

## تحلیل کمانشی ستون‌های نامنشوری با بار محوری غیریکنواخت با روش بدون شبکه پتروف-گالرکین

فاطمه حیدر قیطاقی، محمد حسین قدیری راد و مجید کاظمی\*  
گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۳/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۲/۲۹)

**چکیده** - استفاده از اعضای سازه‌ای نامنشوری برای بهینه‌سازی هزینه و مقاومت در حال افزایش است. در شرایط یکسان، مقاطع اعضا در سازه‌های فولادی نازک‌تر از سازه‌های بتنی است، بنابراین تحلیل کمانشی در سازه‌های فولادی از اهمیت بیشتری برخوردار است. تعیین بار بحرانی ستون‌هایی که ممان اینرسی در طول آنها متغیر است با استفاده از روش تحلیلی، زمان زیادی از کاربر می‌گیرد. در این مقاله تحلیل کمانشی ستون‌های نامنشوری فولادی با ممان اینرسی متغیر در طول ستون با بهره‌جویی از روش بدون شبکه پتروف-گالرکین انجام شده است. در این روش نیازی به شبکه‌بندی مسئله نیست و با توزیع تعدادی گره به صورت منظم یا نامنظم، دامنه و مرزهای مسئله مشخص می‌شود. تغییرات ممان اینرسی در طول ستون با استفاده از یک تابع توانی با ضریب نامنشوری و توان متغیر مدل‌سازی شده است. برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار کمانشی ستون‌ها، از تابع درون‌یاب شعاعی و برای برقراری شرایط مرزی ستون از روش جریمه (پنالتی) استفاده شده است. مقایسه نتایج عددی روش پیشنهادی با نتایج روش‌های تحلیلی نشان می‌دهد که روش بدون شبکه در محاسبه بار کمانشی ستون‌های نامنشوری، از دقت بسیار بالایی برخوردار است. در ادامه، به کمانش ستون‌های ماهیچه‌ای با بار محوری متغیر در طول ستون به‌عنوان یک نمونه ستون پرکاربرد در مهندسی عمران برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی پرداخته شده است. در پایان، اثر پارامترهای مختلف از جمله غیریکنواخت بودن بار و نحوه تغییرات تدریجی ممان اینرسی در طول ستون، روی بار کمانشی ستون بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: ستون‌های نامنشوری، روش بدون شبکه پتروف-گالرکین، کمانش ستون، تابع پایه شعاعی، مقدار ویژه.

## Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Subjected to Non-Uniform Loading Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method

F. Heidargheitaghi, M. H. Ghadiri Rad, and M. Kazemi\*

Department of Civil Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

**Abstract:** *Continuously varying cross-section members have found wide applications in engineering for cost and resistance*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: kazemi\_majid@qiet.ac.ir

optimization. Since steel structures generally have more slender members compared to concrete structures, buckling analysis of steel members is of more importance. Determining the critical load of functionally varying cross-section columns using the analytical solution is a time-consuming process. In this paper, buckling analysis of non-prismatic steel columns is conducted using the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. In meshless methods, the scattered nodes are used rather than the elements to model the problem domain and its boundaries. The change of the inertia moment within the length of a column is characterized by introducing a power function with variable taper ratio and exponent. The radial basis function is used to discretize the differential equation governing the buckling. The penalty method is used for the imposition of the boundary conditions. Numerical examples of the critical buckling load for prismatic and non-prismatic columns using the proposed method are compared with the analytical solution, and the effectiveness of the MLPG method for buckling analysis of non-prismatic columns is validated. Also, buckling analysis of muscle column members subjected to non-uniform axial load is carried out to show the efficiency of the proposed method. The effect of several parameters such as non-uniformity of the load and variation of the cross-section on the buckling load of the column is discussed in details.

**Keywords:** Non-Prismatic Columns; Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method; Buckling; Radial Basis Function; Eigen-Value.

## فهرست علائم

|                            |            |                               |                   |
|----------------------------|------------|-------------------------------|-------------------|
| نیروی محوری                | P          | ضرایب تابع شعاعی              | $a_i$             |
| بار بحرانی کمانش           | $P_\alpha$ | پارامترهای تابع درونیاب شعاعی | q و c             |
| تابع پایه شعاعی            | $R_i(x)$   | ضریب کشسانی                   | E                 |
| تغییر شکل عمود بر محور تیر | U          | ممان اینرسی بیشینه مقطع ستون  | $I_0$             |
| نیروی برشی                 | V          | ممان اینرسی کمینه مقطع ستون   | $I_1$             |
| محور در راستای طول ستون    | x          | تغییرات ممان اینرسی           | I(X)              |
| ضریب بار                   | $\alpha$   | ماتریس سختی                   | [k]               |
| مرز دامنه مسئله            | $\Gamma$   | ماتریس سختی ناشی از بار محوری | [k <sub>P</sub> ] |
| نسبت نامنشوری              | $\eta$     | طول ستون                      | L                 |
| دامنه مسئله                | $\Omega$   | لنگر خمشی                     | M                 |
| تابع وزن                   | $\varphi$  | ضریب شکل                      | n                 |
| تابع شکل                   | $\phi$     | تعداد گره                     | $n_x$             |
|                            |            | مرکز مختصات                   | O                 |

## ۱- مقدمه

مقاومت ستون‌ها و کاستن از هزینه‌های اجرایی، استفاده از ستون‌های نامنشوری رو به گسترش است. از آنجا که معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار کمانشی ستون، برای ستون‌های با ممان اینرسی متغیر در طول آن به روش تحلیلی نیازمند فرایندی پیچیده و زمان‌بر است، استفاده از روش‌های عددی برای این نوع ستون‌ها مناسب‌تر است. در ادامه به برخی از روش‌های حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش ستون‌های نامنشوری پرداخته می‌شود.

تأمین پایداری ستون‌ها یکی از مهم‌ترین مسائل در سازه‌های مهندسی عمران است. از اینرو تعیین دقیق بار کمانشی ستون‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. پژوهشگران تاکنون از روش‌های مختلفی برای تعیین نیروی بحرانی ستون‌ها استفاده کرده‌اند. شایان ذکر است اساس کار این روش‌ها، حل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار عضو سازه‌ای است، که تحت اثر نیروی محوری و جانبی قرار دارد [۱-۳]. به‌منظور تأمین همزمان

در سال ۱۹۸۰ ایرومنگر برای تعیین نیروی کمانش ستون های مخروطی و تکه‌ای از روش تفاضل محدود استفاده کرد [۴]. ارموپولوس و کنادیس پایداری قاب‌های با مقطع متغیر را مورد بررسی قرار دادند [۵]. آنها برای پیدا کردن ماتریس سختی خمشی معادل عضو نامنشوری، از تابع تغییرشکل عضو منشوری معادل استفاده کردند. اسمیت روش تحلیلی کمانش ستون‌های مخروطی را با استفاده از روش انرژی ارائه داد [۶]. او با تحلیل کمانشی ستون‌ها با شرایط مرزی مختلف، کارایی روش پیشنهادی را نشان داد. ویلیامز و استون یک روش تقریبی برای تحلیل کمانشی ستون‌های با بار محوری غیریکنواخت ارائه کردند [۷]. ارزیابی این روش تقریب نشان داد که این روش همواره از نظر مقاومتی در جهت اطمینان است اما ممکن است از نظر اقتصادی به صرفه نباشد [۷]. بیشینه خطای این روش برای مثال‌های عملی ۱۰٪ به دست آمد. اربابی و لی با استفاده از روش نیمه تحلیلی معادلات انتگرالی مسئله کمانش کشسان با تغییرات ضخامت ستون در طول آن را مورد بررسی قرار دادند [۸]. بررسی کمانش ستون‌ها با تغییرات خطی سختی خمشی در طول ستون توسط سیگنر با استفاده از روش تحلیلی انجام شد [۹]. القحطانی رفتار خمشی و کمانشی تیرستون‌ها با مقطع متغیر را با استفاده از روش انتگرال مرزی مورد بررسی قرار داد [۱۰]. او روابطی برای بهینه‌سازی شکل تیرستون‌های نامنشوری در قاب‌ها ارائه داد. بازئوس و کارابالیس بار بحرانی قاب‌های صفحه‌ای دارای اعضای نامنشوری را با استفاده از روش تقریبی محاسبه کردند [۱۱]. آنها در این روش از ستون معادل (هم‌طول و منشوری) که ممان اینرسی آن با استفاده از نمودارهای بدون بعد به دست می‌آید، بهره بردند. رافتویانیس و همکاران در سال ۲۰۰۶ پایداری ستون‌های دویل نامنشوری تحت اثر فشار محوری و خمش دومی‌محوره را مورد بررسی قرار دادند [۱۲]. تحلیل کمانشی ستون‌های نامنشوری با تکیه‌گاه گیردار ساخته شده از مواد هدفمند توسط سینگ و لی در سال ۲۰۰۹ انجام شد [۱۳]. آنها تغییرات تدریجی سختی خمشی در طول ستون به دلیل تغییرات تدریجی در خواص ماده یا تغییر در

