نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۰، ص. ۱۵۱-۱۲۵

مقاله پژوهشی

تحلیل و مقایسه رفتار دینامیکی غیرخطی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک و الاستیک تحت جریان آیرودینامیک مافوق صوت

حسن اسدی گرجی و اردشیر کرمی محمدی*
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۴/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۱۴)

چکیده- رفتارهای پیچیده غیرخطی مانند حرکت آشوبناک، اثرات نامطلوب و مخربی بر سیستم‌های دینامیکی دارند. در این تحقیق رفتار غیرخطی ورق ویسکوالاستیک مستطیلی با لبه‌های مفصلی، تحت اثر جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و نتایج با ورق الاستیک غیرخطی مقایسه شده است. معادلات ورق با استفاده از تئوری ورق کلاسیک به‌دست آمده و از روابط کرنش- جابه‌جایی ون- کارمن نیز به‌منظورملاحظه اثرات غیرخطی هندسی استفاده شده است. مدل کلوین ویت برای توصیف خاصیت ویسکوالاستیک و "تئوری شبه پایای پیستون مرتبه اول" نیز به‌منظور مدل‌سازی جریان آیرودینامیکی مافوق صوت به‌کار گرفته شدند. معادلات حرکت ورق از روش لاگرانژ استخراج و سپس با روش رایلی- ریتز گسسته‌سازی شد. معادلات با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار حل و برای بررسی رفتار دینامیکی ورق، مقادیر ویژه سیستم و نیز نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی و نمودار چندشاخگی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که در برخی نسبت‌های منظری، آستانه وقوع فلاتر در ورق ویسکوالاستیک پایین‌تر از ورق الاستیک است. از سوی دیگر با افزایش پارامتر کنترلی، به‌جای رفتارهای پیچیده غیرخطی مانند آشوب در ورق الاستیک، در ورق ویسکوالاستیک رفتارهای ساده‌تری نظیر حرکت پریودیک رخ می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ورق ویسکوالاستیک مستطیلی، جریان آیرودینامیک مافوق صوت، دینامیک غیرخطی، چندشاخگی.

Analysis and Comparison of Nonlinear Dynamic Behavior of Viscoelastic and Elastic Rectangular Plates under Supersonic Aerodynamic Flow

H. Asadigorji and A. Karami Mohammadi *
Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract: ***Complex nonlinear behaviors such as chaotic motion have devastating effects on dynamic systems. In this study, nonlinear behavior of simply supported rectangular viscoelastic plates was examined during supersonic aerodynamics and***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: akaramim@shahroodut.ac.ir

compared with the nonlinear elastic plate. Classical plate theory was used to obtain the plate equations, and Von- Kármán strain-displacement relations were used to consider the nonlinear geometric effects. The Kelvin Voigt model was also used to describe the viscoelastic properties and the "first-order piston theory" was used for supersonic aerodynamic flow. The equations of motion of the rectangular plate were extracted using the Lagrangian method and then, discretized by the Rayleigh-Ritz method. Solution of the equations was performed using fourth order Runge Kutta method. To investigate the dynamic behavior of the plates, the eigenvalues of the system, time history curves, phase portraits, Poincaré maps, and bifurcation diagrams were studied and analyzed. The results show that in some aspect ratios, the threshold for the occurrence of the flutter in the viscoelastic plate will be lower than that in the elastic plate. On the other hand, when the control parameter increases, complex nonlinear behavior such as chaos in the elastic plate goes simpler in the viscoelastic plate, such as periodic motion.

Keywords: *Rectangular Viscoelastic Plate, Supersonic Aerodynamic Flow, Nonlinear Dynamics, Bifurcation Diagrams.*

فهرست علائم

a	طول ورق، m	w	جابه‌جایی عرضی
b	عرض ورق، m	β	فاکتور تصحیح تراکم‌پذیری $\sqrt{Ma^2-1}$
D	انعطاف خمشی ورق Nm	ρ	چگالی، kg/m^3
E	مدول الاستیسیته، N/m^2	ρ_a	چگالی هوا، kg/m^3
g_a	میرایی آیرودینامیک بی‌بعد $g_a=\sqrt{\frac{\mu}{Ma}\lambda}$	μ	نسبت بی‌بعد جرم سیال به ساختار $\mu=\frac{\rho_a a}{\rho H}$
H	ضخامت ورق، m	ς	مختصه بی‌بعد مکانی x
M_∞	عدد ماخ	δ	نسبت بی‌بعد ضخامت ورق به طول آن $\delta=H/a$
m_w	تعداد مدها در جهت x	φ	نسبت طول به عرض ورق $= \mathbf{a/b}$
n_w	تعداد مدها در جهت y	η	مختصه بی‌بعد مکانی y
ΔP	فشار آیرودینامیکی، در جهت مثبت محور	μ	نسبت جرمی بی‌بعد سیال به ساختار ورق $\rho a/\rho_m H$
q	فشار آیرودینامیک $\rho_a V_\infty^2/2$	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	اجزای کرنش
Q	نیروی آیرودینامیک تعمیم‌یافته	τ	زمان بی‌بعد $t\sqrt{D/\rho_m H a^4}$
T	انرژی جنبشی، J	τ_c	پارامتر تأخیر زمانی
U	انرژی پتانسیل، J	λ	فشار آیرودینامیک بی‌بعد $\lambda=\frac{\rho_\infty V_\infty^2 a^3}{\beta D}$
V_∞	سرعت جریان، m/s	ν	نسبت پواسن
u, v	جابه‌جایی درون صفحه‌ای در طول و عرض		

۱- مقدمه

ورق‌ها در بسیاری از صنایع از جمله صنعت هوا فضا کاربرد فراوان دارند. مطالعاتی بر روی رفتار ورق‌ها تحت جریان آیرودینامیک خطی توسط داول [۱ و ۲] انجام شد. معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات معمولی استخراج و به کمک روش گالرکین و انتگرال‌گیری عددی حل شد. او به کمک تئوری تغییر شکل‌های بزرگ ون- کارمن و تئوری‌های آیرودینامیکی مختلف به بررسی فلاتر[1] ورق و نوسانات غیرخطی پرداخت. ویلیانگ و داول [۳]، به بررسی فلاتر و سیکل حدی[2] بال مستطیلی در جریان مافوق‌صوت با استفاده از تئوری ون- کارمن

و تئوری جریان مافوق صوت شبه پایا و نیز به‌کارگیری روش رایلی- ریتز برای حل نوسانات غیرخطی فلاتر صفحه پرداختند. ژیه و همکاران [۴]، سیر تکاملی به سمت حرکت آشوبناک[3] را برای ورق یک سرگیردار[4] در جریان مافوق صوت مورد بررسی قرار دادند. تحقیقات قبلی مربوط به شرایط مرزی با لبه‌های مفصلی[5] بوده و یا تنها سیکل حدی مورد بررسی قرار گرفته بود، اما آنها آشوب در ورق یک سرگیردار (ورق مستطیلی یک لبه گیردار و سه لبه آزاد) را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان با استفاده از نمودارهای جابه‌جایی عرضی برحسب زمان[6]، فضای فازی[7]، نگاشت پوانکاره[8] و طیف توانی[9] به شناسایی حرکات پریودیک[10] و آشوبناک در ورق الاستیک پرداختند. مدل ویسکوالاستیک کلوین- ویت توسط ژیا و لوکازویچ [۵ و ۶] در سال ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵ برای مدل کردن ارتعاشات غیرخطی اجباری و آزاد ورق مستطیلی ساندویچی با تکیه‌گاه‌های لولایی قابل حرکت استفاده شد. آنها دو لایه خارجی الاستیک را با هسته میانی ویسکوالاستیک در نظر گرفتند و حل عددی را با انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات حرکت به روش رانگ- کوتا[11] به‌دست آوردند. کمانش دینامیکی و رفتار آشوبناک ورق‌های ویسکوالاستیک با روابط کرنش- جابه‌جایی غیرخطی توسط سان و ژنگ [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. ورق به‌صورت ویسکوالاستیک خطی با یک معادله دینامیکی انتگرالی- دیفرانسیلی یک درجه آزادی مدل شد و با استفاده از رابطه لیاپانوف تغییر رفتار ورق توضیح داده شد. پورتاک‌دوست و فاضل‌زاده [۸]، به آنالیز فلاتر ورق ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت پرداختند. ایشان معادلات حاکم بر حرکت را توسط تئوری تغییر شکل بزرگ ون کارمن به‌دست آوردند و از مدل کلوین[12] برای مدل‌سازی ورق ویسکوالاستیک و همچنین تئوری پیستون[13] برای مدل‌سازی جریان آیرودینامیک مافوق صوت استفاده کردند. معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از روش گالرکین به معادلات با مشتقات معمولی تبدیل و سپس به روش رانگ کوتا مرتبه چهار حل شد. نتایج حاکی از تأثیر مهم میرایی ساختاری در منطقه آشوبناک است.

خدایاروف [۹]، فلاتر غیرخطی ورق‌های ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت را با استفاده از تئوری شبه پایای پیستون برای مدل‌سازی جریان آیرودینامیک مورد بررسی قرار داد. مرت و هیلتون [۱۰]، به روش تحلیلی به بررسی فلاتر ورق الاستیک و ویسکوالاستیک در جریان‌های مادون[14] و مافوق صوت[15] پرداختند. همگرایی سری گالرکین و تأثیر آن روی بسامد فلاتر مورد بررسی قرار گرفت. ساکسا و همکاران [۱۱]، پایداری و رفتار دینامیکی ورق‌های ویسکوالاستیک متحرک را با استفاده از تئوری ورق کلاسیک مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که با افزایش ویسکوزیته، سرعت فلاتر نیز افزایش می‌یابد، همچنین محدوده پایداری ورق در فشارهای آیرودینامیکی نزدیک فلاتر را بررسی و تحلیل کردند. آمابیلی [۱۲]، ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی نازک ویسکوالاستیک را تحت تحریک هارمونیک، حوالی کوچک‌ترین بسامد تشدید[16] مورد بررسی قرار داد و با بهره بردن از مدل کلوین- ویت در مدل‌سازی خاصیت ویسکوالاستیک، به این نتیجه رسید که سیستم سخت شونده بوده و ماکزیمم پاسخ غیرخطی سیستم کاهش می‌یابد. یانگ و همکاران [۱۳] به بررسی فلاتر ورق کامپوزیت با لایه میانی ویسکوز در جریان مافوق صوت پرداختند. آنها پی‌بردند که در اثرمیرایی ویسکوالاستیک پدیده فلاتر به تأخیر می‌افتد. فیلهو و همکاران [۱۴]، کاهش اثرات بی‌ثبات کننده جریان آیرودینامیک مافوق صوت را بر ورق مستطیلی با استفاده از لایه‌های ویسکوالاستیک بررسی و نیز اثرات دما را مورد توجه قرار دادند. اسمانوف [۱۵] به بررسی ناپایداری ورق ویسکوالاستیک در جریان مافوق صوت پرداخت. وی رفتار ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک را مقایسه و به این نتیجه رسید که در ورق ویسکوالاستیک در حالت گذرا و پایا سرعت بحرانی فلاتر بهبود می‌یابد.

ونگ و همکاران [۱۶]، به مطالعه رفتار فلاتر ورق ویسکوالاستیک تحت جریان آیرودینامیک که از زیر و روی ورق جریان داشت پرداختند. آنها با استفاده از تئوری جابه‌جایی بزرگ ون کارمن و تئوری آیرودینامیک پیستون و همچنین تئوری ویسکوالاستیک کلوین معادلات حرکت را به‌دست آورده و با استفاده از روش گالرکین معادلات با مشتقات جزئی را به

معادلات با مشتقات معمولی تبدیل کردند و سپس به حل آن پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که با وجود پارامتر ویسکوز، رفتارهای نامطلوب ورق به رفتارهای ساده‌تر و با دامنه نوسانات کمتر تبدیل می‌شود و نیز افزایش دما اثر نامناسبی بر وقوع فلاتر دارد. راد و همکاران [۱۷] در کتاب خود به بررسی کنترل غیرفعال[۱۷] ارتعاشات با استفاده از مواد ویسکوالاستیک پرداختند و با استفاده از روش‌های مختلف، تأثیر پارامتر ویسکوز را بررسی کردند. شروف و همکاران [۱۸]، به اثر زاویه حمله[۱۸] بر رفتار فلاتر ورق ویسکوالاستیک پرداختند و به این نتیجه رسیدند که زاویه حمله بر نوسانات سیستم ویسکوالاستیک و فلاتر تأثیر زیادی دارد. خدایاروف و همکاران [۱۹]، به تحلیل نوسانات سازه ویسکوالاستیک نازک تحت فشار استاتیک پرداختند. ایشان برای توصیف خصوصیات ویسکوالاستیک، از تئوری انعطاف پذیری بولتزمن- ولترا[۱۹] استفاده کردند. آنها معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را با استفاده از روش بوبنوف- گالرکین[۲۰] به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با ضرایب ثابت تبدیل و سپس به حل عددی معادلات پرداختند.

تحقیقات انجام شده در گذشته در زمینه بررسی فلاتر و روابطی برای شناخت پدیده‌های غیرخطی پیچیده نظیر نوسانات سیکل حدی و آشوب بوده است و اطلاعات جامعی با استفاده از نمودارهایی از قبیل چندشاخگی[۲۱] درباره تغییر رفتار در فشارهای آیرودینامیکی[۲۲] مختلف و مقایسه رفتار ورق‌های الاستیک و ویسکوالاستیک ارائه نشده است.

در این تحقیق رفتار غیرخطی ورق ویسکوالاستیک مستطیلی با لبه‌های مفصلی در جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با ورق الاستیک غیرخطی مقایسه شد. برای به‌دست آوردن معادلات ورق از تئوری ورق کلاسیک و برای در نظر گرفتن اثر غیرخطی هندسی از روابط کرنش- جابه‌جایی ون- کارمن استفاده شد. همچنین توصیف خاصیت ویسکوالاستیک با به‌کارگیری مدل کلوین ویت و مدل‌سازی جریان آیرودینامیکی برای جریان مافوق صوت بر پایه "تئوری شبه پایای پیستون مرتبه اول" صورت پذیرفت. معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک مستطیلی از روش لاگرانژ[۲۳] استخراج، و سپس با روش رایلی- ریتز[۲۴] گسسته‌سازی شد. حل معادلات با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار انجام و برای بررسی رفتار دینامیکی ورق، مقادیر ویژه سیستم و نیز نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی و نمودار چندشاخگی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفت.

۲- مدل ریاضی

در شکل (۱) ورق مستطیلی با لبه‌های مفصلی به طول a و عرض b و ضخامت H مشاهده می‌شود که تحت جریان آیرودینامیک مافوق صوت موازی با صفحه xy قرار دارد.

