیر چند نمونه تابع وزن مذکور ارائه شده است.

تعداد پایه‌های نمایی در سری فوریه کاهش یافته برای بازنویسی تابع تحریک، (M در رابطه (۲۵))، نقش اساسی در افزایش دقت روش گام به گام دارد. بدیهی است با افزایش پایه‌های فوریه بازسازی تابع تحریک مناسب‌تر و در مقابل زمان

جدول ۱- توابع وزن و پارامترهای وابسته

تابع وزن	$m_۱$	$m_۲$	$m_۳$
$W(\tau)=\delta(\tau-\Delta t)$	$\Delta t^۲/۲$	Δt	۱
$W(\tau)=۱$	$\Delta t^۳/۶$	$\Delta t^۲/۲$	Δt
$W(\tau)=\tau$	$\Delta t^۴/۸$	$\Delta t^۳/۶$	$\Delta t^۲/۲$



شکل ۲- موقعیت توابع تحریک نوع اول و دوم در دو انتهای تیر (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جدول ۲- مشخصات رکوردهای زلزله مورد استفاده در مثال های عددی

شماره رکورد	نام زلزله	ایستگاه	PGA (g)
۱	سان فرناندو	لیک هیوز(#۱۲)	۰/۳۸۲
۲	سان فرناندو	لیک هیوز(#۹)	۰/۱۷

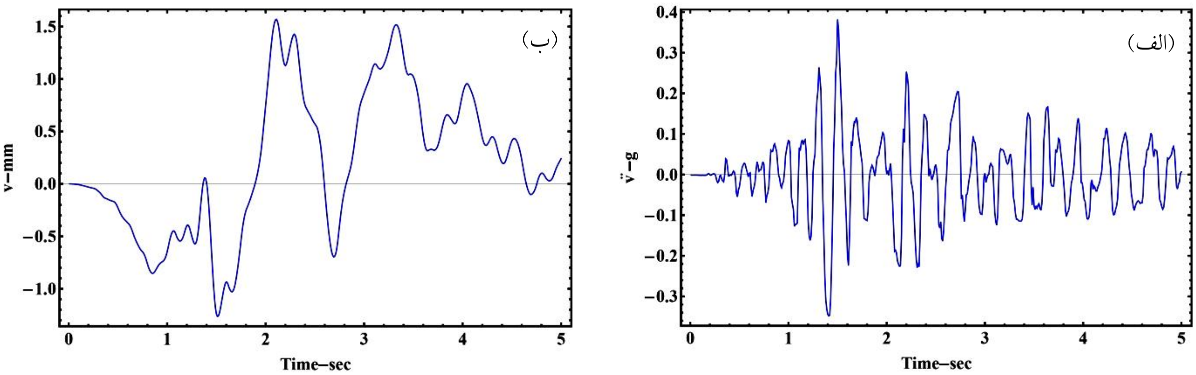
محاسبات افزایش می‌یابد. برای افزایش دقت بیان تابع تحریک با پایه‌های کمتر می‌توان از برخی فیلترهای موجود نظیر فیلتر لانکزوس یا فیلتر کسینوس در محاسبه ضرایب فوریه استفاده کرد.

در مسائل انتشار موج خمشی از دو نقطه منبع در کنار مرزها استفاده می‌شود. نقاط منبع باید با فاصله مناسب در کنار مرز به‌گونه‌ای قرار گیرند تا تابع تحریک به اندازه $c_b \times \Delta t$ در دامنه نفوذ کند. چنانچه نقاط منبع در فاصله دورتر یا نزدیک‌تر نسبت به مرز انتخاب شوند، حل عددی ناپایدار می‌شود. در شکل (۲) موقعیت صحیح قرارگیری نقاط منبع در کنار مرز مسئله نمایش داده شده است.

