

## حل مسائل هارمونیک دارای تکینگی ضعیف با استفاده از توابع پایه متعادل شده در روش اجزای محدود

امید باطنی پرور، نیما نورمحمدی\* و علی محمد صالحی  
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۱۳)

**چکیده-** در این مقاله، حل مسائل مهندسی با معادلات هارمونیک که دارای تکینگی ضعیف یا ناپیوستگی در گرادیان تابع حل هستند برای مواد همگن و ناهمگن بررسی می‌شود. از آنجا که سایر روش‌های عددی استاندارد از جمله روش اجزای محدود از پایه‌های هموار برای تقریب پاسخ مسئله استفاده می‌کنند و این پایه‌ها قادر به تطبیق خود با شرایط مجاور محدوده تکین نیستند، توابع دیگری نیز باید به پایه‌های اصلی اضافه شوند تا کیفیت حل را بهبود ببخشند. برای این منظور از توابع پایه متعادل شده به عنوان پایه‌های چندجمله‌ای معمول روش اجزای محدود برای ساخت مجموعه‌ای از توابع شکل جدید استفاده می‌شود. این توابع از ارضای صورت همگن انتگرال وزنی معادله دیفرانسیل به دست می‌آیند و مرتبه تکینگی مسئله را به صورت خودکار تشخیص می‌دهند. توابع مذکور در المان‌های مجاور نقطه تکین در نظر گرفته می‌شوند. در نتایج عددی نشان داده خواهد شد که ترکیب این پایه‌ها با پایه‌های معمول در روش اجزای محدود، همگام با حفظ خواص مهم این روش منجر به بهبود کیفیت پاسخ آن به‌ویژه در مجاورت نقطه دارای تکینگی ضعیف می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تکینگی ضعیف، توابع پایه متعادل شده، محیط همگن و ناهمگن، روش اجزای محدود.

## Solution of Harmonic Problems with Weak Singularities Using Equilibrated Basis Functions in Finite Element Method

O. Bateniparvar, N. Noormohammadi\* and A. M. Salehi

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

**Abstract:** In this paper, Equilibrated Singular Basis Functions (EqSBFs) are implemented in the framework of the Finite Element Method (FEM), which can approximately satisfy the harmonic PDE in homogeneous and heterogeneous media.

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Noormohammadi@iut.ac.ir

*EqSBFs are able to automatically reproduce the terms consistent with the singularity order in the vicinity of the singular point. The newly made bases are used as the complimentary enriching part along with the polynomial bases of the FEM to construct a new set of shape functions in the elements adjacent to the singular point. It will be shown that the use of the combined bases leads to the quality improvement of the solution function as well as its derivatives, especially in the vicinity of the singularity.*

**Keywords:** Singularity, Harmonic, Equilibrated basis functions, Finite Element Method.

## فهرست علائم

بردار پایه‌های هموار	$\mathbf{P}_R$	ضرایب مجهول معادله	a
شبه عدد شرط	$P_C$	ضرایب مجهول بخش هموار پاسخ	$a_R$
حداقل قدر مطلق مقادیر منفرد غیر صفر	$S_{\min}$	عملگر شرایط مرزی	B
حداکثر قدر مطلق مقادیر منفرد غیر صفر	$S_{\max}$	بردار نیروهای بدنه	b
عملگر معادله دیفرانسیل	s	ماتریس پایه‌های هموار و تکین	C
بردار مقادیر گره‌ای	U	ماتریس پایه‌های هموار و تکین جدید	$\tilde{C}$
پاسخ معیار مسئله در نقطه آم	$u_{ex}^i$	ماتریس پایه‌های هموار	$C_R$
پاسخ تقریبی مسئله در نقطه آم	$u_{ap}^i$	بردار ضرایب مجهول مربوط به $\mathbf{D}_k$	$\mathbf{c}_D^k$
بردار مقادیر گره‌ای المان‌های تکین	$\tilde{\mathbf{u}}$	بردار ضرایب مجهول توابع پایه تکین	$\mathbf{c}^S$
پاسخ تقریبی بخش هموار مسئله	$\hat{\mathbf{u}}^R$	ماتریس ضرایب ماده	D
پاسخ تقریبی بخش تکین مسئله	$\hat{\mathbf{u}}^S$	ضرایب مجهول بخش تکین معادله	$d^S$
ماتریس توابع وزن	w	بردار نیروهای گره‌ای	F
ماتریس توابع وزن تکین	$w^S$	بردار توابع پایه متعادل شده تکین	$\mathbf{F}^S$
دامنه مسئله	$\Omega$	مقدار معلوم مرزی	$f_B$
دامنه المان مربوطه	$\Omega^e$	ماتریس توابع پایه اولیه تکین	$\mathbf{f}^S$
مرز دامنه مسئله	$\Gamma = \partial\Omega$	ماتریس ژاکوبین	J
دامنه ناحیه تصویری دایروی	$\Omega^S$	ماتریس سختی	K
مرز ناحیه تصویری دایروی	$\Gamma^S = \partial\Omega^S$	ماتریس توابع شکل مرکب	$\tilde{N}$
بردار یکه راستای x	$\xi$	ماتریس توابع شکل	N
بردار یکه راستای y	$\eta$	تعداد نقاط گره‌ای در شبکه المان‌بندی	$N_E$
پارامترهای معلوم بخش تکین	$\beta, \gamma$	تعداد گره‌های متصل به المان	$N_n$
درصد خطای میانگین	$\varepsilon_{avg}(\%)$	تعداد نقاط وزن راستای شعاعی	$n_w$
فضای پوچ ماتریس $A^S$	$\varphi^S$	مرتبه پایه‌های اولیه راستای شعاعی	$O_r^S$
		مرتبه پایه‌های اولیه راستای زاویه‌ای	$O_t^S$

## ۱- مقدمه

تنوع و پیچیدگی بالایی هستند، به‌طور کلی استفاده از روش‌های عددی برای حل آنها تنها راه عملی به‌نظر می‌رسد. دقت و سرعت حل معادلات از جمله عوامل مهم در انتخاب یک روش

تاکنون روش‌های متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه شده است. از آنجا که معادلات حاکم بر مسائل مهندسی دارای

تغییرات بسیار شدید و غیرعادی پاسخ مسئله در همسایگی نقطه تکین را دارند و بنابراین، ضعف اصلی پایه‌های هموار در این زمینه را برطرف می‌کنند. شاید بتوان روش اجزای محدود توسعه‌یافته<sup>۱</sup> را مهم‌ترین و شناخته شده‌ترین روش در این حیطه به‌شمار آورد که توسط بلیچکو و همکاران وی توسعه داده شد [۲]. اضافه کردن جملات غنی‌کننده در روش‌های بدون شبکه نیز توجه شده است. در روش بدون شبکه گالرکین<sup>۲</sup> که شباهت زیادی از نظر ساختار با روش اجزای محدود دارد، بلیچکو و همکاران وی ایده مشابهی را با افزودن پایه‌های تکین به بسط هموار پاسخ توسعه دادند [۳]. این ایده در روش‌های دیگری نیز به‌صورت مشابه استفاده شده است که از جمله آنها می‌توان به روش توابع پایه شعاعی اشاره کرد [۴]. به‌تازگی روش توابع پایه‌نمایی نیز با محاسبه جملات تکین مرتبط با شرایط مرزی و هندسه مسئله و تعریف آنها به شکل پایه‌هایی که صورت همگن مسئله را به‌طور دقیق ارضا می‌کنند، اقدام به حل مسائل دارای تکینگی ضعیف در مواد همگن کرده است. ایده اولیه این روش توسط برومند، سقراطی و مسیبی مطرح شد و در حل مسائل گوناگون مکانیک جامدات بررسی شد [۵ و ۶].

با وجود نتایج جالب توجه در روش‌های مذکور، نیاز به دانستن ساختار دقیق جملات تکین و به‌ویژه مرتبه تکینگی یا ضرایب شدت تنش<sup>۳</sup> در همه آنها وجود دارد که این موضوع، سبب توسعه تحقیقات بسیاری در زمینه حصول این جملات برای شرایط مرزی و هندسی مختلف در مسائل گوناگون شده است. نخستین مطالعات جدی در این زمینه به نین و براتز نسبت داده می‌شود [۷]. ویلیامز در ۱۹۵۲ برای مسائل الاستو-استاتیک در مواد ایزوتروپیک تحت شرایط مرزی و هندسه‌های متفاوت، روابطی را با حل یک مسئله معادل در محیط بی‌نهایت ارائه کرد [۸]. وی با تعریف یک تابع تنش مناسب و تطبیق آن با شرایط مرزی ناشی از بازشدگی یک شکاف و در نهایت از طریق حل مسئله اشتورم-لیوویل حاصل، مرتبه تکینگی را به عنوان مقادیر ویژه مسئله مذکور به‌دست آورد. نتایج حاصل از این تحقیق به‌طور گسترده در روش‌های عددی بسیاری استفاده

حل مناسب است. در بین روش‌های عددی، روش اجزای محدود یکی از رایج‌ترین و قدرتمندترین روش‌ها برای به‌دست آوردن حل تقریبی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. این روش در بسیاری از زمینه‌های علوم مهندسی مانند هوافضا، مکانیک، عمران، صنعت خودرو، بیومکانیک، زمین‌شناسی و دیگر رشته‌ها با موفقیت به‌کار برده شده و پس از گذشت حدود پنج دهه از معرفی آن، گستره بسیار وسیعی از مسائل قابل حل دارد. با این وجود روش اجزای محدود به‌دلیل استفاده از چندجمله‌ای‌های هموار به‌عنوان پایه‌های حل برای تقریب پاسخ مسئله، در برخورد با مواردی مانند گرادیان بالای تنش و کرنش، تغییرات ناگهانی در هندسه مسئله، ترکیبات ناسازگار شرایط مرزی و نوسانات شدید میدان جابه‌جایی محدودیت دقت نشان می‌دهد. روش‌های عددی عموماً تمهیدات ویژه‌ای در همسایگی نقاط تکین در نظر می‌گیرند. یکی از راه‌کارها در روش اجزای محدود، ریزکردن ابعاد المان‌ها در اطراف نقاط تکین است که افزایش حجم و زمان محاسبات را در پی داشته و در بسیاری از موارد دقت کافی را ایجاد نمی‌کند [۱]. راه‌کار دیگر که در بسیاری از روش‌های عددی نیز از آن استفاده می‌شود، به‌کار بردن توابع تکین مناسب در ناحیه اطراف نقاط تکین است که بتوانند خود را با تأثیرات تکینگی مطابقت دهند. از آنجا که انتخاب مناسب این توابع مکمل در دقت نهایی حل بسیار تأثیرگذار است، در این تحقیق سعی می‌شود توابعی معرفی و به‌کار گرفته شوند که بتوان با استفاده از آنها دقت حل مسائل دارای نقاط تکین را افزایش داد. استفاده از توابعی که بتوانند صورت همگن معادله دیفرانسیل موردنظر را به‌طور تقریبی ارضا کنند می‌تواند گزینه مناسبی برای این مهم باشد که در ادامه به معرفی آنها پرداخته می‌شود.

امروزه رویکرد غالب روش‌های عددی در بهبود بازسازی تابع حل در همسایگی نقاط تکین، افزودن جملاتی متناسب با مرتبه تکینگی مسئله به حل تقریبی میدان مذکور در همسایگی موقعیت مورد نظر است که نوعی از تکنیک غنی‌سازی به‌شمار می‌رود. جملات غنی‌کننده حل، قابلیت سازگار کردن خود با

پترو- گالرکین [۱۹] در مسائل مختلف با افزودن پایه‌های متناسب اشاره کرد.

ایده استفاده از توابع پایه متعادل‌شده در ادامه تحقیقات پیرامون روش توابع پایه نمایی [۲۰ و ۲۱] و برای حل مسائل در محیط‌های ناهمگن توسعه داده شد [۲۲]. نورمحمدی و برومند نشان دادند که با بازنویسی معادلات حل مسئله در فضای قطبی و نیز با استفاده از یک تغییر متغیر ویژه می‌توان بدون نیاز به اطلاع قبلی از مرتبه تکنیکی، اجزای جملات تکین را به‌طور خودکار در روند حل مسئله برای مواد همگن به‌وجود آورد که به‌عنوان راه‌حلی برای رفع مشکل مشترک عنوان شده در اکثر روش‌های حل مسائل تکین به‌شمار می‌رود [۲۳]. پس از آن باطنی پرور و همکاران از این روش در حل مسائل تکین در محیط‌های ناهمگن استفاده کردند [۲۴]. در مقاله حاضر از تکنیک مذکور در قالب روش اجزای محدود برای حل مسائل مهندسی با معادلات هارمونیک در محیط‌های همگن و ناهمگن استفاده شده است. ایده مطرح شده در این تحقیق، اصلاح توابع شکل در روش اجزای محدود با افزودن پایه‌های غنی‌کننده بوده که متناسب با فرمول‌بندی ذاتی در روش اجزای محدود توسعه یافته است.

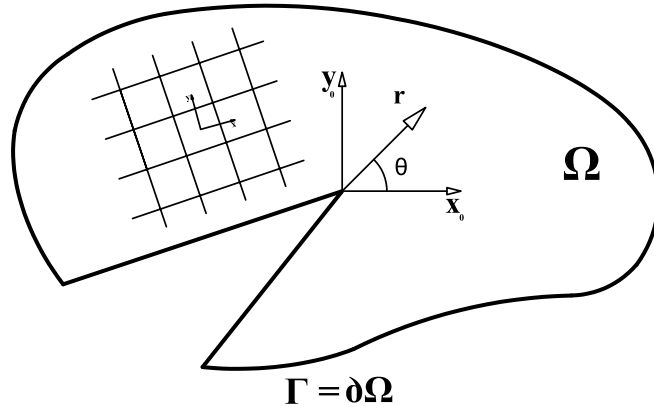
## ۲- توابع پایه متعادل شده تکین و روش اجزای محدود

صورت کلی معادلات تعادل حاکم بر مسئله و شرایط مرزی آن چنین در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B} \mathbf{u} &= \mathbf{f}_B & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط فوق  $\mathbf{S}$  عملگر معادله دیفرانسیل،  $\mathbf{D}$  ماتریس ضرایب ماده (متغیر با مکان)،  $\mathbf{b}$  بردار نیروهای بدنه،  $\mathbf{B}$  عملگر شرایط مرزی و  $\mathbf{f}_B$  مقدار معلوم مرزی به‌صورت مقادیر تابع حل برای شرایط درישله یا مقادیر مشتقات آن برای شرایط نویمان هستند. مسئله روی ناحیه همبند  $\Omega$  با شکل دلخواه دارای مرز  $\Gamma = \partial\Omega$  تعریف می‌شود. شکل (۱) نمای کلی از دامنه و مرز مورد نظر برای یک مسئله دارای تکنیکی ضعیف را نشان

شد و همچنان نیز مورد توجه است. پس از آن در تحقیقات دیگری مسائل مختلف با وضعیت‌های گوناگون بررسی شده و مراتب تکنیکی در شرایط مختلفی برای استفاده در روش‌های عددی ارائه شده‌اند. از جمله آنها می‌توان به فعالیت‌های لی و همکاران وی اشاره کرد [۹] که عمدتاً در جهت افزایش دقت و گستره مسائل قابل حل هستند. مسائل تکین دارای عملگرهای مرتبه چهارم از جمله مسائل ورق‌های نازک نیز توسط لی و همکاران وی تحت عنوان روش ترفتنز تطبیقی<sup>۴</sup> بررسی شده‌اند [۱۰]. مسائل ورق در تئوری‌های ورق نسبتاً ضخیم نیز توسط بلیچکو و همکاران وی توجه شده و اجزای غنی‌کننده حل برای آنها ارائه شده‌اند [۱۱]. همچنین مسائل مشابهی برای مواد همگن ارتوتروپیک بررسی شدند. تحقیقات اولیه در این زمینه به تینگ و چو نسبت داده می‌شود [۱۲]. سپس این مطالعات در کارهای گوناگونی از جمله تحقیقات مانتیک و همکاران [۱۳] و نیز وو و لیو [۱۴] برای یک کنج تکین در مواد ارتوتروپیک صفحه‌ای با ترکیبات گوناگون شرایط مرزی بررسی و تکمیل شد. لازم به ذکر است که ارائه حل تحلیلی مسائل مرتبط با مواد ارتوتروپیک دشوارتر از مواد ایزوتروپیک است. این مورد در مسائل مربوط به مواد ناهمگن به مراتب دشوارتر نیز می‌شود. امروزه توسعه کاربرد مواد ناهمگن همانند مواد هدفمند<sup>۵</sup>، نیاز به پیشبرد تکنیک‌های مناسب حل عددی مسائل مرتبط با آنها دارد. با این وجود دشواری در حصول حل تحلیلی متناسب با تکنیکی در این مواد، موجب شده است تا تحقیقات اخیر روی آنها متمرکز شود. با توجه به حوزه کاربرد مواد هدفمند در سازه‌هایی که در معرض تغییرات شدید حرارتی هستند، اردوغان و وو تحقیقاتی روی توسعه تنش در همسایگی تکنیکی در اثر تنش‌های حرارتی انجام داده‌اند [۱۵]. با استفاده از نتایج تحقیقات مذکور و موارد مشابه، روش‌های عددی مختلفی نیز برای حل مسائل مرتبط با مواد ناهمگن توسعه یافته‌اند. از آن جمله می‌توان به استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته [۱۶]، روش بدون شبکه گالرکین [۱۷]، روش ایزوجئومتریک توسعه‌یافته<sup>۶</sup> [۱۸] و روش بدون شبکه محلی