۲- ۱- انرژی جنبشی و پتانسیل

براساس تئوری ورق کلاسیک توزیع جابه‌جایی ورق به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{1}$$

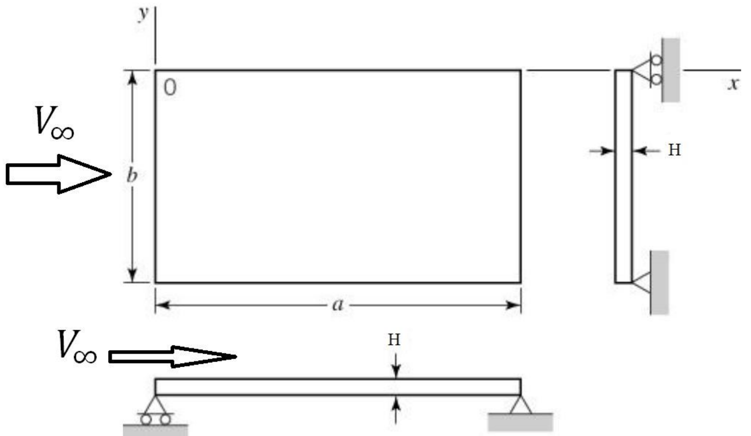
به‌طوری که u_0, v_0 و w_0 جابه‌جایی صفحه میانی ورق u، v و w جابه‌جایی عمومی ورق هستند. با توجه به روابط کرنش جابه‌جایی ون کارمن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ &K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, K_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2}$$

روابط تنش‌های σ_x, σ_y و τ_{xy} با کرنش‌ها برای مواد همگن همسانگرد (در حالت تنش صفحه‌ای، $\sigma_z = 0$) با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کلوین ویت در ادامه آمده است [۲۰].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) + \tau_c \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \nu\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) + \tau_c \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \nu\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} + \tau_c \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3}$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]



شکل ۱- طرح نمادین ورق تحت جریان آیرودینامیک

که E مدول یانگ، ν نسبت پواسن و τ_c پارامتر تأخیر زمانی ویسکوالاستیک در مدل کلوین ویت است که برحسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. کمیت $\eta = \tau_c E$، پارامتر بیانگر ویسکوزیته است. انرژی جنبشی ورق کلاسیک نیز عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}\iint \rho H \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} dxdy \qquad (۴)$$

۲- ۲- مدل‌سازی فشار آیرودینامیک

فشار آیرودینامیکی که در اثر جریان هوا با سرعت بالا ایجاد می‌شود به‌صورت نیروی خارجی عمل می‌کند. این فشار را می توان براساس تئوری مرتبه‌ی اول پیستون تقریب زد که برای $M_\infty > \sqrt{2}$ دارای اعتبار است [۲۱]، و برای جریان مافوق صوت به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود [۲۲].

$$\Delta P = \frac{2q}{\beta}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1}\frac{1}{V_\infty}\frac{\partial w}{\partial t}\right] \qquad (۵)$$

اگر از تقریب زیر، که برای $M_\infty >> 1$ قابل قبول است استفاده شود

$$\left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{M_\infty^2 - 2}}\right) \approx \frac{\mu}{M_\infty} \qquad (۶)$$

میرایی آیرودینامیکی بی‌بعد نیز به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود [۲۳].

$$g_a = \sqrt{\frac{\mu}{M_\infty}}\lambda \qquad (۷)$$

که در آن $\mu = \rho_a a / \rho H$ نسبت جرمی هوا به ورق می‌باشد.

۲- ۳- معادلات حاکم بر حرکت

مطابق با روش رایلی- ریتز، جابه‌جایی‌ها به‌صورت حاصل‌ضربی از مختصه‌های عمومی حرکت وابسته به زمان و توابع شکل مود[۲۵] وابسته به مکان که شرایط مرزی هندسی را برآورده کنند بیان می‌شوند. برای جابه‌جایی‌های درون‌صفحه‌ای[۲۶] و عرضی بی‌بعد مطابق با روش مود مفروض خواهیم داشت

$$u = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_{ij}(t)\, u_i(x)\, v_j(y)$$
$$v = \sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{S} b_{rs}(t)\, u_r(x)\, v_s(y)$$
$$w = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q_{mn}(t)\, \phi_m(x)\, \psi_n(y) \qquad (۸)$$

معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ به‌صورت رابطه (۹) استخراج می‌شود.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{ij}}\right) - \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{b}_{rs}}\right) - \frac{\partial L}{\partial b_{rs}} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{mn}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{mn}} + Q_{mn} = 0 \qquad (۹)$$

به‌طوری که $L = T - U$ است. همچنین در رابطه (۹) Q_{mn} مربوط به کار نیروی آیرودینامیک است و مطابق رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$Q_{mn} = \iint \Delta P \frac{\partial w}{\partial q_{mn}} dxdy \qquad (10)$$

۲- ۴- فرم بی‌بعد معادلات

معادلات به‌دست آمده، به کمک پارامترهای بی‌بعد زیر به شکل بی‌بعد در می‌آید.

$$\varsigma = \frac{x}{a}, \bar{w}_{mn} = \frac{w_{mn}}{H}, \bar{u}_{ij} = \frac{u_{ij}}{H},$$

$$\bar{v}_{rs} = \frac{v_{rs}}{H}\eta = \frac{y}{b}, \lambda = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 a^3}{\beta D}, \mu = \frac{\rho_\infty a}{\rho H} \qquad (11)$$

و پارامتر زمان بی‌بعد τ به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$\tau = \sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}}\, t \qquad (12)$$

که $D = EH^3/12(1-\nu^2)$ مدول انعطاف پذیری خمشی و ρ چگالی ورق می‌باشد. معادلات بی‌بعد به‌صورت خواهد بود

$$\overbrace{Mu}^{ap1} + 12\frac{a^2}{H^2}\overbrace{Kuu12}^{ap2} + 6\frac{a}{H}\overbrace{NLuw1}^{ap3} + \nu\left(12\frac{a^3}{H^2 b}\overbrace{Kuv12}^{ap4} + 6\frac{a^3}{Hb^2}\overbrace{NLuw2}^{ap5}\right) + (1-\nu)\left(6\frac{a^3}{H^2 b}\overbrace{Kuv34}^{ap6} + 6\frac{a^4}{H^2 b^2}\overbrace{Kuu34}^{ap7} + 6\frac{a^3}{Hb^2}\overbrace{NLuw3}^{ap8}\right) + 12\tau_c\frac{a^2}{H^3}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(\frac{H}{a^2}\overbrace{Cuu12}^{ap9} + \frac{H^2}{a^3}\overbrace{NLCuw1}^{ap10} + \vartheta\left\{\frac{H}{ab}\overbrace{Cuv12}^{ap11} + \frac{H^2}{ab^2}\overbrace{NLCuw2}^{ap12}\right\} + \frac{1-\vartheta}{2}\left\{\frac{H}{ab}\overbrace{Cuv34}^{ap13} + \frac{H}{b^2}\overbrace{Cuu34}^{ap14} + \frac{H^2}{ab^2}\overbrace{NLCuw3}^{ap15} + \frac{H^2}{ab^2}\overbrace{NLCuw4}^{ap16}\right\}\right) = 0 \qquad \text{(۱۳- الف)}$$

$$\overbrace{Mv}^{ap17} + \left\{12\frac{a^4}{H^2 b^2}\overbrace{Kvv12}^{ap18} + 6\frac{a^4}{Hb^3}\overbrace{NLvw1}^{ap19} + \nu\left(12\frac{a^3}{H^2 b}\overbrace{Kvu12}^{ap20} + 6\frac{a^2}{Hb}\overbrace{NLvw2}^{ap21}\right) + 6(1-\nu)\left(\frac{a^2}{H^2}\overbrace{Kvv34}^{ap22} + \frac{a^3}{H^2 b}\overbrace{Kvu34}^{ap23} + \frac{a^2}{Hb}\overbrace{NLvw3}^{ap24}\right)\right\} + 12\tau_c\frac{a^2}{H^3}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(\left[\frac{H}{b^2}\overbrace{Cvv12}^{ap25} + \frac{H^2}{b^3}\overbrace{NLCvw1}^{ap26}\right] + \vartheta\left\{\left[\frac{H}{ab}\overbrace{Cvu12}^{ap27} + \frac{H^2}{a^2 b}\overbrace{NLCvw2}^{ap28}\right]\right\} + \frac{1-\vartheta}{2}\left\{\left[\frac{H}{a^2}\overbrace{Cvv34}^{ap29} + \frac{H}{ab}\overbrace{Cvu34}^{ap30} + \frac{H^2}{a^2 b}\overbrace{NLCvw3}^{ap31} + \frac{H^2}{a^2 b}\overbrace{NLCvw4}^{ap32}\right]\right\}\right) = 0 \qquad \text{(۱۳- ب)}$$

$$\overbrace{Mww1}^{ap33} + \overbrace{Kww2}^{ap34} + \frac{a^4}{b^4}\overbrace{Kww1}^{ap35} + \nu\left[\frac{a^2}{b^2}\overbrace{Kww3}^{ap36} + \frac{a^2}{b^2}\overbrace{Kww4}^{ap37}\right] + 2(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}\overbrace{Kww5}^{ap38} + 12\frac{a}{H}\overbrace{NLwu1}^{ap39} + 6\overbrace{NLww1}^{ap40} + 12\frac{a^4}{Hb^3}\overbrace{NLwv1}^{ap41} + 6\frac{a^4}{b^4}\overbrace{NLww2}^{ap42} + \nu\left(12\frac{a^2}{bH}\overbrace{NLwv2}^{ap43} + 12\frac{a^3}{Hb^2}\overbrace{NLwu2}^{ap44} + 6\frac{a^2}{b^2}\overbrace{NLww3}^{ap45} + 6\frac{a^2}{b^2}\overbrace{NLww4}^{ap46}\right) + \left[\lambda \times \overbrace{Fw}^{ap47} + g_a \times \overbrace{Cw8}^{ap48}\right] + \tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}}\left(\overbrace{CWW1}^{ap49} + \frac{a^4}{b^4}\overbrace{CWW2}^{ap50} + \vartheta\frac{a^2}{b^2}\overbrace{CWW3}^{ap51} + \vartheta\frac{a^2}{b^2}\overbrace{CWW4}^{ap52} + 2(1-\vartheta)\frac{a^2}{b^2}\overbrace{CWW5}^{ap53}\right) + 12\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho H a^4}}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{a}{H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۱q}}^{\mathrm{ap۵۴}}+\frac{a}{H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۱a}}^{\mathrm{ap۵۵}}+\frac{۳}{۲}\overbrace{\mathrm{NLCww۱}}^{\mathrm{ap۵۶}}\right\}+۱۲\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho ha^{۴}}}\left\{\frac{a^{۴}}{b^{۳}H}\overbrace{\mathrm{NLCwv۱q}}^{\mathrm{ap۵۷}}\right.\\
&\left.+\frac{a^{۴}}{b^{۳}H}\overbrace{\mathrm{NLCwv۱b}}^{\mathrm{ap۵۸}}+\frac{۳}{۲}\frac{a^{۴}}{b^{۴}}\overbrace{\mathrm{NLCww۲}}^{\mathrm{ap۵۹}}\right\}+۱۲\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^{۴}}}\vartheta\left\{\frac{a^{۳}}{Hb^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCwu۲q}}^{\mathrm{ap۶۰}}\right.\\
&\left.+\frac{a^{۲}}{Hb}\overbrace{\mathrm{NLCwv۲b}}^{\mathrm{ap۶۱}}+\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۴}}^{\mathrm{ap۶۲}}\right\}+\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۶}}^{\mathrm{ap۶۳}}+۱۲\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho ha^{۴}}}\vartheta\left\{\frac{a^{۲}}{Hb}\overbrace{\mathrm{NLCwv۲q}}^{\mathrm{ap۶۴}}\right.\\
&\left.+\frac{a^{۳}}{Hb^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCwu۲a}}^{\mathrm{ap۶۵}}+\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۳}}^{\mathrm{ap۶۶}}+\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۵}}^{\mathrm{ap۶۷}}\right\}+۶\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^{۴}}}(۱-\vartheta)\left\{\frac{a^{۲}}{bH}\overbrace{\mathrm{NLCwv۴q}}^{\mathrm{ap۶۸}}\right.\\
&+\frac{a^{۲}}{bH}\overbrace{\mathrm{NLCwv۳q}}^{\mathrm{ap۶۹}}+\frac{a^{۳}}{b^{۲}H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۴q}}^{\mathrm{ap۷۰}}+\frac{a^{۳}}{b^{۲}H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۳q}}^{\mathrm{ap۷۱}}+\frac{a^{۲}}{bH}\overbrace{\mathrm{NLCwv۳b}}^{\mathrm{ap۷۲}}+\frac{a^{۲}}{bH}\overbrace{\mathrm{NLCwv۴b}}^{\mathrm{ap۷۳}}\\
&\left.+\frac{a^{۳}}{b^{۲}H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۳a}}^{\mathrm{ap۷۴}}+\frac{a^{۳}}{b^{۲}H}\overbrace{\mathrm{NLCwu۴a}}^{\mathrm{ap۷۵}}+\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۵}}^{\mathrm{ap۷۶}}+۲\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۸}}^{\mathrm{ap۷۷}}+\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۶}}^{\mathrm{ap۷۸}}+۲\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\overbrace{\mathrm{NLCww۹}}^{\mathrm{ap۷۹}}\right\}=۰
\end{aligned}
\tag{۱۳- پ}
$$

که توضیح پارامترهای مشخص شده در رابطه (۱۳) به صورت apx و apxx در پیوست آمده است، همچنین روابط مشروح پارامترهای این معادلات در روابط (۱۴) داده شده است:

$$M_v^v=Mv \tag{۱۴- الف}$$

$$K_v^u=۱۲\nu\frac{a^{۳}}{H^{۲}b}\mathrm{Kvu۱۲}+۶(۱-\nu)\frac{a^{۳}}{H^{۲}b}\mathrm{Kvu۳۴} \tag{۱۴- ب}$$

$$K_v^v=۱۲\frac{a^{۴}}{Hb^{۲}}\mathrm{Kvv۱۲}+۶(۱-\nu)\frac{a^{۲}}{H^{۲}}\mathrm{Kvv۳۴} \tag{۱۴- پ}$$

$$C_v^u=۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H^{۳}}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(\vartheta\frac{H}{ab}\mathrm{Cvu۱۲}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\frac{H}{ab}\mathrm{Cvu۳۴}\right) \tag{۱۴- ت}$$

$$C_v^v=۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H^{۳}}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(\frac{H}{b^{۲}}\mathrm{Cvv۱۲}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\frac{H}{a^{۲}}\mathrm{Cvv۳۴}\right) \tag{۱۴- ث}$$

$$
\begin{aligned}
NL_v^w=&۶\frac{a^{۴}}{Hb^{۳}}\mathrm{NLvw۱}+۶\nu\frac{a^{۲}}{Hb}\mathrm{NLvw۲}\\
&+۶(۱-\nu)\frac{a^{۲}}{Hb}\mathrm{NLvw۳}
\end{aligned}
\tag{۱۴-ج}
$$

$$
\begin{aligned}
NLC_v^w=&۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(\frac{H^{۲}}{b^{۳}}\mathrm{NLCvw۱}\right.\\
&+\vartheta\frac{H^{۲}}{a^{۲}b}\mathrm{NLCvw۲}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\left[\frac{H^{۲}}{a^{۲}b}\right.\\
&\left.\left.\mathrm{NLCvw۳}+\frac{H^{۲}}{a^{۲}b}\mathrm{NLCvw۴}\right]\right)
\end{aligned}
\tag{۱۴- چ}
$$

$$M_u^u=Mu \tag{۱۴- ح}$$

$$K_u^u=۱۲\frac{a^{۲}}{H^{۲}}\mathrm{Kuu۱۲}+۶(۱-\nu)\frac{a^{۴}}{H^{۲}b^{۲}}\mathrm{Kuu۳۴} \tag{۱۴- خ}$$