خصوصیات هندسی ستون را با یک ستون معادل با تغییرات در چند قسمت که هر قسمت خصوصیات هندسی و مکانیکی ثابتی دارد، تقریب زدند. درهمین سال کاسگن و آتای یک روش نمودی-تکراری برای به دست آوردن بار بحرانی ستون‌های کشسان با مقطع عرضی ثابت و متغیر پیشنهاد دادند [۱۴]. رفتار کمانشی ستون‌ها با مقطع متغیر تحت اثر نیروی محوری گسترده توسط دربندی و همکاران در سال ۲۰۱۰ مورد مطالعه قرار گرفت [۱۵]. آنها راه حلی بر اساس روش ونترل-کرامرس-بریلوان ارائه دادند و بر اساس روش تیر اولر-برنولی، ستون را الگوسازی کردند و بارهای کمانشی و موده‌های کمانشی را از طریق روش تحلیلی بسته به دست آوردند. وی و همکاران پایداری ستون‌های کشسان نامنشوری تحت اثر وزن خود و بار انتهایی متمرکز را با استفاده از روش انتگرالی مورد مطالعه قرار دادند [۱۶]. آنها برای شرایط مرزی مختلف اثر نسبت مخروطی را بر بار کمانشی ستون بررسی کردند. سرنا و همکاران در سال ۲۰۱۱ بر اساس یک مطالعه آماری گسترده، یک روش تحلیلی بسته برای بار کمانشی اعضا با سطح مقطع ثابت با بار محوری غیریکنواخت ارائه دادند [۱۷]. هوآنگ و لو راه حلی تحلیلی برای تعیین نیروی کمانشی ستون‌ها با مقطع عرضی متغیر و تکیه‌گاه‌های کشسان در سال ۲۰۱۱ ارائه دادند [۱۸]. آنها همچنین راهکاری برای طراحی بهینه کمانشی ستون‌ها پیشنهاد دادند. جمالی در سال ۲۰۱۲ از روش تکراری تغییرات برای حل معادله کمانش ستون‌ها با مقاطع عرضی ثابت و متغیر استفاده کرد [۱۹]. در پژوهشی دیگر پینار باسی از این روش برای تحلیل کمانش ستون‌های نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان بهره برد [۲۰]. طاها و اسام رفتار پایداری و ارتعاش آزاد ستون‌های نامنشوری زیر اثر بارگذاری محوری با تکیه‌گاه‌های کشسان را با بهره‌جویی از حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم مورد بررسی قرار دادند [۲۱]. آنها معادلات دیفرانسیل را به یک سیستم همگن از معادلات جبری تبدیل کردند. همچنین شرایط مرزی را گسسته‌سازی کرده و در معادلات حاکم جایگذاری کردند. ژانگ و همکاران رفتار

پایداری ستون‌ها بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا توسط ما و همکاران انجام شد [۲۸]. آنها نتایج به‌دست آمده از تئوری مرتبه بالاتر را با نتایج حاصل از تئوری تیموشنکو مقایسه کردند.

با پدید آمدن نرم‌افزارهای پیشرفته، روش‌های عددی مختلفی برای تحلیل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش ستون‌ها پیشنهاد شده است. روش اجزای محدود پرکاربردترین روش عددی در حل معادلات دیفرانسیل است که در این روش المان نقش اساسی در تشکیل دادن توابع شکل و محاسبه انتگرال‌ها دارد [۲۹]. به‌علت وابستگی روش اجزای محدود به جزء، برخی محدودیت‌ها نظیر نیاز به ثابت بودن ویژگی‌های هندسی و مکانیکی هر جزء ایجاد می‌شود. در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده و بستر مناسبی در زمینه‌های علمی و تحقیقاتی را به‌وجود آورده است. در روش‌های بدون شبکه برای حل مسئله نیازی به شبکه‌بندی دامنه مسئله نیست و با استفاده از توزیع گره‌ها دامنه مسئله مشخص می‌شود. از این‌رو در این روش‌ها، تغییرات تدریجی در مشخصات هندسی سازه و ویژگی‌های ماده به‌سادگی مدل‌سازی می‌شود.

تاکنون روش‌های بدون شبکه مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل پیشنهاد شده است که هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند [۳۰-۳۴]. یکی از مشهورترین روش‌های بدون شبکه که برای گسسته‌سازی دامنه و همچنین محاسبات انتگرال‌ها نیاز به شبکه‌بندی دامنه مسئله ندارد و یک روش بدون شبکه واقعی به‌شمار می‌آید، روش بدون شبکه پتروف گالرکین<sup>۱</sup> (MLPG) است که نخستین بار توسط ژو و همکاران پیشنهاد شد [۳۰] و در ادامه توسط آتلوری و ژانگ اصلاح شد [۳۴]. این روش در حل بسیاری از مسائل پیچیده مهندسی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. برای نمونه، آتلوری و همکاران از روش MLPG برای تحلیل تیرهای نازک زیر اثر بارهای مختلف و با شرایط انتهایی گوناگون بهره بردند [۳۵]. چینگ و بترا جهت رشد ترک خطی را با استفاده از این روش تعیین کردند [۳۶]. ژو و لیو صفحه‌های نازک در حالت سکون و ارتعاش آزاد را

کمانش کشسان ستون‌های دابل نامنشوری با مقطع عرضی توپر دایره‌ای و لوله‌ای را مورد مطالعه قرار دادند [۲۲]. آنها برای محاسبه بار بحرانی کمانش از تابع‌های بسط و فرآیند برازش داده‌ها استفاده کردند. در انتها یک رابطه تعامل  $P_M$  (رابطه تعامل نیروی محوری-لنگر خمشی) برای پیش‌بینی مقاومت ستون‌های مخروطی تحت بار محوری و لنگر خمشی ارائه کردند. رضایی پزند و همکاران روش تحلیلی دقیقی برای محاسبه بار بحرانی کمانش قاب‌های پرتال نیمه صلب با ستون‌های مخروطی ارائه دادند [۲۳]. آنها با استفاده از روش پیشنهادی، تأثیر پارامترهایی نظیر نسبت نامنشوری، سختی اتصالات و تکیه‌گاه‌های کشسان و مهار جانبی قاب را بر طول کمانشی ستون به‌صورت پارامتری بررسی کردند. رضایی پزند و همکاران در پژوهشی دیگر روش ماتریس سختی را ارائه دادند که برای تجزیه و تحلیل اعضای مختلف نامنشوری استفاده شده در قاب مسطح کارایی دارد [۲۴]. روش پیشنهادی در این مقاله روشی عمومی است که می‌تواند برای تحلیل قاب‌های مسطح با انواع اتصالات و تکیه‌گاه‌ها مورد استفاده قرار گیرد. رضایی پزند و مسعودی در سال ۲۰۱۸ تحلیل کمانشی و ارتعاش آزاد قاب‌های مسطح نامنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی با در نظر گرفتن اتصالات نیمه صلب را به روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند [۲۵]. آنها برای مدل‌سازی اتصالات نیمه‌صلب از فنرهای انتقالی و دورانی در اتصالات استفاده کردند. لی و لی در سال ۲۰۱۹ یک مدل تحلیلی برای یافتن بار کمانشی ستون‌های اولر-برنولی ساخته شده با مواد متغیر تدریجی در راستای طولی ستون ارائه کردند [۲۶]. آنها اثر نسبت مدولار، نسبت نامنشوری، شکل مقطع و شرایط تکیه‌گاهی را بر بار کمانشی ستون بررسی کردند. لانک و همکاران با استفاده از روش رایلی-ریتز به تحلیل کمانشی ستون‌های ساخته شده از مواد متغیر تدریجی پرداختند [۲۷]. آنها مدول الاستیسیته در جهت ارتفاع ستون را به‌صورت تابع توزیع توانی متغیر فرض کردند و اثر ثابت توانی را بر بار کمانشی ستون مورد ارزیابی قرار دادند. در سال ۲۰۲۱، تحلیل

شبکه برخلاف روش اجزای محدود که در آن ماتریس سختی پیش از تحلیل تعریف می‌شود، ماتریس سختی در حین تحلیل تشکیل می‌شود. بنابراین در هنگام تشکیل ماتریس سختی می‌توان خصوصیات هر گره را بر اساس مختصات گره مزبور تعریف کرد. در نتیجه روش بدون شبکه روش مؤثری برای مدل‌سازی تغییرات تدریجی در ویژگی‌های سازه است.

در این مقاله کمانش ستون‌های نامنشوری که تغییرات ممان اینرسی مقطع در طول آنها با توابع مختلفی نظیر خطی و توانی مدل‌سازی شده است، بررسی می‌شود. به این منظور روش بدون شبکه MLPG برای تحلیل کمانشی ستون‌های دو سر مفصل بر پایه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کمانش به کار گرفته شده است. با راستی آزمایشی نتایج به دست آمده با روش‌های تحلیلی، دقت و کارایی روش پیشنهادی نشان داده شده است. همچنین با حل مثال‌های عددی، اثر پارامترهای مختلف نظیر ضریب شکل، ضریب بار و نسبت نامنشوری بر بار کمانشی ستون‌ها بررسی شده است.

## ۲- معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش ستون نامنشوری

یک عضو تحت اثر نیروی فشاری و جانبی مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش جزء بدون در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های حاصل از نیروی برشی و محوری به صورت رابطه زیر به دست می‌آید [۲]:

$$EI(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} + PV = 0 \quad (1)$$

که در آن  $E$  ضریب کشسانی و  $I(x)$  تغییرات ممان اینرسی مقطع در طول محور تیر است. حل معادله (۱) به روش تحلیلی برای هر نوع تغییرات ممان اینرسی، نیازمند عملیات پیچیده ریاضی است که این امر نیازمند صرف زمان زیادی است [۲۴].