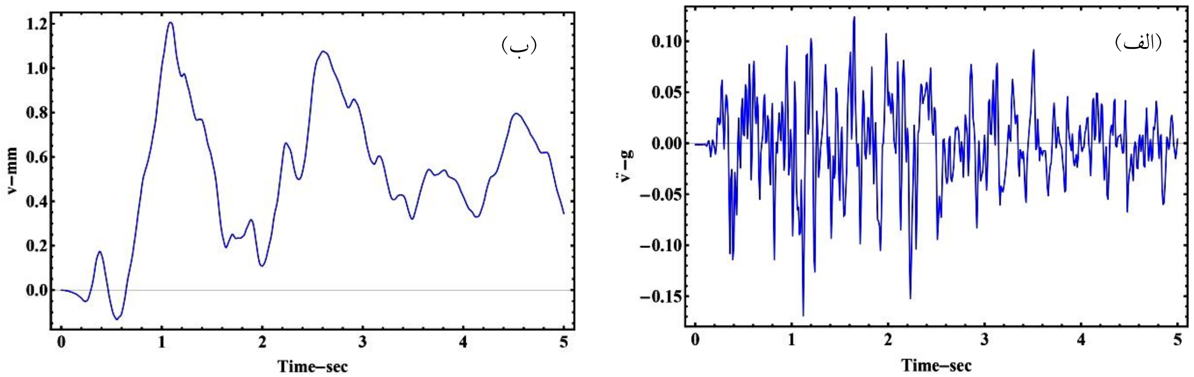
۴- مثال‌های عددی

در این بخش کارایی روش پیشنهادی در حل چهار مسئله نمونه از تیرهای تک و چند دهانه تحت اثر تحریک پایه بررسی شده است. به این منظور در مثال اول و دوم دقت و زمان حل روش پیشنهادی در برآورد پاسخ ارتعاشی تیر تک دهانه تحت اثر تحریک پایه هارمونیک و زلزله در مقایسه با روش اجزا محدود و حل دقیق برآورد شده است. در مثال سوم و چهارم نیز به‌ترتیب پاسخ تیر دو دهانه به ازای تحریک هارمونیک و تحریک ناشی از تغییرات شتاب زلزله محاسبه شده است. مشخصات رکوردهای مورد استفاده در جدول (۲) ارائه شده است. لازم به ذکر است در

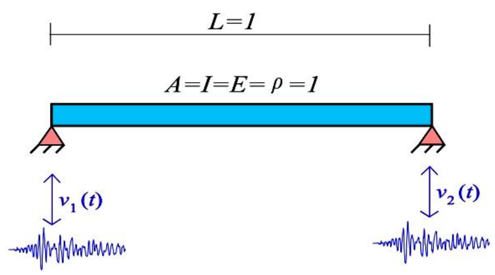
[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.4.9]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]



شکل ۳- الف) تغییرات شتاب رکورد شماره ۱ و ب) تغییرات جابجایی رکورد شماره ۱ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۴- الف) تغییرات شتاب رکورد شماره ۲ و ب) تغییرات جابه‌جایی رکورد شماره (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۵- مدل استفاده شده در حل مثال اول (رنگی در نسخه الکترونیکی)

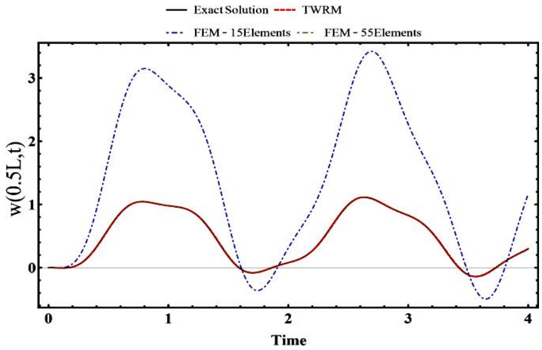
حل مثال‌های دوم و چهارم، تغییرات شتاب‌های تکیه‌گاهی با استفاده از رابطه تفاضل مرکزی مرتبه دوم به تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی تبدیل شده و رکوردهای تغییرات شتاب و جابه‌جایی متناظر با آن در شکل‌های (۳) و (۴) نمایش داده شده است.

۴- ۱ - مثال اول- تحریک پایه هارمونیک در تیر تک دهانه

به‌عنوان اولین مثال مسئله انتشار موج خمشی در تیر یک دهانه دو سر مفصل تحت تحریک‌های مختلف تکیه‌گاهی بررسی می‌شود. در شکل (۵) مدل مورد استفاده در حل این مسئله نمایش داده شده است. در حل این مسئله پارامترهای روش باقیمانده وزنی زمانی به صورت $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $M = ۲۱$ انتخاب شده‌اند. همچنین به‌منظور صحت سنجی، نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از دو روش المان محدود با انتخاب $\Delta t = ۰/۰۰۵$ و حل دقیق (پیوست ۱) به‌ازای دو الگوی بارگذاری تحریک پایه در شکل (۶) و شکل (۷) مقایسه شده است. لازم به ذکر است $H(t)$ در شکل (۷) معرف تابع پله‌ای است.