$$K_u^v=۱۲\nu\frac{a^{۳}}{H^{۲}b}\mathrm{Kuv۱۲}+(۱-\nu)۶\frac{a^{۳}}{H^{۲}b}\mathrm{Kuv۳۴} \tag{۱۴- د}$$

$$
\begin{aligned}
NL_u^w=&۶\frac{a}{H}\mathrm{NLuw۱}+۶\nu\frac{a^{۳}}{Hb^{۲}}\mathrm{NLuw۲۶}\\
&+(۱-\nu)\frac{a^{۳}}{Hb^{۲}}\mathrm{NLuw۳}
\end{aligned}
\tag{۱۴- ذ}
$$

$$
\begin{aligned}
C_u^u=&۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H^{۳}}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\\
&\left(\frac{H}{a^{۲}}\mathrm{Cuu۱۲}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\frac{H}{b^{۲}}\mathrm{Cuu۳۴}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۴- ر}
$$

$$
\begin{aligned}
C_u^v=&۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H^{۳}}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\\
&\left(\vartheta\frac{H}{ab}\mathrm{Cuv۱۲}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\frac{H}{ab}\mathrm{Cuv۳۴}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۴- ز}
$$

$$
\begin{aligned}
NLC_u^w=&۱۲\tau_c\frac{a^{۲}}{H^{۳}}\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\\
&\left(\begin{array}{l}
\frac{H^{۲}}{a^{۳}}\mathrm{NLCuw۱}+\vartheta\\
\left\{+\frac{H^{۲}}{ab^{۲}}\mathrm{NLCuw۲}\right\}+\frac{۱-\vartheta}{۲}\\
\left\{\frac{H^{۲}}{ab^{۲}}\mathrm{NLCuw۳}+\frac{H^{۲}}{ab^{۲}}\mathrm{NLCuw۴}\right\}
\end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۴-ژ}
$$

$$M_w^w = Mww1 \tag{۱۴- س}$$

$$K_w^w = \frac{a^4}{b^4}Kww1 + Kww2 + \nu\left[\frac{a^2}{b^2}Kww3 + \frac{a^2}{b^2}Kww4\right] + 2(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}Kww5 \tag{۱۴- ش}$$

$$K_{Aero} = Fw \tag{۱۴- ص}$$

$$C_w^w = \tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho H}}\left(CWW1 + \frac{a^4}{b^4}CWW2 + \vartheta\frac{a^2}{b^2}CWW3 + \vartheta\frac{a^2}{b^2}CWW4 + 2(1-\vartheta)\frac{a^2}{b^2}CWW5\right) \tag{۱۴- ض}$$

$$C_{Aero} = Cw \tag{۱۴- ط}$$

$$NL_w^u = 12\frac{a}{H}NLwu1 + 12\nu\frac{a^3}{Hb^2}NLwu2 \tag{۱۴- ظ}$$

$$NL_w^v = 12\frac{a^4}{Hb^3}NLwv1 + 12\nu\frac{a^2}{bH}NLwv2 \tag{۱۴- ع}$$

$$NL_w^w = 6NLww1 + 6\frac{a^4}{b^4}NLww2 + 6\nu\frac{a^2}{b^2}\left(NLww3 + NLww4\right) \tag{۱۴- غ}$$

$$NLC_w^u q = 12\frac{a}{H}\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^4}}\left[NLCwu1q + \vartheta\frac{a^2}{b^2}NLCwu2q + \frac{(1-\vartheta)}{2}\frac{a^2}{b^2}\left\{NLCwu4q + NLCwu3q\right\}\right] \tag{۱۴- ف}$$

$$NLC_w^u a = 12\frac{a}{H}\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^4}}\left[NLCwu1a + \vartheta\frac{a^2}{b^2}NLCwu2a + \frac{(1-\vartheta)}{2}\frac{a^2}{b^2}\left\{NLCwu3a + NLCwu4a\right\}\right] \tag{۱۴- ق}$$

$$NLC_w^v q = 12\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^4}}\frac{a^4}{b^3H}\left[NLCwv1q + \vartheta\frac{b^2}{a^2}NLCwv2q + \frac{(1-\vartheta)}{2}\left\{\frac{b^2}{a^2}NLCwv4q + \frac{b^2}{a^2}NLCwv3q\right\}\right] \tag{۱۴- ک}$$

$$NLC_w^v b = 12\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^4}}\frac{a^4}{b^3H}\left[NLCwv1b + \vartheta\frac{b^2}{a^2}NLCwv2b + \frac{(1-\vartheta)}{2}\left\{\frac{b^2}{a^2}NLCwv3b + \frac{b^2}{a^2}NLCwv4b\right\}\right] \tag{۱۴- گ}$$

$$\begin{aligned} NLCww = 12\tau_c\sqrt{\frac{D}{\rho Ha^4}}\Bigg[&\frac{3}{2}\left(NLCww1 + \frac{a^4}{b^4}NLCww2\right) \\ &+ \frac{a^2}{b^2}\Bigg\{\vartheta\left(NLCww4 + \frac{1}{2}NLCww6 + NLCww3 + \frac{1}{2}NLCww5\right) + \frac{(1-\vartheta)}{2} \\ &\left\{\frac{b^2}{a^2}NLCww5 + 2NLCww8 + NLCww6 + 2NLCww9\right\}\Bigg\}\Bigg] \end{aligned} \tag{۱۴- ل}$$

معادلات حرکت (۱۳) را می‌توان به‌صورت ماتریسی (۱۵) نوشت.

$$\begin{bmatrix} M_u^u & 0 & 0 \\ 0 & M_v^v & 0 \\ 0 & 0 & M_w^w \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{\bar{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_u^u & C_u^v & 0 \\ C_v^u & C_v^v & 0 \\ 0 & 0 & C_w^w + g_a \times C_{Aero} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u^u & K_u^v & 0 \\ K_v^u & K_v^v & 0 \\ 0 & 0 & K_w^w + \lambda \times K_{Aero} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} NL_u^w + NLC_u^w \\ NL_v^w + NLC_v^w \\ NL_w^u + NL_w^v + NL_w^w + NLC_w^u q + NLC_w^u a + NLC_w^v q + NLC_w^v b + NLCww \end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

و یا به‌صورت خلاصه می‌توان نوشت:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{NL} \tag{۱۶}$$

M ماتریس جرمی قطری، **C** ماتریس میرایی ویسکوز، **K** ماتریس سفتی و **NL** بخش غیرخطی معادلات است. به‌منظور به‌دست آوردن شکل مناسب معادلات برای روش عددی، رابطه (۱۶) در معکوس ماتریس جرمی ضرب شده و سپس در فرم

جدول ۱- مشخصه‌های هندسی و مکانیکی ورق

مشخصه‌های مکانیکی		مشخصه‌های هندسی	
مدول کششی $E, (GPa)$	۶۸/۳	$\varphi = a/b$	۰/۵، ۱، ۲ و ۴
چگالی $\rho, (kg/m^3)$	۲۶۸۹	$\delta = H/a$	۰/۰۵
نسبت پواسن، ν	۰/۳۳		

فضای حالت به‌صورت رابطه (۱۷) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{M}^{-1}\left[-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{Kq} + \mathbf{NL}\right] \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که $\mathbf{y}$ بردار سرعت است. معادلات حالت به‌دست آمده با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار حل می‌شود.

۲- ۵- توابع مفروض مورد نیاز منطبق با شرایط مرزی هندسی ورق

یافتن توابعی که بتوانند همه شرایط مرزی هندسی و طبیعی ورق با قابلیت تغییرشکل‌های بزرگ را ارضا نمایند مشکل است. از این رو، مطابق با روش مود مفروض از توابعی استفاده شده که فقط شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند.

برای تعیین توابع مجاز مورد نیاز برای توصیف جابه‌جایی‌های درون‌صفحه‌ای ورق، می‌توان از توابع شکل مود ارتعاشات طولی میله، و برای توصیف حرکت عرضی ورق نیز از شکل مودهای تیر استفاده کرد [۲۴]. با فرض این که در مقابل ارتعاشات جانبی لبه‌ها از نوع مفصلی بوده، و در مقابل ارتعاشات طولی هر چهار لبه ثابت باشند، یعنی

$$\begin{aligned} u(0,y) &= u(l,y) = u(x,0) = u(x,l) \\ &= v(0,y) = v(l,y) = v(x,0) \\ &= v(x,l) = 0 \end{aligned}$$

از شکل مودهای رابطه (۱۸) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} u_i(x) &= C_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right), \quad i = 1,2,\ldots \\ u_r(x) &= C_r \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right), \quad r = 1,2,\ldots \\ \phi_m(x) &= C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad m = 1,2,\ldots \\ v_j(y) &= C_j \sin\left(\frac{j\pi y}{l}\right), \quad j = 1,2,\ldots \\ v_s(y) &= C_s \sin\left(\frac{s\pi y}{l}\right), \quad s = 1,2,\ldots \\ \psi_n(y) &= C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{۱۸}$$

۳- شبیه‌سازی و نتایج

مشخصه‌های هندسی و مکانیکی ورق‌های ویسکوالاستیک و الاستیک، به‌منظور سهولت مقایسه نتایج، تا حد ممکن یکسان در نظر گرفته شده و در جدول (۱) ارائه شده‌اند. ابتدا موضوع همگرایی حل با انتخاب تعداد مودهای در نظر گرفته شده در جهت جریان و عمود بر جهت جریان بررسی و تعداد مودهای لازم در هر جهت تعیین و نتایج قابل قبول به‌دست آمد. سپس صحت‌سنجی نتایج با توجه به دامنه نوسانات سیکل حدی مربوط به فشارهای آیرودینامیکی انجام شد. باتوجه به شدت بیشتر نوسانات سیکل حدی در موقعیت بی‌بعد $\varsigma = 0/75$ و $\eta = 0/5$، نمودارهای مربوط به حرکت این موقعیت رسم شده‌اند.

۳- ۱- مطالعه همگرایی

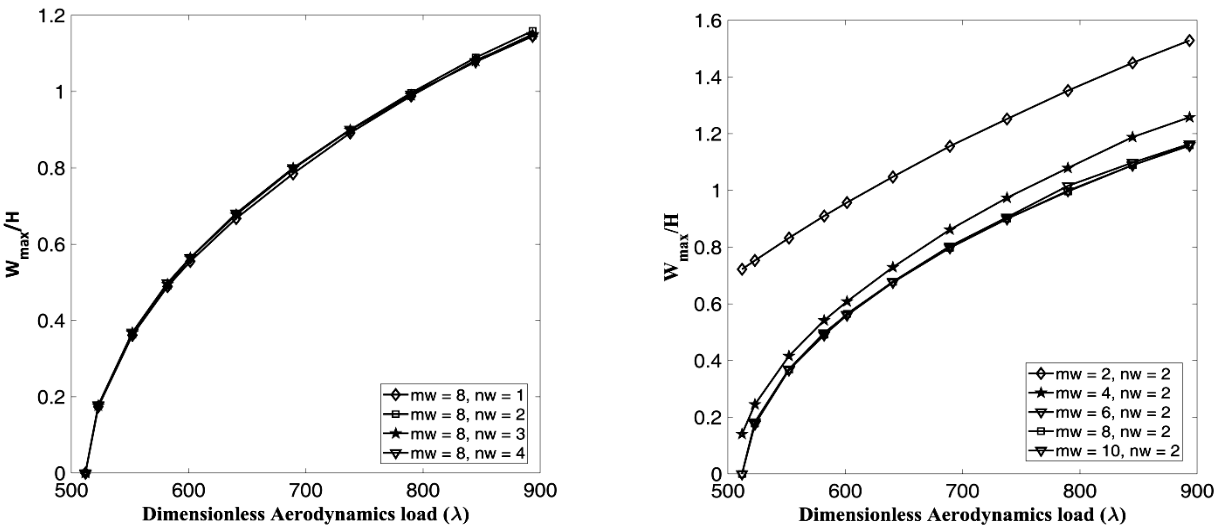
در شکل (۲)، دامنه نوسانات عرضی ورق برحسب فشار آیرودینامیک بی‌بعد رسم شده است. همان‌طور که در شکل (۲- الف و ب) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد شکل مود در راستای جریان به بیش از هشت مود و در راستای عمود بر جهت جریان به بیش از دو مود تغییرات محسوسی رخ نمی‌دهد لذا، هشت شکل مود در راستای جریان و دو شکل مود عمود بر جهت جریان برای به‌دست آوردن پاسخ‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین در جدول (۲)، فشار آیرودینامیکی بحرانی که

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]

جدول ۲- وقوع فلاتر در ورق مربعی با لبه‌های مفصلی ایزوتروپیک در $\delta=۰/۰۱$ و $\nu=۰/۳$

روش		$\bar{\omega}=\omega a^{۲}\sqrt{\rho H/D}$ (فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق)
مقاله حاضر	$mw=۴;\ nw=۲$	۵۰۴/۲
	$mw=۶;\ nw=۲$	۵۱۰/۶
	$mw=۸;\ nw=۲$	۵۱۲/۲
	$mw=۸;\ nw=۴$	۵۱۲/۲
	$mw=۸;\ nw=۶$	۵۱۲/۳
ولی‌زاده و همکاران [۲۵]		۵۱۲
گروور و همکاران [۲۶]		۵۱۱/۱۱



(ب) (الف)

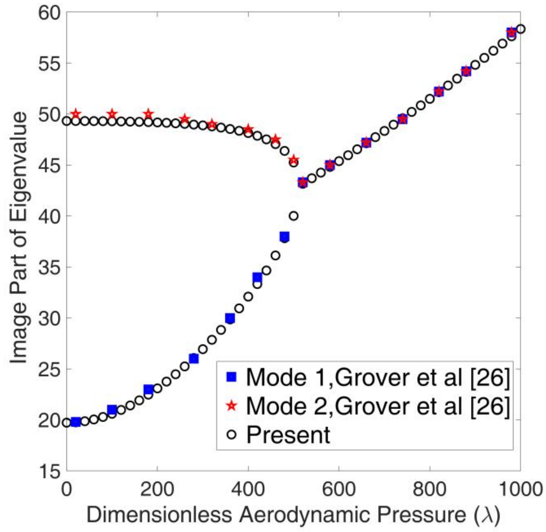
شکل ۲- همگرایی حل برای ورق با لبه‌های مفصلی $\delta=۰/۰۱$ و $\varphi=۱$، الف) با توجه به تعداد شکل مود در جهت جریان و ب) با توجه به تعداد شکل مود عمود بر جهت جریان

فلاتر در آن رخ می‌دهد به‌دست آمده و با نتایج مراجع [۲۵ و ۲۶] مقایسه شده است که توافق مناسبی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با هشت مود در جهت جریان و دو مود عمود بر جهت جریان، همگرایی مناسبی حاصل خواهد شد. البته انتخاب تعداد شکل مودهای بیشتر، دقت نتایج را افزایش خواهد داد اما در مقابل زمان اجرای برنامه نیز طولانی‌تر می‌شود.