شکل ۱- دامنه اصلی حل (Omega) و دستگاه مختصات کلی و محلی

برآوردن صورت همگن معادله دیفرانسیل مشروط بر آن است که بردار  $\mathbf{c}^S$  عضو فضای پوچ ماتریس  $A^S$  باشد. به منظور ایجاد قابلیت ساخت خودکار جملات متناسب با بخش تکین پاسخ، ایده اصلی استفاده از تغییر متغیر ویژه‌ای است که در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\bar{r} = r^\beta, \quad \bar{\theta} = \gamma\theta, \quad \beta, \gamma \in (0, 1) \quad (5)$$

رأس دستگاه مختصات قطبی بر نقطه تکین جانمایی می‌شود. مبدأ متغیر زاویه‌ای نیز منطبق بر امتداد نیمساز شکاف ایجادکننده تکینگی در نظر گرفته می‌شود. برای ساختن پایه‌های اولیه از چندجمله‌ای‌های چبی شف نوع اول در راستای شعاعی و توابع مثلثاتی در راستای زاویه‌ای استفاده می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}}^S = \sum_{n=0}^{O_r^S} f_n^c(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} + \sum_{n=0}^{O_r^S} f_n^s(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} = (\mathbf{f}^S)^T \mathbf{c}^S \quad (6)$$

اندیس‌های  $S$  و  $c$  به شکل حروف کوچک در رابطه فوق به ترتیب نشان‌دهنده بخش مربوط به توابع سینوسی و کسینوسی هستند. اندیس  $S$  بزرگ همانند قبل دلالت بر بخش تکین دارد. بخش شعاعی بسط فوق که با  $f_n^c$  و  $f_n^s$  نشان داده شده‌اند به صورت زیر هستند. ساختار کلی این دو بخش یکسان است و تنها در ضرایب مجهول خود با یکدیگر فرق دارند:

$$f_n^{c,s}(\bar{r}) = \sum_{j=0}^{O_r^S} [T_j(\xi)] c_{n,j}^{c,s} \quad (7)$$

در این بسط شعاعی  $T_j(\xi)$  چندجمله‌ای چبی شف نوع اول

می‌دهد. پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل رابطه (۱) از دو بخش هموار و تکین تشکیل می‌شود:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^R + \hat{\mathbf{u}}^S \quad (2)$$

بالانویس  $R$  دلالت بر بخش هموار و بالانویس  $S$  دلالت بر بخش تکین مسئله دارد. برای به دست آوردن پاسخ بخش هموار می‌توان از پایه‌های معمول در روش اجزای محدود استفاده کرد. برای بخش تکین مسئله، پاسخ معادله به صورت سری زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}}^S = \sum_{j=1}^N f_j^S c_j^S = (\mathbf{f}^S)^T \mathbf{c}^S \quad (3)$$

در رابطه (۳)  $c_j^S$  ضرایب مجهول برای توابع پایه اولیه  $f_j^S$  هستند. پایه‌های مذکور معادله دیفرانسیل را به طور دقیق ارضا نمی‌کنند، بنابراین لازم است که سری بالا صورت انتگرال وزنی معادله را در یک دامنه تصویری مدور به شعاع  $R$  دربر گیرنده دامنه حل مسئله ارضا کند. به منظور حذف عملگر مشتق از ضرایب متغیر معادله دیفرانسیل، فرم ضعیف انتگرال وزنی معادله به صورت زیر بر طبق قضیه گوس-گرین به صورت مجموع یک انتگرال ناحیه و یک انتگرال مرزی بازنویسی می‌شود:

$$\int_{\Omega^S} \mathbf{w}^S \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{f}^S)^T \mathbf{c}^S d\Omega = - \left( \int_{\Omega^S} [(\mathbf{S} \mathbf{w}^S)^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{f}^S)^T] d\Omega + \int_{\Gamma^S} \mathbf{w}^S \bar{\mathbf{n}}_i \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{f}^S)^T d\Gamma \right) \mathbf{c}^S = A^S \mathbf{c}^S = 0 \quad (4)$$

در این رابطه  $\Gamma^S = \partial\Omega^S$  مرز ناحیه تصویری مورد نظر است.

شعاعی و مجموعه‌ای از توابع مثلثاتی با فرکانس‌های متنظر با پایه‌های حل در راستای زاویه‌ای به دست می‌آیند. در شکل (۲) توزیع این نقاط به صورت شماتیک نمایش داده شده است. به منظور پیشگیری از ورود اثرات مشکل‌زای انتگرال مرزی رابطه (۴)، توابع وزن باید به صورت زیر انتخاب شوند تا با صفر شدن در امتداد مرز ناحیه مدور تصویری در شکل (۲)، انتگرال مذکور را حذف کنند:

$$w_i^S = (1 - \xi_i^2) e^{-W(\xi_i - \xi_i)}, \quad i = 1, \dots, n_w \quad (10)$$

در ضریب تابع نمایی فوق جزء  $\xi_i + 1$  برای حذف عبارت  $1/r$  در انتگرال‌های راستای شعاعی افزوده شده و عبارت  $1 - \xi_i^2$  برای حذف انتگرال مرزی در رابطه (۴) به عنوان پیش ضرب انتخاب شده است.  $W$  پارامتر وزنی است که مقدار آن برابر ۲۵ در نظر گرفته می‌شود [۲۵].  $n_w$  تعداد نقاط وزن در راستای شعاعی را می‌توان برابر با مرتبه چندجمله‌ای‌های چبی شف در نظر گرفت [۲۳]:

$$n_w = O_r^S \quad (11)$$

با تشکیل ماتریس  $A^S$  و محاسبه فضای پوچ آن  $(\varphi^S)$ ، توابع پایه متعادل شده تکین  $(F^S)$  حاصل می‌شوند:

$$F^S = (f^S)^T \varphi^S \quad (12)$$

لازم است برای جایگزینی ضرایب متغیر معادله در برآورد بخش تکین پاسخ از ترکیب جملات توانی در راستای شعاعی و توابع مثلثاتی در راستای زاویه‌ای استفاده شود:

$$D_k = f_D^T c_D^k, \quad k = 1, \dots, 3 \quad (13)$$

اجزای عبارت فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

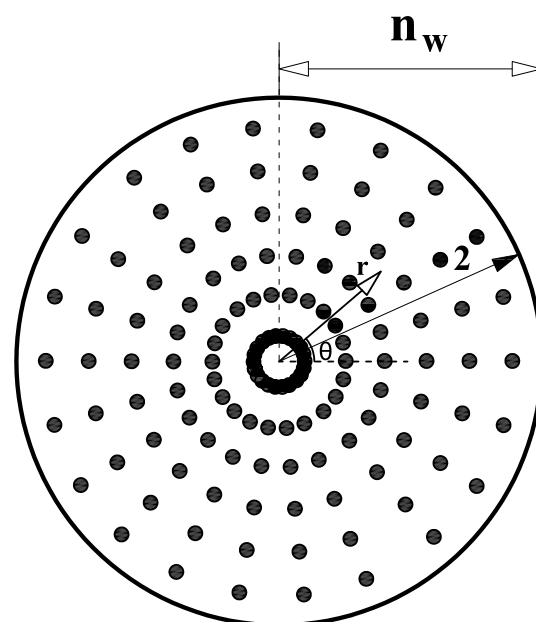
$$f_D = \begin{bmatrix} \tilde{f}_r & \tilde{f}_r \sin \theta & \tilde{f}_r \cos \theta & \dots & \tilde{f}_r \sin m\theta & \tilde{f}_r \cos m\theta \end{bmatrix}^T, \quad (14)$$

$$\tilde{f}_r = \begin{bmatrix} 1 & r/R & \dots & (r/R)^{m_r} \end{bmatrix}$$

$c_D^k$  بردار ضرایب مجهول مربوط به  $D_k$  است. با انتخاب تعدادی نقطه نمونه در دامنه مسئله و مرزهای آن، بردار ضرایب مجهول به صورت زیر روی این نقاط برآورد می‌شود:

$$c_D^k = F_D^+ D_k \quad (15)$$

ماتریس  $F_D$  شامل مقادیر  $f_D$  در هر نقطه نمونه به عنوان سطرهای مجزای آن، و  $D_k$  بردار مقادیر  $D_k$  برای هر نقطه نمونه



شکل ۲- آرایش نقاط وزن به صورت شماتیک در دامنه دایروی تصویری هم پایه شده

مرتبه  $l$  است که در بازه  $[-1, +1]$  تعریف می‌شود. بیشترین مرتبه این توابع با  $O_r^S$  نشان داده شده است. متغیر هم پایه ساز در راستای شعاعی  $(\xi)$  به صورت زیر است:

$$\xi = \frac{2\bar{r}}{R^\beta} - 1 \quad (8)$$

متغیر  $\bar{r}$  در بازه بسته  $[0, R^\beta]$  و متغیر  $\theta$  نیز در بازه بسته  $[-\pi, \pi]$  تعریف می‌شوند، به این ترتیب متغیر هم پایه شده  $\xi$  در بازه یکه شده  $[-1, +1]$  تغییر می‌کند. توجه شود که بازه تغییرات برای متغیر زاویه‌ای به معنای استفاده از بسط کامل فوریه است که برای حصول پاسخ مناسب ضروری است. توابع وزن به کار رفته در این معادلات متناسب با توابع پایه اولیه معرفی شده در رابطه (۶)، ترکیبی از توابع نمایی و مثلثاتی هستند:

$$w^S = \begin{bmatrix} \dots & (w_m^s)^T & (w_m^c)^T & \dots \end{bmatrix}^T$$

$$m = 0, 1, \dots, O_r^S,$$

$$w_m^s = \begin{bmatrix} w_1^S & \dots & w_{n_w}^S \end{bmatrix}^T \sin m\bar{\theta}$$

$$w_m^c = \begin{bmatrix} w_1^S & \dots & w_{n_w}^S \end{bmatrix}^T \cos m\bar{\theta} \quad (9)$$

این توابع با تعریف یک شبکه منظم از نقاط وزن در راستای

$$u^e \approx \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{N_n} N_i \bar{u}_i = \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \quad (20)$$

$N_n$  تعداد گره‌های متصل به المان بوده و  $N_i$  و  $\bar{u}_i$  به ترتیب تابع شکل و مقدار گره‌ای  $i$  ام هستند. با انتخاب توابع شکل به عنوان وزن‌های گالرکین و جایگذاری رابطه (20) در (19) نتیجه زیر برقرار خواهد شد:

$$\mathbf{K}^e \bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}^e - \hat{\mathbf{r}}^e \quad (21)$$

ماتریس سختی و بردار بارگذاری المان در رابطه (21) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{S}\mathbf{N})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{N}) d\Omega, \quad \mathbf{F}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (22)$$

$\mathbf{K}^e$  ماتریس سختی و  $\mathbf{F}^e$  بردار مربوط به مقادیر نیرویی برای گره‌های مربوط به هر المان بوده و  $\hat{\mathbf{r}}^e$  بردار نیروهای بین المانی است که در سطح هر المان خود را نشان می‌دهد و در معادلات کلی که با استفاده از ماتریس اتصال برقرار می‌شود، حذف خواهد شد. بردار  $\mathbf{t}$  نیز بیانگر گرادیان پاسخ مسئله است که به طور مثال می‌تواند شامل شارهای حرارتی عمود بر مرز ناحیه باشد. برآورد انتگرال‌های فوق به روش عددی گوس خواهد بود. نشان داده خواهد شد که این شیوه در حالت کلی برای فرایند مورد نظر در این تحقیق برقرار است.

### ۳- توابع شکل مرکب

پس از تشکیل روابط ماتریسی (21) باید توابع شکل مربوط به هر المان ساخته شود. پایه‌های حل برای المان‌های سه‌گره‌ای از مجموعه کامل و برای المان‌های چهارگره‌ای از مجموعه غیرکامل مثلث خیام- پاسکال انتخاب می‌شود (شکل 3). این پایه‌ها به صورت  $\mathbf{P}_R = [P_1, P_2, \dots, P_{n-1}]^T$  بیان می‌شوند و پاسخ تقریبی مسئله با استفاده از آنها در سطح هر المان به صورت رابطه (23) نوشته می‌شود. توجه شود که اندیس  $R$  در این عبارات دلالت بر اختصاص آن به بخش هموار حل دارد:

$$u^e \approx \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{n-1} P_i a_i = \mathbf{P}_R \mathbf{a}_R \quad (23)$$

است. علامت + در رابطه قبل نشان‌دهنده وارون تعمیم‌یافته مور- پنروز<sup>۷</sup> است که به دلیل شکل مستطیلی ماتریس اتخاذ شده است. به منظور تفکیک بخش شعاعی و زاویه‌ای، رابطه (16) به صورت زیر سازماندهی می‌شود:

$$\mathbf{D}_k = \tilde{\mathbf{f}}_0 \tilde{\mathbf{c}}_D^k \tilde{\mathbf{f}}_r^T \quad (16)$$

در این رابطه بخش شعاعی مشابه رابطه (14) تعریف شده و بخش زاویه‌ای به قرار زیر است:

$$\tilde{\mathbf{f}}_0 = [\sin \theta \cos \theta \dots \dots \sin m_0 \theta \cos m_0 \theta] \quad (17)$$

آرایش و چیدمان درایه‌های ماتریس  $\tilde{\mathbf{c}}_D^k$  نسبت به درایه‌های  $\mathbf{c}_D^k$  به صورت زیر است. توجه شود که در این رابطه بخش‌های مرتبط با ضرایب سینوس و کسینوس از یکدیگر تفکیک شده اند:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{c}}_D^k)_{ri+1,j+1} &= (\mathbf{c}_D^k)_{ri \times (m_r+1) + j+1}, \\ (\tilde{\mathbf{c}}_D^k)_{ri+2,j+1} &= (\mathbf{c}_D^k)_{(ri+1) \times (m_r+1) + j+1}, \\ i &= 0, 1, \dots, m_0, \quad j = 0, 1, \dots, m_r \end{aligned} \quad (18)$$

$m_0$  و  $m_r$  به ترتیب تعداد پایه‌های در نظر گرفته شده برای تخمین ضرایب متغیر معادله در راستای شعاعی و زاویه‌ای هستند. به منظور دریافت جزئیات بیشتر در زمینه چگونگی برآورد انتگرال‌های لازم و ترکیب آنها که موضوع مقاله حاضر نیست، خوانندگان محترم به مرجع [26] ارجاع داده می‌شوند.

