

بررسی آماری مقدار انرژی تولید شده از تیر یکسرگیردار تابعی مدرج پوشیده شده از لایه پیزوالکتریک

امین پنجه‌باشی نقش، کاوه اسماعیلی ترکانپوری*
گروه مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۴/۲۷)

چکیده- یکی از روش‌های جدید برای تأمین انرژی سیستم‌های الکتریکی کم مصرف، استفاده از انرژی مکانیکی ارتعاشات سازه‌ها است. در این روش با استفاده از مبدل پیزوالکتریک، انرژی ناشی از ارتعاشات به الکتریسته تبدیل می‌شود. مزیت این روش عدم نیاز به تعویض یا شارژ باتری وسیله الکتریکی است. در این مقاله به بررسی برداشت انرژی توسط یک تیر یکسرگیردار ساخته شده از جنس مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک پرداخته شده است. مدل‌سازی ریاضی سیستم ارائه شده و معادلات کوپل دینامیکی ارتعاش سیستم و ولتاژ تولید شده توسط پیزوالکتریک‌ها استخراج می‌شود و سپس تأثیر پارامترهای برداشت‌کننده روی توان تولیدی مطالعه می‌شود. با توجه به وجود نامعینی در پارامترهای سیستم برداشت‌کننده انرژی، برای اولین بار تأثیر نامعینی‌ها روی مقدار انرژی تولیدشده به صورت آماری با استفاده از روش مونت-کارلو بررسی می‌شوند. نتایج حاکی از این است هرچند میزان توان قابل استحصال در فرکانس طبیعی اول به مراتب بیشتر از سایر فرکانس‌ها است ولی در حوالی فرکانس طبیعی اول تأثیر نامعینی در سیستم افزایش پیدا کرده و قابلیت اطمینان برداشت‌کننده کاهش پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: برداشت‌کننده انرژی، مواد هدفمند، آنالیز نامعینی، روش مونت کارلو.

Statistical Analysis of Energy Harvesting From Functionally Graded Cantilever Beam with Piezoelectric Layer

A. Panjebashi Naghsh and K. Esmaili. Torkanpouri *

Department of Mechanical Engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran.

Abstract: One of the new methods for powering low power electronic devices is the use of mechanical energies due to vibrations. In this method, the piezoelectric material is employed for converting the mechanical energy of vibration into the electrical energy. The advantage of this method is needlessness of using the battery charging system. In this paper, the functionally graded (FG) cantilever with the piezoelectric layer is considered as energy harvester system. The mathematical model

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: torkanpouri@iaut.ac.ir

of the system is constructed and the governing equation for electromechanical coupling is presented. Then the effects of the system parameters on the generated power is studied. Finally, by considering uncertainties in energy harvester parameters, the effect of uncertainties on the produced energy is investigated by Monte-Carlo simulation method for the first time. The results show that although the amount of generated power in the first natural frequency is higher than the other frequencies, but around the first natural frequency, the effect of uncertainties is increased and thus, the reliability of the energy harvester will be decreased.

Keywords: Energy harvesting, Functionally graded, Uncertainties analysis, Monte-carlo simulation.

فهرست علائم

θ_r	کوپلینگ الکترومکانیکی	b	عرض تیر
ζ_r	نسبت میرایی	d_{31}	ثابت پیزوالکتریک
ω_r	فرکانس طبیعی	D_3	جابجایی الکتریکی
λ_r	پارمتر بی بعد فرکانس طبیعی	m	جرم واحد طول تیر
$\eta_r(t)$	پاسخ زمانی	$w_{rel}(x, t)$	جابه‌جایی عرضی تیر نسبت به انتهای گیردار
$\phi(x)$	تابع مد	$w_b(x, t)$	جابه‌جایی پایه تیر

۱- مقدمه

مبدل برای برداشت انرژی از ارتعاشات، تیر یکسرگیردار پوشیده شده از یک یا چند لایه پیزوسرامیک PZT^۱ است. اتصال این مبدل پیزوالتریک به یک سازه مرتعش سبب ایجاد کرنش دینامیکی در لایه‌های پیزوالکتریک شده که منجر به تولید ولتاژ الکتریکی می‌شود که به وسیله الکترودهایی که سطح لایه پیزوالکتریک را می‌پوشانند، جمع‌آوری و ذخیره می‌شود [۱]. مطالعات گسترده‌ای در مورد برداشت انرژی با استفاده از مبدل پیزوالکتریک انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

اسمیت و همکاران با ارائه مدل ریاضی برداشت‌کننده انرژی که تیر پوشیده شده از یک لایه پیزوالکتریک است، برای شرایط مرزی مختلف و همچنین اعمال نیروی گسترده در طول تیر، رفتار الکترومکانیکی سیستم را بررسی کردند [۲]. چنانق و همکاران به بررسی تجربی امکان برداشت انرژی از ارتعاش پل و تبدیل آن به انرژی الکتریکی با استفاده از مواد پیزوالکتریک پرداختند [۳]. آنها با اعمال بار با دامنه و فرکانس‌های مختلف روی تیر، مدل عبوری خودرو با وزن و سرعت‌های مختلف را شبیه‌سازی کرده و مقدار ولتاژ خروجی را اندازه‌گیری کردند. دانگ وین لی و همکارش [۴] یک سیستم برداشت انرژی با

با پیشرفت‌های تکنولوژی در سال‌های اخیر تمایل به استفاده از وسایل الکترونیکی قابل حمل و کم مصرف رو به افزایش است. با توجه به اینکه این وسایل قابل حمل است لذا لازم است منبع انرژی مستقل داشته باشند. که به‌طور معمول این سیستم‌ها از باتری به‌عنوان منبع انرژی استفاده می‌کنند. ایراد اصلی استفاده از باتری‌ها این است که آنها عمر محدودی دارند. حتی در مورد سنسورهای الکترونیکی کم مصرف و وسایل ارتباطی بی‌سیم که در جاهای غیرقابل دسترس به‌منظور پایش دما، موقعیت‌یابی، پایش سلامتی سازه‌ها و وسایل هشدار دهنده مورد استفاده قرار می‌گیرند، تعویض باتری می‌تواند کار دشواری باشد. لذا محققان برای رفع مشکل گفته شده به‌دنبال استفاده از پدیده برداشت انرژی از محیط برای تامین انرژی وسایل مورد اشاره هستند. منابع محیطی مختلفی برای برداشت انرژی وجود دارد ولی با توجه به اینکه ارتعاشات مکانیکی در اکثر سازه حادث می‌شود لذا تحقیق در مورد تبدیل انرژی ارتعاشی به انرژی الکتریکی قابل استفاده، در چند سال اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در این روش با استفاده از یک مبدل، انرژی ناشی از ارتعاشات به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. متداول‌ترین

هدفمند^۲ استفاده از این مواد با توجه به خواص مکانیکی مطلوب گسترش یافته است. لذا به‌تازگی، به‌جای استفاده از تیر معمولی از تیر هدفمند پوشیده از پیزوالکتریک به‌عنوان برداشت‌کننده انرژی استفاده می‌شود. در ادامه، مواردی از تحقیقاتی که به بررسی برداشت انرژی با استفاده از تیر هدفمند پوشیده شده از مواد پیزوالکتریک پرداخته شده ارائه می‌شود.