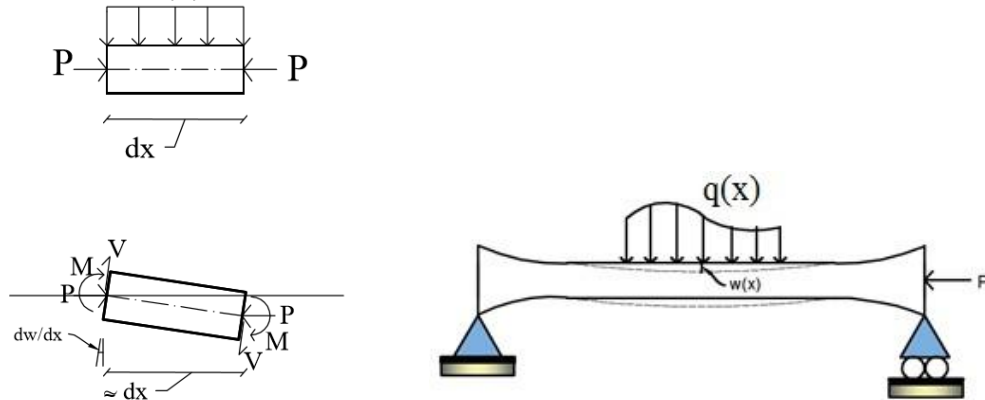
## ۳- تابع شکل

در روش MLPG، توابع درون‌یاب با استفاده از مقادیر تابع در گره‌های موجود در دامنه تحت پوشش نقطه مورد نظر (نقاط

با استفاده از همین روش تحلیل کردند [۳۷]. لانگ و آتوری از روش بدون شبکه MLPG برای حل مسئله خمش صفحه‌های نازک استفاده کردند [۳۸]. راجو و فیلیس این روش را در سال ۲۰۰۳ توسعه دادند [۳۹]. در ادامه راجو از روش بدون شبکه MLPG برای تحلیل پایداری ستون تحت اثر نیروهای دنبال‌گر بهره برد [۴۰]. اسلادک و همکاران برای تحلیل صفحه‌های نازک ارتوتروپیک از این روش استفاده کردند [۴۱]. ارژنگ‌پی و همکاران با استفاده از این روش، کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک را تحلیل کردند [۴۲]. آنها با حل مثال‌های متنوع همگرایی و دقت روش بدون شبکه MLPG را در تحلیل کمانشی پوسته‌ها با شرایط مرزی مختلف و پارامترهای هندسی متنوع ثابت کردند. در پژوهشی دیگر، انصاری و ارژنگ‌پی ارتعاش آزاد و کمانش محوری نانولوله‌های کربنی تک جداره با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را مورد بررسی قرار دادند [۴۳].

بیشتر تلاش‌های انجام شده پیرامون کمانش ستون‌های نامنشوری بر اساس روش‌های تحلیلی انجام شده است. بنابراین برای هر نوع تابع تغییر ممان اینرسی، تعیین بار کمانشی اعضاء نامنشوری نیاز به محاسبات زیاد ریاضی دارد [۲۴]. از سوی دیگر با وجود کاربرد مناسب روش‌های عددی کلاسیک نظیر اجزای محدود در بسیاری از مسائل، در برخی از مسائل مهندسی نیاز به صرف زمان زیاد برای شبکه‌بندی مسئله به‌ویژه در سازه‌های با هندسه خاص (ستون‌های نامنشوری) و شرایط مرزی پیچیده، سبب کاربرد دشوار این روش می‌شود [۴۴]. افزون بر این، در روش‌های معمول اجزای محدود، در هر جزء مشخصات مکانیکی و هندسی ثابت است و باید برای در نظر گرفتن تغییرات شدید در هندسه از تعداد جز بسیار زیاد استفاده کرد. در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه برای حل این مشکلات مورد توجه قرار گرفته است. در این روش برای حل مسئله نیازی به شبکه‌بندی نیست و برای شبیه‌سازی و حل مسائل با هندسه خاص و شرایط مرزی پیچیده از توزیع تعدادی گره استفاده می‌شود [۴۵]. خاطر نشان می‌سازد در روش بدون

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰



شکل ۱- ستون تحت بار محوری و جانبی

تعیین شده است. با اعمال رابطه (۲) برای تمام گره‌های واقع در دامنه تحت پوشش گره  $X_Q$  می‌توان نوشت:

$$\{V\} = [R_Q] \{a\} \quad (6)$$

که در آن بردار  $\{V\}$  مقادیر گره‌ی تابع در تمام گره‌های واقع در دامنه تحت پوشش و  $[R_Q]$  ماتریسی متقارن است که سطرهای آن مقدار تابع پایه شعاعی در نقاط گره‌ی واقع در دامنه تحت پوشش است. بردارها و ماتریس‌های رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{V\}^T = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} \quad (7)$$

$$[R_Q] = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (8)$$

اگر ماتریس  $[R_Q]$  معکوس پذیر باشد، بردار ضرایب تابع پایه شعاعی را می‌توان با استفاده از رابطه (۹) محاسبه کرد:

$$\{a\} = [R_Q]^{-1} \{V\} \quad (9)$$

در ادامه با جایگزین کردن رابطه (۹) در رابطه (۲)، ماتریس تابع شکل شعاعی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$V^h(x) = [R^T(r)] \{a\} = \left( [R^T(r)] [R_Q]^{-1} \right) \{V\} = [\phi] \{V\} \quad (10)$$

که در آن:

$$[\phi] = [R(r)]^T [R_Q]^{-1} \quad (11)$$

گاوسی، تقریبی از این تابع را ارائه می‌دهند. در این پژوهش برای درونیابی نقاط از روش تابع پایه شعاعی<sup>۲</sup> (RPIM) استفاده می‌شود. تابعی مانند  $V(x)$  که در دامنه تحت پوشش نقطه مورد نظر  $\Omega$  تعریف شده است را در نظر بگیرید. با استفاده از روش درونیابی تابع پایه شعاعی، می‌توان این تابع را بر حسب مقادیر گره‌ی نقاط واقع در دامنه تحت پوشش نقطه  $X_Q$  که مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده  $X_i$  است، به صورت سری محدود زیر تخمین زد [۴۷]:

$$V^h(x) = \sum_{i=1}^n R_i(r) a_i = [R^T(r)] \{a\} \quad (2)$$

در این رابطه  $R_i(r)$  تابع پایه شعاعی،  $a_i$  ضرایب تابع پایه شعاعی و  $n$  تعداد گره‌های موجود در دامنه تحت پوشش است.

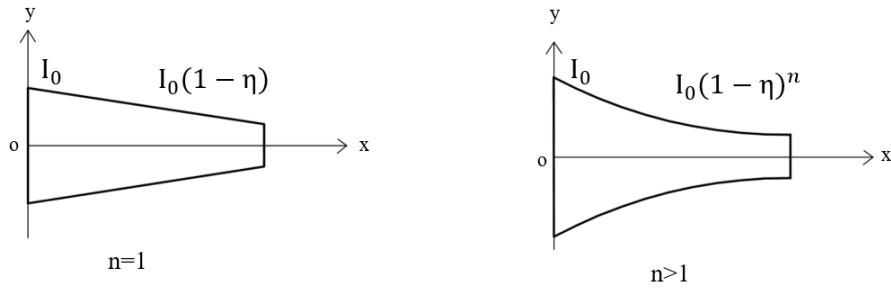
$$\{a\}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (3)$$

$$[R^T(r)] = \{R_1(r), \dots, R_n(r)\} \quad (4)$$

در این مقاله از تابع پایه شعاعی مولتی کوادریک<sup>۳</sup> استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(r) = (r_i^2 + c^2)^q \quad (5)$$

$r_i$  فاصله نقطه مورد نظر  $X_Q$  تا گره‌های واقع در دامنه تحت پوشش  $X_i$  است. ثابت‌های  $c$  و  $q$ ، پارامترهای شکل تابع مولتی کوادریک است. لیو مقادیر مختلف این پارامترها را برای رسیدن به دقت مناسب پیشنهاد داده است [۴۷]. در این تحقیق به صورت تجربی مقدار  $c$  برابر میانگین فاصله گره‌ی و  $q$  برابر  $1/0.3$



شکل ۲- نحوه تغییرات ممان اینرسی در طول ستون [۴۸]

جدول ۱- ضریب شکل مربوط به مقطع‌های عرضی مختلف در ستون نامنشوری [۴۸]

| شکل مقطع | شرح  | ضریب شکل |
|----------|--|----------|
|          | مقطع مستطیلی با ضخامت ثابت و عرض متغیر     | $n = 1$  |
|          | مقطع با جان باز با مساحت ثابت و عمق متغیر  | $n = 2$  |
|          | مقطع مستطیلی توپر با عرض ثابت و عمق متغیر  | $n = 3$  |
|          | مقطع‌های توپر مشابه شکل با عرض و عمق متغیر | $n = 4$  |

نامیده می‌شود.

تغییرات ممان اینرسی با توجه به شکل مقطع عرضی ستون‌ها به چهار گروه دسته بندی می‌شوند که مقادیر ضریب شکل هر یک در جدول (۱) ارائه شده است [۴۸].

## ۵- حل معادله کمانش ستون نامنشوری به روش

### بدون شبکه MLPG

در روش MLPG با استفاده از تابع وزن  $w$ ، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل (۱) در دامنه محلی  $\Omega_\eta$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega_\eta} (EI(x)V'' + PV)w \, d\Omega = 0 \quad (13)$$

که در آن  $E$  ضریب کشسانی و  $I(x)$  ممان اینرسی متغیر در طول ستون است. رابطه (۱۳) را به صورت رابطه (۱۴) می‌توان نوشت.

بنابراین، می‌توان مقدار تابع تغییر مکان را بر حسب مقادیر گرهی آن تخمین زد.

## ۴- تغییرات ممان اینرسی

برای راستی آزمایشی نتایج، ستون‌های نامنشوری که بار کمانشی آنها در کتاب وانگ و وانگ به صورت تحلیلی محاسبه شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد [۴۸]. در شکل (۲) هندسه ستون نامنشوری نشان داده شده است. در این شکل،  $O$  مرکز مختصات، محور  $X$  در راستای طول ستون،  $L$  طول ستون و  $I$  ممان اینرسی بیشینه در طول ستون نامنشوری است. تغییرات ممان اینرسی در طول ستون به صورت رابطه زیر تعریف شده است [۴۴].