برای بخش هموار از پایه‌های معمول روش اجزای محدود استفاده می‌شود. ابتدا لازم است تا دامنه مورد نظر با توجه به هندسه آن المان‌بندی شود. برای هر المان ماتریس سختی مربوطه نوشته شده و بر مبنای ارتباط بین گره‌ها و المان‌های مختلف، ماتریس اتصال<sup>۸</sup> کلی تشکیل می‌شود. برای تشکیل ماتریس سختی در سطح هر المان، لازم است تا معادله (1) به روش باقی‌مانده وزنی گالرکین در سطح المان ( $\Omega^e$ ) بازنویسی شود:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{w} [S^T \mathbf{D} \mathbf{S} u^e + \mathbf{b}] d\Omega = 0 \quad (19)$$

پاسخ تقریبی مسئله با تعریف توابع شکل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. با توجه به پیوستگی مرتبه صفر بین المان‌ها از توابع لاگرانژی استفاده خواهد شد:

اجزای محدود، پاسخ کلی معادله مورد نظر در سطح هر المان به صورت ترکیب بخش هموار و تکین نوشته می شود:

$$\hat{u}^e = \mathbf{P}_R \mathbf{a}_R + \mathbf{F}^S \mathbf{d}^S \quad (27)$$

توابع پایه جدید به صورت زیر جایگزین می شوند:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_R \quad \mathbf{F}^S], \quad \mathbf{F}^S = (\mathbf{f}^S)^T \boldsymbol{\varphi}^S \quad (28)$$

در این رابطه  $\mathbf{F}^S$  مجموعه توابع پایه متعادل شده تکین منطبق بر شرایط مسئله است. با استفاده از پایه های جدید رابطه (24) به شکل زیر در می آید:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^+ \bar{\mathbf{u}},$$

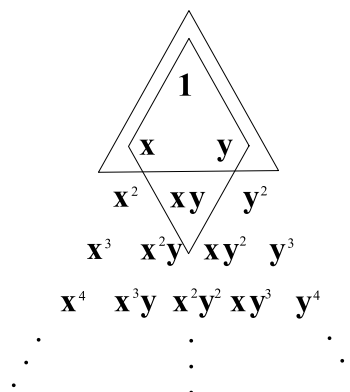
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} P_0 |_1 & P_1 |_1 & \dots & P_{n-1} |_1 & \mathbf{F}^S |_{(\bar{x}, \bar{\theta}_1)} \\ P_0 |_2 & P_1 |_2 & \dots & P_{n-1} |_2 & \mathbf{F}^S |_{(\bar{x}, \bar{\theta}_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0 |_n & P_1 |_n & \dots & P_{n-1} |_n & \mathbf{F}^S |_{(\bar{x}, \bar{\theta}_n)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

به دلیل عدم وارون پذیری ماتریس  $\mathbf{C}$  در این حالت، از وارون تعمیم یافته مور-پنروز (+) در رابطه فوق استفاده شده است. توابع شکل جدید برای المان های تکین مشابه رابطه (26) به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \mathbf{C}^+ \quad (30)$$

برای المان های تکین نیازی به برآورد ضرایب مجهول  $\mathbf{d}^S$  در رابطه (27) نیست، زیرا این مجهولات همانند  $\mathbf{a}_R$  به مقادیر گره ای مرتبط هستند و ضمن برآورد مقادیر گره ای، تأثیر هر دو بخش لحاظ می شود. برای هر المان نیازمند غنی سازی، یک دستگاه مختصات محلی به مبدأ نقطه تکین در نظر گرفته شده است. در شکل (4-الف) جزئیات به طور کامل نشان داده شده است. در شکل (4-ب) فرض بر این است که نقطه تکین در گوشه پایین و سمت چپ المان قرار دارد. امکان دارد در اثر المان بندی، تعدادی از المان های حاصل دارای هندسه نامنظم باشند که برای رفع این مشکل و یکسان کردن همه المان ها از تبدیل به دستگاه یکه با استفاده از توابع شکل لاگرانژی استفاده می شود (شکل 5):

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (31)$$



شکل 3- مثلث خیام پاسکال، انتخاب کامل (مثلث) و انتخاب ناکامل (لوزی) برای پایه های هموار

برای تعیین ضرایب مجهول رابطه (23) ( $\mathbf{a}_R$ ) با استفاده از مقادیر گره ای رابطه (24) نوشته می شود:

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{C}_R^{-1} \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R |_1 \\ \mathbf{P}_R |_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_R |_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 |_1 & P_1 |_1 & \dots & P_{n-1} |_1 \\ P_0 |_2 & P_1 |_2 & \dots & P_{n-1} |_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0 |_n & P_1 |_n & \dots & P_{n-1} |_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

با جایگذاری  $\mathbf{a}_R$  در رابطه (23) مقدار تقریبی پاسخ معادله در سطح المان با جایگزینی مقادیر گره ای مجهول به جای مجهولات قبلی به صورت زیر نوشته می شود:

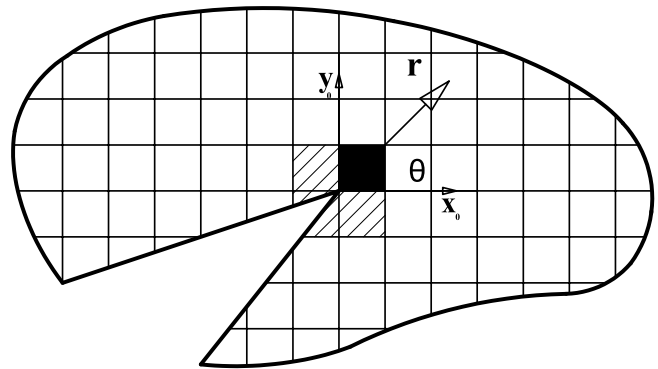
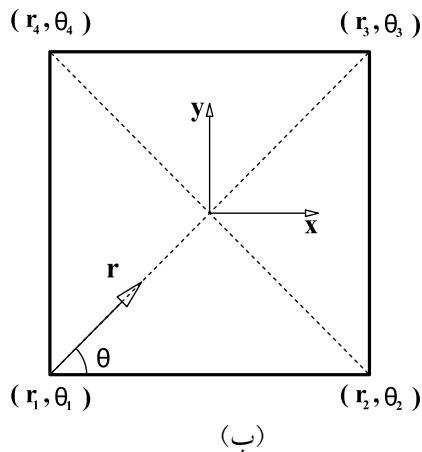
$$\hat{u}^e = \mathbf{P}_R \mathbf{C}_R^{-1} \bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

با مقایسه مقدار تقریبی در نظر گرفته در رابطه (20) و عبارت به دست آمده از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که توابع شکل به صورت رابطه (26) به دست می آیند:

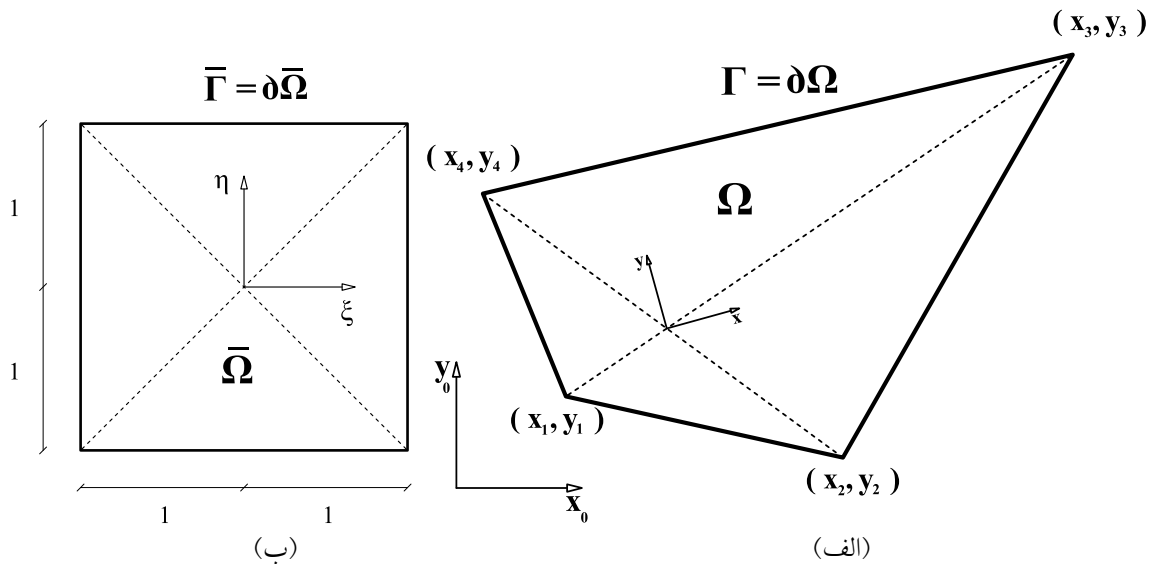
$$\mathbf{N} = \mathbf{P}_R \mathbf{C}_R^{-1} \quad (26)$$

این توابع شکل از پایه های هموار تشکیل شده اند، بنابراین قادر به تطابق خود با شرایط در مجاورت تکنیکی ضعیف نیستند. برای حل مسائل دارای تکنیکی کافی است با در نظر گرفتن المان های اطراف نقطه تکین و غنی سازی آنها به صورتی که در ادامه می آید، تأثیر ناشی از تکنیکی را در پایه های حل وارد کرد. در اثر وجود پایه های تکین در کنار پایه های هموار روش





شکل ۴- الف) دامنه اصلی المان بندی شده و المانهای غنی شده در اطراف نقطه تکین، ب) مختصات گره‌های اطراف نقطه تکین



شکل ۵- الف) دامنه و مرز اصلی ( $\Omega, \Gamma = \partial\Omega$ )، ب) دامنه و مرز یکه شده ( $\bar{\Omega}, \bar{\Gamma} = \partial\bar{\Omega}$ ) در سطح یک المان چهار گره‌ای

(ژاکوبین) به وضعیت یکه شده می‌رسند و به این ترتیب در دستگاه ( $\xi, \eta$ ) بازنویسی می‌شوند:

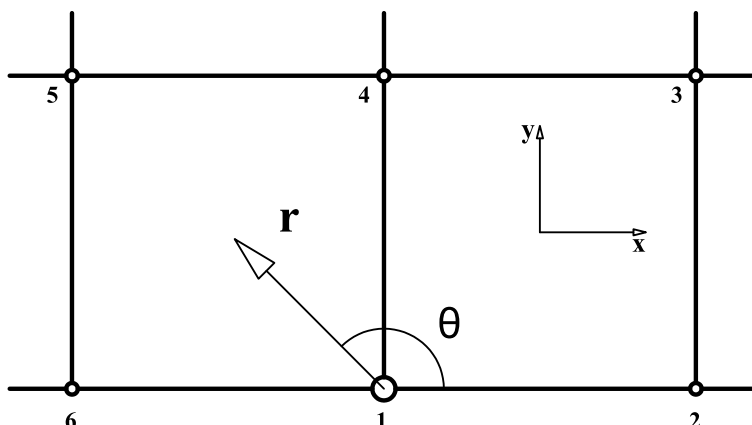
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

برای المانهای تکین لازم است تا روابط بر مبنای متغیرهای بسط داده شوند. به همین منظور کلیه مشتقات جزئی از دستگاه ( $x-y$ ) به دستگاه ( $\bar{\Gamma}, \bar{\theta}$ ) با استفاده از تبدیلات زیر برده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \beta \bar{r}^{(1-\frac{1}{\beta})} \cos(\bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \beta \bar{r}^{-\beta} \sin(\bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \beta \bar{r}^{(1-\frac{1}{\beta})} \sin(\bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \beta \bar{r}^{-\beta} \cos(\bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \end{aligned} \quad (32)$$

لازم به ذکر است که برای بخش هموار مسئله در این حالت، مشتقات جزئی دستگاه ( $x-y$ ) توسط یک ماتریس تبدیل



شکل ۶- مثالی از المان‌های مجاور نقطه تکین درحالتی که نقطه مزبور روی گره‌ای از المان باشد.

عمل پیوستگی مناسبی بین المان‌ها به وجود می‌آید. در اینجا باید به این نکته توجه شود که به دلیل استفاده از یک بسط پیوسته مشترک بین چند المان برای بخش تکین پاسخ، این بخش از جواب مسئله در المان‌های اطراف نقطه تکین به همه گره‌های المان‌های غنی شده وابسته است. بررسی‌های صورت گرفته در این مقاله حاکی از آن است که جهت دستیابی به نتایج مطلوب، برای درون‌یابی جواب مسئله در محدوده درون المان‌های مذکور باید توابع شکل مربوط به آنها را به شیوه‌ای دیگر دوباره تشکیل داد. شیوه به دست آوردن این توابع شکل مانند به دست آوردن توابع شکلی است که برای حل معادله دیفرانسیل به دست آمد؛ با این تفاوت که برای به دست آوردن ماتریس  $C$  علاوه بر برآورد چند جمله‌ای‌های هموار خیام- پاسکال و توابع پایه متعادل شده درون  $F^S$  در گره‌های المان مورد نظر، ماتریس  $F^S$  در تمام گره‌های دیگر مجموعه المان‌های غنی شده نیز برآورد می‌شوند. بنابراین به تعداد گره‌های المان‌های مرتبط با نقطه تکین، تابع شکل وجود دارد که ضریب هر کدام از آنها مقادیر گره‌ای متناظر با گره‌های مذکور است. به عنوان مثال با فرض اینکه در مسئله‌ای با المان‌های چهارگره‌ای، گره‌های المان‌های اطراف نقطه تکین به صورت شکل (۶) شماره گذاری شوند، مقادیر گره‌ای نشان داده شده به شکل ماتریسی چنین هستند:

$$\bar{u} = \bar{C}a \quad (36)$$

برای بخش تکین نیز انتگرال‌های مربوطه در دستگاه  $(\bar{r}, \bar{\theta})$  قابل محاسبه هستند. در نهایت ماتریس سختی و بردار نیرویی در دستگاه جدید به صورت زیر بازنویسی می‌شوند. برآورد انتگرال‌های مربوطه به صورت عددی هستند و افزودن پایه‌های جدید به غیر از تغییر در تعداد نقاط انتگرال‌گیری لازم در سطح المان‌های مربوطه، تأثیر دیگری بر ساختار آن ندارد:

$$K^e = \int_{\Omega^e} (SN)^T D(SN) |J| d\xi d\eta, \quad F^e = \int_{\Omega^e} N^T b |J| d\xi d\eta + \int_{\Gamma^e} N^T t |J| d\Gamma \quad (34)$$

پس از تشکیل ماتریس سختی و بردار نیرویی برای هر المان و به منظور تشکیل ماتریس‌های کلی سازه، از ماتریس اتصال مشابه قبل استفاده می‌شود. توجه شود که به دلیل عدم تغییر در تعداد درجات آزادی، مجهولات، مشابه قبل بوده و در این بخش تغییر خاصی به وجود نخواهد آمد. در نهایت رابطه کلی زیر حاصل می‌شود:

$$KU = F \quad (35)$$

رابطه (۳۵) یک دستگاه معادلات جبری است که مجهولات آن بر اساس شرایط مرزی مسئله در بردارهای  $U$  و  $F$  وجود دارند. با نوشتن رابطه همسازی موجود بین گره‌ها و حل دستگاه فوق، تمامی مجهولات به دست می‌آیند. با وجود ناپیوستگی ذاتی پاسخ حاصل از این روش اجزای محدود در امتداد لبه‌های المان‌های غنی شده با المان‌های مجاور آنها به واسطه عدم برآورد کامل شرط افزاز واحد، تأثیر منفی آن بسیار ناچیز بوده و در

برای تشکیل معادله هارمونیک بر مبنای معادله (۱) در هر المان، لازم است تا عملگر معادله دیفرانسیل و ماتریس ضرایب در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر بیان شوند:

$$S^T = \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right],$$

$$D = \begin{bmatrix} D_r & D_\theta \\ D_r & D_\theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

برای دیده شدن اثر تکینگی، روابط بر مبنای دستگاه جدید  $(\bar{r}, \bar{\theta})$  با استفاده از تبدیلات زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \beta \bar{r}^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \gamma \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}},$$

$$d\Omega = r dr d\theta = \frac{1}{\beta \gamma} \bar{r}^{\beta-1} d\bar{r} d\bar{\theta} \quad (43)$$

درایه‌های ماتریس و بردار رابطه (۳۴) برای این معادله به صورت زیر قابل بیان هستند. توجه شود که این عبارات روی محدوده و مرز یک‌شده المان نوشته می‌شوند:

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_l}{\partial x} D_r \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial x} D_\theta \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_l}{\partial y} D_r \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} D_\theta \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] |J|$$

$$F_l^e = \int_{\Omega^e} N_l b_l |J| d\bar{\Omega} + \int_{\Gamma^e} N_l t_l |J| d\bar{\Gamma} \quad (44)$$

برای تعیین توابع شکل مورد نیاز، روند توضیح داده شده در بخش قبل طی شده و توابع شکل برای المان‌های معمولی و همچنین غنی شده حاصل می‌شوند. با قرارگیری توابع شکل ایجاد شده در رابطه (۳۴) ماتریس سختی و بردار نیرویی برای تک المان‌ها محاسبه می‌شود. پس از آن با استفاده از ماتریس اتصال و تشکیل معادله (۳۵)، مجهولات مسئله به دست می‌آیند. برای برآورد بهینه انتگرال‌های عددی در سطح المان‌های دارای تکینگی با استفاده از روش گوس، در نظر گرفتن یک شبکه  $7 \times 7$  نقطه برای المان‌های چهاروجهی، و یا معادل آن برای المان‌های سه‌وجهی کفایت می‌کند. برای سایر المان‌ها شبکه معمول  $2 \times 2$  کافی است. در ادامه با حل چند مثال عددی مناسب، توانایی روش سنجیده خواهد شد.