در سال ۲۰۱۲ وانگ و همکاران مدل المان محدودی برای تیر یک سرگیردار پیزوالکتریک یونی‌مورف^۳ ارائه دادند و تأثیر پارامترهای هندسی روی ولتاژ خروجی سیستم را بررسی کردند [۱۰]. در سال ۲۰۱۵ امینی و همکاران مدل‌های المان محدودی برای شبیه‌سازی برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک هدفمند در شکل‌های یونی‌مورف و بای‌مورف (اتصال‌های سری و موازی) ایجاد کردند [۱۱]. در راستای ایجاد این مدل‌های المان محدود اصل همپلتون تعمیم‌داده شده برای مواد الکترومکانیک با فرض تیر اوایلر-برنولی مورد استفاده قرار گرفته است. پیش‌بینی نتایج حاصل از مدل‌های المان محدود توسط پاسخ‌های تحلیلی تأیید شده است. در مطالعه دیگری در سال ۲۰۱۶ امینی و همکاران مدل‌سازی المان محدود برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک هدفمند در معرض ارتعاش‌های تصادفی را ارائه کرده‌اند [۱۲]. نتایج عددی نشان داد که یک تقویت‌کننده هدفمند تأثیر قابل توجهی بر ولتاژ خروجی و توان برداشت شده از تیرها دارد. در سال ۲۰۱۷ درایتی‌فر و همکاران به تحلیل ارتعاشی غیرخطی برداشت‌کننده‌های انرژی پیزوالکتریک هدفمند با جرم متمرکز در انتهای آزاد، ضمن در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی هندسی و کوپل‌های الکترومکانیکی، پرداختند [۱۳]. در سال ۲۰۱۷ بیسوال و همکاران برداشت بهینه انرژی بر پایه ارتعاش از تیر یک سرگیردار غیرمنشوری هدفمند با توزیع محوری و لایه پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند [۱۴]. به‌منظور پیشینه‌کردن توان خروجی در حد مجاز ولتاژ و توان‌ها، یک روش بهینه‌سازی محدود و برپایه الگوریتم ژنتیک پیشنهاد کردند. در سال ۲۰۱۹ فاتحی و فرید با استفاده از روش المان محدود برداشت انرژی از تیر هدفمند دارای لایه پیزوالکتریک

مبدل پیزوالکتریک طراحی کردند که از طریق جریان باد روی آسیاب بادی، انرژی الکتریکی تولید می‌کرد و با فرستادن سیگنال هشدار، آتش‌سوزی جنگل‌ها را کنترل می‌کرد. زورکیندن و همکاران چندین وسیله مبدل پیزوالکتریک مشابه، تحت تحریک موج با فرکانس مشخص برای برداشت انرژی از امواج سطحی اقیانوس طراحی کردند و با استفاده از مدل کردن این سیستم با یک مدار الکتریکی معادل، تأثیر پارامترهای مختلف امواج دریا روی انرژی الکتریکی تولیدی را بررسی کردند [۵]. وانگ و همکاران با در نظر گرفتن یک تیر قائم با پج‌های پیزوالکتریک متصل به کف دریا به‌عنوان برداشت‌کننده انرژی به بررسی تأثیر مقدار پارامترهای مختلف روی توان تولیدی پرداختند [۶]. نتایج بررسی آنها نشان داد که با افزایش ارتفاع موج انرژی الکتریکی تولیدی افزایش می‌یابد. کلنت و همکاران به بررسی امکان برداشت انرژی از ارتعاشات ریل‌های قطار پرداختند [۷]. آنها با مدل کردن واگن و ریل مقدار انرژی تولیدی در اثر کرنش وارده به ریل هنگام عبور قطار را بررسی کردند. چن و همکارانش مدل جدیدی از برداشت‌کننده انرژی را ارائه دادند [۸]. مزیت مدل آنها امکان برداشت انرژی بیشتر از ارتعاشات پل‌های ناشی از عبور خودروها است. بررسی نتایج آنها نشان داد که مدل جدید در صورتی که محدوده سرعت خودروهای عبوری مابین ۸/۰۵ تا ۱۲۸/۷۵ کیلومتر بر ساعت باشد عملکرد مطلوبی دارد. زو و همکاران روش جدید جذب انرژی توسط پیزوالکتریک برای کاربردهای زیر آب را ارائه دادند [۹]. در این روش ارتعاشات ناشی از سیال به‌همراه میدان مغناطیسی توسط مبدل پیزوالکتریک به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. بررسی نتایج نشان داد روش جدید ارائه شده آنها توانایی بالایی برای برداشت انرژی در محیط‌های سخت مانند زیر آب را دارد.

در تمامی موارد ذکر شده، از تیر یکنواخت معمولاً از جنس آلومینیوم یا فولاد پوشیده شده از لایه‌های پیزوالکتریک به‌عنوان برداشت‌کننده انرژی استفاده شده است ولی با توجه به پیشرفت‌های اخیر و تولید مواد جدید از جمله مواد تابعی

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰

یعنی در نظر گرفتن نامعینی‌های سیستم، به بررسی آماری دقیقی روی مقدار انرژی تولید شده پرداخته شده است.