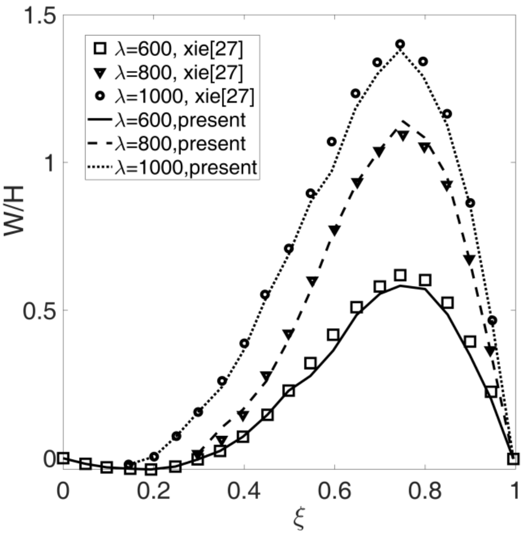
۳-۲- صحت‌سنجی

به‌منظور صحت‌سنجی حل و نتایج، در شکل (۳- الف)، قسمت موهومی مقادیر ویژه، برحسب فشار آیرودینامیک بی‌بعد رسم شده و با نتایج مقاله گروور و همکاران [۲۶] مقایسه شده است. نتایج در توافق کامل با مرجع [۲۶] است. در شکل (۳- ب)، دامنه نوسانات سیکل حدی ورق در جهت جریان برای سه فشار آیرودینامیکی بی‌بعد $\lambda=۶۰۰$، $\lambda=۸۰۰$ و $\lambda=۱۰۰۰$ رسم شده و با نتایج مقاله ژیه و همکاران [۲۷] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که دامنه نوسانات سیکل حدی در موقعیت بی‌بعد ۰/۷۵ در راستای جریان بیشترین مقدار خود را دارد. نتایج در توافق کامل با مرجع [۲۷] است. همچنین در

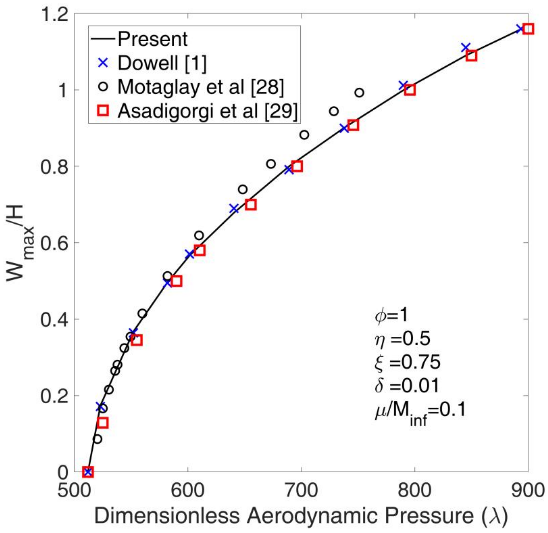
[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳- الف) قسمت موهومی مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیکی بی‌بعد، ب) دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب موقعیت بی‌بعد در راستای جریان برای سه فشار آیرودینامیک بی‌بعد $\lambda=۶۰۰$، $\lambda=۸۰۰$ و $\lambda=۱۰۰۰$، ج) دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب تغییرات فشار آیرودینامیک بی‌بعد برای ورق با لبه‌های مفصلی مربعی $\mu/M_{\infty}=۰/۱$ و $\delta=۰/۰۱$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

شکل (۳- ج)، دامنه نوسانات سیکل حدی برحسب فشار آیرودینامیک بی‌بعد برای نسبت منظری یک رسم شده و با نتایج داول [۱] و عبدل موتاگلای و همکاران [۲۵] و اسدی گرجی و همکاران [۲۹] مقایسه شد، که توافق خوبی بین نتایج قابل مشاهده است.

۳- ۳- رفتار دینامیکی

در این بخش نمودارهای رفتار دینامیکی ورق الاستیک و ویسکوالاستیک برای چهار نسبت منظر[۲۷] $\varphi=۰/۵$، $\varphi=۱$، $\varphi=۲$ و $\varphi=۴$ به‌دست آمده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. قابل ذکر است که نمودار چندشاخگی برحسب پارامتر کنترلی[۲۸] λ

رسم شده و در نمودارها رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکوالاستیک و رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک است. در تمامی نمودارها با افزایش تدریجی فشار آیرودینامیک بی‌بعد به‌عنوان پارامتر کنترلی، ابتدا فلاتر رخ می‌دهد سپس با افزایش پارامتر کنترلی، دامنه نوسانات زیاد شده و رفتار سیستم به حرکت با پریودهای بالاتر یا شبه‌پریودیک و بعد از آن به حرکت آشوبناک تغییر می‌یابد.

۳- ۳- ۱- نسبت منظر $\varphi=۱$

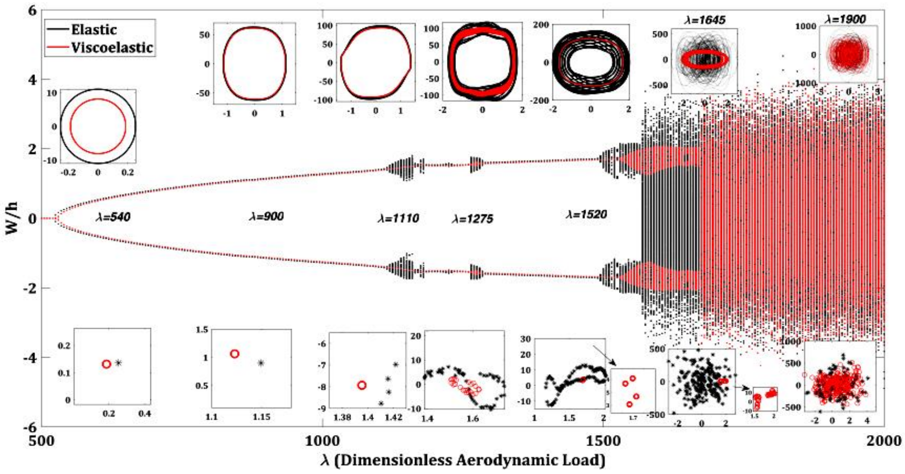
در شکل (۴)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از $\lambda=۵۰۰$ تا $\lambda=۲۰۰۰$ برای نسبت منظر یک، $\varphi=۱$ با بازه‌های $\Delta\lambda=۱$ رسم شده است. با افزایش تدریجی پارامتر کنترلی از فشارهای آیرودینامیک بی‌بعد کم، ورق الاستیک شروع به ارتعاش می‌کند و در $\lambda=۵۰۸$ فلاتر رخ می‌دهد. ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک نیز با توجه به شکل‌های (۴- الف تا ج) رفتاری تقریباً مشابه با ورق الاستیک دارد، یعنی در نزدیکی همین مقدار از پارامتر کنترلی فلاتر رخ می‌دهد. اما همان‌طور که در شکل (۴- د) مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ویسکوز به $\tau_c=۰/۰۰۱$ فلاتر زودتر رخ می‌دهد یعنی در $\lambda=۵۰۸$ رفتار ورق ویسکوالاستیک با $\tau_c=۰/۰۰۱$ از نوع نوسانات سیکل حدی است در حالی که در این شرایط در ورق الاستیک فلاتر رخ داده است. برای روشن شدن بیشتر این موضوع، برای $\lambda=۵۴۰$ نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک در شکل (۴- د) در کنار نمودار چندشاخه‌گی رسم شده، که رفتار حرکت پریودیک با پریود یک را برای هر دو ورق نشان می‌دهد، به‌طوری که دامنه نوسانات برای ورق ویسکوالاستیک از ورق الاستیک بیشتر است.

با افزایش بیشتر پارامتر کنترلی تا $\lambda=۱۱۰۵$ رفتار ورق الاستیک و ویسکوالاستیک به‌صورت هارمونیک ساده خواهد بود. به‌طور مثال در فشار آیرودینامیک بی‌بعد $\lambda=۹۰۰$ ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک رفتاری نزدیک به رفتار ورق الاستیک دارد اما اگر پارامتر ویسکوز برابر با $\tau_c=۰/۰۰۱$ باشد دامنه نوسانات عرضی ورق ویسکوالاستیک نسبت به ورق الاستیک بزرگتر خواهد بود شکل (۴- د).

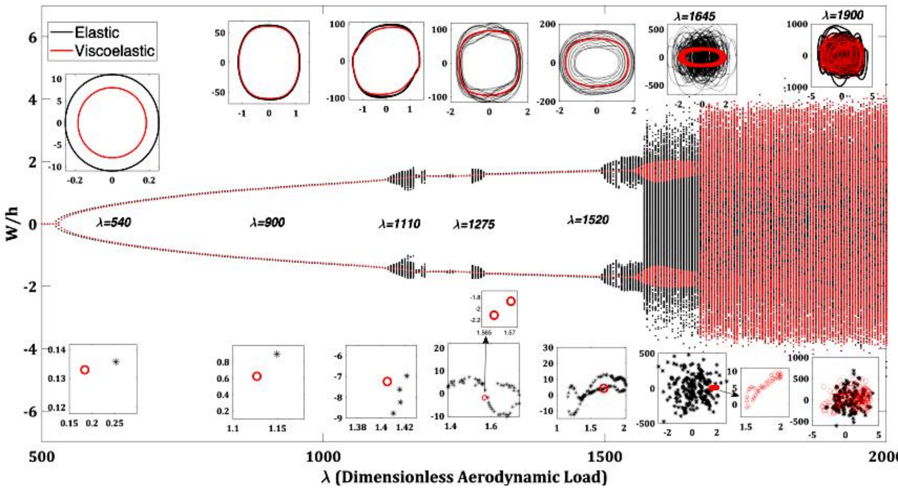
در بازه $۱۱۸۰>\lambda>۱۱۱۰$ رفتار ورق الاستیک از پریودیک به رفتارهای پیچیده غیرخطی تغییر می‌کند، در حالی که ورق ویسکوالاستیک همچنان از نوع پریودیک است. به‌عنوان نمونه، در $\lambda=۱۱۱۰$ نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک رسم شده و مشاهده می‌شود که رفتار ورق الاستیک از نوع پریود ۴ و ورق ویسکوالاستیک از نوع پریود ۱ است.

جابه‌جایی عرضی ورق الاستیک در بازه‌های $۱۲۱۰<\lambda<۱۴۸۵$ و $۱۴۸۵>\lambda>۱۲۹۰$، پنجره‌ای را نشان می‌دهد که در آن رفتار از نوع هارمونیک ساده است، اما در بازه $۱۲۸۵>\lambda>۱۲۱۵$ رفتار ورق به رفتارهای پیچیده‌تر تغییر می‌یابد. به‌طور مثال در $\lambda=۱۲۷۵$ همان‌طور که در نمودار فضای فازی و مقطع پوانکاره مشاهده می‌شود، با درنظر گرفتن پارامتر ویسکوز $\tau_c=۰/۰۰۰۰۰۱$ نوع رفتار ورق ویسکوالاستیک نسبت به الاستیک تغییر نمی‌کند اما دامنه نوسانات کاهش می‌یابد شکل (۴- الف). همچنین مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ویسکوز، رفتار ورق ویسکوالاستیک از شبه‌پریودیک به پریود ۲ شکل (۴- ب) و پریود ۱ شکل (۴- ج و د) تغییر می‌یابد.

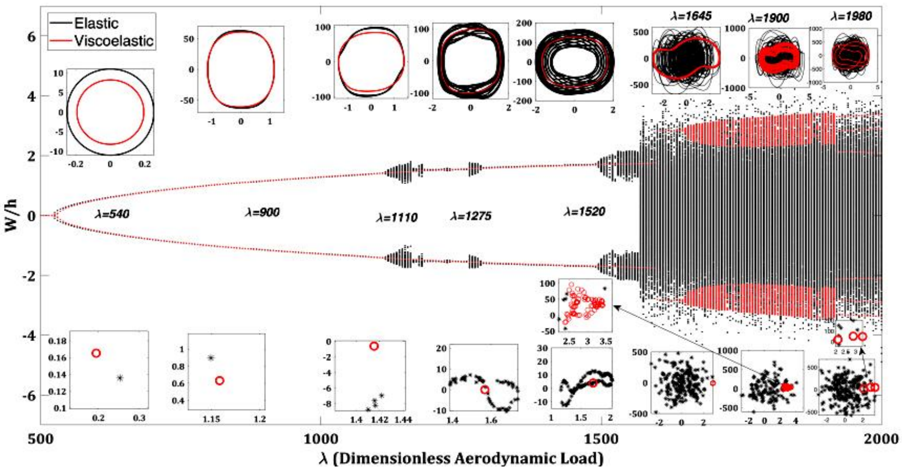
برای $\lambda>۱۴۹۰$ رفتار ورق الاستیک تغییر کرده و به رفتار آشوبناک نزدیک می‌شود. با در نظر گرفتن نمودار فازی و مقطع پوانکاره مشاهده می‌شود که رفتار ورق الاستیک به‌طور مثال در $\lambda=۱۵۲۰$، شبه‌پریودیک، و در $\lambda=۱۶۴۵$ و $\lambda=۱۹۰۰$ آشوبناک خواهد بود. اما رفتار ورق ویسکوالاستیک روند دیگری دارد، به‌طوری که در $\lambda=۱۵۲۰$، با $\tau_c=۰/۰۰۰۰۰۱$ شکل (۴- الف) پریودیک با پریود ۴، و با $\tau_c=۰/۰۰۰۰۱$ شکل (۴- ب) و $\tau_c=۰/۰۰۰۱$ شکل (۴- ج) و $\tau_c=۰/۰۰۱$ شکل (۴- د) پریود ۱ است، در $\lambda=۱۶۴۵$ شکل (۴- الف تا ج) شبه‌پریودیک و شکل (۴- د) پریود ۱، و در



(الف)

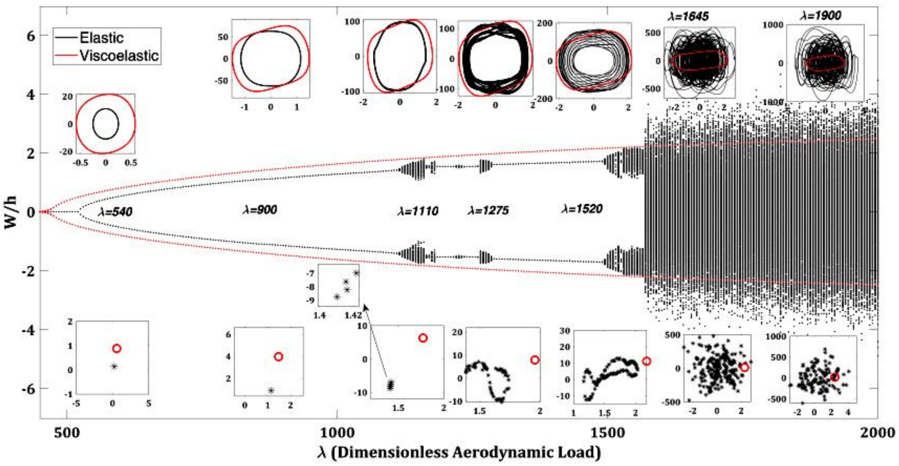


(ب)



(ج)

شکل ۴- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی مربعی با $\delta =$ ۰/۰۵، رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک و رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکوالاستیک با پارامترهای ویسکوز الف) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۰۱ ب) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۱ ج) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۱ د) $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ (رنگی در نسخه الکترونیکی)



(د)

ادامه شکل ۴- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی مربعی با $\delta = ۰/۰۵$، رنگ سیاه مربوط به ورق الاستیک و رنگ قرمز مربوط به ورق ویسکوالاستیک با پارامترهای ویسکوز الف) $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۰۱$ ب) $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۱$ ج) $\tau_c = ۰/۰۰۰۱$ د) $\tau_c = ۰/۰۰۱$ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جدول ۳- تغییر رفتار ورق در فشارهای آیرودینامیک مختلف