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{\eta}{L}x\right)^n \quad ; n = 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

در رابطه ارائه شده،  $n$  ضریب شکل و  $\eta$  نسبت نامنشوری

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰

جدول ۲- بار کمانشی بی بعد ستون منشوری با تعداد گره مختلف در مقایسه با حل دقیق ( $\bar{P}_{cr}^{exact} = 9/8696$ )

| تعداد گره      | ۵      | ۱۰     | ۱۵     | ۲۰     | ۲۵     | ۳۰     | ۳۵     | ۴۰     | ۵۰     | ۱۰۰    |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{P}_{cr}$ | ۹/۶۹۲۸ | ۹/۸۱۵۷ | ۹/۸۴۶۰ | ۹/۸۵۶۱ | ۹/۸۶۰۵ | ۹/۸۶۲۸ | ۹/۸۶۵۱ | ۹/۸۶۸۳ | ۹/۸۶۸۲ | ۹/۸۶۹۰ |
| درصد خطا       | ۱/۷۹۱۰ | ۰/۵۴۶۴ | ۰/۲۳۸۷ | ۰/۱۳۶۷ | ۰/۰۹۲۳ | ۰/۰۶۸۸ | ۰/۰۴۵۳ | ۰/۰۳۳۷ | ۰/۰۱۴۶ | ۰/۰۰۶۱ |

$$([k] + [k_p])\{V\} = 0 \quad (20)$$

رابطه (۲۰) یک مسئله مقادیر ویژه است که مقادیر ویژه همان بارهای کمانشی و بردارهای ویژه مودهای کمانش مربوط به آنها است.

### ۶- اعمال شرایط مرزی تغییر مکانی

تابع شکل تولید شده به روش RPIM ویژگی دلتای کرونگر را دارد. از این رو در روش پیشنهادی اعمال شرایط مرزی به سادگی و مشابه روش اجزای محدود انجام می‌شود. در این مقاله از روش جریمه برای اعمال شرایط مرزی تغییر مکانی استفاده شده است. به این صورت که در ماتریس سختی به درایه‌های روی قطر اصلی مربوط به درجه آزادی بسته شده، عدد بزرگی (مثلاً  $10^{20} \times 1$ ) اختصاص داده می‌شود. به این ترتیب صفر شدن درجه آزادی بسته به مسئله تحمیل می‌شود.

### ۷- نتایج عددی

#### ۷-۱- ستون منشوری

در ابتدا برای راستی آزمایی، مقدار بار کمانشی ستون منشوری ( $n = 0$ ) با استفاده از روش MLPG محاسبه و با مقادیر تحلیلی مقایسه می‌شود. نتایج به دست آمده در جدول (۲) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با تعداد گره ده و بیشتر، نتایج از دقت بسیار بالایی (با خطای کمتر از ۰/۵ درصد) برخوردار است. در این جدول از رابطه (۲۱) برای بی‌بعد کردن بار کمانشی ستون‌ها بهره‌جویی شده است.

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^3}{EI} \quad (21)$$

شکل (۳) میزان درصد خطای روش پیشنهادی برای ستون

$$\int_{\Omega_q} (EI(x)V'')w \, d\Omega + \int_{\Omega_q} (PV)w \, d\Omega = 0 \quad (14)$$

با اعمال قضیه دیورژانس به رابطه (۱۴) داریم:

$$\int_{\Omega_q} (EI(x)V')w' \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} (EI(x)V')w \, d\Gamma + \int_{\Omega_q} (EI'(x)V')w \, d\Omega + \int_{\Omega_q} (PV)w \, d\Omega = 0 \quad (15)$$

با استفاده از ماتریس تابع شکل معرفی شده در رابطه (۱۰) می‌توان نوشت:

$$V = [\varphi]\{V\} \rightarrow V' = [\varphi']\{V\} \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\left( \int_{\Omega_q} (EI(x)V')[\varphi'] \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} (EI(x)[\varphi'])w \, d\Gamma + \int_{\Omega_q} (EI'(x)[\varphi'])w \, d\Omega + \int_{\Omega_q} (P[\varphi])w \, d\Omega \right) \{V\} = 0 \quad (17)$$

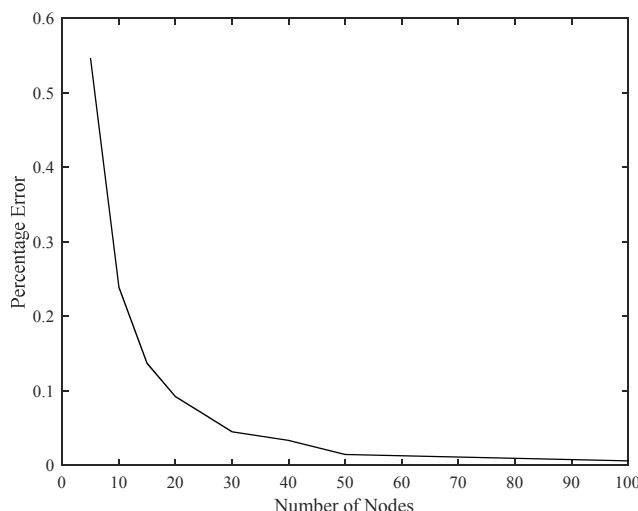
با معرفی ماتریس‌های سختی هندسی  $[k]$  و سختی محوری  $[k_p]$  به صورت زیر:

$$[k] = \int_{\Omega_q} (EI(x)V')[\varphi'] \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} (EI(x)[\varphi'])w \, d\Gamma + \int_{\Omega_q} (EI'(x)[\varphi'])w \, d\Omega \quad (18)$$

$$[k_p] = \int_{\Omega_q} P[\varphi]w \, d\Omega \quad (19)$$

رابطه (۱۷) به صورت زیر خلاصه می‌شود:





شکل ۳- نمودار درصد خطای روش پیشنهادی در برابر تعداد گره‌های دامنه

کمانشی ستون‌های نامنشوری با تغییرات شدید در ممان اینرسی دارد.

در جدول (۳) بار کمانشی ستون‌های نامنشوری با ضریب شکل و نسبت نامنشوری مختلف ارائه و با نتایج ارائه شده توسط وانگ و وانگ مقایسه شده است [۴۸]. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت نامنشوری و ضریب شکل، خطای روش پیشنهادی افزایش می‌یابد. دلیل این امر تغییرات شدیدتر در خصوصیات هندسی ستون با افزایش این پارامترها است. با این وجود خطای روش پیشنهادی در هیچ یک از ستون‌ها بیش از ۵٪ درصد نیست.

در شکل (۵) نمودار بار کمانشی بی‌بعد در برابر تغییرات نسبت نامنشوری برای ضرایب شکل مختلف رسم شده است. بر پایه این شکل می‌توان دریافت که به‌ازای تمام ضرایب شکل، با افزایش نسبت نامنشوری بار کمانشی ستون کاهش می‌یابد.

این کاهش در ضرایب شکل بالاتر شدیدتر است. دلیل این امر آن است که چون با توجه به شکل (۲)، افزایش نسبت نامنشوری باعث ایجاد سطح مقطع کوچکتری در انتهای ستون می‌شود و ضریب شکل  $n$  توان تابع تغییر ممان اینرسی است، افزایش آن موجب افت بیشتری در بار بحرانی ستون می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در یک نسبت نامنشوری ثابت اگر

منشوری با تعداد گره‌های مختلف را نشان می‌دهد. بر پایه این نمودار مشاهده می‌شود با افزایش تعداد گره درصد خطا به سمت صفر میل می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که افزایش تعداد گره‌ها به بیش از صد گره عملاً تأثیر چندانی بر دقت نتایج ندارد. بنابراین در ادامه از صد گره برای همه تحلیل‌ها استفاده شده است.

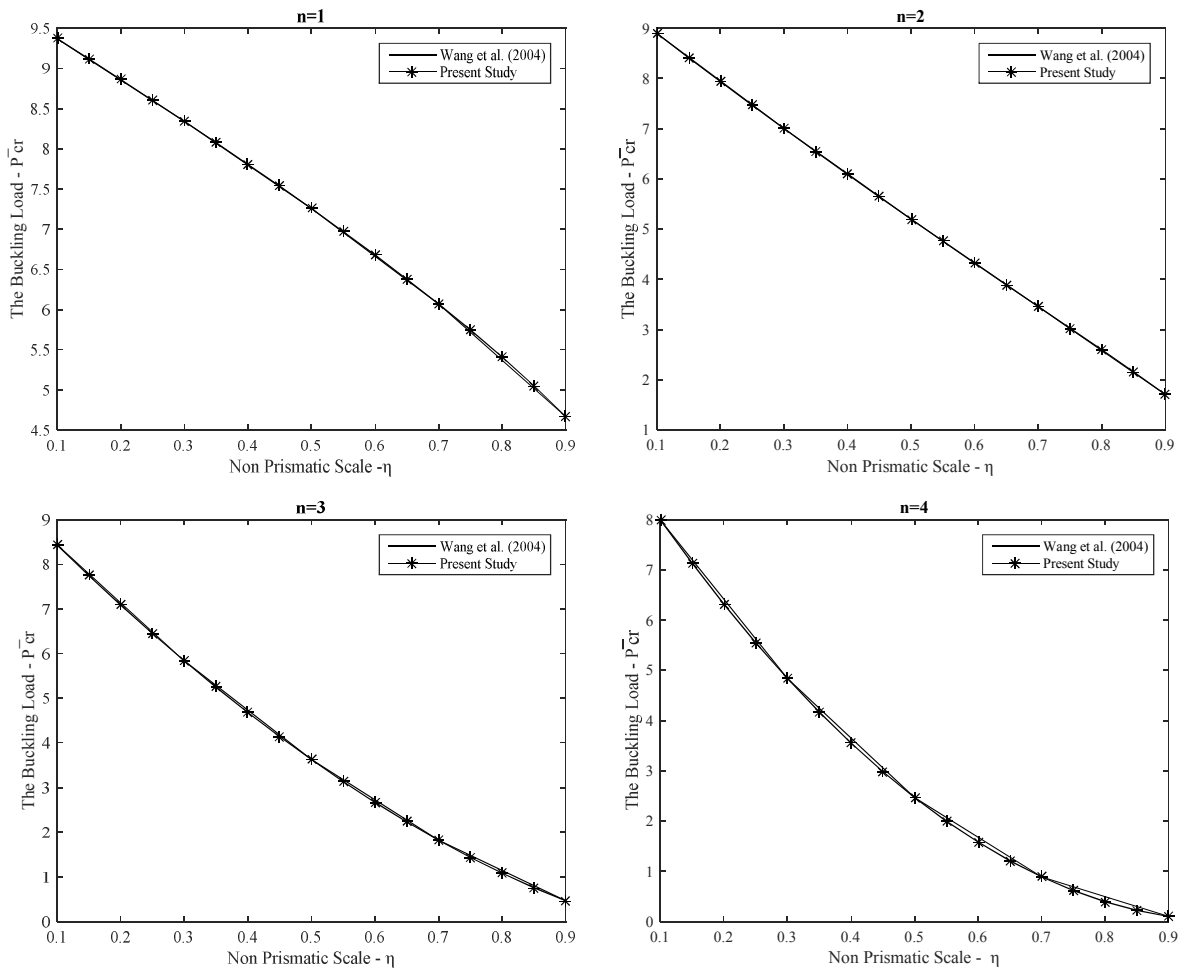
#### ۲-۷- ستون نامنشوری با ضریب شکل‌های مختلف