برای این منظور با در نظر گرفتن مدل اویلر-برنولی برای تیر، مدل‌سازی ریاضی سیستم ارائه شده و معادلات کوپل دینامیکی ارتعاش سیستم و ولتاژ تولید شده توسط پیزوالکتریک‌ها استخراج می‌شود. در ادامه با استفاده از نرم‌افزار متلب معادلات شبیه‌سازی شده و مقدار ولتاژ تولیدی توسط برداشت‌کننده انرژی استخراج می‌شوند و تأثیر پارامترهای هندسی برداشت‌کننده هدفمند با لایه پیزوالکتریک روی توان تولیدی مطالعه می‌شود. سپس با توجه به وجود نامعینی در پارامترهای برداشت‌کننده، تأثیر نامعینی‌ها روی مقدار توان تولید شده به صورت آماری بررسی شده و مقادیر میانگین، واریانس و حد بالا و پایین انرژی تولیدی مدل پیزوالکتریک با استفاده از روش مونت کارلو به دست آورده می‌شود.

۲- مدل‌سازی و استخراج معادلات حرکت

شکل (۱) مدل برداشت‌کننده انرژی را نشان می‌دهد که از یک تیر هدفمند پوشیده شده با یک لایه پیزوالکتریک تشکیل شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود تحریک پایه $g(t)$ سبب ارتعاش تیر شده و کرنش دینامیکی ایجاد شده در لایه پیزوالکتریک منجر به تولید ولتاژ الکتریکی می‌شود.

برای استخراج معادلات برداشت‌کننده مورد نظر، حرکت عرضی تیر را می‌توان به صورت رابطه (۱) در نظر گرفت:

$$w(x, t) = w_{rel}(x, t) + w_b(x, t) \quad (1)$$

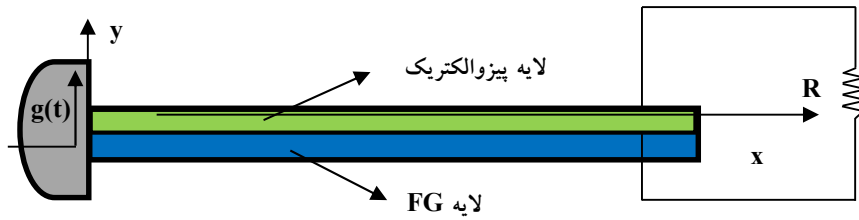
که در آن $w_{rel}(x, t)$ و $w_b(x, t)$ به ترتیب جابجایی پایه تیر و جابجایی عرضی تیر نسبت به انتهای گیردار است. در این مقاله با در نظر گرفتن مدل تیر اویلر-برنولی معادله حرکت تیر

تحت تحریک پایه به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

را مورد بررسی قرار دادند [۱۵]. این محققین خواص مواد را به صورت توانی فرض کرده و از تئوری فون-کارمن و اویلر-برنولی استفاده کرده‌اند که نشان‌دهنده تأثیر بالای خواص بر برداشت انرژی برداشتی است. در سال ۲۰۱۹ حشمتی و امینی برداشت انرژی پیزوالکتریک از ارتعاش‌های تیر هدفمند تحت نوسان‌سازهای چندگانه متحرک^۴ را مورد بررسی قرار دادند [۱۶]. مطالعه پارامتری جامعی برای یافتن تأثیرات توزیع مواد، نسبت جرمی، سرعت، نرخ میرایی، ثابت فنر نوسان‌سازها و فاصله‌های زمانی مابین هر وسیله متحرک بر انرژی برداشت شده انجام شد. نتایج حاکی از تأثیرات پارامترهای مدل بر انرژی برداشت شده از ارتعاش‌های تیر هدفمند تحت نوسان‌سازهای چندگانه متحرک است. در سال ۲۰۱۹ لارکین و همکارش روش مدل‌سازی با استفاده از تکنیک کاهش مرتبه در سیستم‌های برداشت انرژی پیزوالکتریک FG تک‌لایه را ارائه کردند [۱۷]. انتخاب مواد FG تک‌لایه امکان کمینه‌کردن حجم سیستم برداشت انرژی و در نتیجه افزایش چگالی توان را فراهم ساخت. همچنین تأثیر توزیع ماده و تغییر مقیاس سیستم برداشت انرژی از ماکرو به نانو مورد بررسی قرار گرفت. همچنین نشان داده شد که درصد ماده فلزی می‌تواند به‌طور چشمگیری در فرکانس‌های طبیعی و چگالی توان سیستم تأثیر داشته باشد. در سال ۲۰۲۰ چو و همکاران رفتار ارتعاشی یک برداشت‌کننده انرژی از جنس مواد فلکسوالکتریک FG با یک جرم متمرکز واقع در انتهای آن را بررسی کردند [۱۸]. در بخش عددی تأثیر نسبت حجمی اجزای ماده، شاخص گرادیان و مقاومت بارگذاری بر ولتاژ خروجی را بررسی کردند. نتایج نشان داد که برای برداشت‌کننده انرژی مذکور، خروجی ولتاژ موثر و چگالی توان به‌طور زیادی به اجزای تشکیل‌دهنده ماده، شاخص گرادیان و مقاومت بارگذاری بستگی دارد.

از مرور تحقیقات پیشین مشخص می‌شود که تاکنون تحقیقی در زمینه بررسی تأثیر نامعینی پارامترهای مختلف برداشت‌کننده روی مقدار انرژی تولید شده توسط محققان قبلی انجام نشده است؛ بنابراین در این مقاله با ارائه مدل واقع‌بینانه‌تر،



شکل ۱- تیر FG با لایه پیزوالکتریک

مقدار درصد حجمی ماده را در لایه مورد نظر بیان می‌کند. بنابراین طبق قانون اختلاط روابط (۷) را می‌توان برای تعیین خواص مورد استفاده شامل مدول یانگ و چگالی نوشت:

$$E^i = E_A + (1 - V_f^i) E_B$$

$$\rho^i = \rho_A + (1 - V_f^i) \rho_B \quad (7)$$

بدین ترتیب برای محاسبه خواص می‌بایست قانون اختلاط برای هرکدام از نقاط و برای هر یک از خواص نوشته شود.