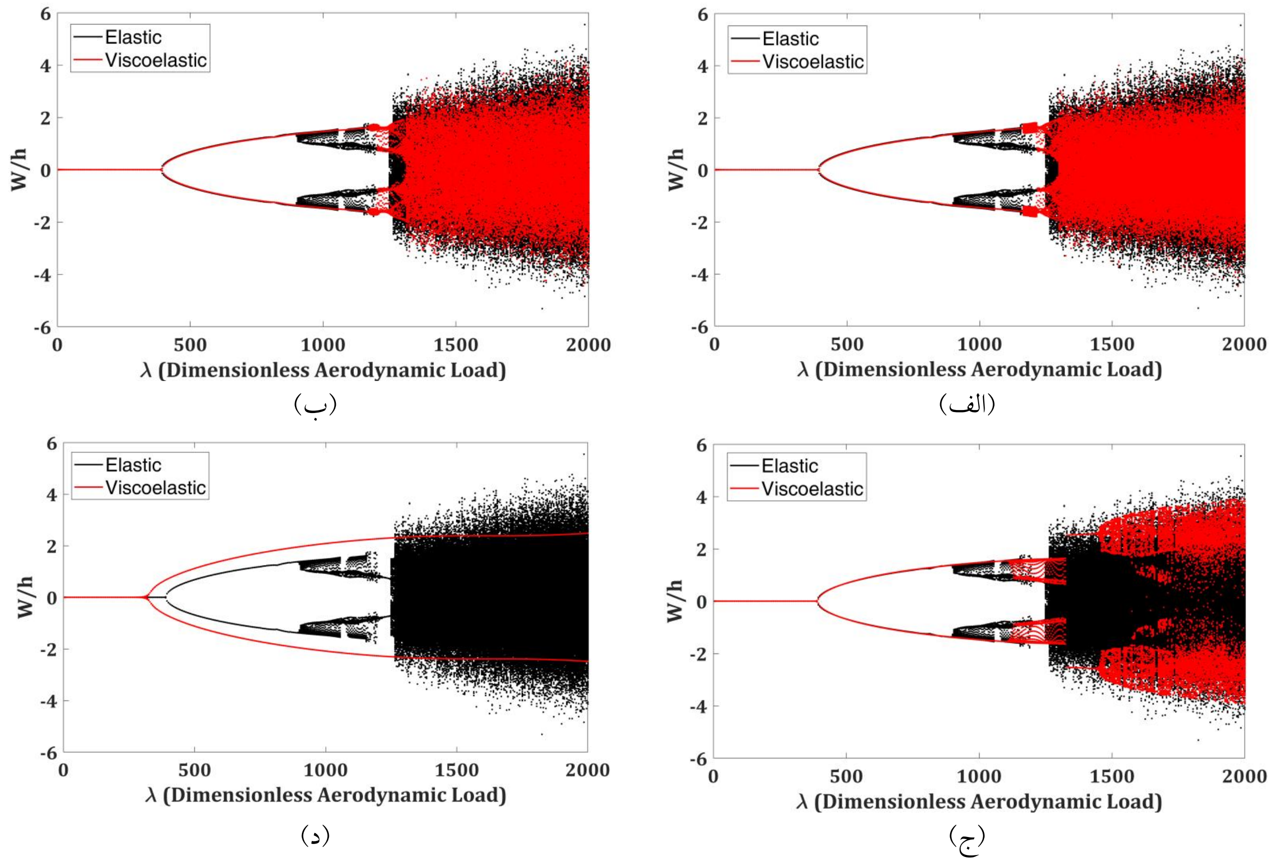
	$\lambda = ۵۴۰$	$\lambda = ۹۰۰$	$\lambda = ۱۱۱۰$	$\lambda = ۱۲۷۵$	$\lambda = ۱۵۲۰$	$\lambda = ۱۶۴۵$	$\lambda = ۱۹۰۰$
الاستیک	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۴	شبه‌پریودیک	شبه‌پریودیک	آشوبناک	آشوبناک
ویسکوالاستیک $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۰۱$	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	شبه‌پریودیک	پریود ۴	شبه‌پریودیک	آشوبناک
ویسکوالاستیک $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۱$	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۲	پریود ۱	شبه‌پریودیک	آشوبناک
ویسکوالاستیک $\tau_c = ۰/۰۰۰۱$	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	شبه‌پریودیک	شبه‌پریودیک
ویسکوالاستیک $\tau_c = ۰/۰۰۱$	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱	پریود ۱

$\lambda = ۱۹۰۰$ با $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $\tau_c = ۰/۰۰۰۰۱$ شکل (۴- الف و ب) آشوبناک و با $\tau_c = ۰/۰۰۰۱$ شکل (۴- ج) شبه‌پریودیک و در $\tau_c = ۰/۰۰۱$ شکل (۴- د) پریود ۱ است.

نکته مهمی در شکل (۴- ج) در $۱۹۲۰ < \lambda < ۲۰۰۰$ مشاهده می‌شود، برای نمونه در $\lambda = ۱۹۸۰$ در ورق الاستیک حرکت آشوبناک، و در ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز $\tau_c = ۰/۰۰۰۱$ حرکت از نوع پریود ۳ است. به‌طور خلاصه در این نسبت منظری، در ابتدای رخداد فلاتر در ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز بالاتر، رفتار آن نسبت به ورق الاستیک ناپایدارتر است اما هر چه فشار آیرودینامیک بی‌بعد افزایش یابد ورق ویسکوالاستیک رفتارهای ساده‌تری نسبت به ورق الاستیک خواهد داشت. در جدول (۳)، خلاصه نتایج مهم آمده است.

۳- ۳- ۲- نسبت منظر $\varphi = ۰/۵$

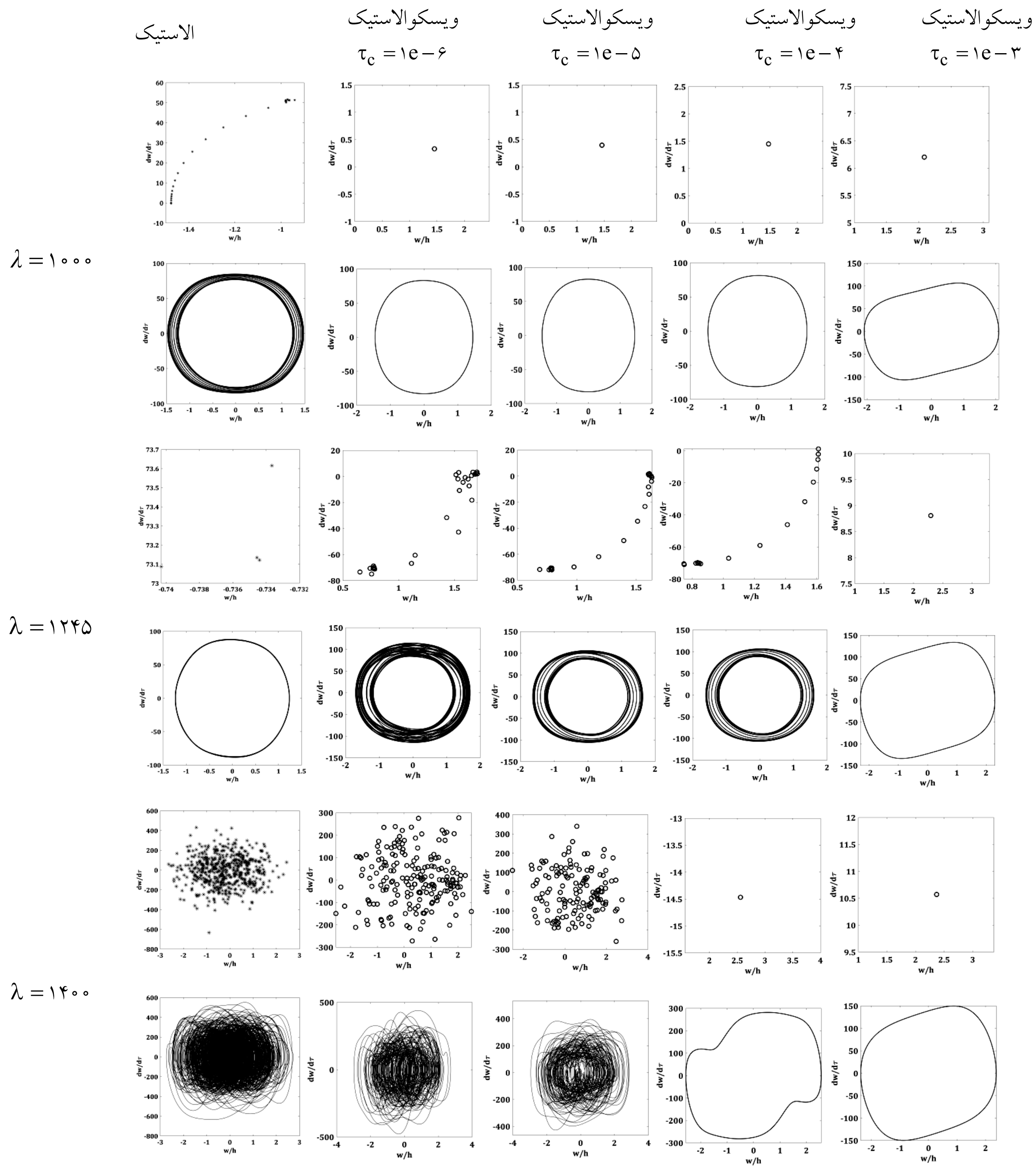
در شکل (۵)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی



شکل ۵- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با ۰/۰۵ = δ و نسبت منظری ۰/۵ = φ، با پارامترهای ویسکوز الف) ۰/۰۰۰۰۰۱ = τ_c ب) ۰/۰۰۰۰۱ = τ_c ج) ۰/۰۰۰۱ = τ_c د) ۰/۰۰۱ = τ_c (رنگی در نسخه الکترونیکی)

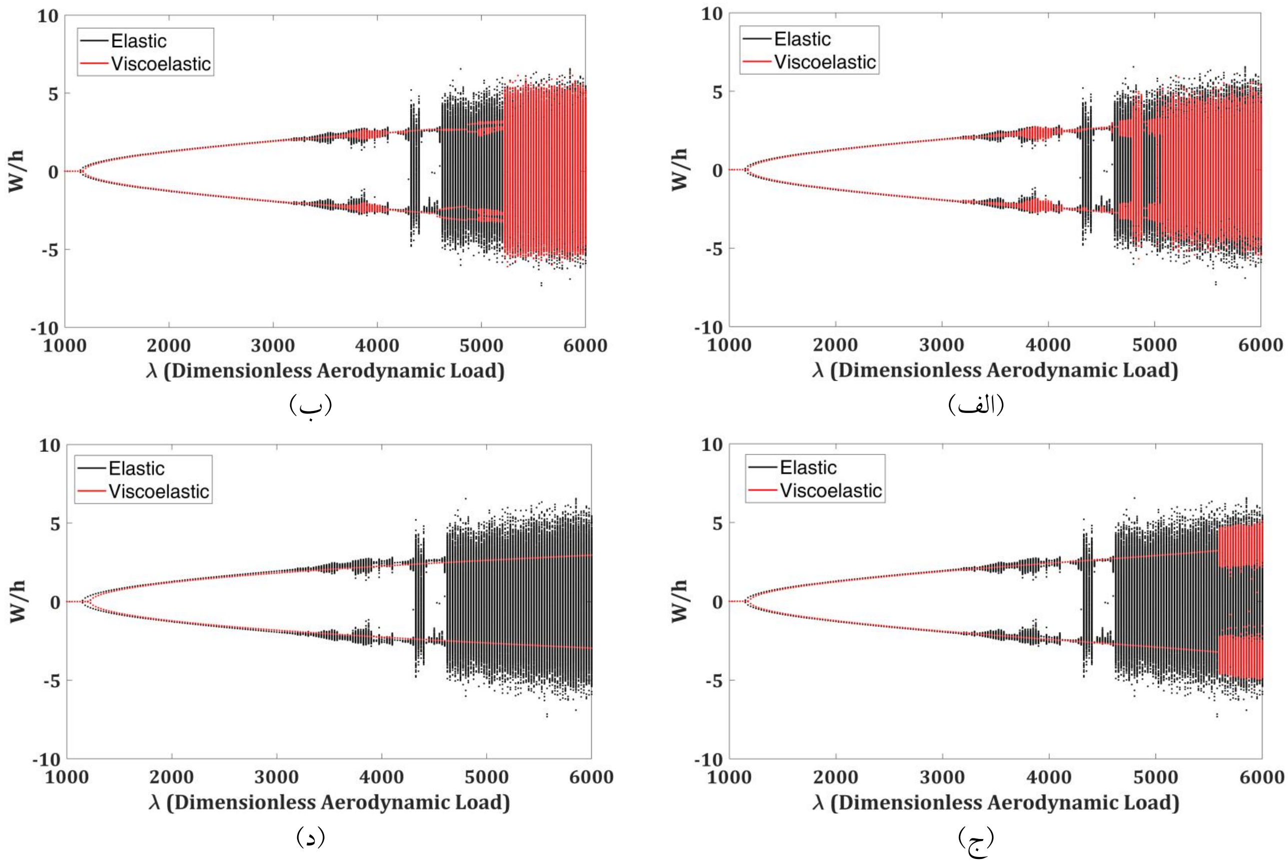
بی‌بعد از ۵ = λ تا ۲۰۰۰ = λ برای نسبت منظر ۰/۵ = φ با بازه‌های ۵ = $\Delta\lambda$ رسم شده است. با توجه به نمودارها، ورق الاستیک در بازه ۳۹۰ < λ < ۸۹۵ رفتار پریودیک با پریود ۱ دارد که در بازه ۸۹۵ < λ < ۱۱۹۵ به رفتارهای پیچیده غیرخطی تبدیل شده و بعد از آن در بازه ۱۲۰۰ < λ < ۱۲۴۵ دوباره رفتار پریودیک مشاهده می‌شود، و سرانجام برای ۱۲۵۰ < λ به حرکت آشوبناک تبدیل می‌شود. مطابق شکل (۵- الف)، ورق ویسکوالاستیک با ۰/۰۰۰۰۰۱ = τ_c در بازه ۳۹۵ < λ < ۱۱۵۵ رفتاری پریودیک با پریود ۱ دارد، که با افزایش خاصیت ویسکوز به ۰/۰۰۰۰۱ = τ_c بازه این حرکت پریودیک به بازه ۳۹۵ < λ < ۱۱۶۰ تغییر می‌یابد، شکل (۵- ب). نکته مهم در شکل (۵- ج) اتفاق می‌افتد به‌طوری که رفتار ورق ویسکوالاستیک با ۰/۰۰۰۱ = τ_c در بازه ۳۹۵ < λ < ۱۱۰۰ و ۱۳۳۰ < λ < ۱۴۳۵ پریودیک است و بعد از آن آشوبناک خواهد شد. مطابق شکل (۵- د)، ورق ویسکوالاستیک با ۰/۰۰۱ = τ_c در محدوده فشار آیرودینامیکی ذکر شده از نوع پریود ۱ است.