ماتریس‌های  $\tilde{\mathbf{u}}$  و  $\mathbf{a}$  چنین هستند:

$$\mathbf{a}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ \dots \ d_M],$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^T = [\bar{u}_1^e \ \bar{u}_2^e \ \bar{u}_3^e \ \bar{u}_4^e \ \bar{u}_5^e \ \bar{u}_6^e] \quad (37)$$

لازم است توجه شود که ضرایب  $a_i$  در بردار فوق صرفاً مربوط به المان مورد بررسی است، حال آنکه ضرایب  $d_i$  و مقادیر گره‌ای  $\bar{u}_i$  متعلق به کلیه گره‌های متأثر از بخش تکین در نظر گرفته شده هستند. به طور مثال اگر در شکل (۶) جواب‌های درون المان سمت راست در راستای زاویه  $60^\circ$  درجه مورد نظر باشد، برای تشکیل ماتریس  $\tilde{\mathbf{C}}$  گره‌های این المان هم شامل جملات هموار و هم شامل جملات تکین است، ولی گره‌های ۵ و ۶ فقط از جملات تکین تأثیر گرفته و مقادیر متناظر از جملات هموار روش اجزای محدود در این دو گره برابر صفر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_1)} \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_2)} \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_3)} \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_5)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{F}^S \Big|_{(\bar{r}, \bar{\theta}_6)} \end{bmatrix}_{6 \times (4+M)} \quad (38)$$

عملیات وارون کردن این ماتریس همچنان از نوع وارون تعمیم یافته مور-پنروز است که در رابطه زیر با علامت + نشان داده شده است:

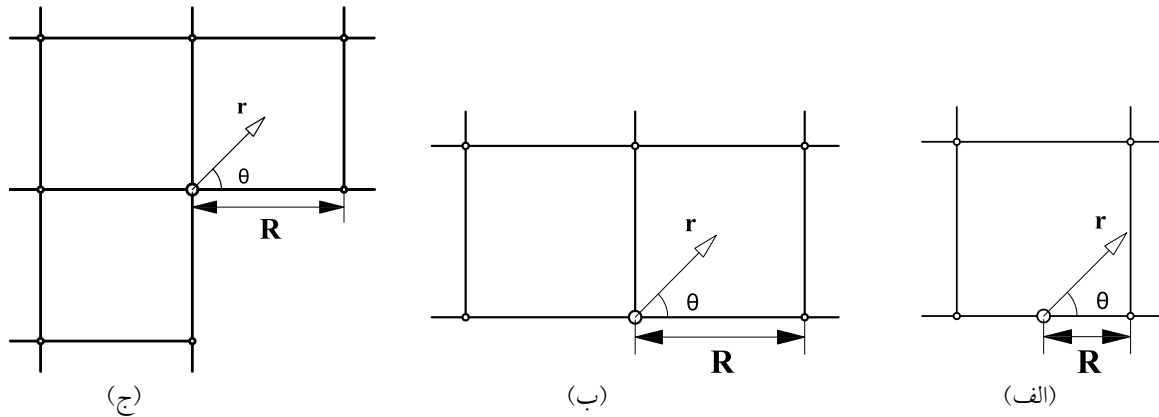
$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{C}}^+ \tilde{\mathbf{u}} \quad (39)$$

در نهایت جواب مسئله در المان مورد نظر به این صورت حاصل می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}}^+ \tilde{\mathbf{u}} \quad (40)$$

برای این مثال، ماتریس توابع شکل جدید  $(\tilde{\mathbf{N}})$  دارای ابعاد  $1 \times 6$  بوده و جواب در المان سمت راست به این صورت است:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}}^+, \quad \hat{\mathbf{u}}^e = \sum_{m=1}^6 \tilde{\mathbf{u}}_m \tilde{\mathbf{N}}_m \quad (41)$$



شکل ۷- مثال‌هایی برای حالات مختلف تعیین شعاع تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شف (R)

#### ۴- نتایج

در این بخش به ارائه مثال‌هایی به جهت بررسی توانایی و خصوصیات روش در حل مسائل تکین هارمونیک پرداخته می‌شود. کلیه المان‌های اطراف مرکز تکنیکی به‌عنوان المان غنی شده در نظر گرفته خواهند شد. شعاع تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شف (R) در روش حاضر برابر با فاصله مبدأ مختصات (منطبق بر نقطه تکین) تا گره دورتر واقع در همان مرزی است که مبدأ روی آن قرار دارد. به‌منظور درک بهتر، همسایگی نقطه تکین برای چند مثال در شکل (۷) به نمایش درآمده است. برای حالتی که مبدأ دستگاه قطبی روی گره‌ای از المان واقع است (شکل ۷- ب و ۷- ج)، این شعاع برابر با بعد المان بوده و برای حالتی که مبدأ مختصات در وسط دو گره المان قرار دارد برابر نصف بعد المان است (شکل ۷- الف). برای تعیین ماتریس ضرایب متغیر معادله در حالت ناهمگن باید تعدادی نقطه نمونه از داخل دامنه انتخاب کرده و بر اساس آنها تخمین صورت پذیرد که دامنه مربوط به انتخاب این نقاط، محدوده المان‌های تکین است. معیار سنجش دقت، رابطه (۴۵) است:

$$\varepsilon_{\text{avg}}(\%) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{\text{ex}}^i - u_{\text{ap}}^i)^2}{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{\text{ex}}^i)^2}} \times 100 \quad i = 1, \dots, N_E, \quad (45)$$

در رابطه فوق  $u_{\text{ex}}^i$  پاسخ دقیق مسئله و یا پاسخ به‌دست آمده از تحلیل مثال در نرم‌افزار اجزای محدود در نقطه  $i$  ام و  $u_{\text{ap}}^i$  نیز

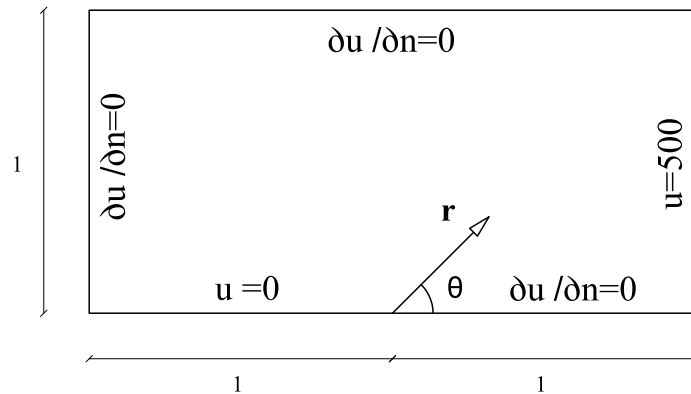
پاسخ تقریبی مربوط به همان نقطه است که با استفاده از روش حاضر و یا روش اجزای محدود معمولی به‌دست می‌آید.  $N_E$  تعداد کل نقاط موجود در شبکه المان‌بندی است. این نقاط می‌توانند داخل هر المان و یا روی مرز آنها انتخاب شوند که در این تحقیق همان نقاط گره‌ای هستند. در ادامه تأثیر قابل توجه استفاده از پایه‌های متعادل شده تکین در روش اجزای محدود در مقایسه با روش اجزای محدود معمولی را می‌توان شاهد بود.

#### ۴-۱- مسئله موتز

مسئله موتز را می‌توان جزء معروف‌ترین مسائل دارای تکنیکی با معادله حاکم لاپلاس به‌شمار آورد که اولین بار توسط موتز در سال ۱۹۴۷ به روش آزادسازی<sup>۱</sup> بررسی شد [۲۷] و تاکنون برای مقایسه دقت و کارآمدی بسیاری از روش‌های عددی به کار گرفته شده است. هندسه و شرایط مرزی مسئله در شکل (۸) نشان داده شده است. ضرایب معادله بر طبق رابطه (۱) برابر  $(D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 1)$  در نظر گرفته می‌شود. پاسخ دقیق این مسئله در مختصات قطبی در قالب سری به‌صورت رابطه (۲۶) قابل بیان است:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\frac{1}{2}} \cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta\right) \quad (46)$$

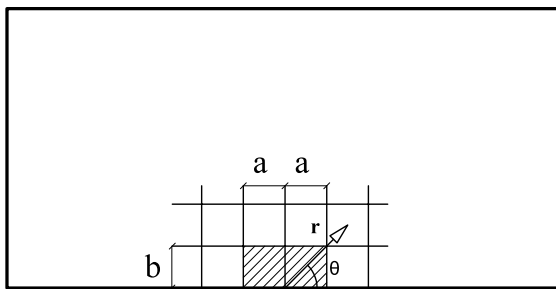
برای نمونه تعدادی از ضرایب  $a_i$  که در مرجع [۲۶] معرفی شده‌اند، در جدول (۱) به نمایش درآمده‌اند. هر چند با تعداد



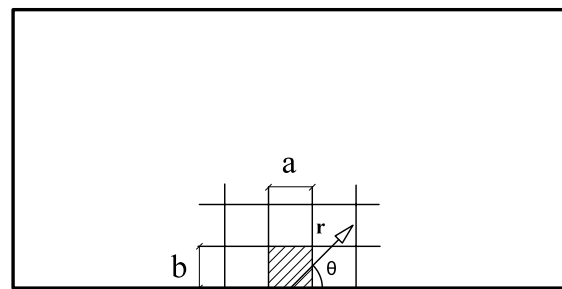
شکل ۸- دامنه حل و شرایط مرزی مسئله موتز در مثال‌های ۱ و ۳

جدول ۱- ضرایب  $a_i$  در حل تحلیلی مسئله موتز

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
۴۰۱/۱۶۰	۸۷/۶۶۰	۱۷/۲۴۰	-۸/۰۷۰	۱/۴۴۰	۰/۳۳۱	۰/۲۷۵	-۰/۰۸۷



(ب)



(الف)

شکل ۹- الگوی المان‌بندی درحالتی که نقطه تکین: (الف) بین گره‌های المان (حالت ۱)، (ب) روی گره (حالت ۲) واقع باشد.

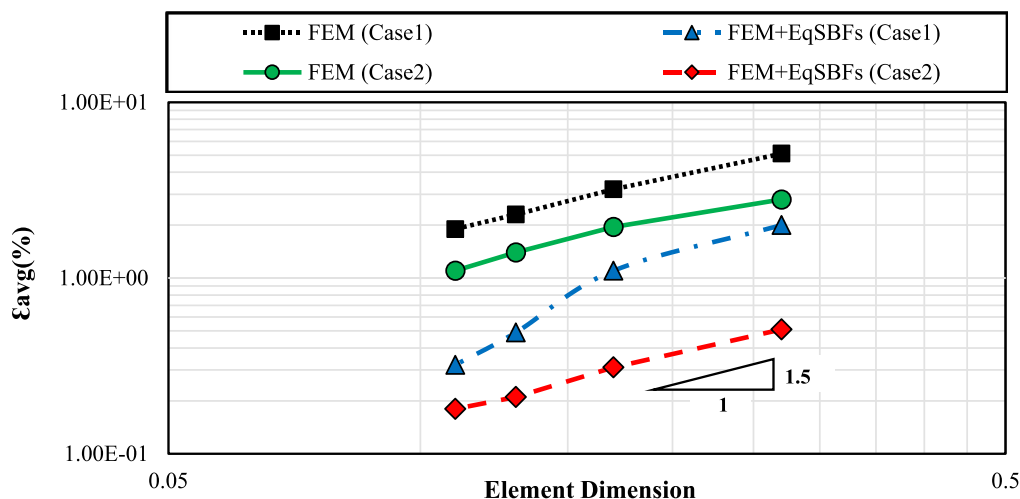
روش اجزای محدود معمولی همراه با شیب همگرایی در برابر بعد المان نمایش داده شده است. از آنجا که در روش اجزای محدود تأثیر عمده نقطه تکین بر المان‌های مجاور آن است و سایر المان‌ها کمتر از وجود تکینگی متأثر می‌شوند، درصد خطای میانگین دوباره در محدوده‌ای که در شکل (۱۱) مشخص شده است محاسبه می‌شود، زیرا به ناحیه اثر تکینگی نزدیک‌تر بوده و تأثیر بیشتری از آن می‌گیرد. بنابراین انتظار می‌رود کیفیت پاسخ روش‌های مبتنی بر پایه‌های هموار در این محدوده دقت پایین‌تری داشته باشند.

نمودار شکل (۱۲) درصد خطای جواب‌های به‌دست آمده از حل با روش حاضر و نیز روش اجزای محدود در حالت ۲

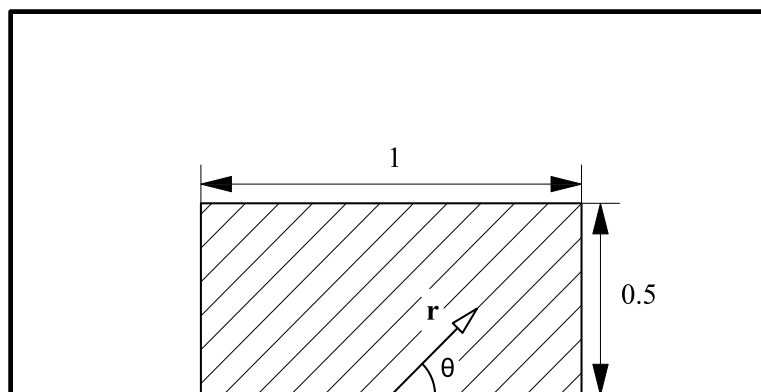
محدودی از جملات ابتدایی سری می‌توان به پاسخ با دقت کافی رسید، اما برای مقایسه عملکرد روش از ۳۰ جمله سری مرجع [۲۸] آمده استفاده خواهد شد.

به دلیل تغییر ناگهانی شرایط مرزی در مبدأ مختصات ( $r=0$ ) یک تکینگی ضعیف با مرتبه ۰/۵ به وجود می‌آید. نمونه‌ای از شبکه‌بندی منظم برای مسئله حاضر به همراه محل مبدأ دستگاه مختصات قطبی و همچنین موقعیت المان‌های مرکب (هاشورخورده) در شکل (۹) نمایش داده شده است.