لازم به توضیح است با توجه به وجود نقاط کنترلی، خود تیر هدفمند را می‌توان مجموعه‌ای از چندین تیر کامپوزیتی کنار هم فرض کرد. بنابراین YI معادل مجموع YI لایه پیزوالکتریک و n لایه FG خواهد بود. بعد از به‌دست آوردن سفتی خمشی معادل در نهایت با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) معادله حرکت مکانیکی با کوپلینگ الکتریکی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^3 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} + \vartheta v(t) = -m \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

برای به‌دست آوردن معادله مدار الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی، از روابط پیزوالکتریک با رابطه (۹) استفاده می‌شود [۱۹].

$$D_r = d_{r1} T_1 + \varepsilon_{rr}^T E_r \quad (9)$$

در این رابطه D_r جابجایی الکتریکی، ε_{rr}^T ظرفیت الکتریکی در تنش ثابت و E_r میدان الکتریکی است. زیرنویس‌های ۱ و ۳ به ترتیب منطبق بر محورهای X و Y است. با جایگذاری

که در آن m جرم واحد طول تیر، c_a ضریب میرایی خارجی یا میرایی ویسکوز، $c_s I$ ضریب میرایی سازه‌ای معادل برای سطح مقطع تیر و $M(x, t)$ ممان خمشی داخلی تیر است که می‌توان به‌صورت رابطه (۳) بیان کرد [۱۹]:

$$M(x, t) = -b \left(\int_{h_a}^{h_b} T_1^S y dy + \int_{h_b}^{h_c} T_1^P y dy \right) \quad (3)$$

که در آن b عرض تیر، T_1^P تنش محوری در لایه پیزوالکتریک و T_1^S تنش محوری در تیر است. با جایگذاری روابط تنش و انجام برخی ساده‌سازی‌ها، رابطه (۳) به رابطه (۴) تبدیل می‌شود:

$$M(x, t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t) \quad (4)$$

در رابطه (۴) ϑ ترم کوپلینگ الکترومکانیکی است که از رابطه (۵) به‌دست می‌آید:

$$\vartheta = -\frac{Y_p d_{r1} b}{\nu h_p} (h_c^r - h_b^r) \quad (5)$$

که در آن d_{r1} ثابت پیزوالکتریک بوده و همچنین YI سفتی خمشی مقطع برداشت‌کننده است. برای تعیین سفتی خمشی با توجه به اینکه تیر حاصل ترکیب دو لایه‌ی FG و پیزوالکتریک است باید هر دو قسمت را در نظر گرفت. بدین منظور ابتدا درصد حجمی در تیر هدفمند با استفاده از روش نقاط کنترلی به‌دست آمده و خواص ماده در هر یک از این نقاط با استفاده از قانون اختلاط طبق رابطه (۶) محاسبه می‌شود.

$$P_j^i = P_{j,A} + (1 - V_f^i) P_{j,B} \quad (6)$$

که P نشان‌دهنده خاصیت λ م مورد نظر در لایه λ م بوده و V_f

$$\frac{d^r \eta_r(t)}{dt^r} + \nu \zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^r \eta_r(t) + \chi_r v(t) = -\frac{d^r g(t)}{dt^r} \left(m \int_0^L \phi_r(x) dx \right),$$

$$\chi_r = g \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (17)$$

$$C_p^{eq} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = \sum_{r=1}^{\infty} \theta_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (18)$$

که در آنها θ_r نسبت میرایی مودال، θ_r کوپلینگ الکترومکانیکی مودال و C_p^{eq} ظرفیت معادل الکتریکی داخلی لایه‌های پیزوالکتریک است که از معادلات زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_r = -\frac{e_{r1} h_{pc} h_p}{\epsilon_{rr}^s L} \frac{d\phi_r}{dx} \Big|_{x=L} \quad (19)$$

$$C_p^{eq} = \epsilon_{rr}^s \frac{bL}{h_p} \quad (20)$$

که در آن ϵ_{rr}^s ثابت دی الکتریک و $e_{r1} = Y_p d_{r1}$ هستند. حال با حل عددی معادلات (17) و (18) به‌ازای شتاب پایه وارده، مقدار ولتاژ تولیدی به‌دست می‌آید.

۳- صحت‌سنجی نتایج و بررسی تأثیر پارامترها بر مقدار انرژی تولید شده

ابتدا جهت صحت‌سنجی نتایج نمودار مربوط به ولتاژ خروجی برای برداشت‌کننده به‌ازای پارامترهای مرجع [19] که در جدول (1) آورده شده، رسم می‌شود و با نتایج مرجع مورد اشاره مقایسه می‌شود. بدین منظور توزیع ماده در داخل تیر را به‌صورت فولاد خالص در نظر گرفته و برای مقاومت $R = 100 \Omega$ نمودار مذکور رسم می‌شود. همچنین طبق مرجع مذکور تحریک پایه به‌صورت هارمونیک با دامنه F_0 و فرکانس تحریک ω است. همان‌طور که در شکل (2) مشاهده می‌شود نتایج ارائه شده در این مقاله (خط آبی) با دقت قابل قبولی با نتایج ارائه شده در مرجع [19] (خط چین قرمز) مطابقت دارد.

بعد از اطمینان از صحت نتایج در ادامه به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف روی انرژی تولید شده از برداشت‌کننده پرداخته می‌شود. ابتدا به بررسی تأثیر توزیع مواد بر توان

$E_r = -\frac{v}{h_p}$ و نیز $\epsilon_{rr}^s = \epsilon_{rr}^T - d_{r1}^T Y_p$ رابطه (9) به‌صورت رابطه (10) بازنویسی می‌شود.

$$D_r(x, t) = d_{r1} Y_p S_1(x, t) - \epsilon_{rr}^s \frac{v(t)}{h_p} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن کرنش خمشی متوسط لایه پیزوالکتریک به‌صورت رابطه (9) و جایگذاری آن در رابطه (10) و انتگرال‌گیری از آن، بار الکتریکی به‌دست می‌آید.

$$s_1(x, t) = -h_{pc} \frac{\partial^r w_{rel}(x, t)}{\partial t^r} \quad (11)$$

در نهایت پس از به‌دست آوردن بار الکتریکی، مقدار ولتاژ برابر است با [19]:

$$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt} = -R d_{r1} Y_p b h_{pc} \int_{x=0}^L \frac{\partial^r w_{rel}(x, t)}{\partial x^r \partial t} dx - R \frac{\epsilon_{rr}^s b L}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \quad (12)$$

برای حل معادلات استخراج شده از روش جمع زنی مودها بر پایه جداسازی متغیرها طبق رابطه (13) استفاده می‌شود:

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (13)$$

در رابطه (13)، $\phi_r(x)$ تابع مد و $\eta_r(t)$ پاسخ زمانی است. تابع مد η_r برای تیر برابر است با:

$$\phi_r(x) = C_r \left[\cos\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) + \sigma_r \left(\sin\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_r}{L} x\right) \right) \right] \quad (14)$$

در رابطه اخیر

$$\sigma_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r} \quad (15)$$

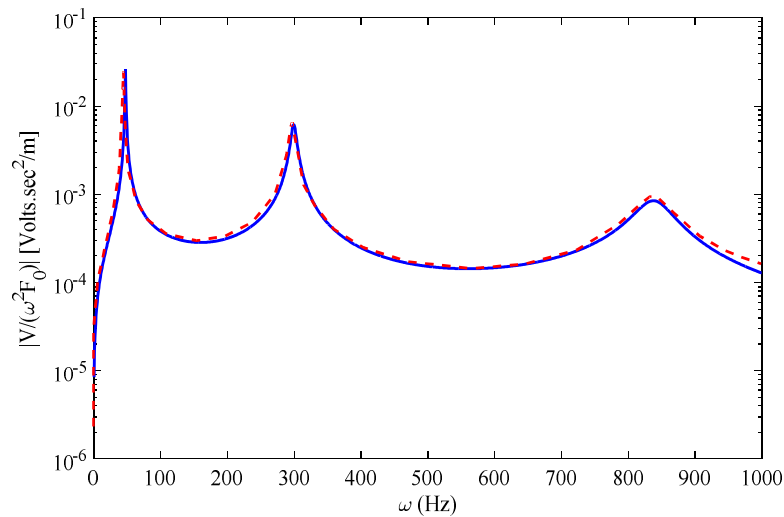
که λ_r پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$1 + \cos(\lambda_r) \cosh(\lambda_r) = 0 \quad (16)$$

با بسط پاسخ تیر بر اساس رابطه (13) و همچنین استفاده از شرایط تعامد مودها، معادلات کوپل الکترومکانیکی به‌صورت روابط (17) و (18) استخراج می‌شود [19]:

جدول ۱- خواص فیزیکی و هندسی برداشت‌کننده انرژی [۱۴]

پارامتر	مقدار
طول تیر	۰/۱ متر
عرض تیر	۰/۰۲ متر
ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک	۰/۴ میلی‌متر
ضخامت لایه‌ی FG	۰/۵ میلی‌متر
مدول یانگ پیزوالکتریک	۶۶ گیگاپاسکال
مدول یانگ تیر	۱۰۰ گیگاپاسکال
چگالی تیر	۷۱۶۵ کیلوگرم بر متر مکعب
چگالی پیزوالکتریک	۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب
ثابت پیزوالکتریک d_{31}	۱۹۰- پیکومتر بر ولت
ظرفیت الکتریکی	۱۵/۹۳ نانوفاراد بر متر



شکل ۲- نمودار ولتاژ خروجی: پژوهش حاضر (خط آبی) و مرجع [۱۹] (خط چین قرمز)

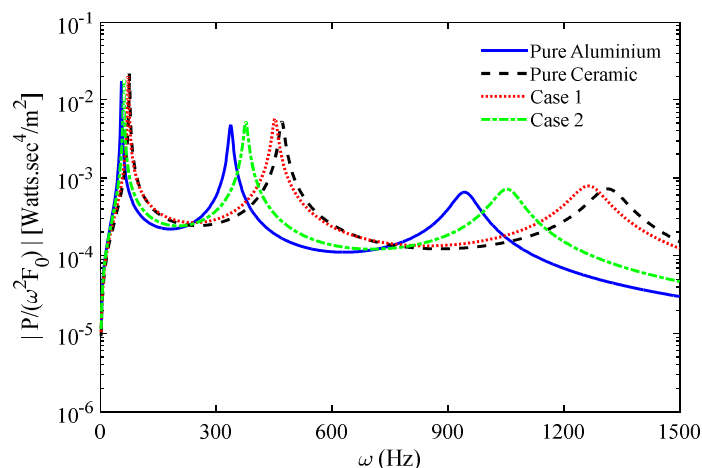
استخراج کرد. لازم به ذکر است سایر پارامترها مانند جدول (۱) در نظر گرفته شده است.

در مورد نحوه توزیع مواد در حالت‌های ارائه شده در جدول (۲) لازم به توضیح است به‌عنوان نمونه در حالت (۱) پایین‌ترین لایه تیر هدفمند از سرامیک خالص تشکیل شده و لایه ماقبل آخر از ترکیب ۹۰ درصدی سرامیک و ۱۰ درصدی آلومینیوم تشکیل شده تا در بالاترین لایه که در تماس با پیزوالکتریک است از آلومینیوم خالص تشکیل شده است. در شکل (۳) نمودار توان خروجی به‌ازای حالت‌های توزیع

تولیدی توسط مبدل پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. در این پژوهش ماده‌ی FG حاصل ترکیب آلومینیوم و آلومینا در نظر گرفته شده است. برای استخراج توان تولیدی بر حسب فرکانس تحریک ابتدا لازم است خواص فیزیکی تیر هدفمند مشخص شود. لذا به‌عنوان نمونه با در نظر حالت‌های مطرح شده در جدول (۲) و با توجه به اینکه مدول یانگ آلومینیوم ۷۰ گیگاپاسکال و چگالی آن ۲۷۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و همچنین مدول یانگ آلومینا ۳۸۰ گیگاپاسکال و چگالی آن ۳۸۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب است می‌توان خواص FG را

جدول ۲- حالت‌های مورد استفاده برای توزیع ماده

مورد	درصد حجمی مواد
تیر آلومینیومی	تیر فلزی با درصد حجمی ۱۰۰٪ آلومینیوم
تیر سرامیکی	تیر سرامیکی با درصد حجمی ۱۰۰٪ آلومینا
حالت ۱	تیر FG با ۱۱ نقطه کنترلی با درصد حجمی [۰٪، ۱۰٪، ۲۰٪، ۳۰٪، ۴۰٪، ۵۰٪، ۶۰٪، ۷۰٪، ۸۰٪، ۹۰٪، ۱۰۰٪]
حالت ۲	تیر FG با ۱۱ نقطه کنترلی با درصد حجمی [۱۰۰٪، ۹۰٪، ۸۰٪، ۷۰٪، ۶۰٪، ۵۰٪، ۴۰٪، ۳۰٪، ۲۰٪، ۱۰٪، ۰٪]



شکل ۳- توان خروجی به ازای مقادیر مختلف توزیع درصد حجمی مواد

به نمودار ولتاژ خروجی، اندازه ولتاژ به دست آمده از سیستم رابطه مستقیمی با مقاومت الکتریکی دارد، یعنی با افزایش مقاومت الکتریکی اندازه ولتاژ برداشت شده از سیستم افزایش می‌یابد.