در این بخش بار کمانشی ستون‌های نامنشوری با ضرایب شکل‌های مختلف ( $n=1,2,3,4$ ) و نسبت‌های نامنشوری مختلف ( $\eta=0.1,0.3,0.5,0.7,0.9$ ) با استفاده از روش MLPG محاسبه شده و با نتایج تحلیلی ارائه شده در کتاب وانگ و وانگ مقایسه شده است [۴۸]. خاطر نشان می‌سازد بار کمانشی ستون‌های نامنشوری این بخش با استفاده از رابطه (۲۲) بی‌بعد شده است.

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI} \quad (22)$$

در شکل (۴) بار کمانشی بی‌بعد ستون‌های نامنشوری در برابر نسبت نامنشوری برای ضرایب شکل‌های مختلف، در مقایسه با حل دقیق تحلیلی مشاهده می‌شود. نتایج این بخش نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دقت مناسبی برای محاسبه بار

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰



شکل ۴- راستی آزمایشی نتایج ستون نامنشوری با نتایج تحلیلی

پارامتر  $n$ ، اثر افزایش این پارامتر بر کاهش بار بحرانی ستون کاهش می‌یابد. به سخن دیگر شیب نمودار در  $n$ های بزرگ تقریباً برابر صفر می‌شود.

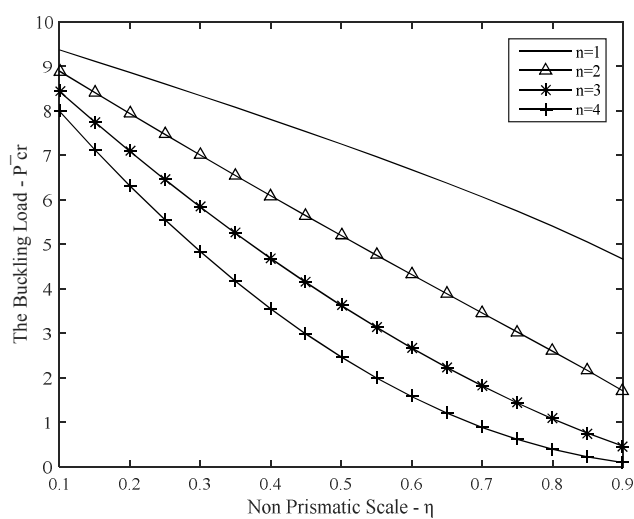
در این بخش برای نشان دادن کارایی روش MLPG در تحلیل کمانشی ستون‌های نامنشوری، مدت زمان انجام محاسبات برای تحلیل کمانشی ستون نامنشوری با نسبت نامنشوری  $(\eta = 0/9)$  و ضریب شکل  $(n = 4)$  در روش MLPG با روش FEM (با جزء خطی دو گرهی)، مقایسه شده است. هر دو برنامه با یک رایانه و با یک نوع نرم‌افزار متلب انجام شده است. در شکل (۷)، درصد خطای روش FEM در تحلیل کمانشی ستون نامنشوی مزبور در برابر تعداد جزء خطی دو گرهی و در شکل (۸) درصد خطای روش بدون شبکه

کاهش ممان اینرسی مقطع ابتدا با شیب کمتر و سپس با شیب بیشتر ( $n$  کوچک‌تر) صورت پذیرد، بار کمانشی ستون بیشتر خواهد بود.

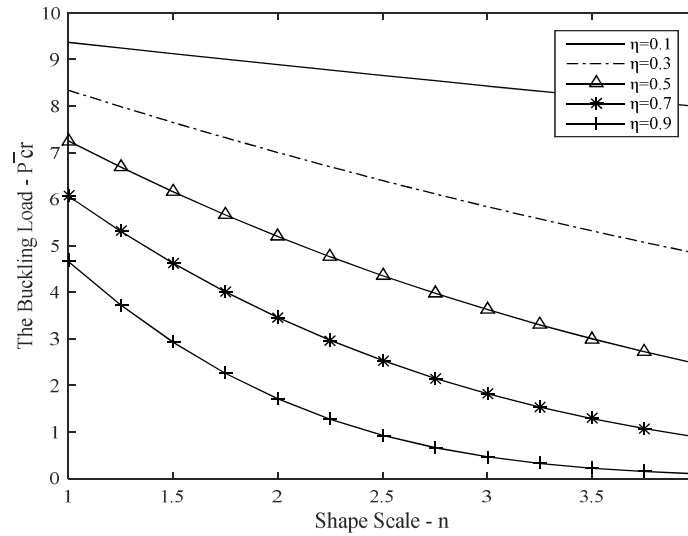
در شکل (۶) نمودار بار کمانشی - ضریب شکل در نسبت‌های نامنشوری مختلف ترسیم شده است. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش ضریب شکل به‌ویژه در نسبت‌های نامنشوری بالا، بار کمانشی ستون کاهش می‌یابد. کمترین میزان افت بار کمانشی به‌ازای افزایش ضریب شکل مربوط به نسبت نامنشوری  $\eta = 0/1$  است. نمودارهای  $\eta = 0/1$  و  $\eta = 0/3$  تقریباً به‌صورت خطی کاهش می‌یابد و سایر نمودارها به‌صورت منحنی با شیب کند شونده کاهش می‌یابند. همچنین با توجه به این شکل واضح است در نسبت‌های نامنشوری بالا، با افزایش

جدول ۳- بار کمانشی ستون‌های نامنشوری با ضریب شکل و نسبت نامنشوری مختلف

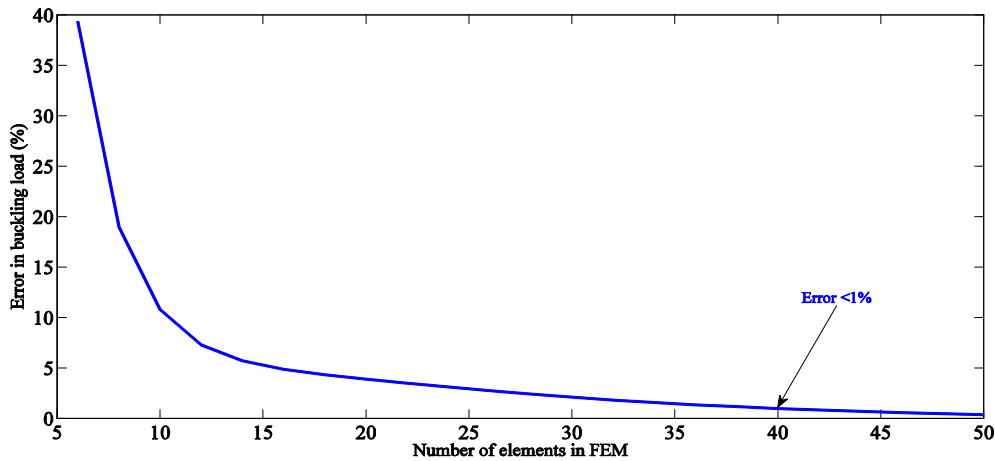
| درصد خطا | $\bar{P}_{cr}$ (وانگ [۴۸]) | $\bar{P}_{cr}$ (روش MLPG) | $\eta$ | ضریب شکل |
|----------|----------------------------|---------------------------|--------|----------|
| ۰/۰۱۹    | ۹/۳۷۲                      | ۹/۳۷۰۲                    | ۰/۱    | $n = 1$  |
| ۰/۰۰۹    | ۸/۳۴۳                      | ۸/۳۴۲۲                    | ۰/۳    |          |
| ۰/۰۲۰    | ۷/۲۵۶                      | ۷/۲۵۴۵                    | ۰/۵    |          |
| ۰/۰۱۱    | ۶/۰۶۹                      | ۶/۰۶۸۳                    | ۰/۷    |          |
| ۰/۰۲۵    | ۴/۶۶۷                      | ۴/۶۶۵۸                    | ۰/۹    |          |
| ۰/۰۱۰    | ۸/۸۹۳                      | ۸/۸۹۲۱                    | ۰/۱    | $n = 2$  |
| ۰/۰۱۸    | ۷/۰۰۵                      | ۷/۰۰۳۷                    | ۰/۳    |          |
| ۰/۰۱۵    | ۵/۱۹۸                      | ۵/۱۹۷۲                    | ۰/۵    |          |
| ۰/۰۲۶    | ۳/۴۵۹                      | ۳/۴۵۸۱                    | ۰/۷    |          |
| ۰/۰۲۳    | ۱/۷۱۰                      | ۱/۷۰۹۶                    | ۰/۹    |          |
| ۰/۰۳۳    | ۸/۴۳۶                      | ۸/۴۳۳۲                    | ۰/۱    | $n = 3$  |
| ۰/۰۰۸    | ۵/۸۴۰                      | ۵/۸۳۹۵                    | ۰/۳    |          |
| ۰/۰۲۲    | ۳/۶۲۸                      | ۳/۶۲۷۲                    | ۰/۵    |          |
| ۰/۰۳۸    | ۱/۸۲۱                      | ۱/۸۲۰۳                    | ۰/۷    |          |
| ۰/۱۷۱    | ۰/۴۶۷                      | ۰/۴۶۶۲                    | ۰/۹    |          |
| ۰/۰۱۰    | ۷/۹۹۴                      | ۷/۹۹۳۲                    | ۰/۱    | $n = 4$  |
| ۰/۰۱۴    | ۴/۸۳۶                      | ۴/۸۳۵۳                    | ۰/۳    |          |
| ۰/۰۰۴    | ۲/۴۶۷                      | ۲/۴۶۶۹                    | ۰/۵    |          |
| ۰/۰۱۱    | ۰/۸۸۸                      | ۰/۸۷۷۹                    | ۰/۷    |          |
| ۰/۵۰۵    | ۰/۰۹۹                      | ۰/۰۹۸۵                    | ۰/۹    |          |