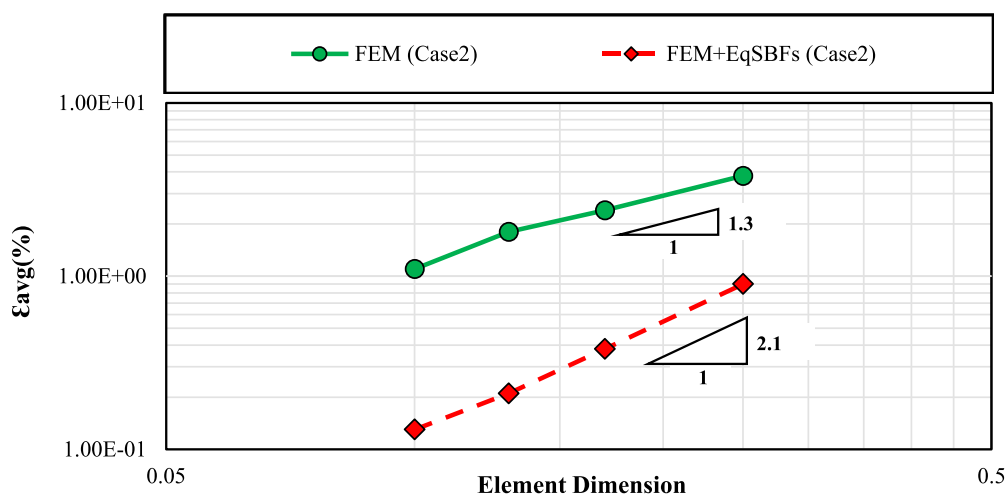
با انتخاب مناسب پارامترهای حل ( $O_T^S = 10$ ،  $O_I^S = 25$ ) و  $(\beta = \gamma = 0/1)$  مثال مذکور تحلیل شده و در نمودار شکل (۱۰) درصد خطای به‌دست آمده از حل با روش حاضر و حل به



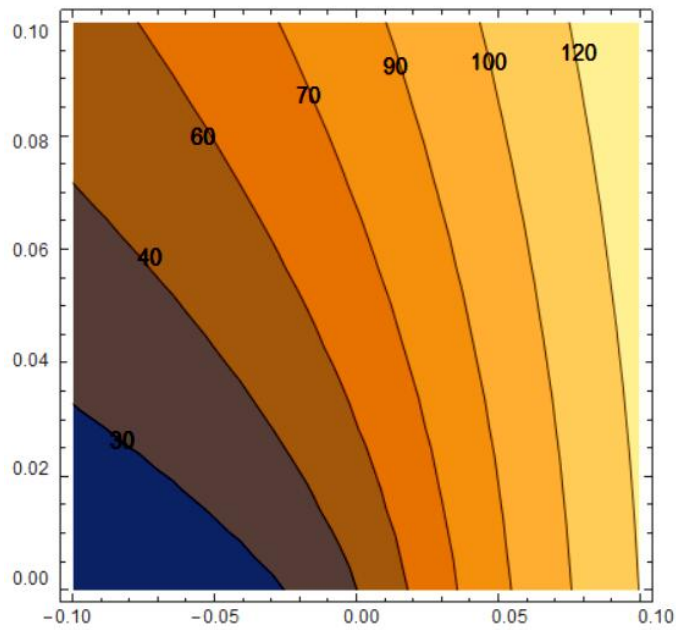
شکل ۱۰- نمودار لگاریتمی درصد خطای میانگین در برابر بعد المان در مثال ۱



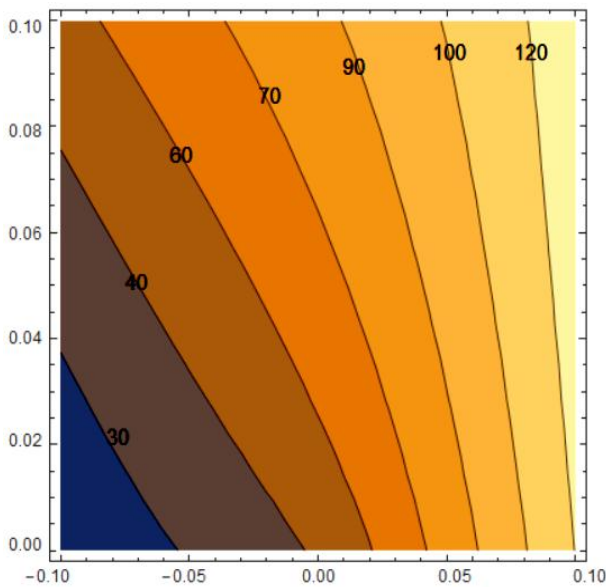
شکل ۱۱- محدوده نزدیک به نقطه تکین، مورد استفاده در محاسبه درصد خطای میانگین در مثال ۱



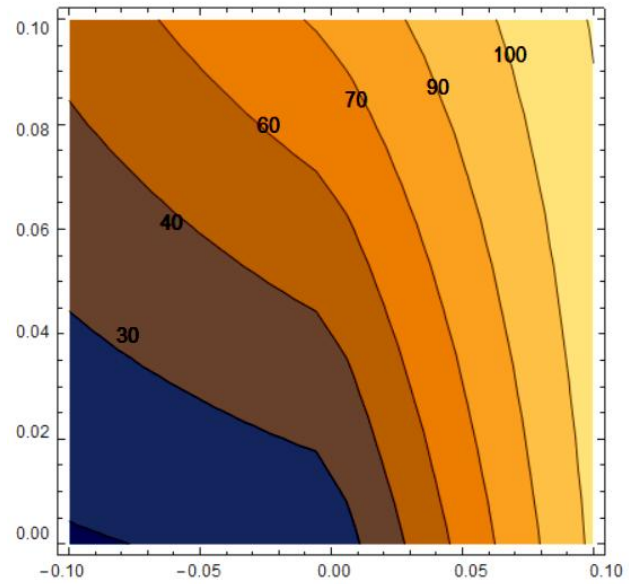
شکل ۱۲- نمودار لگاریتمی درصد خطای میانگین در برابر بعد المان در مثال



(الف)



(ج)

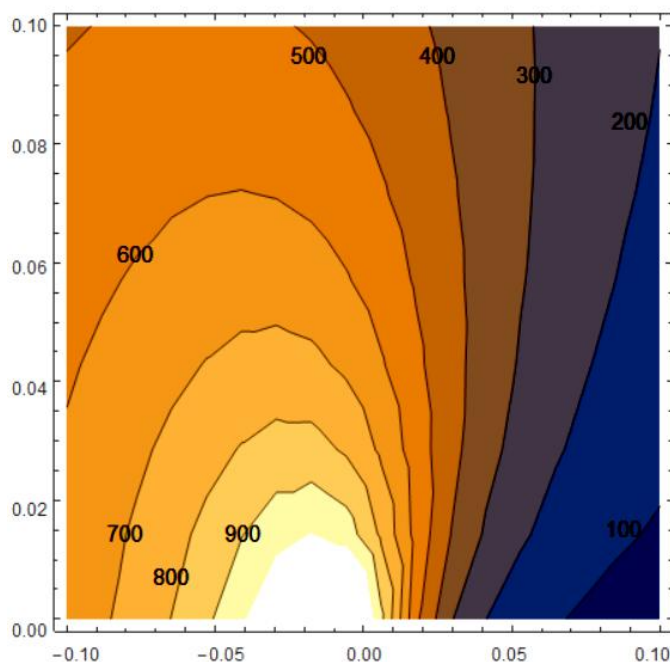


(ب)

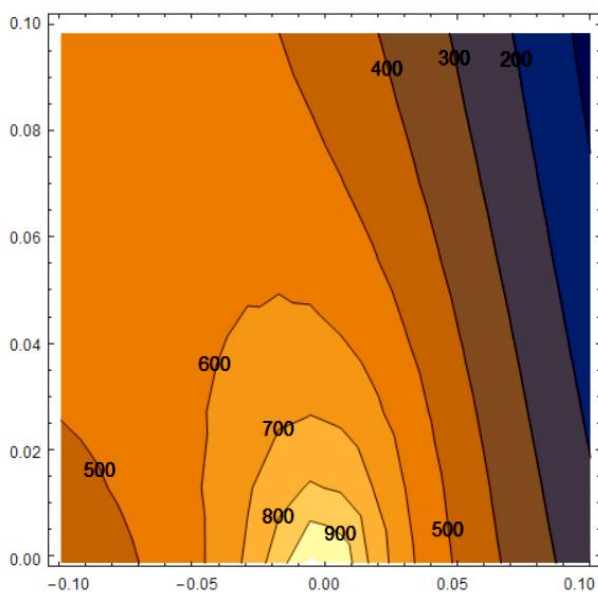
شکل ۱۳- منحنی‌های هم‌تراز پاسخ مسئله موتز در المان‌های مجاور تکینگی با استفاده از:  
الف) جواب دقیق، ب) روش اجزای محدود و ج) روش حاضر

نزدیک به نقطه تکین، منحنی‌های هم‌تراز پاسخ (u) و همچنین مشتق آن نسبت به  $y$  ( $\partial u / \partial y$ ) حاصل از شبکه‌بندی  $10 \times 20$  برای حالت ۲ در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) رسم شده‌اند. متذکر می‌شود که به دلیل محسوس نبودن تفاوت منحنی‌های پاسخ روش اجزای محدود و روش حاضر در نواحی دور از نقطه

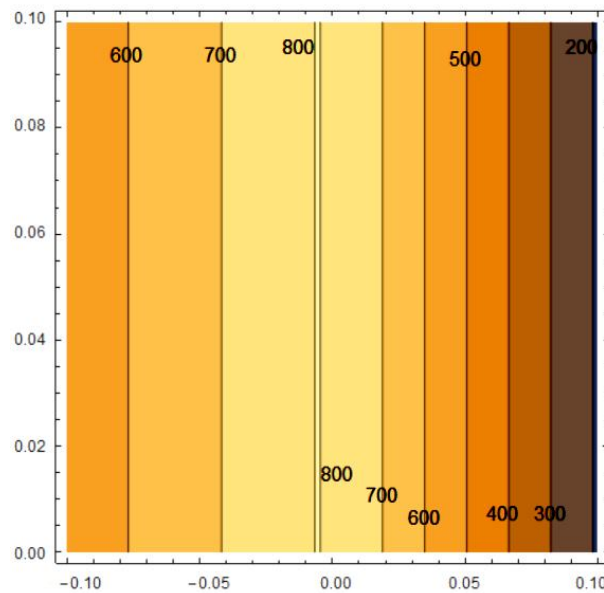
به‌ازای مقادیر مختلف بعد المان در محدوده شکل (۱۱) را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود اختلاف بین کیفیت حل دو شیوه مذکور بیشتر شده که نشان‌گر عملکرد مؤثر روش حاضر است. نکته دیگر بهبود شیب همگرایی پاسخ است. برای مقایسه بهتر عملکرد روش حاضر با روش اجزای محدود در ناحیه



(الف)



(ج)



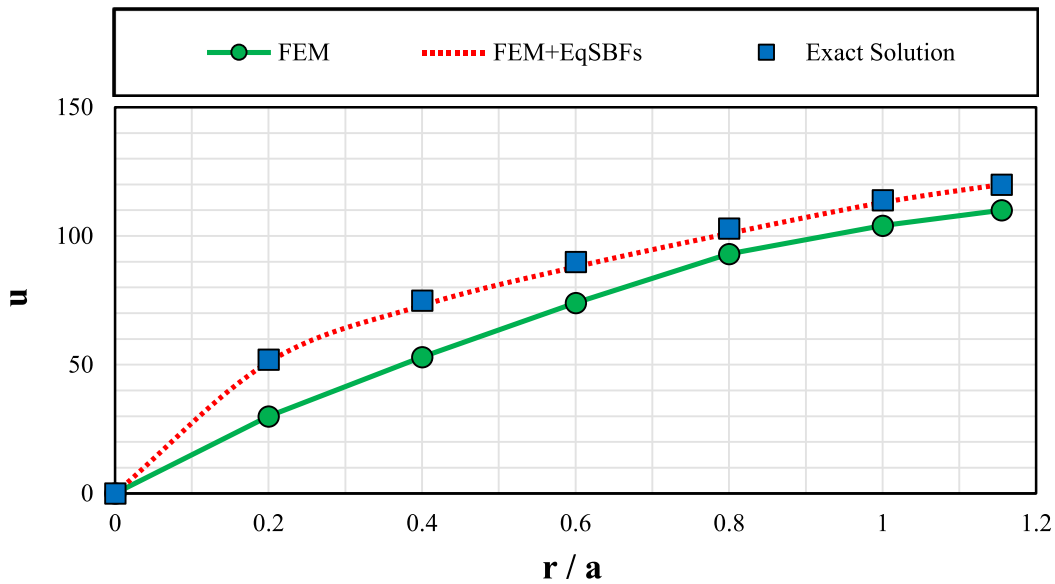
(ب)

شکل ۱۴- منحنی‌های هم‌تراز  $\frac{\partial u}{\partial y}$  مسئله موتز با استفاده از: الف) جواب دقیق، ب) روش اجزای محدود، ج) روش حاضر

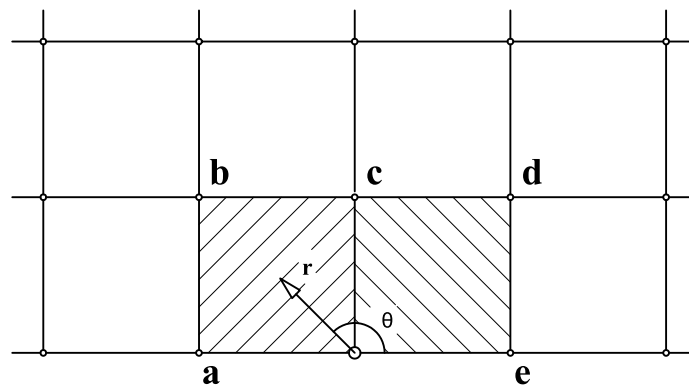
نزدیک به تکینگی، نمودار مقادیر پاسخ مسئله در راستای  $60^\circ$  درجه در مسئله موتز برای حالت ۱ با شبکه المان‌بندی  $19 \times 10$  رسم شده است. قسمتی از این جواب‌ها در المان تکین و قسمتی دیگر در المان‌های هموار است. نتایج در شکل (۱۵)

تکین، منحنی‌های مذکور تنها در محدوده سطح درون المان‌های تکین بررسی می‌شود. برای درک بهتر اثرات مثبت افزودن بخش تکین اضافه شده به پایه‌های هموار در المان‌های مجاور نقطه تکین و در فواصل





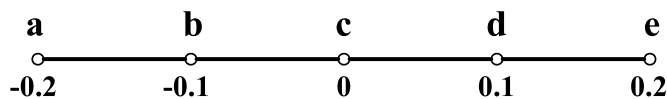
شکل ۱۵- مقایسه نتایج حاصل از حل دقیق، حل با روش اجزای محدود و حل با روش حاضر برای پاسخ مثال ۱ در راستای  $60^\circ$  درجه



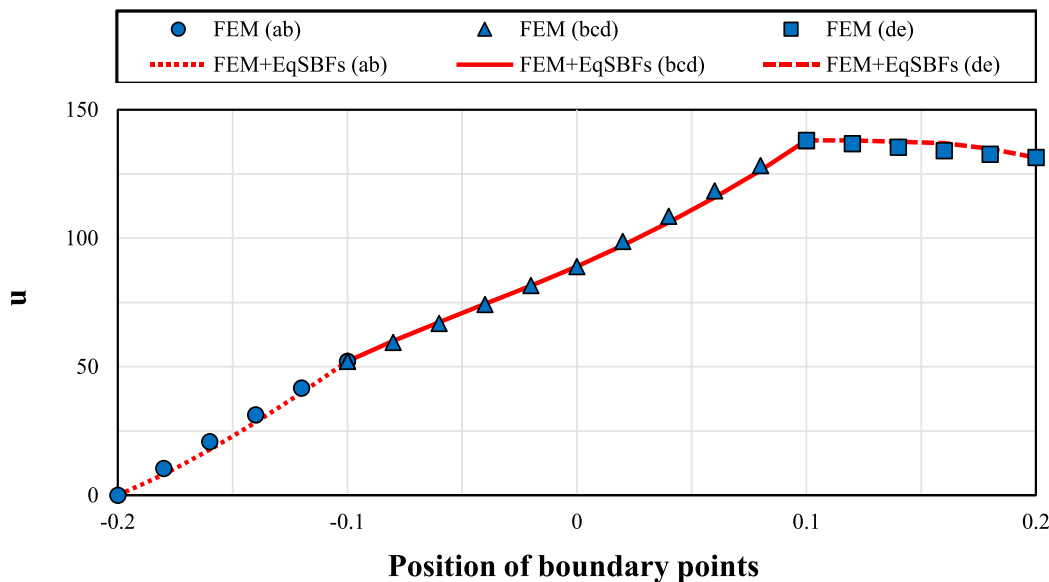
شکل ۱۶- مرز بین المان‌های غنی شده و المان‌های معمولی.