در شکل (۶)، نمودارهای فضای فازی و مقطع پوانکاره برای ورق الاستیک، و ورق ویسکوالاستیک با چهار خاصیت ویسکوز، در سه فشار مختلف آیرودینامیک بی‌بعد (λ) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که اگر خاصیت ویسکوز به اندازه کافی بزرگ باشد حرکت آشوبناک را در ورق ویسکوالاستیک نسبت به ورق الاستیک به تأخیر می‌اندازد. به‌طور مثال در ۱۰۰۰ = λ رفتار شبه‌پریودیک ورق الاستیک به رفتار پریودیک در ورق ویسکوالاستیک تغییر می‌یابد. در



شکل ۶- مقطع پوانکاره و فضای فازی ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک

$\lambda = ۱۲۴۵$، ورق ویسکوالاستیک با ضرایب ویسکوز پایین رفتار پیچیده‌تری نسبت به ورق الاستیک دارد یعنی از نوع پریود ۳ است، اما با افزایش ضریب ویسکوز ورق ویسکوالاستیک به $\tau_c = ۰/۰۰۱$، رفتار ورق ویسکوالاستیک ساده‌تر و از نوع پریود ۱ خواهد بود. بنابراین ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز کوچک ممکن است مناسب نباشد و در برخی فشارهای آیرودینامیک رفتار پیچیده‌تری نسبت به ورق الاستیک نشان دهد. در فشار آیرودینامیک بی‌بعد $\lambda = ۱۴۰۰$ در ورق الاستیک



شکل ۷- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با $\delta =$ ۰/۰۵ و نسبت منظر $\varphi =$ ۲ و پارامترهای ویسکوز الف) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۰۱ ب) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۱ ج) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۱ د) $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

و نیز ورق ویسکوالاستیک با ضرایب ویسکوز پایین، رفتار آشوبناک رخ می‌دهد، اما با افزایش پارامتر ویسکوز به $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۱، رفتار ورق ویسکوالاستیک از نوع پریود ۱ خواهد بود. به‌طوری که مشاهده می‌شود در تمامی نمودارها رفتار برای ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ از نوع پریود ۱ است.

بنابراین در این نسبت منظری، استفاده از ورق ویسکوالاستیک مفید است. ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز پایین در برخی فشارهای آیرودینامیک بی‌بعد دچار رفتارهای پیچیده غیرخطی می‌شود اما در بسیاری از فشارهای آیرودینامیک، رفتارهای پیچیده غیرخطی که در ورق الاستیک رخ می‌دهد با استفاده از خاصیت ویسکوز به تأخیر می‌افتد. این رفتارهای پیچیده غیرخطی در ورق ویسکوالاستیک با افزایش پارامتر ویسکوز به‌طور کامل محو می‌شود و در فشارهای آیرودینامیکی نسبتاً بالاتری دچار رفتارهای پیچیده می‌شود.

۳- ۳- ۳- نسبت منظر $\varphi =$ ۲

در شکل (۷)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از $\lambda =$ ۱۰۰۰ تا $\lambda =$ ۶۰۰۰ برای نسبت منظر $\varphi =$ ۲ با بازه‌های $\Delta\lambda =$ ۲۵ رسم شده است. ورق الاستیک در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد $\lambda =$ ۱۱۲۵ دچار ناپایداری شده و در این فشار بحرانی، فلاتر رخ می‌دهد. حرکت پریودیک با پریود ۱ در بازه ۳۰۲۵ $> \lambda >$ ۱۱۲۵ ادامه دارد تا رفتار ورق در بازه ۴۱۰۰ $> \lambda >$ ۳۰۵۰ از حالت پریودیک پیچیده‌تر شود. ورق الاستیک در بازه ۴۱۷۵ $> \lambda >$ ۴۱۲۵ پنجره‌ای از حرکت پریودیک با پریود ۱ را

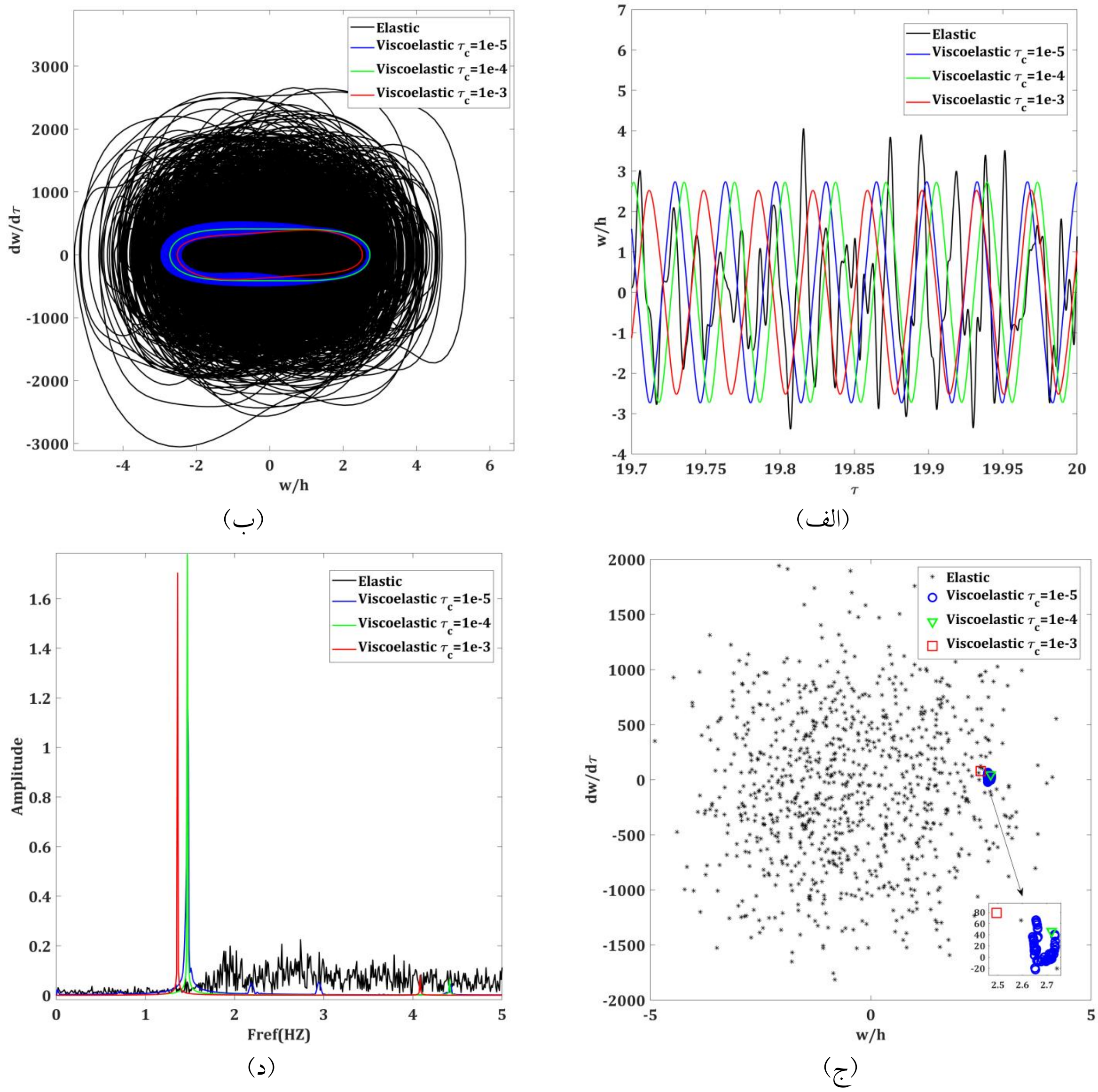
نشان می‌دهد اما بعد از آن در بازه ۴۴۰۰ > λ > ۴۲۰۰ رفتار ورق از نوع آشوبناک خواهد بود. بار دیگر در بازه ۴۶۰۰ > λ > ۴۴۲۵ تغییر رفتاری به‌صورت حرکت پریودیک با پریودهای بالا و نیز شبه‌پریودیک مشاهده می‌شود. پس از این فشار آیرودینامیکی، حرکت ورق الاستیک به‌طور کامل آشوبناک می‌شود. اما در ورق ویسکوالاستیک، برای نمونه ورق ویسکوالاستیک با پارامتر ویسکوز τ_c = ۰/۰۰۰۰۰۱ همان‌طور که در شکل (۷- الف) نشان داده شده، فلاتر در فشار بحرانی λ = ۱۱۷۵ رخ داده است. پس از آن در بازه ۳۱۷۵ > λ > ۱۱۷۵ رفتار ورق از نوع پریودیک با پریود ۱ است اما در بازه ۴۳۵۰ > λ > ۳۲۰۰ حرکت با پریودهای بالاتر رخ می‌دهد، و نیز پنجره‌ای از حرکت پریودیک در بازه ۴۵۷۵ > λ > ۴۳۷۵ مشاهده می‌شود. نکته قابل توجه اینکه در بازه‌های ۴۴۰۰ > λ > ۴۳۲۵ و ۴۹۲۵ > λ > ۴۹۰۰ رفتار ورق ویسکوالاستیک در این نسبت ویسکوز، پریودیک است در حالی که حرکت ورق الاستیک از نوع آشوبناک خواهد بود. در بازه ۶۰۰۰ > λ > ۴۹۵۰ ورق ویسکوالاستیک نیز دچار رفتار آشوبناک می‌شود. رفتار در ورق ویسکوالاستیک با افزایش پارامتر ویسکوز بهبود می‌یابد، به‌طوری که در شکل (۷- ب) برای پارامتر ویسکوز τ_c = ۰/۰۰۰۰۱ با وجود اینکه فلاتر نسبت به پارامتر ویسکوز قبل تغییر محسوسی نکرده، اما تغییر رفتار فاحش در فشارهای آیرودینامیکی بالاتر مشاهده می‌شود. در بازه ۳۴۷۵ > λ > ۱۱۷۵ رفتار ورق ویسکوالاستیک از پریود ۱ است اما در بازه ۴۱۰۰ > λ > ۳۵۰۰ رفتار ورق ویسکوالاستیک پریودیک با پریودهای بالا و شبه‌پریودیک است. در بازه ۴۱۷۵ > λ > ۴۱۲۵ رفتار ورق دوباره از نوع پریود یک بوده و با افزایش تدریجی فشار آیرودینامیکی رفتار ورق دوباره تغییر کرده و پریودهای حرکتی مختلف در بازه ۴۲۷۵ > λ > ۴۲۰۰ مشاهده می‌شود تا بار دیگر در بازه ۴۶۰۰ > λ > ۴۳۰۰ که رفتار ورق از نوع پریود ۱ شود. ورق ویسکوالاستیک در بازه ۵۲۲۵ > λ > ۴۶۲۵ تنوعی از رفتارهای پریودیک و شبه‌پریودیک را نشان می‌دهد در حالی که رفتار ورق الاستیک در این بازه‌ها آشوبناک است. ورق ویسکوالاستیک پس از فشار آیرودینامیک ذکر شده دارای رفتار آشوبناک می‌شود. به‌طوری که در شکل (۷- ج) نشان داده شده است با افزایش پارامتر ویسکوز به τ_c = ۰/۰۰۰۱ در فشار آیرودینامیک λ = ۱۱۷۵ فلاتر رخ داده و پس از آن تا λ = ۵۵۷۵ دامنه حرکت پریودیک با پریود ۱ افزایش یافته است. بنابراین اثرات نامطلوبی که در ورق الاستیک در فشارهای آیرودینامیک بالا رخ می‌دهد، در ورق ویسکوالاستیک با چنین پارامتر ویسکوزی برطرف شده و به حرکت پریودیک ساده تبدیل می‌شود. شکل (۷- د) حذف کامل اثرات نامطلوب ورق با پارامتر ویسکوز τ_c = ۰/۰۰۱ در فشارهای آیرودینامیک ذکر شده را نسبت به ورق الاستیک نشان می‌دهد. همچنین فلاتر در λ = ۱۲۲۵ رخ داده، که در مقایسه با ورق الاستیک به تأخیر افتاده است.

در شکل (۸)، نمودارهای پاسخ زمانی، فضای فازی، مقطع پوانکاره و طیف توانی برای ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک با سه خاصیت ویسکوز در فشار آیرودینامیک بی‌بعد λ = ۴۶۲۵ نشان داده شده است. در این نمودارها، حرکت آشوبناک در ورق الاستیک به‌طور کامل قابل مشاهده است، اما با افزایش پارامتر ویسکوز در ورق ویسکوالاستیک به τ_c = ۰/۰۰۰۰۱ رفتار ورق با توجه به نمودار پوانکاره که سیکل بسته‌ای از نقاط را نشان می‌دهد، به حرکت شبه‌پریودیک تغییر می‌کند. افزایش پارامتر ویسکوز به τ_c = ۰/۰۰۰۱ و τ_c = ۰/۰۰۱ طبق نمودار پوانکاره یک نقطه در نمودار نشان می‌دهد که مؤید تغییر رفتار ورق به حرکت پریود ۱ است.

۳- ۳- ۴- نسبت منظر φ = ۴

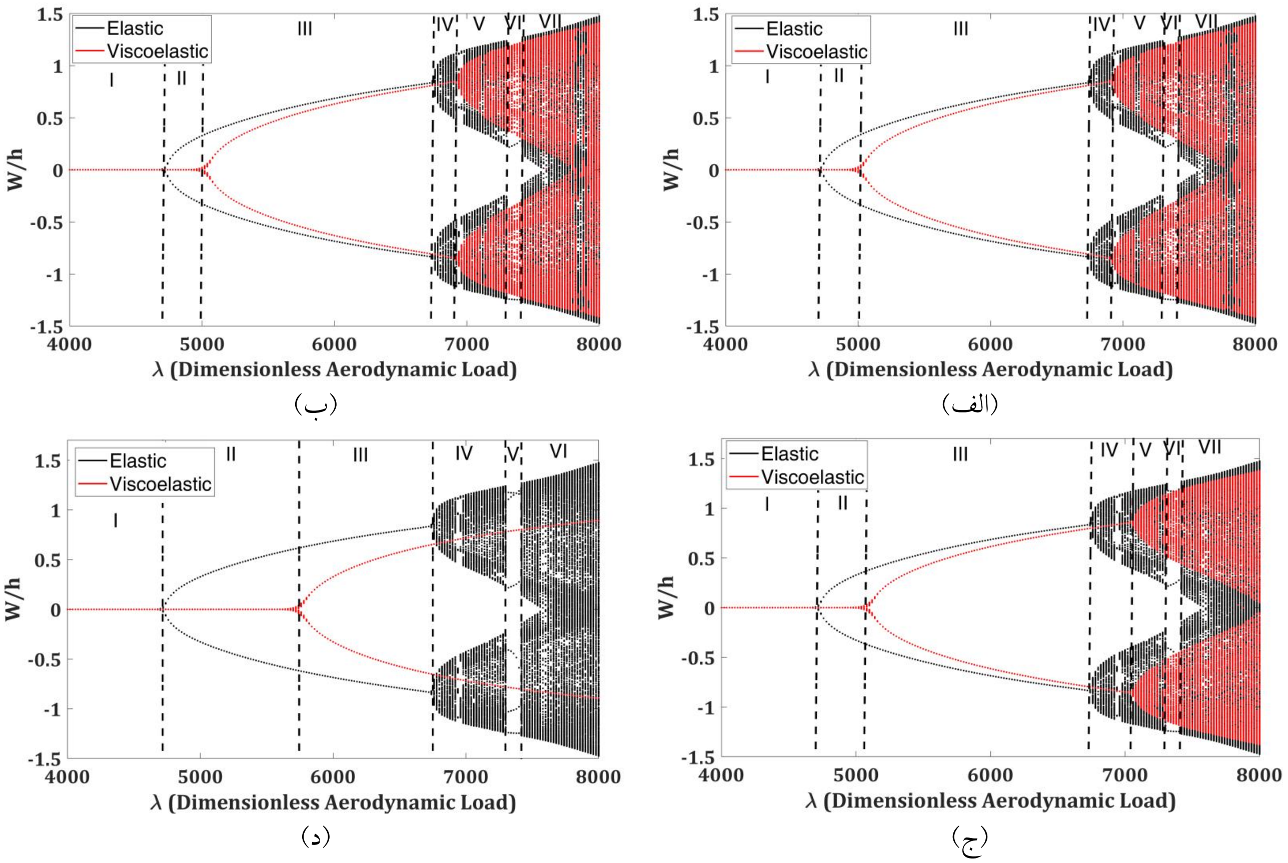
آخرین نسبت منظری که مورد بررسی قرار می‌گیرد، نسبت منظر φ = ۴ است. در این نسبت منظر، خاصیت ویسکوز موجب تأخیر فلاتر می‌شود. این برخلاف رفتار نشان داده شده در نسبت منظر φ = ۱، در بخش ۳- ۳- ۱ است. در شکل (۹)، نمودارهای چندشاخگی، برای فشار آیرودینامیکی بی‌بعد از