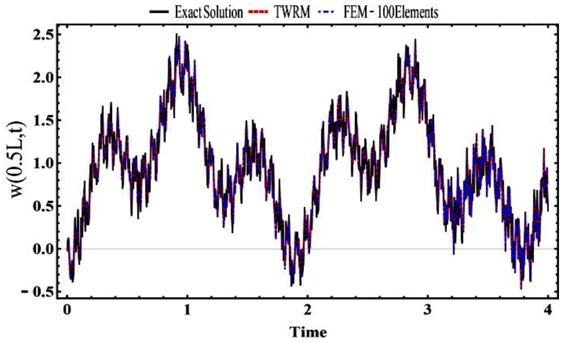
۴- ۲- مثال دوم- تحریک پایه زلزله در تیر تک دهانه

در مسئله دوم پاسخ دینامیکی در تیر یک دهانه دو سر مفصل تحت تحریک از جنس شتاب زلزله بررسی می‌شود. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر مورد بررسی در این مثال در شکل (۸) معرفی شده است. همچنین برای لحاظ نمودن اثرات ساختگاه، دو تحریک شتاب متفاوت به تکیه‌گاه‌ها اعمال شده



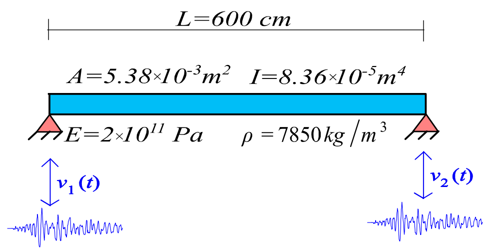
شکل ۶- جابه‌جایی قائم نقطه میانی تیر تحت

تحریک‌های $v_1(t)=1-\cos 1/1\pi t$ و $v_2(t)=0$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۷- جابه‌جایی قائم نقطه میانی تیر تحت

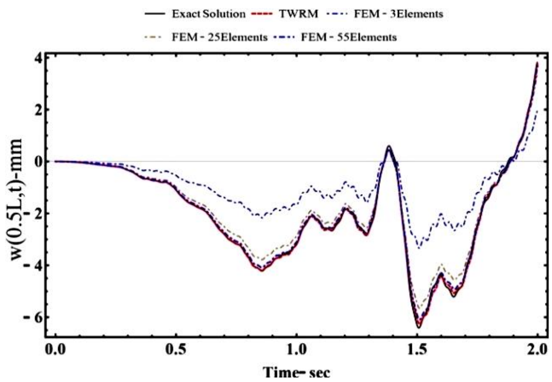
تحریک‌های $v_1(t)=1-\cos 1/1\pi t$ و $v_2(t)=H(t)$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



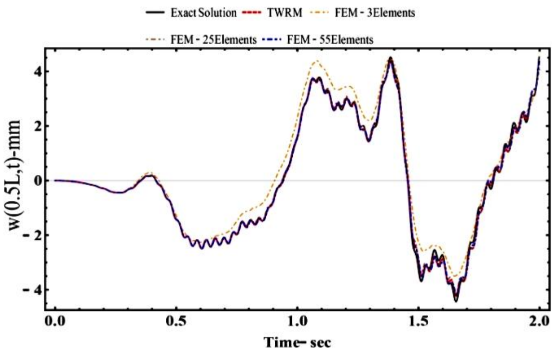
شکل ۸- مدل استفاده شده در حل مثال دوم (رنگی در نسخه الکترونیکی)

است. در شکل‌های (۹) و (۱۰) نتایج روش المان محدود با سه ترکیب گسسته‌سازی ۳، ۲۵ و ۵۵ المانی در کنار نتایج حاصل از روش پیشنهادی و حل دقیق، به‌ترتیب برای دو الگوی متفاوت تحریک پایه چپ و راست، نمایش داده شده است. در جدول (۳) نیز زمان محاسبه و نرم خطای روش پیشنهادی در کنار روش اجزاء محدود ارائه شده است.

با بررسی نتایج ارائه شده در این مثال مشخص می‌شود که پاسخ روش پیشنهادی بدون نیاز به المان‌بندی تطابق خوبی با نتایج حل دقیق دارد. در مقابل روش اجزاء محدود برای افزایش دقت نیازمند افزایش درجات آزادی از طریق افزایش تعداد المان از ۳ به ۵۵ است. این تعداد زیاد المان افزایش زمان حل مسئله را به دنبال داشته در حالی که زمان محاسبات روش پیشنهادی به‌ازای نرم خطای نسبتا یکسان با روش المان محدود، کمتر است.