بتوان مرزهای غیر هم‌راستا را در امتداد محور افقی نمودار نشان دهد (شکل ۱۷)، با توجه به نمودار شکل (۱۸) با وجود اینکه توابع شکل در سطح المان‌های دو سمت مرز از نوع مشابهی نیستند، می‌توان گفت پیوستگی به شکل مناسبی برقرار است. در قسمت بعدی مثال بررسی‌های لازم به‌منظور تعیین الگویی برای تنظیم تعداد نقاط گاوس لازم در فرایند انتگرال‌گیری عددی در سطح المان‌های دارای پاسخ ترکیبی انجام خواهد گرفت. در شکل (۱۹) نمودار درصد خطا در برابر تعداد نقاط گوس در هر راستا برای حالت ۲ مثال حاضر با شبکه‌بندی  $10 \times 20$  رسم شده است. شایان ذکر است که در سایر المان‌های غنی نشده همچنان

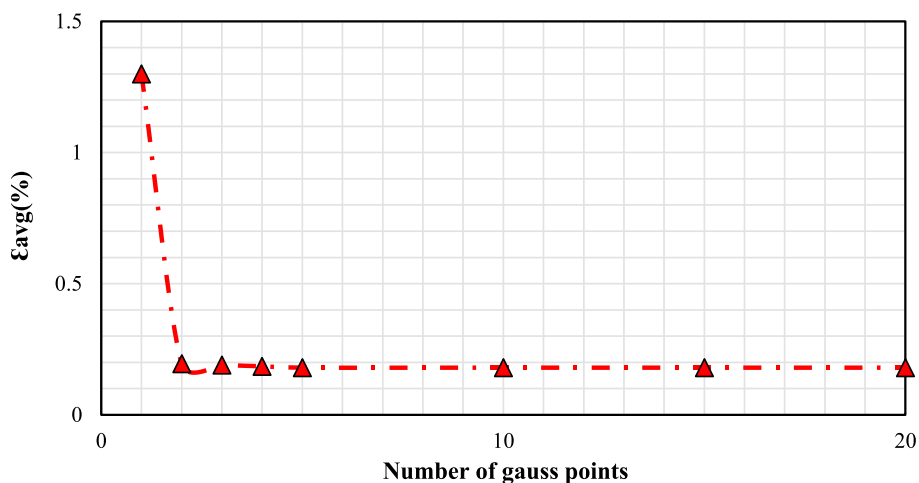
نشان داده شده است که نشان از تطابق بسیار خوب روش حاضر با حل دقیق در مقایسه با روش اجزای محدود دارد. به‌منظور بررسی ارتباط حل بین المان‌های غنی شده و معمولی، در نمودار شکل (۱۸) پیوستگی پاسخ‌های این مسئله روی مرزهای بین المان‌های مذکور به شکل دقیق‌تر برای حالت ۲ بررسی می‌شود. در شکل (۱۶) المان‌های اطراف نقطه تکین و مرزهای مورد بررسی (از نقطه a تا e در امتداد مرز ناحیه هاشورخورده) برای نشان دادن پیوستگی مشخص شده‌اند. برای نمایش دادن مقادیر پاسخ مسئله روی مرزها در کنار یکدیگر، مختصات به گره‌های مشخص شده اختصاص یافته است تا



شکل ۱۷- مختصات در نظر گرفته شده برای گره‌های روی مرز المان‌های تکین در مثال ۱



شکل ۱۸- مقایسه پاسخ‌های مسئله موتز در امتداد مرزهای مشخص شده در شکل‌های ۱۶ و ۱۷

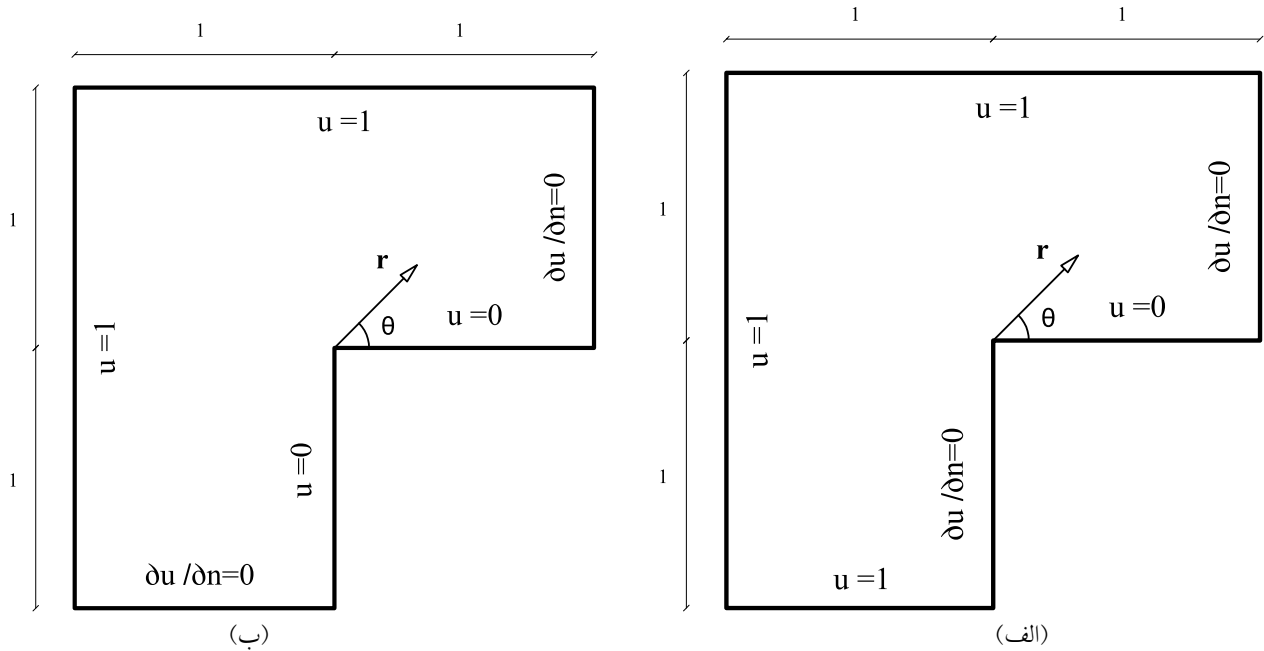


شکل ۱۹- نمودار درصد خطا در برابر تعداد نقاط گاوس در سطح المان‌های مرکب

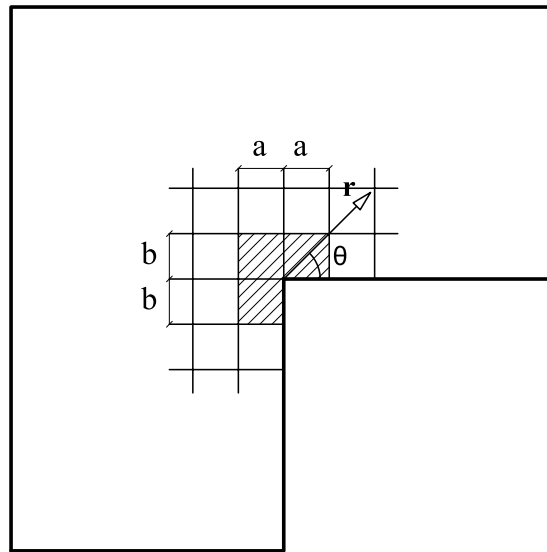
#### ۲-۴- مسئله هارمونیک روی ناحیه L شکل

در این مثال، حل مسئله لاپلاس روی ناحیه L شکل با هندسه و شرایط مرزی مطابق شکل (۲۰- الف) و بر اساس ضرایب معادله طبق رابطه کلی (۱) برابر  $(D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 1)$

از ۴ نقطه گاوس استفاده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، هنگامی که تعداد نقاط در هر راستا از ۵ بیشتر شود تغییر چندانی در درصد خطا به وجود نمی‌آید.



شکل ۲۰- هندسه و شرایط مرزی ناحیه L شکل در مسائل مثال ۲



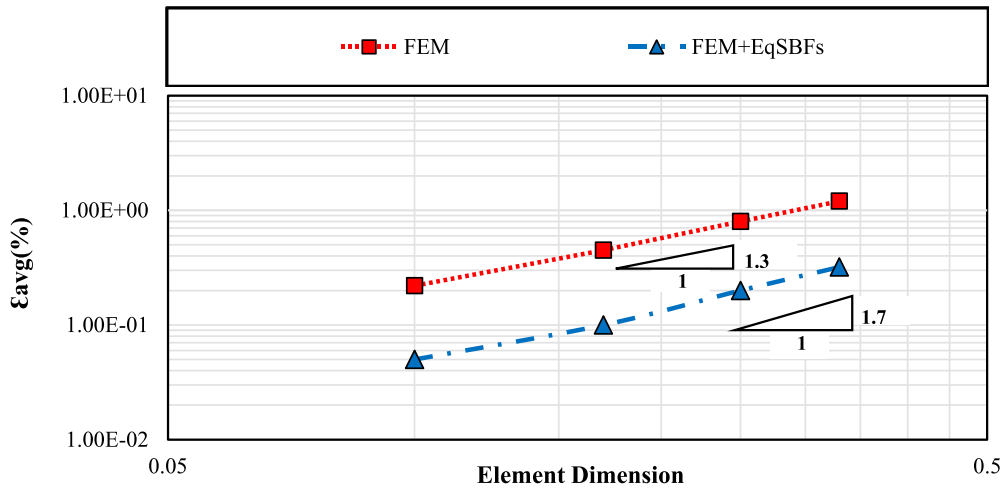
شکل ۲۱- المان بندی روش حاضر در مثال ۲ و نمایش المان های اطراف نقطه تکین

مسئله به روش حاضر و نیز به صورت استاندارد اجزای محدود حل شده است. المان های ناحیه هاشورخورده با توابع پایه متعادل شده تکین غنی شده اند (شکل ۲۱). با انتخاب مناسب پارامترهای حل ( $O_r^S = 10$ ،  $O_t^S = 25$  و  $\beta = \gamma = 0.1$ ) مسئله مورد تحلیل واقع شده و در نمودار شکل (۲۲) درصد خطای جواب های به دست آمده از حل با روش جدید و حل با روش

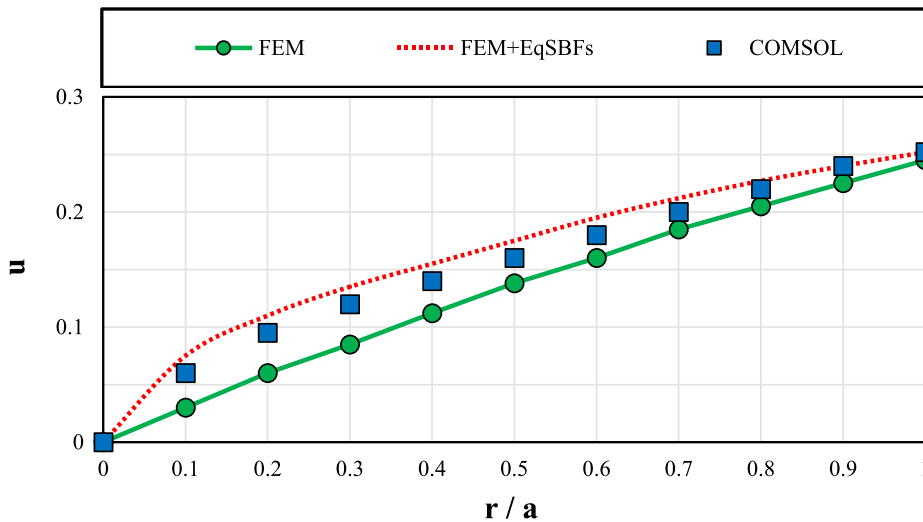
بررسی می شود. حل این مسئله به صورت یک سری در مختصات قطبی طبق رابطه (۴۷) ارائه شده است:

$$u_{ex} = \sum_{i=1}^n a_i r^{\frac{2}{3}(2i-1)} \sin\left(\frac{2}{3}(2i-1)\theta\right) \quad (47)$$

ضرایب  $a_i$  در سری بالا در مرجع [۲۹] ارائه شده است. در ساختار فرمول بالا عبارت تکین از مرتبه  $\frac{2}{3}$  وجود دارد. این



شکل ۲۲- نمودار لگاریتمی درصد خطای میانگین در برابر بعد المان در مثال ۲



شکل ۲۳- مقایسه نتایج حاصل از حل نیمه تحلیلی، روش اجزای محدود و روش حاضر برای تابع حل در مثال ۲ (شکل ۲۰- ب) در راستای ۱۲۰ درجه

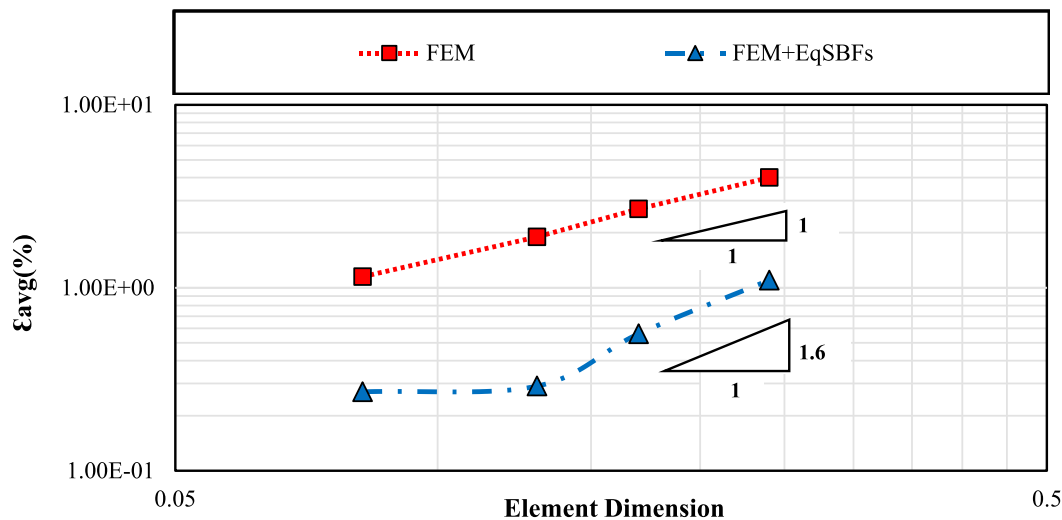
تشکیل مجدد توابع شکل در ساختار جدید، جواب به صورت رابطه (۴۸) به دست می آید. در این وضعیت  $\tilde{\mathbf{N}}$  از نظر ابعاد ماتریسی به بعد  $1 \times 8$  خواهد بود:

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{C}}^+, \quad \hat{\mathbf{u}}^e = \sum_{m=1}^8 \tilde{\mathbf{N}}_m \tilde{\mathbf{u}}_m \quad (48)$$

نکته مهمی که در این مثال وجود دارد، عدم وجود جمله مطابق با مرتبه تکنیکی در پایه های اولیه در امتدادهای زاویه ای و شعاعی است که در این مثال باید جزئی برابر  $\bar{\Gamma}^{6/66}$  باشد. این

اجزای محدود به ازای مقادیر مختلف بعد المان نمایش داده شده است. مشاهده می شود که هر دو مورد درصد خطا و شیب همگرایی پاسخ نسبت به حالت استاندارد بهبود یافته است.