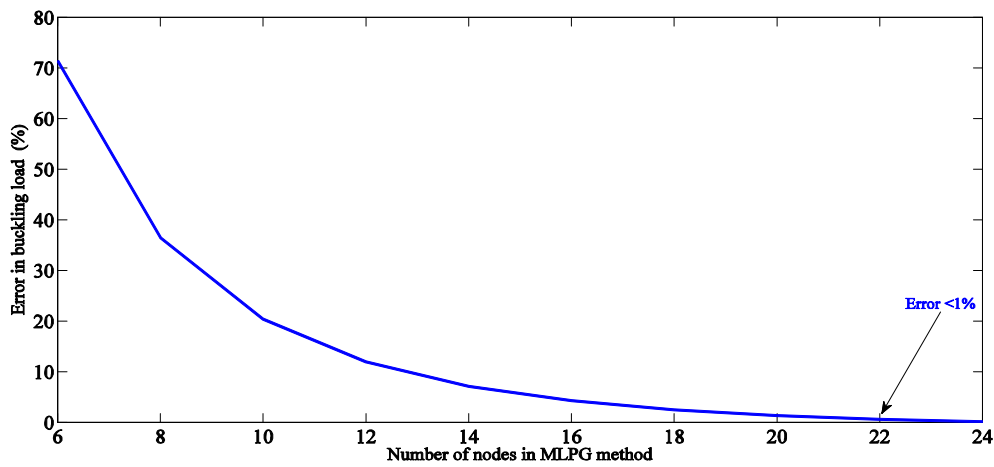
شکل ۵- نمودار بار کمانشی - نسبت نامنشوری برای ضریب شکل های مختلف



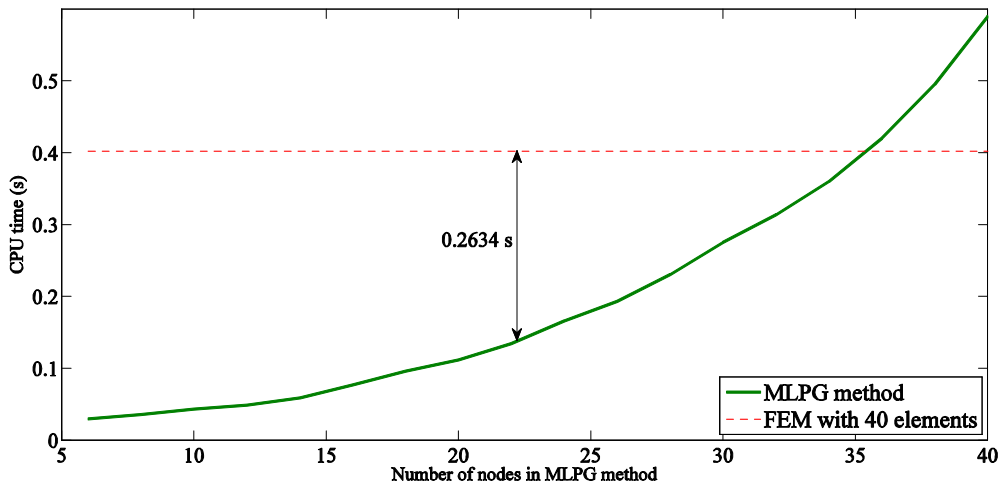
شکل ۶- بررسی اثر ضریب شکل بر بار بحرانی کمانش ستون در نسبت‌های نامنشوری مختلف



شکل ۷- اثر تعداد جزء خطی دو گرهی بر بار کمانشی ستون نامنشوری با نسبت نامنشوری ۹/۰ و ضریب شکل ۴ در روش اجزای محدود



شکل ۸- اثر تعداد گره بر بار کمانشی ستون نامنشوری با نسبت نامنشوری ۹/۰ و ضریب شکل ۴ در روش MLPG



شکل ۹- تأثیر تعداد گره‌ها بر زمان پردازنده در روش MLPG در مقایسه با روش FEM با همان دقت (۴۰ جزء خطی دو گرهی)

در پل‌ها با بار محوی متغیر در طول ستون مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات ممان اینرسی این ستون به صورت رابطه (۲۳) فرض می‌شود.

$$I(x) = \begin{cases} I_1 + I_1 \left[ 1 - \frac{5x}{L} \right]^n & 0 \leq x \leq 0/2L \\ I_1 & 0/2L < x < 0/8L \\ I_1 + I_1 \left[ 1 - \frac{5}{L}(L-x) \right]^n & 0/8L \leq x \leq L \end{cases} \quad (23)$$

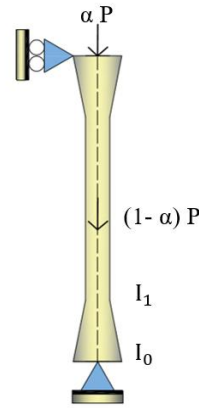
در این رابطه  $I(x)$  تغییرات ممان اینرسی در طول ستون،  $I_1$  ممان اینرسی کمینه ستون،  $n$  ضریب شکل و  $L$  طول ستون نامشوری است. بار محوری ستون مطابق شکل (۱۰) به صورت غیریکنواخت فرض می‌شود (علاوه بر بار محوری وارد شده در انتهای ستون، یک بار محوری در وسط ستون نیز وارد می‌شود که سبب می‌شود بار در طول ستون یکنواخت نبوده و به‌طور ناگهانی تغییر کند). با توجه به این شکل واضح است در صورتی که پارامتر  $\alpha$  برابر واحد فرض شود، بار محوری ستون یکنواخت خواهد بود. همان طور که در شکل (۱۰) قابل ملاحظه است، قسمت متغیر ممان اینرسی برای  $0/2$  طول ابتدا و انتهای ستون تعریف شده است. در شکل (۱۱) نحوه تغییرات ممان اینرسی در طول ستون ماهیچه‌ای به‌ازای ضریب شکل‌های مختلف رسم شده است.

در برابر تعداد گره ارائه شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود برای رسیدن به یک میزان خطای قابل قبول (در اینجا کمتر از ۱ درصد) در روش FEM با جزء خطی دو گرهی به بیش از ۴۰ جزء و در روش بدون شبکه به ۲۲ گره نیاز است. زمان پردازنده برنامه FEM با این تعداد جزء برابر ۰/۴۰۲۲ ثانیه به دست آمده است. تأثیر تعداد کل گره‌ها در روش بدون شبکه MLPG بر زمان پردازنده در شکل (۹) نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در روش MLPG با افزایش تعداد گره‌ها زمان پردازنده با شیب فزاینده افزایش می‌یابد. اما همان‌طور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود برای رسیدن به درصد خطای کمتر از ۱ درصد در روش MLPG، نیازی به بیش از ۲۲ گره نیست. زمان پردازنده روش MLPG با این تعداد گره برابر ۰/۱۳۸۸ ثانیه است. بنابراین می‌توان دریافت برای رسیدن به یک دقت قابل قبول، زمان پردازنده روش MLPG بسیار کمتر از روش FEM با جزء خطی دو گرهی است.