شکل ۹- جابه‌جایی قائم نقطه میانی تیر تحت تحریک‌های $v_1(t)$: تغییر مکان رکورد ۱ و $v_2(t) = 0$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



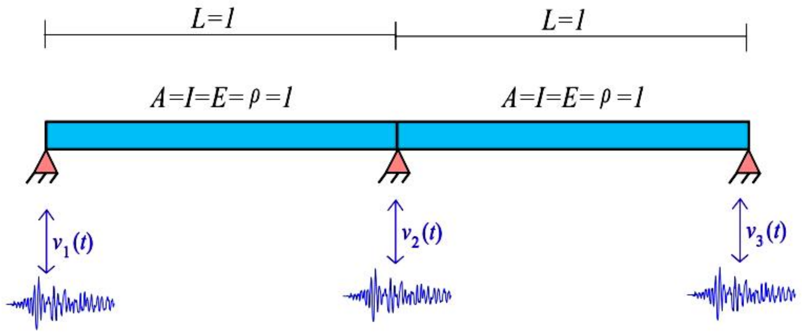
شکل ۱۰- جابه‌جایی قائم نقطه میانی تیر تحت تحریک‌های $v_1(t)$: تغییر مکان رکورد ۱ و $v_2(t)$ تغییر مکان رکورد ۲ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جدول ۳ - زمان محاسبه و نرم خطا روش پیشنهادی و روش المان محدود

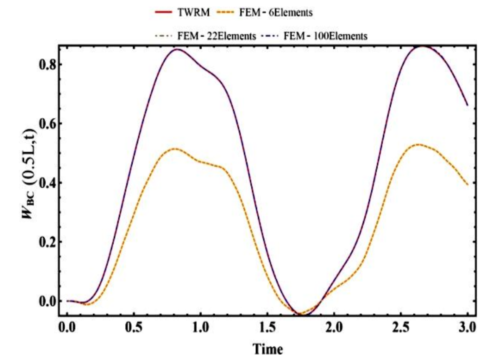
نرم خطا	CPU Time (sec)	Δt(sec)	روش
۰/۰۲۸۷	۶۳۰۰	۰/۰۰۰۰۱	باقیمانده وزنی زمانی
۰/۵۶۷	۲۵۰	۰/۰۰۰۰۱	المان محدود- ۳ المان
۰/۰۵۱	۳۴۰۰	۰/۰۰۰۰۱	المان محدود- ۲۵ المان
۰/۰۳	۷۱۰۰	۰/۰۰۰۰۱	المان محدود- ۵۵ المان

۴- ۳- مثال سوم- تحریک پایه هارمونیک در تیر دو دهانه

در مسئله سوم انتشار موج خمشی در تیر دو دهانه تحت تحریک‌های تکیه‌گاهی متفاوت در طول زمان بررسی شده است. این مسئله به دو روش باقیمانده وزنی زمانی (با انتخاب $\Delta t = ۰/۰۰۰۵$ و $M = ۲۱$) و روش المان محدود با انتخاب $\Delta t = ۰/۰۰۰۵$ و تعداد المان‌های متفاوت حل شده است. در شکل (۱۱) مدل مورد استفاده در حل این مسئله شامل مشخصات هندسی و مکانیکی در نظر گرفته شده، نمایش داده شده است. همان‌گونه که در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) قابل مشاهده است، مجدداً در حل این مثال تغییرات جابه‌جایی قائم نقاط وسط دهانه حاصل از اجزا محدود با تعداد المان زیاد، تطابق بهتری با نتایج روش پیشنهادی دارند

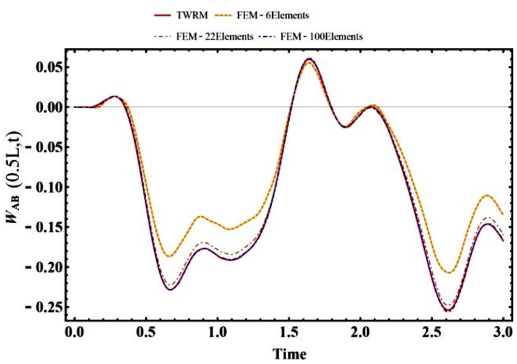


شکل ۱۱- مدل استفاده شده در حل مثال سوم (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۲- جابه‌جایی قائم نقطه میانی دهانه سمت چپ تحت