نمودار شکل (۲۳) مقایسه ای از جواب تقریبی مسئله به دو روش مذکور در راستای ۱۲۰ درجه با شبکه المان بندی  $20 \times 20$  را نسبت به حل نیمه تحلیلی آن نشان می دهد. در نزدیکی نقطه تکین برای به دست آوردن جواب مسئله در المان مورد نظر، از روابطی مانند روابط (۳۸) تا (۴۰) استفاده می شود و پس از



شکل ۲۴- نمودار لگاریتمی درصد اختلاف پاسخ مسئله با حل نسبتاً دقیق در برابر بعد المان در مثال ۲

کمتر، تطابق دقیق‌تری با پاسخ حاصل از شبکه متراکم المان در روش اجزای محدود حاصل می‌شود. این مثال نیز به خوبی تأثیر مثبت روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

#### ۳-۴- مسئله هارمونیک در محیط ناهمگن

ساختار دامنه و شرایط مرزی و نیز شبکه‌بندی دامنه حل در این مثال همانند مثال (۱) است (شکل ۸). ضرایب معادله به صورت زیر هستند:

$$D_1 = 2 + \cos \frac{\pi(1+x)}{2}, \quad D_r = 0, \quad D_r = 1 \quad (49)$$

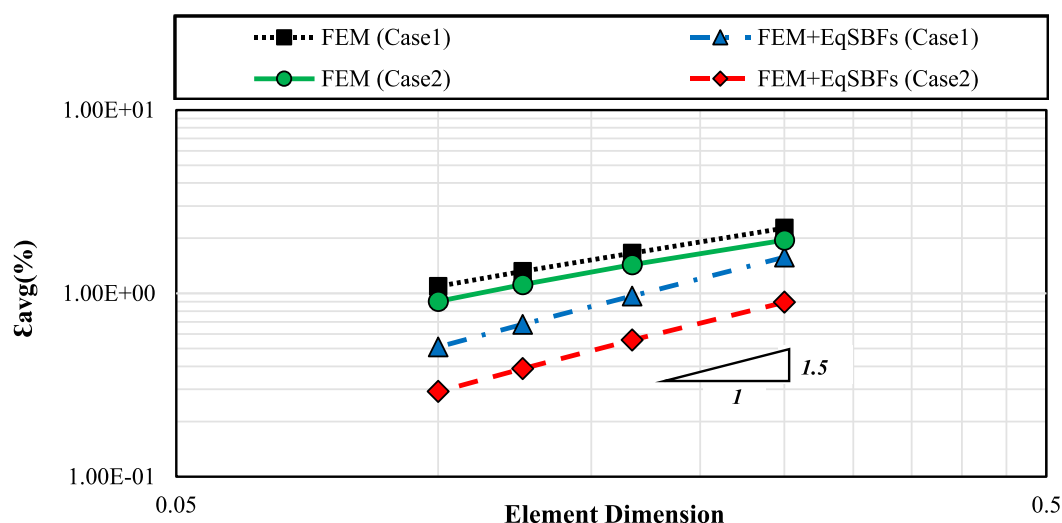
سایر پارامترهای مربوط به توابع پایه متعادل‌شده تکین به صورت  $O_1^S = 10$ ،  $O_1^S = 25$  و  $\beta = \gamma = 0/1$  در نظر گرفته شده‌اند. برای تخمین ضرایب متغیر معادله نیز  $m_r = m_0 = 5$  اختیار شدند. در این مثال همانند مثال (۱)، یک بار با در نظرگیری شبکه با تعداد  $10 \times 19$  المان (حالت ۱ در شکل ۹-الف) و بار دیگر با انتخاب یک شبکه المان‌بندی  $10 \times 20$  (حالت ۲ در شکل ۹-ب) اقدام به حل مسئله می‌شود. شعاع تعریف حل تکین برابر با فاصله نزدیک‌ترین گره المان تکین از مرکز مختصات است، بنابراین برای حالت ۱،  $R = \frac{a}{4}$  و برای حالت ۲،  $R = a$  خواهد بود. دامنه در نظرگیری نقاط نمونه برای تخمین

موضوع نشان‌دهنده توانایی این روش در مدل کردن مرتبه‌های مختلف تکینگی بدون نیاز به وجود جملات معادل آنها در پایه‌های تقریب است که قدم مهمی در زمینه حل مسائل دارای تکینگی ضعیف به‌شمار می‌رود.

در ادامه به منظور مقایسه بهتر روش حاضر با روش‌های موجود، مسئله دیگری در ناحیه L شکل با شرایط مرزی متفاوت به دو روش مورد بحث حل می‌شود (شکل ۲۰-ب). به دلیل در دسترس نبودن جواب دقیق، برای رسیدن به جواب معیار با دقت مناسب از نرم‌افزار تجاری COMSOL استفاده شده است که عملکرد دو روش ذکر شده را بتوان با آن مقایسه کرد. برای مقایسه عملکرد روش‌ها، مسئله به دو روش مذکور و با شبکه المان‌بندی  $12 \times 12$  حل می‌شود و سپس در مقایسه با پاسخ استخراج شده از روش اجزای محدود با المان‌بندی بسیار ریز، درصد خطای میانگین به دست می‌آید.

با انتخاب مناسب پارامترهای حل ( $O_1^S = 10$ ،  $O_1^S = 25$  و  $\beta = \gamma = 0/1$ ) مسئله تحلیل شده و در نمودار شکل (۲۴) درصد اختلاف پاسخ مسئله با حل نسبتاً دقیق ارائه شده است. شبکه‌بندی‌های مورد بررسی به ابعاد  $8 \times 8$ ،  $12 \times 12$ ،  $18 \times 18$  و  $24 \times 24$  (در مربع فرضی محیط بر دامنه حل) هستند. با دقت در نتایج ملاحظه می‌شود در روش حاضر با تعداد المان‌های بسیار

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۹، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۹



شکل ۲۵- درصد خطای میانگین در برابر ابعاد المان برای مسئله هارمونیک در مثال ۳

جدول ۲- درصد خطای میانگین در روش اجزای محدود و روش حاضر

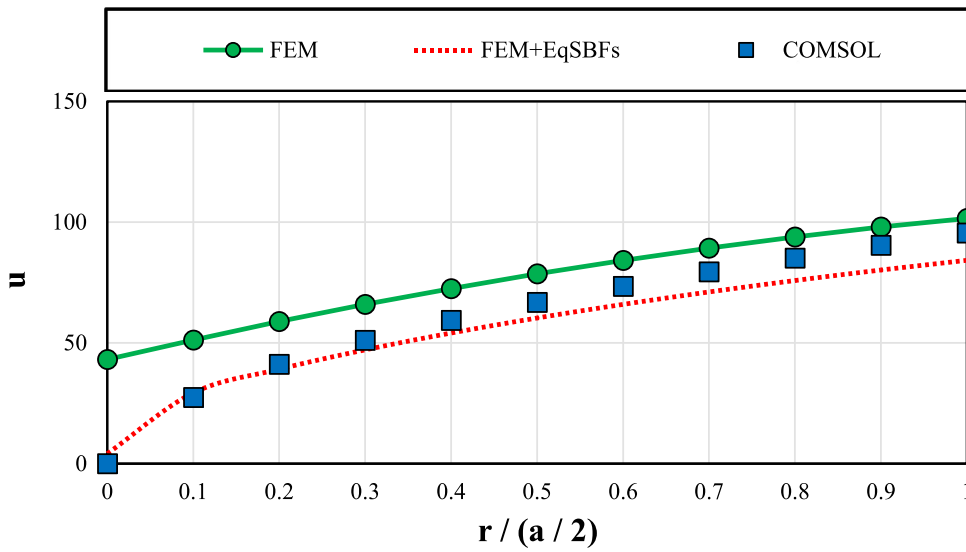
درصد خطای میانگین	روش اجزای محدود	روش حاضر	
		حالت ۱	حالت ۲
$\epsilon_{avg}(\%)$	۱/۰۹۳	۰/۵۱۰	۰/۲۹۱

یابد و این نشان از توانایی روش حاضر است. همچنین برای مقایسه بهتر پاسخ و سنجش چگونگی تطابق آن با پاسخ به دست آمده از نرم افزار اجزای محدود، در شکل (۲۶) برای زاویه  $\theta = 60^\circ$  و تا شعاع  $a/4$  برای حالت ۱ مقدار تابع حل مسئله سنجش می شود. با توجه به این نمودار می توان استنباط کرد که روش حاضر توانسته تا نزدیکی مرکز تکینگی انطباق مناسبی را با پاسخ مرجع فراهم کند. در این شکل کاملاً مشهود است که پایه های هموار روش اجزای محدود به تنهایی قادر به همسو کردن خود با پاسخ نبوده و اثر اضافه شدن پایه های تکین به آنها به وضوح آشکار است.

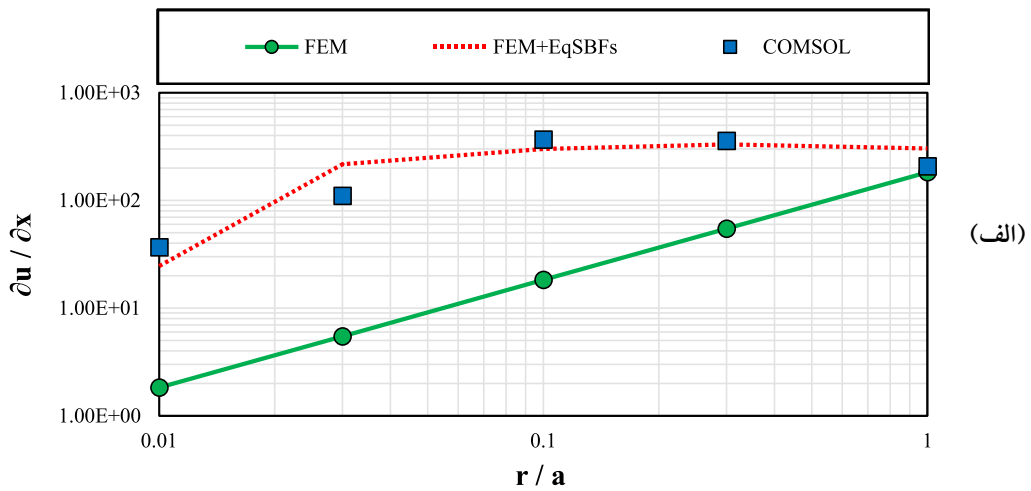
برای نشان دادن تأثیر اضافه شدن پایه های تکین در بهبود مشتقات پاسخ، نمودار مربوط به مشتقات تابع  $(\partial u / \partial x, \partial u / \partial y)$  در حالت ۲ برای راستای  $x$  و زاویه  $\theta = 135^\circ$  در مقایسه با پاسخ حاصل از نرم افزار در شکل (۲۷) نمایش داده شده است. مطابقت خوب نتایج در حالت

ماتریس ضرایب متغیر معادله برای حالت ۱ برابر  $a \times b$  و برای حالت ۲ برابر  $2a \times b$  است؛ که تعداد ۲۰ نقطه در هر راستا روی این دامنه ها انتخاب شده است. درصد خطای میانگین برآورد شده در این مثال با تعداد  $N_E = 220$  برای حالت (۱) و  $N_E = 231$  برای حالت ۲ با استفاده از روش اجزای محدود معمولی و همچنین روش حاضر در هر دو حالت به شرح جدول (۲) به دست آمده است. در شکل (۲۵-ب) تأثیر کاهش ابعاد المان ها بر افزایش دقت مسئله با روش اجزای محدود معمولی و همچنین روش حاضر مشاهده می شود. پاسخ نسبتاً دقیق مسئله بر اساس المان بندی بسیار ریز در روش اجزای محدود حاصل شده است.

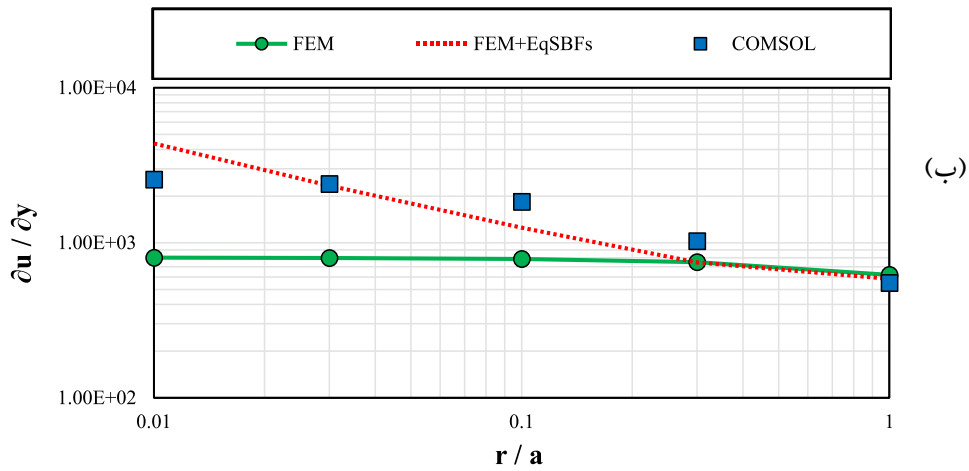
مشاهده می شود که تجهیز تنها یک یا دو المان در ناحیه دارای تکینگی به پایه های متعادل شده تکین، سبب شده تا با نرخ همگرایی بسیار بهتری نسبت به روش اجزای محدود معمولی با تراکم مشابه شبکه المان، به دقت بهتری نیز دست



شکل ۲۶- تغییرات تابع حل  $u$  در راستای  $60^\circ$  درجه از مبدأ برای حالت ۱ تا شعاع  $a/2$  در مثال ۳

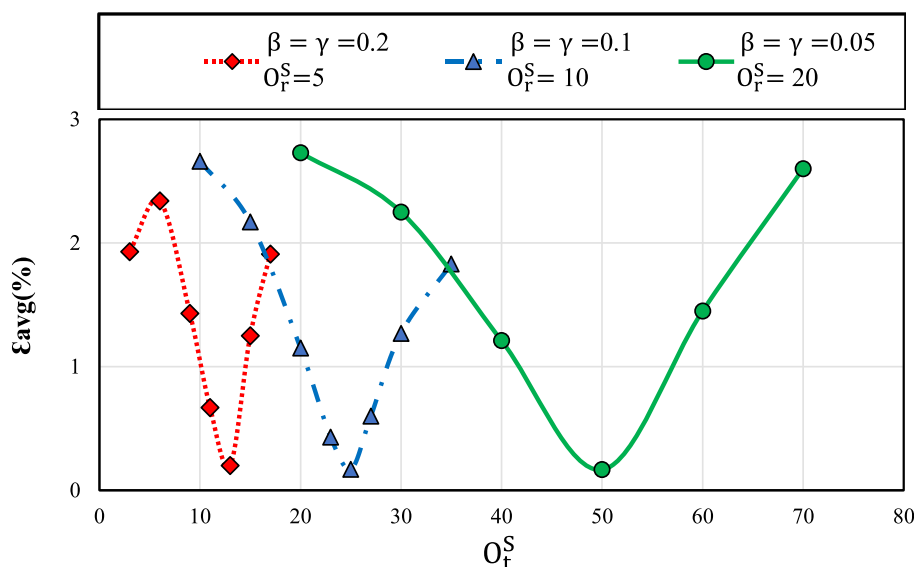


(الف)



(ب)

شکل ۲۷- تغییرات (الف)  $\partial u / \partial x$  و (ب)  $\partial u / \partial y$  در راستای  $135^\circ$  درجه تا شعاع  $a$  در مثال ۳



شکل ۲۸- نمودار تغییرات درصد خطا در برابر تغییرات  $O_t^S$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta = \gamma$

جدول (۳)، نمودار تغییرات درصد خطا در برابر شعاع محدوده تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شف (R) در شکل (۳۰) رسم شده است تا مناسب‌ترین مقدار R برای رسیدن به بهترین نتیجه تعیین شود. با حل هر سه مسئله هارمونیک مطرح شده در این بخش، مقادیر درصد خطا در جدول (۴) نمایش داده شده است. شعاع تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شف در همه مثال‌ها یکسان و برابر با بعد المان است.