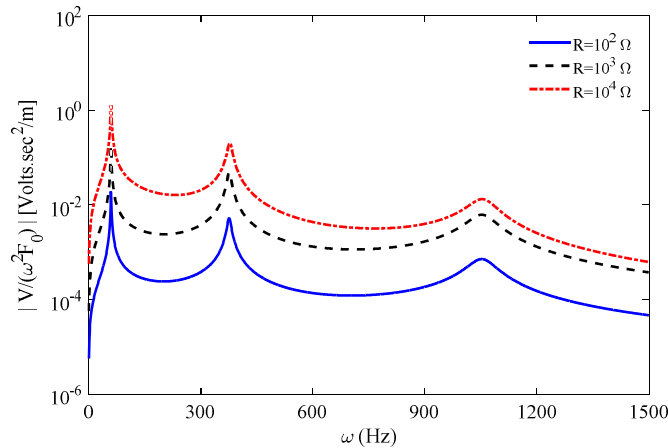
برای بررسی تأثیر پارامترهای هندسی به عنوان نمونه تأثیر عرض تیر مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود افزایش عرض تیر موجب افزایش توان برداشت‌کننده می‌شود. لازم به ذکر است در این مقاله فرض شده است که سطح تیر پوشیده شده است با لایه پیزوالکتریک بنابراین با افزایش سطح تیر به طبع سطح لایه پیزوالکتریک افزایش می‌یابد و سبب افزایش انرژی تولید شده می‌شود.

۴- بررسی آماری مقدار انرژی تولید شده توسط

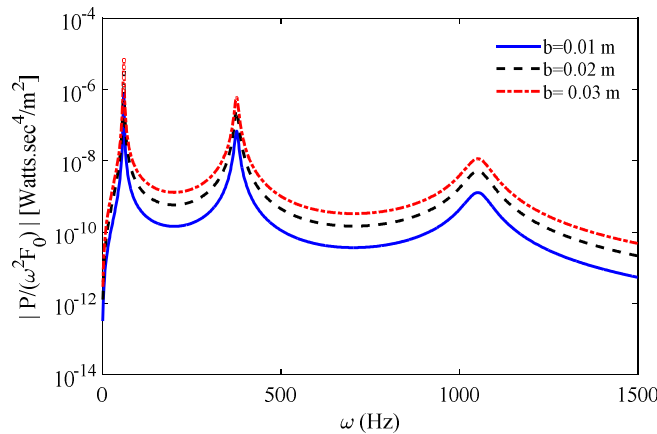
مبدل پیزوالکتریک

با توجه به اینکه در عمل پارامترهای سیستم دارای مقدار

حجمی ارائه شده در جدول (۲) استخراج شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود تغییر درصد حجمی سبب تغییر در توان خروجی برداشت‌کننده می‌شود که از این مزیت می‌توان برای گرفتن خروجی مطلوب مورد نظر از سیستم استفاده کرد. با توجه به اینکه مقاومت الکتریکی پارامتر مهمی در تعیین رفتار برداشت‌کننده محسوب می‌شود، در ادامه نمودار ولتاژ به ازای حالت (۱) از توزیع مواد داخل FG برای سه مقدار مختلف مقاومت الکتریکی در شکل (۴) رسم شده است. همان‌گونه که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، نمودار پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس برای سه مقدار مختلف مقاومت- الکتریکی ترسیم شده است. قله‌هایی که در نمودار مشاهده می‌شوند، نمایانگر فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند، که برای سیستم مورد مطالعه صفر تا هزار پانصد هرتز فقط سه فرکانس طبیعی در محدوده فرکانسی قرار دارند. بنابراین، نمودارهای ترسیم شده دارای سه قله هستند. همچنین با توجه



شکل ۴- نمودار ولتاژ خروجی به‌ازای سه مقدار مختلف مقاومت الکتریکی



شکل ۵- نمودار توان خروجی به‌ازای سه مقدار مختلف عرض تیر

مقادیر میانگین، واریانس و حد بالا و پایین برای مقدار انرژی تولید شده از مبدل پیزوالکتریک به‌دست آورده می‌شود.

۴-۱- برآورد به‌وسیله فاصله‌های اطمینان

فاصله اطمینان عبارت است از برآورد کران‌های خطا برای ایجاد فاصله‌ای از مقادیری که انتظار می‌رود شامل مقدار واقعی پارامتر باشد [۲۱]. برای این منظور فرض می‌شود، X_1, X_2, \dots, X_q نمونه‌ای تصادفی و θ یک پارامتر نامعلوم جامعه باشد. هر فاصله اطمینان برای θ ، فاصله‌ای به‌صورت (L, U) است که از روی مشاهدات نمونه‌ای X_1, X_2, \dots, X_q محاسبه می‌شود، به‌طوری که، این فاصله شامل مقدار واقعی نامعلوم θ با احتمال مشخصی است. این احتمال که با $\langle\langle 1-\alpha \rangle\rangle$ نشان داده می‌شود، معمولاً

مشخصی نیستند و باید نامعینی‌ها در پارامترهای سیستم در نظر گرفته شود. لذا در این قسمت با ارائه مدل واقع‌بینانه‌تر یعنی در نظر گرفتن نامعینی‌های در پارامترهای سیستم و با استفاده از روش آماری توضیح داده شده در بخش (۴) بررسی آماری دقیقی روی مقدار انرژی تولید شده از مبدل پیزوالکتریک پرداخته شده است. در نظر گرفتن نامعینی در پارامترهای سیستم سبب ایجاد عبارت تصادفی در معادلات حرکت سیستم می‌شود. بنابراین لازم است برای بررسی آماری رفتاری سیستم این معادلات حل شوند. یکی از روش‌های موجود برای حل معادلات دیفرانسیل دارای عبارت تصادفی، روش شبیه‌سازی مونت کارلو است [۲۰]. به‌همین منظور در این بخش با به‌کارگیری روش مونت‌کارلو و با استفاده از روش‌های آماری که در بخش (۴) توضیح داده شد،

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰

انحراف معیار جامعه نامعلوم است. اگر حجم نمونه بزرگ باشد، رابطه (۲۲) همچنان صحیح است، ولی چون σ نامعلوم است، این فاصله را نمی‌توان از روی داده‌های نمونه محاسبه کرد و بنابراین به‌عنوان یک فاصله‌ی اطمینان قابل استفاده نیست. در نتیجه چون q بزرگ است، جایگزینی σ به‌وسیله برآورد کننده آن، یعنی S ، تأثیر قابل ملاحظه‌ای در حکم احتمالی نخواهد داشت. به‌طور خلاصه وقتی که q بزرگ است و σ جامعه نامعلوم است، فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای μ عبارت است از:

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{q}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{q}}\right) \quad (23)$$

که در آن S ، انحراف معیار نمونه است.