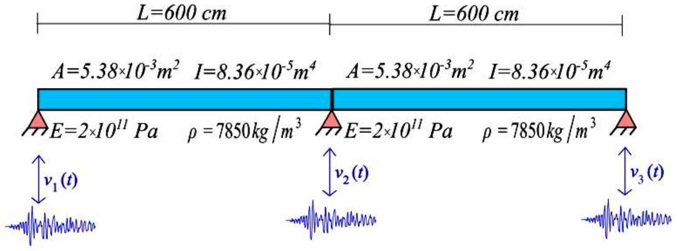
تحریک‌های $v_{۱}(t)=۱-\cos ۱/۱\pi t$ **و** $v_{۲}(t)=۰$ **و** $v_{۳}(t)=۰$ **(رنگی در نسخه الکترونیکی)**



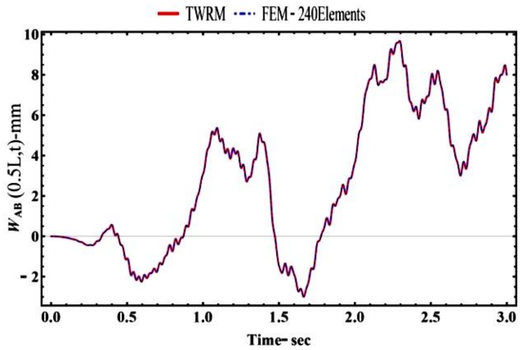
شکل ۱۳- جابه‌جایی قائم نقطه میانی دهانه سمت راست تحت

تحریک‌های $v_{۱}(t)=۱-\cos ۱/۱\pi t$ **و** $v_{۲}(t)=۰$ **و** $v_{۳}(t)=۰$ **(رنگی در نسخه الکترونیکی)**

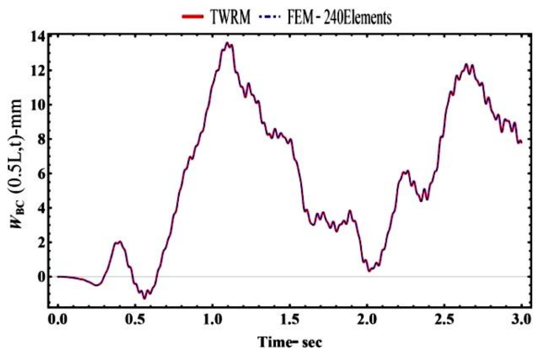
[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.4.9]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]



شکل ۱۴- مدل استفاده شده در حل مثال چهارم (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۵- جابه‌جایی قائم نقطه میانی دهانه سمت چپ تحت تحریک‌های $v_1(t)$: تغییر مکان رکورد ۱، $v_2(t)=0$ و $v_3(t)=0$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۱۶- جابه‌جایی قائم نقطه میانی دهانه سمت راست تحت تحریک‌های $v_1(t)$: تغییر مکان رکورد ۱، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ تغییر مکان رکورد ۲ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

۴- ۴- مثال چهارم- تحریک پایه ناشی از زلزله در تیر دو دهانه

در مثال چهارم، مسئله انتشار موج خمشی در تیر دو دهانه تحت تحریک‌هایی از جنس شتاب زلزله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مثال از مشخصات مصالح واقعی (فولاد) استفاده شده است (شکل (۱۴)). نتایج حاصل از اعمال دو الگوی بارگذاری تحریک زلزله بر سه تکیه‌گاه سازه در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) و با انتخاب $\Delta t=0/00001$ و $M=25$ ارائه شده است. به‌منظور صحت سنجی نتایج روش پیشنهادی از روش المان محدود با ۲۴۰ المان و $\Delta t=0/00005$ استفاده شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرمول‌بندی روش گام به گام باقیمانده وزنی زمانی جهت حل مسئله ارتعاش دینامیکی تیر در اثر تحریک پایه توسعه داده شده است. ذخیره‌سازی اطلاعات هر گام زمانی

بر روی ضرایب پایه‌های نمایی، عدم نیاز به گسسته‌سازی مکانی و همچنین پیشروی حل در زمان با استفاده از روابط بازگشتی معرفی شده، سه ویژگی اصلی روش پیشنهادی محسوب می‌شوند. بر این اساس روش باقیمانده وزنی زمانی امکان حل مستقیم در زمان مسائل انتشار موج را فراهم می‌سازد. در حل چند مثال نمونه از برآورد پاسخ دینامیکی تیرهای تک و چند دهانه تحت تحریک پایه، دقت بالا و هزینه محاسبات کمتر روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود مانند روش المان محدود، مشخص شد. با توجه به قابلیت‌های روش پیشنهادی، توسعه و معرفی روش به‌عنوان یک روش حل مناسب برای آنالیز تاریخچه زمانی سازه‌های دوبعدی و سه بعدی تحت انواع حالات بارگذاری شامل مسائل تحریک پایه، در پژوهش‌های آتی امکان پذیر است.