با توجه به نتایج فوق و بررسی‌های صورت گرفته، انتخاب  $\beta = \gamma = 0.1$  با توجه به حجم عملیات حل مسئله و دقت حاصل، گزینه مناسب‌تری است. استفاده از این عدد منجر به تعداد جملات کمتر و در نتیجه هزینه محاسبات پایین‌تر نسبت به مقادیر کوچک‌تر از  $0.1$  و احتمال بروز خطای کمتر به دلیل بدرفتاری ماتریس‌های حاصله می‌شود و از طرف دیگر، کیفیت بازسازی پاسخ مسئله در نزدیکی مبدأ مختصات نسبت به مقادیر بزرگ‌تر از  $0.1$  بهتر است. برای مشخص کردن این موضوع از بررسی تغییرات عدد شرط<sup>۱۱</sup> ماتریس سختی مسئله موتز و تعریف پارامتری به نام شبه عدد شرط<sup>۱۲</sup> به شکل زیر استفاده می‌شود [۳۰]:

$$P_c = \frac{S_{max}}{S_{min}} \quad (50)$$

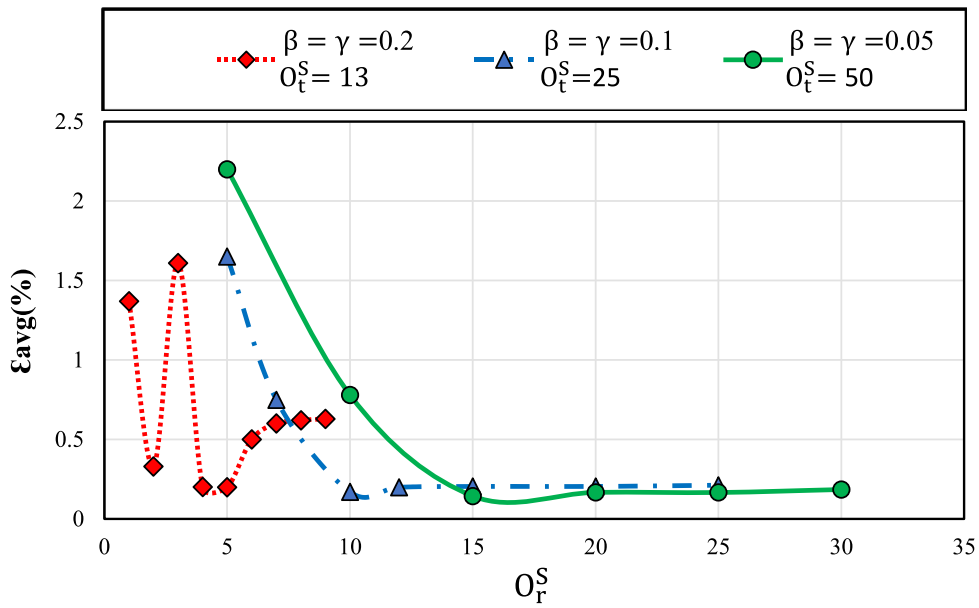
ترکیبی با پاسخ نسبتاً دقیق، نشان از توانایی پایه‌های تکین در کنار پایه‌های هموار روش اجزای محدود است. این در حالی است که رفتار مشتقات تابع در روش اجزای محدود معمولی، کاملاً متفاوت با واقعیت مسئله است.

#### ۴-۴- تعیین پارامترهای روش در حل مسائل تکین

بر اساس بررسی‌های صورت گرفته در مقاله حاضر، تغییر در پارامتر  $\beta$  بر مرتبه‌های مورد استفاده از  $O_r^S$  و  $O_t^S$  مؤثر است. برای مشاهده چگونگی این تأثیر، مسئله موتز با اختصاص یک مقدار ثابت به شعاع تعریف چندجمله‌ای‌های چبی شف (R) و سه مقدار  $0.05, 0.1, 0.2$  به پارامتر  $\beta = \gamma$  حل می‌شود. شبکه‌بندی این مسئله  $10 \times 20$  بوده و شعاع R برابر با بعد المان در نظر گرفته شده است. نمودار شکل‌های (۲۸) و (۲۹) با ثابت فرض کردن یکی از پارامترهای  $O_r^S$  و  $O_t^S$  و تغییر دادن پارامتر دیگر ترسیم شده‌اند. با استفاده از نتایج به دست آمده و بررسی‌های صورت گرفته، پیشنهاداتی برای انتخاب مقادیر مناسب  $O_r^S$  و  $O_t^S$  در مسئله هارمونیک برای مقادیر  $\beta$  و  $\gamma$  در جدول (۳) ارائه شده است.

بار دیگر ضمن حل مسئله موتز با استفاده از پارامترهای

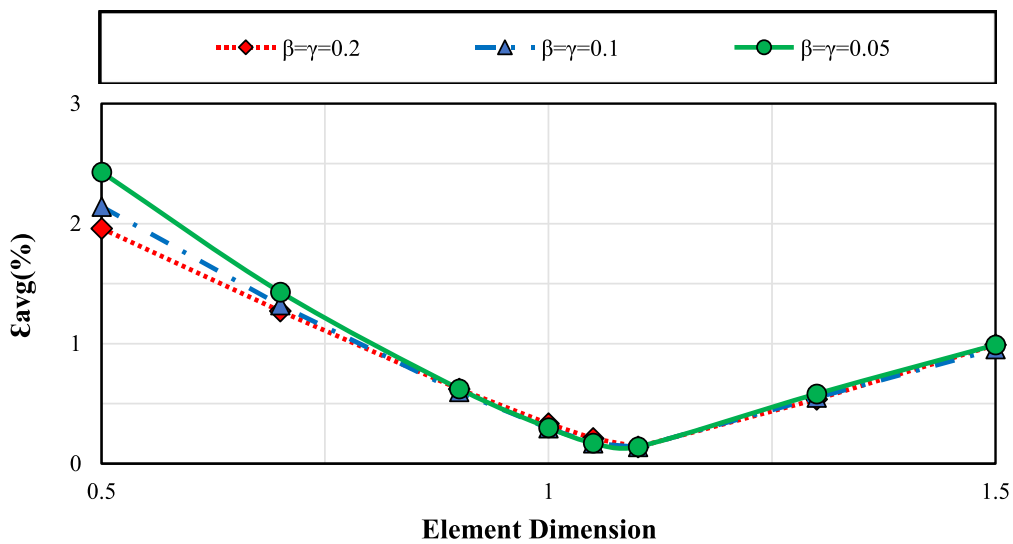




شکل ۲۹- نمودار تغییرات درصد خطا در برابر تغییرات  $O_r^S$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta = \gamma$

جدول ۳- مقادیر مناسب برای  $O_r^S$  و  $O_t^S$  به ازای مقادیر  $\beta$  مختلف

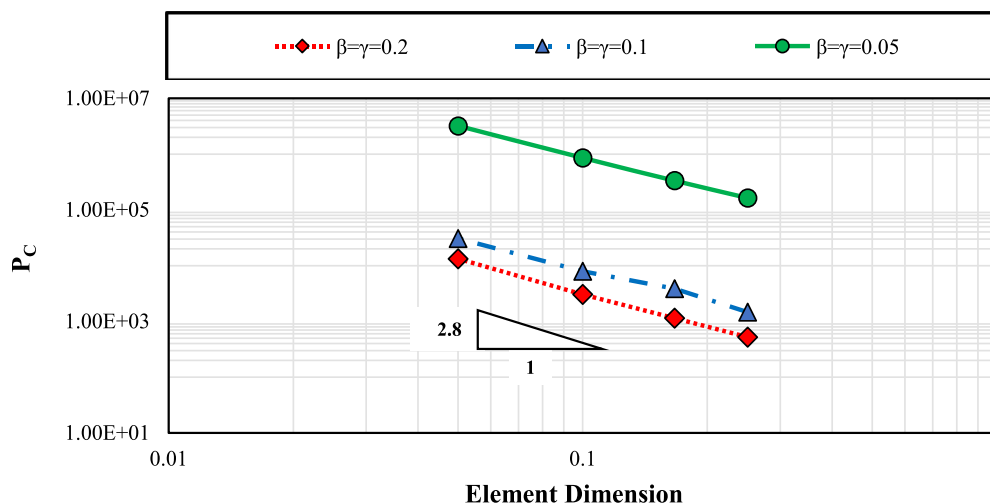
$\beta = \gamma$	$O_r^S$	$O_t^S$
۰/۰۵	۲۰	۵۰
۰/۱۰	۱۰	۲۵
۰/۲۰	۵	۱۳



شکل ۳۰- نمودار تغییرات درصد خطا در برابر تغییرات نسبت شعاع تعریف چندجمله‌ای‌های جیبی شرف (R) به بعد المان

جدول ۴- مقایسه درصد خطای میانگین در برابر  $\beta$

$\varepsilon_{avg}$ (%) درصد خطای میانگین			
$\beta = \gamma$	مثال ۱- حالت ۲	مثال ۲- مورد اول	مثال ۲- مورد دوم
۰/۰۵	۰/۱۷۶	۰/۰۵۹	۰/۳۰۰
۰/۱۰	۰/۱۷۲	۰/۰۵۳	۰/۲۹۰
۰/۲۰	۰/۲۱۰	۰/۰۵۲	۰/۳۱۷



شکل ۳۱- نمودار تغییرات  $P_c$  در برابر تغییرات بعد المان

دارای تکنیکی در روش اجزای محدود ارائه شده است. این المان ها علاوه بر داشتن پایه‌های هموار، به پایه‌های متعادل شده تکین تجهیز شده‌اند تا بتوانند خود را به خوبی با شرایط مسئله به خصوص در نزدیکی نقطه تکین وفق دهند. با استفاده از پایه‌های مذکور در کنار پایه‌های هموار در روش اجزای محدود برای مسائل دارای تکنیکی، می‌توان با تعداد بسیار کمتری المان و با دقت قابل قبولی به پاسخ دقیق مسئله نزدیک شد. این در حالی است که اگر از روش اجزای محدود معمولی برای حل این مسائل استفاده شود، برای بهبود پاسخ باید المان‌بندی بسیار کوچک شود که مستلزم زمان و هزینه زیادی است. در تعیین مقادیر گره‌ای هر المان، گره‌های مربوط به المان‌های تکین مجاور نیز مشارکت داشته و در پیوستگی پاسخ بین المان‌ها نقش اساسی دارند. نتایج تحقیق حاضر بیانگر تأثیر قابل توجه تکنیک پیشنهادی در بهبود پاسخ در مجاورت تکنیکی است.

در رابطه فوق  $S_{min}$  و  $S_{max}$  حداکثر و حداقل قدر مطلق مقادیر منفرد<sup>۱۳</sup> غیر صفر ماتریس مطالعه می‌شود. تغییرات  $P_c$  در برابر ابعاد مختلف المان و برای  $\beta = \gamma$  های مختلف در مسئله موتز در شکل (۳۱) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با انتخاب مقادیر بزرگ‌تر  $\beta = \gamma$ ، عدد شرط کوچک‌تری نتیجه می‌شود. همچنین وضعیت مناسب ماتریس سختی به ازای مقادیر  $\beta = \gamma \geq 0.1$  در این شکل مشخص است. نکته دیگر آن است که استفاده از مقادیر غیر از ۰/۱ برای  $\beta = \gamma$  منجر به ایجاد ناهماهنگی در شعاع تعریف پایه‌های تکین برای رسیدن به بهترین جواب می‌شود.

## ۵- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر یک تکنیک غنی‌سازی بر مبنای استفاده از توابع پایه متعادل شده تکین برای بهبود پاسخ در المان‌های مجاور نقاط

- |                                          |                                           |                             |
|------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. extended finite element method (XFEM) | (FGM)                                     | 10. relaxation method       |
| 2. element free galerkin (EFG)           | 6. extended iso-geometric analysis (XIGA) | 11. condition number        |
| 3. stress intensity factors (SIF)        | 7. Moore-Penrose pseudo-inverse           | 12. pseudo condition number |
| 4. collocation trefftz method            | 8. connectivity matrix                    | 13. singular values         |
| 5. functionally graded materials         | 9. partition of unity (PU)                |                             |

## مراجع

1. Khoei, A. R., "Extended Finite Element Method: Theory and Applications" John Wiley & Sons, 2014.
2. Möes, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp.131- 150, 1999.
3. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B., and Belytschko, T. "Enriched Element-Tree Galerkin Methods for Crack Tip Fields", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 483-504, 1997.
4. Hu, Y. Z., Li, Z. C., and Cheng, A. H. D., "Radial Basis Collocation Methods for Elliptic Boundary Value Problems", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 50, pp. 289-320, 2005.
5. Nasr-Esfahani, M. "Solution of Singular Problems Using Mesh-Less Local Exponential Basis Functions", M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Isfahan, 2014. (In Farsi)
6. Mossaiby, F., Bazrpach, M., and Shojaei, A., "Extending the Method of Exponential Basis Functions to Problems with Singularities", *Engineering Computations*, Vol. 32, pp. 406-423, 2015.
7. Brahtz, J. H. A., "Stress Distribution in a Re-Entrant Corner", *Transactions of ASME*, Vol. 55, pp. 31-37, 1933.
8. Williams, M. L. "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 526-528, 1952.
9. Li, Z. C., Chu, P. C., Young, L. J., and Lee, M. G. "Models of Corner and Crack Singularity of Linear Elastostatics and their Numerical Solutions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, pp. 533-548, 2010.
10. Li, Z. C., Lu, T. T., and Hu, H. Y. "The Collocation Trefftz Method for Bi-Harmonic Equations with Crack Singularities", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, pp. 79-96, 2004.
11. Dolbow, J., Moes, N., and Belytschko, T. "Modeling Fracture in Mindlin-Reissner Plates with the Extended Finite Element Method", *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 37, pp. 7161-7183, 2000.
12. Ting, T. C. T., and Chou, S. C. "Edge Singularities in Anisotropic Composites", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, pp. 1057-1068, 1981.
13. Mantič, V., París, F., and Cañas, J. "Stress Singularities in 2D Orthotropic Corners", *International Journal of Fracture*, Vol. 83, pp. 67-90, 1997.
14. Wu, Z., and Liu, Y. "Analytical Solution for the Singular Stress Distribution due to V-Notch in an Orthotropic Plate Material", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 2367-2384, 2008.
15. Erdogan, F., and Wu, B. H. "Cracked Problems in FGM Layers Under Thermal Stresses", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 237-265, 2007.
16. Bayesteh, H., and Mohammadi, S. "XFEM Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials", *Composites: Part B*, Vol. 44, pp. 8-25, 2013.
17. Pathak, H. "Three-Dimensional Quasi-Static Fatigue Crack Growth Analysis in Functionally Graded Materials (FGMs) Using Coupled FE-XEFG Approach", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 92, pp. 59-75, 2017.
18. Bhardwaj, G., Singh, I. V., Mishra, B. K., and Bui, T. Q. "Numerical Simulation of Functionally Graded Cracked Plates Using NURBS based XIGA under Different Loads and Boundary Conditions", *Composite Structures*, Vol. 126, pp. 347-359, 2015.
19. Abdollahifar, A., Nami, M. R. and Saranjam, B. "Mixed-Mode Dynamic Fracture Analysis of FGM Plate by Mesh-Free Method", *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, Department of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, 2014. (In Farsi)
20. Soghrati, S. "Implementation of Smooth Fundamental Solutions in Solving Some Governing Differential Equations in Solid Mechanics", M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, 2007. (In Farsi)
21. Mossaiby, F. "Solution of Solid Mechanics' Problems in Bounded and Unbounded Domains using Semi-Analytic and Finite Element Methods", Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, 2010. (In Farsi)
22. Noormohammadi, N. "Solution of Solid Mechanics

- Problems Using Generalized Basis Functions”, M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, 2011. (In Farsi)
23. Noormohammadi, N. “Solution of Solid Mechanics Problems Using Equilibrated Basis Functions and Mesh-Free Methods”, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, 2015. (In Farsi)
  24. Bateniparvar, O., Noormohammadi, N., and Boroomand, B. “Singular Functions for Heterogeneous Composites with Cracks and Notches; the Use of Equilibrated Singular Basis Functions”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 79, pp. 1461-1482, 2020.
  25. Noormohammadi, N., and Boroomand, B. “A Fictitious Domain Method Using Equilibrated Basis Functions for Harmonic and Bi-Harmonic Problems in Physics”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp.189-217, 2014.
  26. Bateniparvar, O., “Solution of Problems with Weak Singularities in Heterogeneous Media Using Equilibrated Basis Functions and the Finite Element Method”, M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, 2019. (In Farsi)
  27. Motz, H. “The Treatment of Singularities of Partial Differential Equations by Relaxation Methods”, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 4, pp. 371-377, 1947.
  28. Szabo, B. A., and Babuska, I. “Computation of the Amplitude of Stress Singular Terms for Cracks and Reentrant Corners”, *Washington University, Report WU/CCM*, 1986.
  29. Elliotis, M., Georgiou, G., and Xenophontos, C. “Solving Laplacian Problems with Boundary Singularities: a Comparison of a Singular Function Boundary Integral Method with the P/HP Version of the Finite Element Method”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, pp. 485-499, 2005.
  30. Boroomand, B., and Noormohammadi, N. “Weakly Equilibrated Basis Functions for Elasticity Problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 1712-1727, 2013.