همان‌طور که در بالا اشاره شد در عمل پارامترهای سیستم دارای مقدار مشخصی نیستند و باید نامعینی‌های در پارامترهای سیستم در نظر گرفته شود بنابراین لازم است برای تحلیل رفتار سیستم عدم قطعیت در مدل‌سازی نیز منظور شود. به‌طوری که عدم قطعیت شامل پارامترهای مهم سیستم از جمله درصد توزیع مواد داخل تیر هدفمند، طول تیر و عرض تیر است. عدم قطعیت مقدار پارامترهایی که نامعینی دارند با استفاده از توزیع یکنواخت اعداد تصادفی در محدوده بیشینه و کمینه به‌صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شود.

$$P = (P_{\max} - P_{\min})R + P_{\min} \quad (24)$$

که در آن P_{\max} ، P_{\min} و R به ترتیب کمینه و بیشینه مقدار پارامتر دارای نامعینی و عدد تصادفی یکنواخت است. به‌طوری

که P_{\max} و P_{\min} به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} P_{\min} &= P_0 - 0.05P_0 \\ P_{\max} &= P_0 + 0.05P_0 \end{aligned} \quad (25)$$

P_0 مقدار نامی پارامتر مورد نظر بوده که در جداول آورده شده است و مقدار نامعینی برای همه پارامترهای دارای نامعینی ۵ درصد در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش‌های آماری که در بخش قبل توضیح داده شد، حد بالا و پایین برای مقدار توان تولیدی با در نظر گرفتن نامعینی در توزیع مواد داخل هدفمند برای حالت اول در شکل (۶) نشان داده شده است.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۰، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۰

برابر با 0.9 ، 0.95 یا 0.99 در نظر گرفته می‌شود؛ به‌عبارت دیگر فرض می‌شود که $\ll 1-\alpha \gg$ مشخص باشد و (L, U) توابعی از X_1, X_2, \dots, X_q باشند، به‌طوری که:

$$P[L < \theta < U] = 1 - \alpha \quad (21)$$

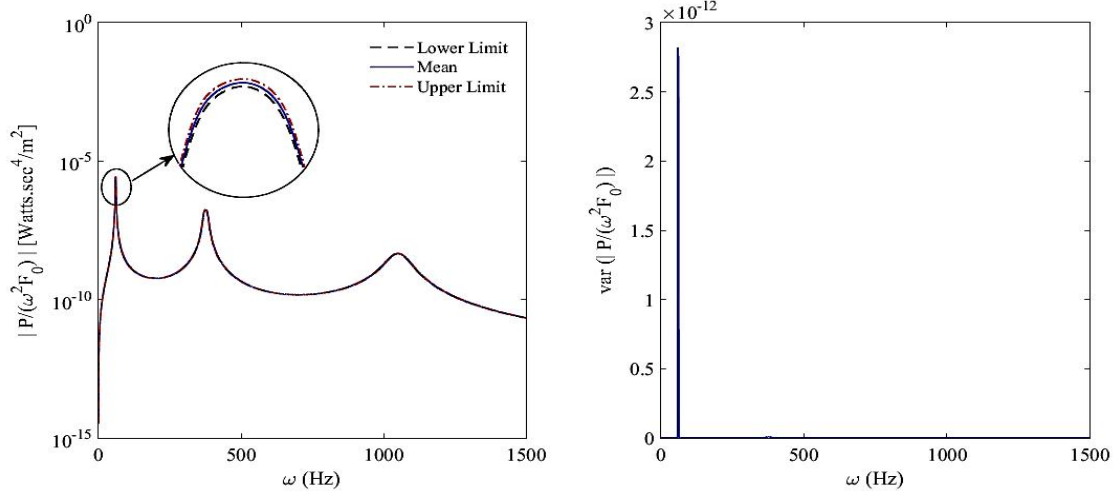
آنگاه فاصله (L, U) یک فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای پارامتر است، و $1-\alpha$ سطح اطمینان مربوط به فاصله نامیده می‌شود. برای روشن شدن این مفاهیم، فاصله‌ی اطمینانی برای میانگین μ ی جامعه، وقتی که حجم نمونه بزرگ است و انحراف معیار σ معلوم است، فرض می‌شود. در قسمت بعد σ نامعلوم فرض می‌شود که منجر به فرمول‌بندی واقع‌بینانه‌تری از مسئله خواهد شد. حکم احتمالی درباره‌ی میانگین نمونه بر مبنای توزیع نرمال، پایه‌ای برای شرح و بسط فاصله‌های اطمینان فراهم می‌کند. بر طبق قضیه‌ی حد مرکزی، توزیع \bar{X} را می‌توان با تقریب خوبی برابر با توزیع نرمال $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{q}})$ گرفت که در آن $\frac{\sigma}{\sqrt{q}}$ عددی معلوم است. این توزیع تقریب خوبی برای نمونه‌گیری بزرگ از جامعه‌های غیرنرمال است، ولی وقتی که توزیع جامعه نرمال است، توزیع فوق به‌طور دقیق به‌ازای تمام مقادیر نمونه‌ی تصادفی، q ، برقرار است. در نتیجه احکام احتمالی برای جامعه‌های نرمال به‌طور دقیق و برای جامعه‌های غیرنرمال به‌طور تقریبی، درحالی که نمونه بزرگ باشد، برقرار است. به‌طور کلی وقتی که q بزرگ و σ معلوم است، فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای μ از رابطه (۲۲) حاصل می‌شود:

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{q}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{q}}\right) \quad (22)$$