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]



شکل ۸- الف) پاسخ زمانی، ب) فضای فازی، ج) مقطع پوانکاره، د) طیف توانی، در فشار آیرودینامیک بی‌بعد λ = ۴۶۲۵ در ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک (رنگی در نسخه الکترونیکی)

λ = ۴۰۰۰ تا λ = ۸۰۰۰ با بازه‌های Δλ = ۲۰ رسم شده است. فلاتر در ورق الاستیک در فشار آیرودینامیک بحرانی λ = ۴۷۲۰ رخ می‌دهد، سپس در بازه ۶۷۶۰ > λ > ۴۷۲۰ حرکت از نوع پریود ۱ بوده که ناگهان بعد از λ = ۶۷۶۰ به‌جز پنجره‌ای در بازه ۷۴۰۰ > λ > ۷۳۲۰ که حرکت ورق، پریودیک با پریود ۳ است، رفتار ورق الاستیک شبه‌پریودیک و آشوبناک می‌شود. استفاده از خاصیت ویسکوز با پارامتر ویسکوز τ_c = ۰/۰۰۰۰۰۱ در ورق همان‌طور که در شکل (۹- الف) نشان داده شده است بسیار مفید است. اولین مزیت آن تأخیر در وقوع فلاتر تا فشار آیرودینامیک بی‌بعد λ = ۵۰۰۰ است، اما مزیت بعدی افزایش دامنه حرکت پریودیک با پریود ۱ تا فشار آیرودینامیک بی‌بعد λ = ۶۹۰۰ است، درحالی که ورق الاستیک در بازه ۶۹۰۰ > λ > ۶۷۶۰ دارای رفتار آشوبناک است. در شکل (۹- ب) با افزایش پارامتر ویسکوز به τ_c = ۰/۰۰۰۰۱ رفتاری مشابه با نسبت ویسکوز قبل مشاهده می‌شود به‌طوری که در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد λ = ۵۰۲۰ فلاتر رخ داده و رفتار پریودیک



شکل ۹- دیاگرام چندشاخگی برای ورق‌های با لبه‌های مفصلی الاستیک و ویسکوالاستیک مستطیلی با $\delta =$ ۰/۰۵ و نسبت منظر $\varphi =$ ۲ و پارامترهای ویسکوز الف) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۰۱ ب) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۰۱، ج) $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۱ و د) $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ (رنگی در نسخه الکترونیکی)

تا $\lambda =$ ۶۹۲۰ ادامه پیدا می‌کند و پس از آن رفتار ورق ویسکوالاستیک آشوبناک خواهد شد. با افزایش مجدد پارامتر ویسکوز به $\tau_c =$ ۰/۰۰۰۱ نیز مطابق شکل (۹- ج)، مانند دو پارامتر ویسکوز ذکر شده، فلاتر در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد $\lambda =$ ۵۱۰۰ رخ می‌دهد، سپس تا $\lambda =$ ۷۰۴۰ رفتار از نوع پریودیک است، اما پس از آن رفتار ورق به‌طور کامل آشوبناک می‌شود. برخلاف شکل‌های قبل آنچه در (شکل ۹- د) مشاهده می‌شود نشان می‌دهد که استفاده از پارامتر ویسکوز بالاتر تا $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ وقوع فلاتر و رفتار آشوبناک را به شدت به تأخیر می‌اندازد. فلاتر در این حالت در در فشار آیرودینامیکی بی‌بعد $\lambda =$ ۵۷۴۰ رخ می‌دهد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت نواحی مختلف، در شکل‌های (۹- الف) تا (۹- ج) با شش خط چین و در شکل (۹- د) با پنج خط چین جدا شده‌اند. در منطقه (I) ارتعاشات میرا و پایدار است. در منطقه (II) ورق الاستیک دارای حرکت پریودیک و ورق ویسکوالاستیک هنوز در شرایط پایدار است. گستره منطقه (II) برای ورق ویسکوالاستیک با $\tau_c =$ ۰/۰۰۱ از دیگر نسبت‌های ویسکوز بزرگ‌تر است. در منطقه (III) ورق الاستیک و ورق ویسکوالاستیک هر دو دارای حرکت هارمونیک هستند. در منطقه (IV) رفتار ورق الاستیک آشوبناک، اما رفتار ورق ویسکوالاستیک هارمونیک است. در منطقه (V) رفتار ورق ویسکوالاستیک با خاصیت ویسکوز پایین مانند شکل‌های (۹- الف) تا (۹- ج) آشوبناک، اما برای $\tau_c =$ ۰/۰۰۱، شکل(۹- د)، و تا $\lambda =$ ۸۰۰۰

ساده و از نوع پریود ۱ است.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، پایداری آیرودینامیکی و دیگر نوسانات غیرخطی ورق با لبه‌های مفصلی، با نسبت‌های منظری و مشخصه‌های ویسکوز مختلف، در جریان آیرودینامیکی مافوق صوت مورد بررسی قرار گرفت. نتایج برای چهار نسبت ویسکوز به‌دست آمده و نشان می‌دهد که برای ورق ویسکوالاستیک با مشخصه ویسکوز پایین، رفتار ورق ویسکوالاستیک نزدیک به رفتار ورق الاستیک است، اما در بعضی مقادیر فشار آیرودینامیکی، رفتار شبه‌پریودیک و آشوبناک به رفتارهای ساده‌تر نظیر پریودیک تغییر می‌یابد. همچنین در بعضی مقادیر فشار آیرودینامیکی، پنجره‌هایی از حرکت پریودیک در ورق الاستیک وجود داشت که در ورق ویسکوالاستیک به شکل پریودیک مشاهده نشد. در ورق با خاصیت ویسکوز انتظار می‌رود وقوع فلاتر دیرتر باشد اما برای برخی نسبت‌های منظری، فلاتر زودتر رخ می‌دهد. نتایج برای چهار نسبت منظری مورد بررسی قرار گرفت. در نسبت منظر $\varphi=1$ و $\varphi=0/5$ فلاتر در ورق ویسکوالاستیک زودتر از ورق الاستیک رخ می‌دهد اما با افزایش نسبت منظری به $\varphi=2$ و $\varphi=4$ فلاتر به تأخیر می‌افتد. با توجه به نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود که با استفاده از خاصیت ویسکوز، رفتارهای پیچیده غیرخطی ورق الاستیک مانند رفتار آشوبناک و... در فشارهای آیرودینامیک بالا را در بیشتر مواقع می‌توان به حرکت پریودیک تبدیل کرد.

واژه‌نامه

1. flutter
2. limit cycle
3. chaotic
4. clamped
5. simply cupported
6. time history
7. phase portrait
8. poincaré map
9. power spectra
10. periodic
11. Runge–Kutta method
12. Kelvin model
13. piston theory
14. subsonic
15. supersonic
16. resonance
17. pasive control
18. flight angle
19. Boltzmann- Volterra theory
20. Bubnov- Galerkin
21. bifurcation
22. aerodynamic load
23. lagrange
24. reighley ritz method
25. mode shape
26. in- plane
27. contorol parameter

مراجع

1. Dowell, E. H., “Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate”, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, pp. 1267-1275,1966.
2. Dowell, E. H., “Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate II”, *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 10, pp 1856-1862,1967.
3. Weiliang, Y. and Dowell, E. H., “Limit Cycle Oscillation of a Fluttering Cantilever Plate”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 11, pp. 1929-1936. 1991.
4. Xie, D., Xu, M., Dai, H. and Dowell, E. H., “Observation and Evolution of Chaos for a Cantilever Plate in Supersonic Flow”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol, 50, pp. 271-291, 2014.
5. Xia, Z.Q. and Lukasiewicz, S., “Non- Linear, Free, Damped Vibrations of Sandwich Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol, 175, No. 2, pp.219-232, 1994.
6. Lukasiewicz, S. and Xia, Z. Q., “Nonlinear Damped Vibrations of Simply- Supported Sandwich Plates in a Rapidly Changing Temperature Field”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 9, pp. 369–389, 1996.
7. Sun, Y. X. and Zhang, S. Y., “Chaotic Dynamic Analysis of Viscoelastic Plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, No. 5, pp. 1195-1208, 2001.
8. Pourtakdoust, S. H. and Fazelzadeh, S. A., “Chaotic Analysis Of Nonlinear Viscoelastic Panel Flutter in Supersonic Flow:, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 32, No. 4, pp. 387-404, 2003.
9. Khudayarov, B., “Flutter of a Viscoelastic Plate in a Supersonic Gas Flow”, *International Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 4, pp. 455-460, 2010.
10. Merrett, C. G. and Hilton, H., “Elastic and Viscoelastic Panel Flutter in Incompressible,

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]

[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]

Subsonic and Supersonic Flows”, *ASDJournal*, Vol. 2, No. 1, pp, 53-80, 2010.

11. Saksa, T., Banichuk, N., Jeronen, J., Kurki, M. and Tuovinen, T., “Dynamic Analysis for Axially Moving Viscoelastic Panels”, *International Journal of Solids and Structures*,Vol. 49, pp. 3355-3366, 2012.
12. Amabili, M., “Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Rectangular Plates”, *Journal of Sound and Vibration*,Vol 362, pp. 142-156 2016.
13. Yang, X. D., Yu, T. J., Zhang, W., Qian, Y. J. and Yao, M. H.,“ Damping Effect on Supersonic Panel Flutter of Composite Plate with Viscoelastic Mid-Layer”, *Composite Structures*, Vol. 137, pp. 105-113, 2016.
14. Cunha- Filho, A. G., De Lima, A. M. G., Donadon, M. V., and Leão, L. S., “Flutter Suppression of Plates Using Passive Constrained Viscoelastic Layers”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 79, pp. 99-111, 2016.
15. Usmonov, B. Sh., “Dynamic Instability of Viscoelastic Plate in Supersonic Flow”, *International Journal of Advanced Engineering, Management and Science (IJAEMS)*, Vol. 3, No. 2, pp. 35-39, 2017.
16. Wang, X., Yang, Z., Wang, W. and Tian, W. Nonlinear Viscoelastic Heated Panel Flutter with Aerodynamic Loading Exerted on Both Surfaces”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 409, pp. 306-317, 2017.
17. Rade, D. A., Deü, J.- F., Castello, D. A., de Lima, A. M. G. and Rouleau, L., *Nonlinear Structural Dynamics and Damping chapter 5: Passive Vibration Control Using Viscoelastic Materials*, Mechanisms and Machine Science, Vol. 69, pp. 119-168, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
18. Sherov, A.G., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh. and Aliyarov, J., “Numerical Investigation of the Effects Angles of Attack on the Flutter of a Viscoelastic Plate”, *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, Vol. 3, pp. 215-228, 2020.
19. Khudayarov, B., Turayev, F., Zhuvonov, Q., Vahobov, V., Kucharov, O., and Kholturaev, Kh, “Oscillation Modeling of Viscoelastic Elements of Thin- Walled Structures”, *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 883, No. 1, p. 012188. IOP Publishing, 2020.
20. Lakes, R., *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, NewYork, USA, 2009.
21. Ashley, H., Zartarian, G., “*Piston Theory a New Aerodynamic Tools for the Aeroelastician”*, Vol. 23, No. 12, pp. 1109-1118, 1956.
22. Dowell, E. H., *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Noordhoff, Leyden, 1975.
23. Xue, D. Y., “Finite Element Frequency Domain Solution of Nonlinear Plate Flutter WithTemperature Effects and Fatigue Life Analysis”, *PhD dissertation*, *Engineering Mechanics, OldDominion University, Norfolk*, VA; 1991.
24. Rao, S. S., *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey 2007.
25. Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez- Estrada, O. A., Rabczuk, T., Bui, T. Q. and Bordas, S. P., “NURBS- Based Finite Element Analysis of Functionally Graded Plates: Static Bending, Vibration, Buckling and Flutter*”, Composite Structures*, Vol. 99, pp.309-326, 2013.
26. Grover, N., Maiti; N. K. and Singh, B. N., “Flutter Characteristics of Laminated Composite Plates Subjected to Yawed Supersonic Flow Using Inverse Hyperbolic Shear Deformation Theory”, *Journal of Aerospace Engineering,* Vol. 29, No. 2, p. 04015038, 2016.
27. Xie, D., Xu, M., Dai, H., and Dowell, E. H., “Proper Orthogonal Decomposition Method for Analysis of Nonlinear Panel Flutter with Thermal Effects in Supersonic Flow”, *Journal of Sound and Vibration*, 337, pp. 263-283, 2015.
28. Abdel- Motaglay, K., Chen, R., Mei, C., “Nonlinear Flutter of Composite Oanels under Yawed Supersonic Flow Using Finite Elements”, *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 9, pp. 1025-1032, 1999.
29. AsadiGorgi, H., Dardel, M., and Pashaei, M .H., Effects of All- Over Part- Through Cracks on the Aeroelastic Characteristics of Rectangular Panels”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 23-24, pp. 7513-7536, 2015.