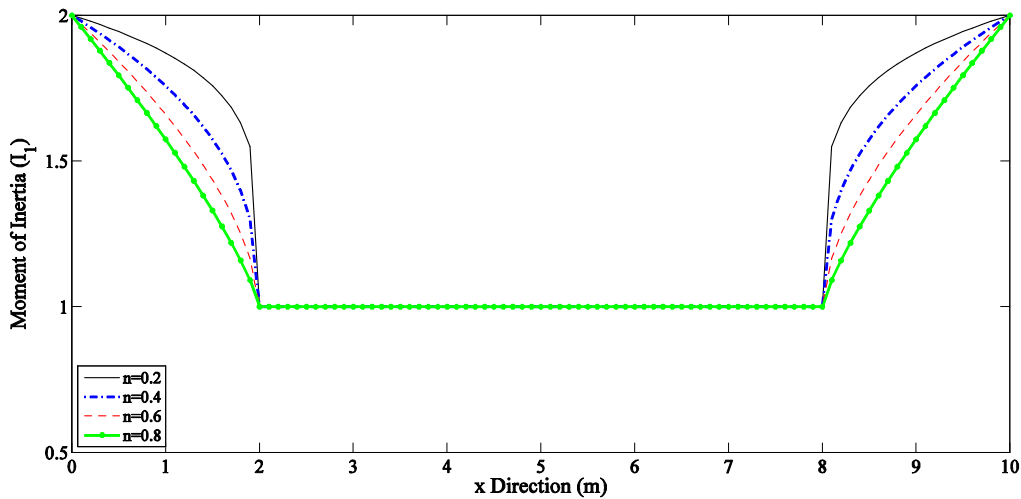
## ۸- بار بحرانی ستون ماهیچه‌ای با بار محوری غیریکنواخت به روش MLPG

در ادامه کماتس ستون ماهیچه‌ای به‌عنوان یک ستون پرکاربرد

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰



شکل ۱۰- ستون ماهیچه‌ای با بار غیر یکنواخت در طول ستون



شکل ۱۱- تغییرات ممان اینرسی ستون ماهیچه‌ای در طول ستون برای ضرایب شکل مختلف

همچنین بر پایه نتایج این جدول می‌توان دریافت کاهش ضریب بار ( $\alpha$ ) موجب افزایش محسوس در بار بحرانی ستون ماهیچه‌ای می‌شود. کاهش ضریب بار به معنای کاستن از بار محوری انتهایی ستون و افزودن به بار محوری وارد بر مرکز ستون است. این عمل موجب افزایش در بار بحرانی ستون ماهیچه‌ای شده است.

در شکل (۱۲) نمودار تغییرات بار کمانشی ستون با افزایش ضریب شکل برای ضرایب بار مختلف نشان داده شده است. با توجه به این شکل می‌توان نتیجه گرفت با افزایش ضریب شکل، بار کمانشی برای تمام ضرایب بار تقریباً به یک میزان کاهش می‌یابد.

با بهره‌جویی از روش MLPG و در نظر گرفتن ۱۰۰ گره روی دامنه، بار کمانشی ستون ماهیچه‌ای برای ضرایب شکل و ضرایب بار مختلف محاسبه شده است و نتایج به دست آمده در جدول (۴) قابل مشاهده است. در این جدول بار کمانشی ستون ماهیچه‌ای با استفاده از رابطه زیر بی‌بعد شده است.

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI_1} \quad (24)$$

بررسی جدول (۴) نشان می‌دهد، با انتخاب ضریب شکل مناسب در ستون ماهیچه‌ای می‌توان بار کمانشی ستون را به میزان ۳۳ درصد افزایش داد. میزان افزایش بار کمانشی نسبت به ستون منشوری با افزایش ضریب شکل کاهش می‌یابد.

جدول ۴- بار کمانشی ستون ماهیچه‌ای با ضریب شکل و ضرایب بار مختلف

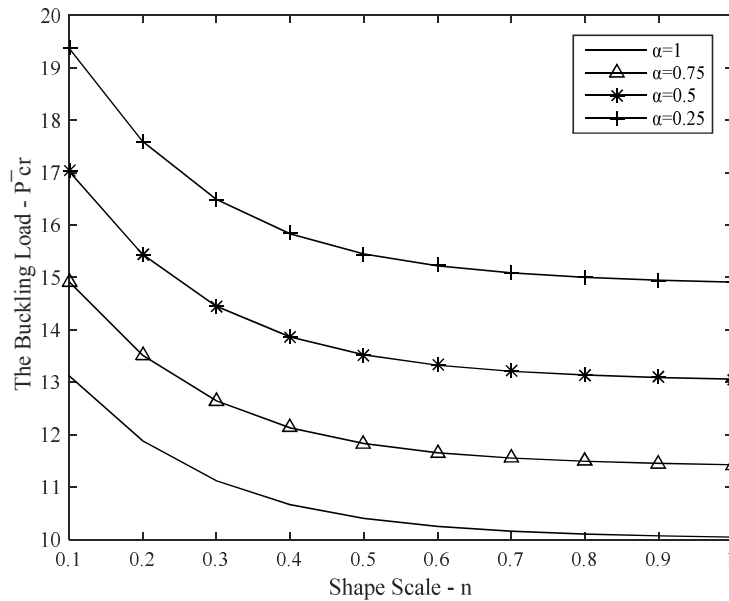
| ضریب بار ( $\alpha$ ) | n   | $\bar{P}_{cr}$ | درصد افزایش نسبت به ستون منشوری |
|-----------------------|-----|----------------|---------------------------------|
| $\alpha = 1$          | ۰/۱ | ۱۳/۱۲۷۵        | ۳۳/۰۰                           |
|                       | ۰/۲ | ۱۱/۸۸۷۱        | ۲۰/۴۴                           |
|                       | ۰/۴ | ۱۰/۶۶۷۰        | ۸/۰۸                            |
|                       | ۰/۶ | ۱۰/۲۴۹۴        | ۳/۸۵                            |
|                       | ۰/۸ | ۱۰/۱۰۵۸        | ۲/۳۹                            |
|                       | ۱/۰ | ۱۰/۰۴۷۲        | ۱/۸۰                            |
| $\alpha = ۰/۷۵$       | ۰/۱ | ۱۴/۹۲۴۹        | ۳۳/۰۲                           |
|                       | ۰/۲ | ۱۳/۵۱۷۲        | ۲۰/۴۷                           |
|                       | ۰/۴ | ۱۲/۱۳۲۳        | ۸/۱۳                            |
|                       | ۰/۶ | ۱۱/۶۵۷۸        | ۳/۹۰                            |
|                       | ۰/۸ | ۱۱/۴۹۴۱        | ۲/۴۴                            |
|                       | ۱/۰ | ۱۱/۴۲۷۱        | ۱/۸۵                            |
| $\alpha = ۰/۵$        | ۰/۱ | ۱۷/۰۳۱۸        | ۳۲/۹۶                           |
|                       | ۰/۲ | ۱۵/۴۳۷۷        | ۲۰/۵۱                           |
|                       | ۰/۴ | ۱۳/۸۶۷۶        | ۸/۲۶                            |
|                       | ۰/۶ | ۱۳/۳۲۷۴        | ۴/۰۴                            |
|                       | ۰/۸ | ۱۳/۱۳۹۱        | ۲/۵۷                            |
|                       | ۱/۰ | ۱۳/۰۶۰۷        | ۱/۹۶                            |
| $\alpha = ۰/۲۵$       | ۰/۱ | ۱۹/۳۷۹۶        | ۳۲/۷۴                           |
|                       | ۰/۲ | ۱۷/۵۹۴۹        | ۲۰/۵۱                           |
|                       | ۰/۴ | ۱۵/۸۳۳۵        | ۸/۴۵                            |
|                       | ۰/۶ | ۱۵/۲۲۲۰        | ۴/۲۶                            |
|                       | ۰/۸ | ۱۵/۰۰۴۱        | ۲/۷۷                            |
|                       | ۱/۰ | ۱۴/۹۱۰۱        | ۲/۱۲                            |

## ۹- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی کمانش ستون‌های نامنشوری با استفاده از روش بدون شبکه MLPG پرداخته شده است. تغییرات ممان اینرسی در طول ستون با استفاده از توابع مختلفی نظیر خطی و توانی تعریف شده است. در روش MLPG برای مدل‌سازی مسئله نیازی به شبکه‌بندی دامنه نیست و با استفاده از توزیع گره‌ها در دامنه و روی مرزها، مسئله مدل می‌شود. بنابراین

به‌علت عدم نیاز به شبکه‌بندی، زمان کمتری به‌ویژه در مسائل با هندسه پیچیده از کاربر گرفته می‌شود. افزون بر این نحوه توزیع گره‌ها بر نتایج تأثیر چندانی نمی‌گذارد. صحت سنجی نتایج عددی با روش تحلیلی به همگرایی، دقت و کارآمدی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. همچنین شایان ذکر است که اگرچه در این مقاله روش بدون شبکه MLPG برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر کمانش ستون‌های با هندسه متغیر تدریجی

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰



شکل ۱۲- نمودار بار کمانشی - ضریب شکل برای ستون ماهیچه‌ای با ضریب بارهای مختلف

- شکل و نسبت‌های نامنشوری کمتر از ۵٪ درصد است.
- نسبت نامنشوری و ضریب شکل تأثیر زیادی بر بار کمانشی ستون نامنشوری دارد. به نحوی که با افزایش نسبت نامنشوری و ضریب شکل بار کمانشی ستون کاهش می‌یابد.
- با افزایش تعداد گره‌ها زمان پردازنده با شیب فزاینده افزایش می‌یابد.
- برای رسیدن به یک میزان خطای قابل قبول مشخص، زمان پردازش روش بدون شبکه بسیار کمتر از روش اجزای محدود با جزء خطی دو گرهی است.
- در ستون ماهیچه‌ای با افزایش ممان اینرسی در بیست درصد انتهایی طول ستون می‌توان بار کمانشی ستون را به میزان ۳۳ درصد افزایش داد.
- کاهش ضریب بار ( $\alpha$ ) در ستون ماهیچه‌ای با بار غیریکنواخت، موجب افزایش محسوس در بار بحرانی ستون می‌شود.