واژه‌نامه

1. Finite Element Method
2. Time weighted Residual Method
3. Duhamel's Integration

مراجع

1. Balakrishnan, A. V., *A Mathematical Formulation of a Large Space Structure Control Problem*, California University Los Angeles Department of Electrical Engineering, 1985.
2. Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A. ,"Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 2, pp. 139-151, 1987.
3. Du, H., Hitchings, D., and Davies, G., "A Finite Element Structural Dynamics Model of a Beam with an Arbitrary Moving Base—Part I: Formulations", *Finite Elements in Analysis and Design,* Vol. 12, No. 2, pp. 117-131, 1992.
4. Du, H., Hitchings, D., and Davies, G., "A Finite Element Structural Dynamics Model of a Beam with an Arbitrary Moving Base—Part II: Numerical Examples and Solutions", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 12, No. 2, pp. 133-150, 1992.
5. Tan, T., Lee, H., and Leng, G., "Dynamic Stability of a Radially Rotating Beam Subjected to Base Excitation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 146, No. 3-4, pp. 265-279, 1997.
6. Ş. Yuksel and T. Aksoy, "Flexural Vibrations of a Rotating Beam Subjected to Different Base Excitations", *Gazi University Journal of Science*, Vol. 22, No. 1, pp. 33-40, 2009.
7. M. Li, "Analytical Study on the Dynamic Response of a Beam with Axial Force Subjected to Generalized Support Excitations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 338, pp. 199-216, 2015.
8. Beskos D., and Boley, B., "Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the aid of Laplace Transform", *Computers & Structures*, Vol. 5, No. 5-6, pp. 263-269, 1975.
9. Manolis G., and Beskos, D., "Thermally Induced Vibrations of Beam Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 337-355, 1980.
10. Manolis G., and Beskos, D., "Dynamic Response of Beam Structures with the Aid of Numerical Laplace Transform", *Midwestern Mechanics Conference*, pp. 85-89, 1979
11. Beskos D., and Narayanan, G., "Dynamic Response of Frameworks by Numerical Laplace Transform", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, No. 3, pp. 289-307, 1983.
12. Narayanan G., and Beskos, D., "Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the aid of Fast Fourier Transform", *Computers & Structures*, Vol. 9, No. 2, pp. 145-150, 1978.
13. Movahedian, B., Boroomand B., and Mansouri, S., "A Robust Time-Space Formulation for Large Scale Scalar Wave Problems Using Exponential Basis Functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 114, No. 7, pp. 719-748, 2018.
14. Borji, A., Movahedian B., and Boroomand, B., "Using the Time-Weighted Residual Method in Forced Vibration Analysis of Timoshenko Beam under Moving Load", *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, doi: 10.22060/ceej.2019.16867.6381, (in Persian)
15. Pao Y.-H. , and Sun, G., "Dynamic Bending Strains in Planar Trusses with Pinned or Rigid Joints", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 3, pp. 324-332, 2003.

پیوست

حل دقیق تیر تک دهانه

در مرجع [۱۵] حل دقیق تیر دو سر مفصل تحت جابه‌جایی واحد یکی از تکیه‌گاه‌ها به‌صورت زیر به‌دست آورده شده است:

$$w_1(x,t)=\frac{x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega_n t \qquad (۳۵)$$

در رابطه فوق ω_n بسامد طبیعی تیر است. برای به‌دست آوردن پاسخ تیر تحت سایر تحریک‌های پایه از انتگرال‌گیری دوهامل استفاده می‌شود.

$$w(x,t)=\int_0^t v(u)\times w_1(x,t-u)du \qquad (۳۶)$$

در رابطه فوق $v(u)$ تابع تحریک پایه تکیه‌گاه است. لازم به ذکر است در حل دقیق مثال‌های حل شده از رابطه (۳۶) استفاده شده است.

[DOI: 10.47176/jcme.40.1.3741]