پیوست

پارامترهای معرفی شده در رابطه (۱۳) به‌شرح ذیل است:

$$ap1 \Rightarrow Mu = \sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H}\ddot{a}_{gh}(\tau)\int_{0}^{1}u_i u_g d\xi\int_{0}^{1}v_j v_h d\eta$$

$$ap2 \Rightarrow Kuu12 = \sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H}a_{gh}(\tau)\int_{0}^{1}u_i^{'} u_g^{'} d\xi\int_{0}^{1}v_j v_h d\eta$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]

$$\text{ap۳} \Rrightarrow \text{NLuw۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i' \phi_o' \phi_{o_۱}' d\xi \int_۰^۱ v_j \psi_p \psi_{p_۱} d\eta$$

$$\text{ap۴} \Rrightarrow \text{Kuv۱۲} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} b_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_i' u_f d\xi \int_۰^۱ v_j v_d' d\eta$$

$$\text{ap۵} \Rrightarrow \text{NLuw۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i' \phi_o \phi_{o_۱} d\xi \int_۰^۱ v_j \psi_p' \psi_{p_۱}' d\eta$$

$$\text{ap۶} \Rrightarrow \text{Kuv۳۴} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} b_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_i u_f' d\xi \int_۰^۱ v_j' v_d d\eta$$

$$\text{ap۷} \Rrightarrow \text{Kuu۳۴} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} a_{gh}(\tau) \int_۰^۱ u_i u_g d\xi \int_۰^۱ v_j' v_h' d\eta$$

$$\text{ap۸} \Rrightarrow \text{NLuw۳} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i \phi_o' \phi_{o_۱} d\xi \int_۰^۱ v_j' \psi_p \psi_{p_۱}' d\eta$$

$$\text{ap۹} \Rrightarrow \text{Cuu۱۲} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} \dot{a}_{gh}(\tau) \int_۰^۱ u_i' u_g' d\xi \int_۰^۱ v_j v_h d\eta$$

$$\text{ap۱۰} \Rrightarrow \text{NLCuw۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i' \phi_o' \phi_{o_۱}' d\xi \int_۰^۱ v_j \psi_p \psi_{p_۱} d\eta$$

$$\text{ap۱۱} \Rrightarrow \text{Cuv۱۲} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} \dot{b}_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_i' u_f d\xi \int_۰^۱ v_j v_d' d\eta$$

$$\text{ap۱۲} \Rrightarrow \text{NLCuw۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i' \phi_o \phi_{o_۱} d\xi \int_۰^۱ v_j \psi_p' \psi_{p_۱}' d\eta$$

$$\text{ap۱۳} \Rrightarrow \text{Cuv۳۴} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} \dot{b}_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_i u_f' d\xi \int_۰^۱ v_j' v_d d\eta$$

$$\text{ap۱۴} \Rrightarrow \text{Cuu۳۴} \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} \dot{a}_{gh}(\tau) \int_۰^۱ u_i u_g d\xi \int_۰^۱ v_j' v_h' d\eta$$

$$\text{ap۱۵} \Rrightarrow \text{NLCuw۳} = \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} \dot{q}_{op}(\tau) \int_۰^۱ u_i \phi_{o_۱} \phi_o' d\xi \int_۰^۱ v_j' \psi_{p_۱}' \psi_p d\eta$$

$$\text{ap۱۶} \Rrightarrow \text{NLCuw۴} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_i \phi_o' \phi_{o_۱} d\xi \int_۰^۱ v_j' \psi_p \psi_{p_۱}' d\eta$$

$$\text{ap۱۷} \Rrightarrow \text{Mv} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} \ddot{b}_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_r u_f d\xi \int_۰^۱ v_s v_d d\eta$$

$$\text{ap۱۸} \Rrightarrow \text{Kvv۱۲} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} b_{fd}(\tau) \int_۰^۱ u_r u_f d\xi \int_۰^۱ v_s' v_d' d\eta$$

$$\text{ap۱۹} \Rrightarrow \text{NLvw۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \int_۰^۱ u_r \phi_o \phi_{o_۱} d\xi \int_۰^۱ v_s' \psi_p' \psi_{p_۱}' d\eta$$

$$\text{ap۲۰} \Rrightarrow \text{Kvu۱۲} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_g u_r \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_h v'_s \, d\eta$$

$$\text{ap۲۱} \Rrightarrow \text{NLvw۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau)\int_{۰}^{۱} \phi'_o \phi'_{o_۱} u_r \, d\xi \int_{۰}^{۱} \psi_p \psi_{p_۱} v'_s \, d\eta$$

$$\text{ap۲۲} \Rrightarrow \text{Kvv۳۴} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} b_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r u'_f \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s v_d \, d\eta$$

$$\text{ap۲۳} \Rrightarrow \text{Kvu۳۴} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r u_g \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s v'_h \, d\eta$$

$$\text{ap۲۴} \Rrightarrow \text{NLvw۳} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r \phi'_o \phi_{o_۱} \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s \psi_p \psi'_{p_۱} \, d\eta$$

$$\text{ap۲۵} \Rrightarrow \text{Cvv۱۲} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} \dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱} u_r u_f \, d\xi \int_{۰}^{۱} v'_s v'_d \, d\eta$$

$$\text{ap۲۶} \Rrightarrow \text{NLCvw۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau)\int_{۰}^{۱} u_r \phi_o \phi_{o_۱} \, d\xi \int_{۰}^{۱} v'_s \psi'_p \psi'_{p_۱} \, d\eta$$

$$\text{ap۲۷} \Rrightarrow \text{Cvu۱۲} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} \dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱} u_r u'_g \, d\xi \int_{۰}^{۱} v'_s v_h \, d\eta$$

$$\text{ap۲۸} \Rrightarrow \text{NLCvw۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau)\int_{۰}^{۱} u_r \phi'_o \phi'_{o_۱} \, d\xi \int_{۰}^{۱} v'_s \psi_p \psi_{p_۱} \, d\eta$$

$$\text{ap۲۹} \Rrightarrow \text{Cvv۳۴} = \sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D} \dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r u'_f \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s v_d \, d\eta$$

$$\text{ap۳۰} \Rrightarrow \text{Cvu۳۴} = \sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H} \dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r u_g \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s v'_h \, d\eta$$

$$\text{ap۳۱} \Rrightarrow \text{NLCvw۳} = \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} q_{o_۱p_۱}(\tau) \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r \phi_{o_۱} \phi'_o \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s \psi'_{p_۱} \psi_p \, d\eta$$

$$\text{ap۳۲} \Rrightarrow \text{NLCvw۴} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau) \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱} \dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau)\int_{۰}^{۱} u'_r \phi'_o \phi_{o_۱} \, d\xi \int_{۰}^{۱} v_s \psi_p \psi'_{p_۱} \, d\eta$$

$$\text{ap۳۳} \Rrightarrow \text{Mww۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} \ddot{q}_{op}(\tau)\int_{۰}^{۱} \phi_m \phi_o \, d\xi \int_{۰}^{۱} \psi_n \psi_p \, d\eta$$

$$\text{ap۳۴} \Rrightarrow \text{Kww۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau)\int_{۰}^{۱} \phi''_m \phi''_o \, d\xi \int_{۰}^{۱} \psi_n \psi_p \, d\eta$$

$$\text{ap۳۵} \Rrightarrow \text{Kww۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau)\int_{۰}^{۱} \phi_m \phi_o \, d\xi \int_{۰}^{۱} \psi''_n \psi''_p \, d\eta$$

$$\text{ap۳۶} \Rrightarrow \text{Kww۳} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P} q_{op}(\tau)\int_{۰}^{۱} \phi''_m \phi_o \, d\xi \int_{۰}^{۱} \psi_n \psi''_p \, d\eta$$

$$\text{ap۳۷} \Rrightarrow \text{Kww۴} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi''_o d\xi \int_{0}^{1}\psi''_n \psi_p d\eta$$

$$\text{ap۳۸} \Rrightarrow \text{Kww۵} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_p d\eta$$

$$\text{ap۳۹} \Rrightarrow \text{NLwu۱} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H} a_{gh}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o u'_g d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi_p v_h d\eta$$

$$\text{ap۴۰} \Rrightarrow \text{NLww۱} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{o_1=1}^{O_1}\sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1p_1}(\tau)\sum_{o_2=1}^{O_2}\sum_{p_2=1}^{P_2} q_{o_2p_2}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o \phi'_{o_1} \phi'_{o_2} d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi_p \psi_{p_1} \psi_{p_2} d\eta$$

$$\text{ap۴۱} \Rrightarrow \text{NLwv۱} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{f=1}^{F}\sum_{d=1}^{D} b_{fd}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi_o u_f d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_p v'_d d\eta$$

$$\text{ap۴۲} \Rrightarrow \text{NLww۲} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{o_1=1}^{O_1}\sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1p_1}(\tau)\sum_{o_2=1}^{O_2}\sum_{p_2=1}^{P_2} q_{o_2p_2}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi_o \phi_{o_1} \phi_{o_2} d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_p \psi'_{p_1} \psi'_{p_2} d\eta$$

$$\text{ap۴۳} \Rrightarrow \text{NLwv۲} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{f=1}^{F}\sum_{d=1}^{D} b_{fd}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o u_f d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi_p v'_d d\eta$$

$$\text{ap۴۴} \Rrightarrow \text{NLwu۲} = \sum_{o_2=1}^{O_2}\sum_{p_2=1}^{P_2} q_{o_2p_2}(\tau)\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{H} a_{gh}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi_{o_2} u'_g d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_{p_2} v_h d\eta$$

$$\text{ap۴۵} \Rrightarrow \text{NLww۳} = \sum_{o_2=1}^{O_2}\sum_{p_2=1}^{P_2} q_{o_2p_2}(\tau)\sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{o_1=1}^{O_1}\sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1p_1}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi_{o_2} \phi'_o \phi'_{o_1} d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_{p_2} \psi_p \psi_{p_1} d\eta$$

$$\text{ap۴۶} \Rrightarrow \text{NLww۴} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\sum_{o_1=1}^{O_1}\sum_{p_1=1}^{P_1} q_{o_1p_1}(\tau)\sum_{o_2=1}^{O_2}\sum_{p_2=1}^{P_2} q_{o_2p_2}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o \phi_{o_1} \phi_{o_2} d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi_p \psi'_{p_1} \psi'_{p_2} d\eta$$

$$\text{ap۴۷} \Rrightarrow \text{Fw} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} q_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_o \phi_m d\xi \int_{0}^{1}\psi_p \psi_n d\eta$$

$$\text{ap۴۸} \Rrightarrow \text{Cw} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_o \phi_m d\xi \int_{0}^{1}\psi_p \psi_n d\eta$$

$$\text{ap۴۹} \Rrightarrow \text{CWW۱} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi''_m \phi''_o d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi_p d\eta$$

$$\text{ap۵۰} \Rrightarrow \text{CWW۲} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi_o d\xi \int_{0}^{1}\psi''_n \psi''_p d\eta$$

$$\text{ap۵۱} \Rrightarrow \text{CWW۳} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi''_m \phi_o d\xi \int_{0}^{1}\psi_n \psi''_p d\eta$$

$$\text{ap۵۲} \Rrightarrow \text{CWW۴} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi_m \phi''_o d\xi \int_{0}^{1}\psi''_n \psi_p d\eta$$

$$\text{ap۵۳} \Rrightarrow \text{CWW۵} = \sum_{o=1}^{O}\sum_{p=1}^{P} \dot{q}_{op}(\tau)\int_{0}^{1}\phi'_m \phi'_o d\xi \int_{0}^{1}\psi'_n \psi'_p d\eta$$

$$\text{ap۵۴} \Rrightarrow \text{NLCwu۱q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o u'_g\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p v_h\,d\eta$$

$$\text{ap۵۵} \Rrightarrow \text{NLCwu۱a} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}\dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o u'_g\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p v_h\,d\eta$$

$$\text{ap۵۶} \Rrightarrow \text{NLCww۱} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o\phi'_{o_۱}\phi'_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p\psi_{p_۱}\psi_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۵۷} \Rrightarrow \text{NLCwv۱q} = \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}\dot{q}_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}b_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_{o_۱}u_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_{p_۱}v'_d\,d\eta$$

$$\text{ap۵۸} \Rrightarrow \text{NLCwv۱b} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}\dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_o u_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_p v'_d\,d\eta$$

$$\text{ap۵۹} \Rrightarrow \text{NLCww۲} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_o\phi_{o_۱}\phi_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_p\psi'_{p_۱}\psi'_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۶۰} \Rrightarrow \text{NLCwu۲q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_o u'_g\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_p v_h\,d\eta$$

$$\text{ap۶۱} \Rrightarrow \text{NLCwv۲b} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}\dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o u_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p v'_d\,d\eta$$

$$\text{ap۶۲} \Rrightarrow \text{NLCww۴} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o\phi_{o_۱}\phi_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p\psi'_{p_۱}\psi'_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۶۳} \Rrightarrow \text{NLCww۶} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o\phi'_{o_۱}\phi_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p\psi_{p_۱}\psi'_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۶۴} \Rrightarrow \text{NLCwv۲q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}b_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_o u_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_p v'_d\,d\eta$$

$$\text{ap۶۵} \Rrightarrow \text{NLCwu۲a} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}\dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_o u'_g\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_p v_h\,d\eta$$

$$\text{ap۶۶} \Rrightarrow \text{NLCww۳} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_o\phi'_{o_۱}\phi'_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_p\psi_{p_۱}\psi_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۶۷} \Rrightarrow \text{NLCww۵} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o\phi_{o_۱}\phi'_{o_۲}\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p\psi'_{p_۱}\psi_{p_۲}\,d\eta$$

$$\text{ap۶۸} \Rrightarrow \text{NLCwv۴q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}b_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o u'_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p v_d\,d\eta$$

$$\text{ap۶۹} \Rrightarrow \text{NLCwv۳q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}b_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o u'_f\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p v_d\,d\eta$$

$$\text{ap۷۰} \Rrightarrow \text{NLCwu۴q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o u_g\,d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p v'_h\,d\eta$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]
[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]

$$\text{ap۷۱} \Rrightarrow \text{NLCwu۳q} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}\dot{q}_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}a_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o u_g d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p v'_h d\eta$$

$$\text{ap۷۲} \Rrightarrow \text{NLCwv۳b} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}\dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o u'_f d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p v_d d\eta$$

$$\text{ap۷۳} \Rrightarrow \text{NLCwv۴b} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{f=۱}^{F}\sum_{d=۱}^{D}\dot{b}_{fd}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o u'_f d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p v_d d\eta$$

$$\text{ap۷۴} \Rrightarrow \text{NLCwu۳a} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}\dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o u_g d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p v'_h d\eta$$

$$\text{ap۷۵} \Rrightarrow \text{NLCwu۴a} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{g=۱}^{G}\sum_{h=۱}^{H}\dot{a}_{gh}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o u_g d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p v'_h d\eta$$

$$\text{ap۷۶} \Rrightarrow \text{NLCww۵} = \sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi_o\phi_{o_۱}\phi'_{o_۲}d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi'_p\psi'_{p_۱}\psi_{p_۲}d\eta$$

$$\text{ap۷۷} \Rrightarrow \text{NLCww۸} = \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi_{o_۱}\phi'_o\phi'_{o_۲}d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi'_{p_۱}\psi_p\psi_{p_۲}d\eta$$

$$\text{ap۷۸} \Rrightarrow \text{NLCww۶} = \frac{a^۲}{b^۲}\sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi_m\phi'_o\phi'_{o_۱}\phi_{o_۲}d\xi\int_{۰}^{۱}\psi'_n\psi_p\psi_{p_۱}\psi'_{p_۲}d\eta$$

$$\text{ap۷۹} \Rrightarrow \text{NLCww۹} = \sum_{o_۱=۱}^{O_۱}\sum_{p_۱=۱}^{P_۱}q_{o_۱p_۱}(\tau)\sum_{o=۱}^{O}\sum_{p=۱}^{P}q_{op}(\tau)\sum_{o_۲=۱}^{O_۲}\sum_{p_۲=۱}^{P_۲}\dot{q}_{o_۲p_۲}(\tau)\int_{۰}^{۱}\phi'_m\phi'_{o_۱}\phi_o\phi_{o_۲}d\xi\int_{۰}^{۱}\psi_n\psi_{p_۱}\psi'_p\psi'_{p_۲}d\eta$$

[DOR: 20.1001.1.22287698.1400.40.1.7.2]

[DOI: 10.47176/jcme.40.1.8481]