- استفاده شده است، رابطه‌سازی‌های ارائه شده می‌تواند برای حل عددی هر نوع معادله‌ی دیفرانسیل با تغییرات تدریجی پارامترها در یک یا چند راستا مورد استفاده قرار گیرد.
- مهم‌ترین نتایج به دست آمده از تحلیل کمانشی ستون‌ها با استفاده از روش بدون شبکه به قرار زیر است:
- روش بدون شبکه از دقت و همگرایی مناسب برخوردار است. به سخن دیگر افزایش تعداد گره‌ها سبب افزایش دقت نتایج می‌شود و در نظر گرفتن بیش از ۱۰۰ گره عملاً تأثیری بر نتایج روش بدون شبکه ندارد.
- بار بحرانی ستون منشوری با روش حل دقیق تطابق بسیار خوبی دارد. میزان خطای روش پیشنهادی با صد گره برابر ۰/۰۰۶۱ درصد است.
- راستی آزمایی بار کمانشی ستون نامنشوری به دست آمده با روش پیشنهادی با نتایج تحلیلی ارائه شده در کتاب وانگ و وانگ مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاصل شده است. درصد خطای روش پیشنهادی برای همه ضرایب

## واژه‌نامه

- |  |                        |                 |             |
|--|------------------------|-----------------|-------------|
| 1. Meshless Local Petrov-Galerkin Method | 2. Radial Point Method | 3. Multiquadric | 4. CPU time |
|--|------------------------|-----------------|-------------|



1. Szymczak, C., and Kujawa, M., "Flexural Buckling and Post-Buckling of Columns Made of Aluminium Alloy", *European Journal of Mechanics*, Vol. 73, pp. 420-429, 2019.
2. Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, Courier Corporation, United States, 2009.
3. Arani, A. J., and Kolahchi, R., "Buckling Analysis of Embedded Concrete Columns Armed with Carbon Nanotubes", *Computers and Concrete*, Vol. 17, No. 5, pp. 567-578, 2016.
4. Iremonger, M., "Finite Difference Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 5, pp. 741-748, 1980.
5. Ermopoulos, J. C., and Kounadis, A. N., "Stability of Frames with Tapered Built-Up Members", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, pp. 1979-1992, 1985.
6. Smith, W.G., "Analytic Solutions for Tapered Column Buckling", *Computers & structures*, Vol. 28, pp. 677-681, 1988.
7. Williams, F.W., and Aston, G., "Exact or Lower Bound Tapered Column Buckling Loads", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, pp. 1088-1100, 1989.
8. Arbabi, F., and Li, F., "Buckling of Variable Cross-Section Columns: Integral-Equation Approach", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, pp. 2426-2441, 1991.
9. Siginer, A., "Buckling of Columns of Variable Flexural Rigidity", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, pp. 640-643, 1992.
10. Al-Gahtani, H. J., "Exact Stiffnesses for Tapered Members", *Journal of structural Engineering*, Vol. 122, No. 10, pp. 1234-1239, 1996.
11. Bazeos, N., and Karabalis, D. L., "Efficient Computation of Buckling Loads for Plane Steel Frames with Tapered Members", *Engineering Structures*, Vol. 28, pp. 771-775, 2006.
12. Raftoyiannis, I., Stamatopoulos, G. N., and Ermopoulos, J., "Buckling Behaviour of Doubly-Tapered Steel Columns Under Axial Compression and Biaxial Bending", *Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, SDSS 2006*, pp. 331-338, 2006.
13. Singh, K. V., and Li, G., "Buckling of Functionally Graded and Elastically Restrained Non-Uniform Columns", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 40, pp. 393-403, 2009.
14. Coşkun, S. B., and Atay, M. T., "Determination of Critical Buckling Load for Elastic Columns of Constant and Variable Cross-Sections Using Variational Iteration Method", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, pp. 2260-2266, 2009.
15. Darbandi, S., Firouz-Abadi, R., and Haddadpour, H., "Buckling of Variable Section Columns Under Axial Loading", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, pp. 472-476, 2010.
16. Wei, D. J., Yan, S. X., Zhang, Z. P., and Li, X. F., "Critical Load for Buckling of Non-Prismatic Columns Under Self-Weight and Tip Force", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 554-558, 2010.
17. Serna, M., Ibáñez, J., and López, A., "Elastic Flexural Buckling of Non-Uniform Members: Closed-Form Expression and Equivalent Load Approach", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 67, pp. 1078-1085, 2011.
18. Huang, Y., and Luo, Q., "A simple Method to Determine the Critical Buckling Loads for Axially Inhomogeneous Beams with Elastic Restraint", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 61, pp. 2510-2517, 2011.
19. Jamali, S., "Determination of Critical Buckling Force for Elastic Columns with Constant Cross-Sectional Area and Variable Using Repetitive Change Method (VIM)", *3rd National Conference on Structures and Steel and First National Conference on Light Steel Structures (LSF)*, 2012.
20. Pinarbasi, S., "Buckling Analysis of Nonuniform Columns with Elastic End Restraints", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, pp. 485-507, 2012.
21. Taha, M., and Essam, M., "Stability Behavior and Free Vibration of Tapered Columns with Elastic End Restraints Using The DQM Method", *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 4, pp. 515-521, 2013.
22. Zhang, B., Guo, Y., and Dou, C., "Ultimate Bearing Capacity of Asymmetrically Double Tapered Steel Columns with Tubular Cross-Section", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 89, pp. 52-62, 2013.
23. Rezaiee-Pajand, M., Shahabian, F., and Bambaeechee, M., "Stability of Semi-Rigid Portal Frames with Tapered Columns and Lateral Support", *Asian Journal of Civil Engineering (BHRC)*, Vol. 16, pp. 135-159, 2015.
24. Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A. R., and Bambaeechee, M., "Tapered Beam-Column Analysis by Analytical Solution", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*, Vol. 172, No. 11, pp. 789-804, 2019.
25. Rezaiee-Pajand, M., and Masoodi, A. R., "Exact Natural Frequencies and Buckling Load of Functionally Graded Material Tapered Beam-

- Columns Considering Semi-Rigid Connections”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 24, No. 9, pp. 1787-1808, 2018.
26. Lee, J. K., and Lee, B. K., “Free Vibration and Buckling of Tapered Columns Made of Axially Functionally Graded Materials”, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, Vol. 75, pp. 73-87, 2019.
27. Lanc, D., Ivančić, I., and Katalenić, M., “Buckling Analysis of Columns Made of Functionally Graded Materials Via Rayleigh-Ritz Method”, *Mathematical Modeling*, Vol. 4, No. 1, pp. 18-21, 2020.
28. Ma, W. L., Jiang, Z. C., and Li, X. F., “Effect of Warping Shape on Buckling of Circular and Rectangular Columns Under Axial Compression”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 88, pp. 1475-1490, 2021.
29. Dibajian, H., and Farzin, F., “Improving the Integration Method in the Galerkin Elementless Method with The Help Of Kriging Intermediation”, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1-18, 2015.
30. Zhu, T., Zhang, J., and Atluri, S., “A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics, and A Meshless Discretization Approach”, *Computational mechanics*, Vol. 21, pp. 223-235, 1998.
31. Organ, D., Fleming, M., Terry, T., and Belytschko, T. “Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies by Diffraction and Transparency”, *Computational mechanics*, Vol. 18, pp. 225-235, 1996.
32. Liu, W. K., and Jun, S., “Multiple-Scale Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, pp. 1339-1362, 1998.
33. Duarte, C. A., and Oden, J. T., “An hp Adaptive Method Using Clouds”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 237-262, 1996.
34. Atluri, S., and Zhu, T., “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach to Nonlinear Problems in Computer Modeling and Simulation”, *Computer Modeling and Simulation in Engineering*, Vol. 3, pp. 187-196, 1998.
35. Atluri, S., Cho, J., and Kim, H. G., “Analysis of Thin Beams, Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, with Generalized Moving Least Squares Interpolations”, *Computational Mechanics*, Vol. 24, pp. 334-347, 1999.
36. Ching, H., and Batra, R., “Determination of Crack Tip Fields in Linear Elastostatics by the Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) Method”, *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 2, No. 2, pp. 273-289, 2001.
37. Gu, Y., and Liu, G., “A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation for Static and Free Vibration Analyses of Thin Plates”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 2, pp. 463-476, 2001.
38. Long, S., and Atluri, S., “A Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solving the Bending Problem of a Thin Plate”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 3, pp. 53-64, 2002.
39. Raju, I., and Phillips, D., “Further Developments in the MLPG Method for Beam Problems”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 4, pp. 141-160, 2003.
40. Raju, I., “Analysis of a Column Subjected to Follower Forces by a Meshless Local Petrov-Galerkin Method”, *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, 2004.
41. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, C., Krivacek, J., and Wen, P. H., “Analysis of Orthotropic Thick Plates by Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method”, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, Vol. 67, pp. 1830-1850, 2006.
42. Arjangpay, A., Darvizeh, M., Ansari, R., and Zarepour, G., “Axial buckling analysis of an isotropic cylindrical shell using the meshless local Petrov-Galerkin method”, *Computational Methods in Civil Engineering*, Vol. 2, pp. 219-230, 2011.
43. Ansari, R., and Arjangpay, A., “Nanoscale Vibration and Buckling of Single-Walled Carbon Nanotubes Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method”, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 63, pp. 283-292, 2014.
44. Kargarnovin, M., and Ekhteraee Toussi, H., “Application of Meshless Galerking Method in Formulating Fracture Mechanic Problems”, *Mechanical Engineering*, Vol. 18, pp. 48-53, 2002.
45. Edalati, H., and Soltani, B., “Analysis of Thin Isotropic and Orthotropic Plates with Element-Free Galerkin Method and Various Geometric Shapes”, *Journal of Computational Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 143-157, 2016.
46. Liu, G.R., Dai, K.Y., Lim, K.M., and Gu, Y.T., “A Radial Point Interpolation Method for Simulation of Two-Dimensional Piezoelectric Structures”, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12, pp. 171-180, 2003.
47. Liu, G., *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2002.
48. Wang, C. M., and Wang C. Y., *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, CRC press, 2004.