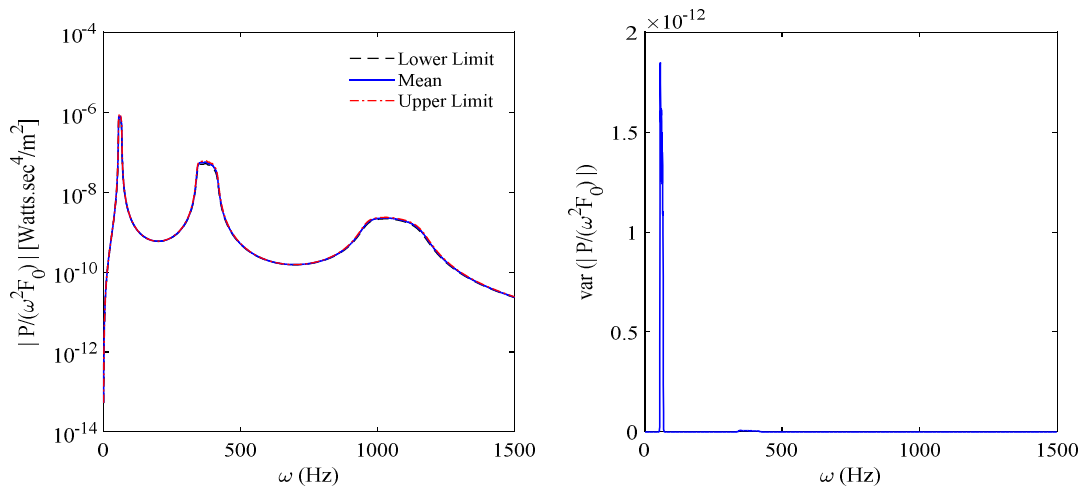
که اصطلاحاً $Z_{\alpha/2}$ نقطه‌ی $\alpha/2$ بالای توزیع نرمال استاندارد را نشان می‌دهد که می‌توان مقادیر آنها را از جداول آماری پیوستی در منبع [۲۲] به‌دست آورد.

۲-۴- فاصله اطمینان مبتنی بر نمونه بزرگ برای μ با σ نامعلوم

حال به‌حالت واقع‌بینانه‌تری روی آورده می‌شود که در آن



شکل ۶- نتایج آماری مرتبط با مقدار توان تولید شده از برداشت کننده انرژی در توزیع مواد داخل تیر

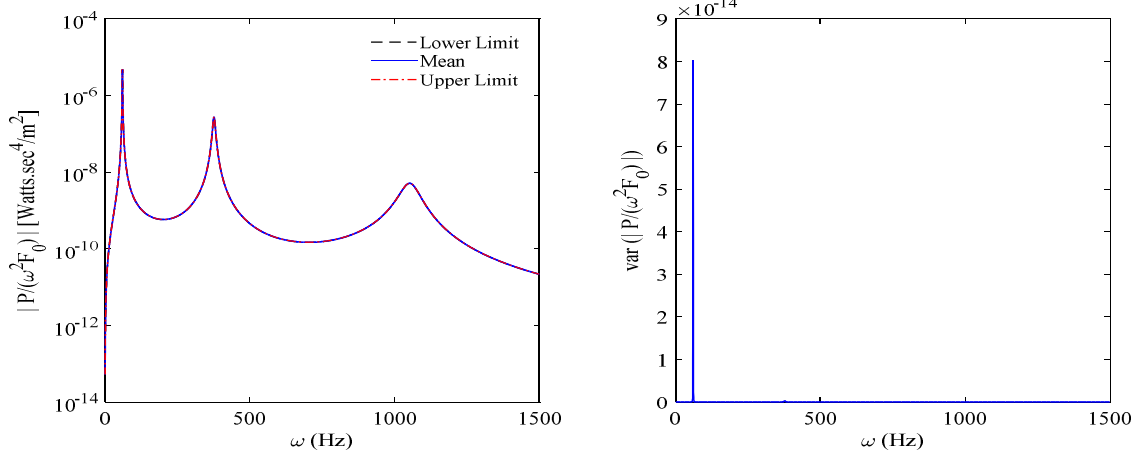


شکل ۷- نتایج آماری مرتبط با مقدار توان تولید شده از برداشت کننده انرژی در طول تیر

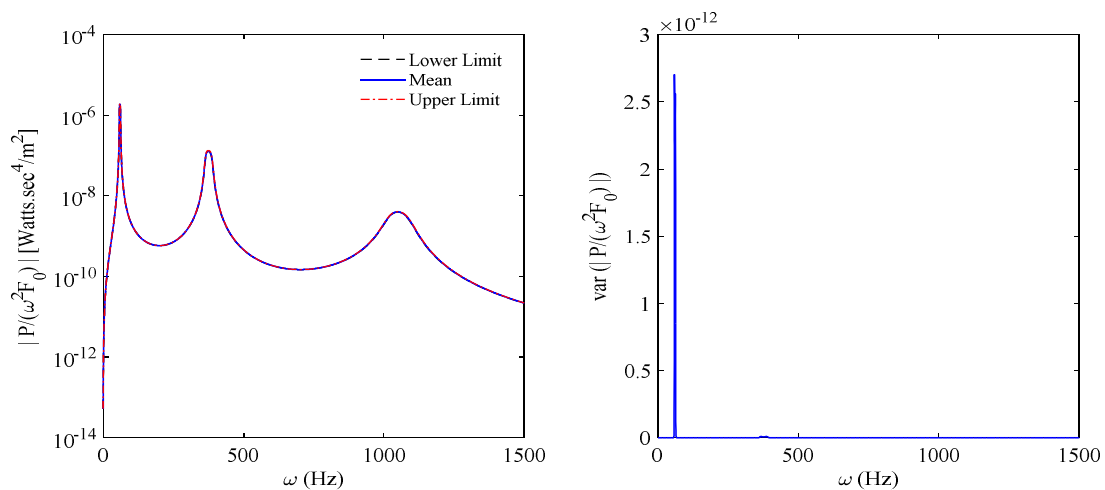
شده است. مانند حالت قبل مشاهده می‌شود که به دلیل کرنش‌های زیاد در مود اول ارتعاشی انرژی تولید شده در فرکانس طبیعی اول به مراتب بیشتر از سایر فرکانس‌ها است ولی با توجه به نمودار واریانس در حوالی فرکانس طبیعی اول تأثیر نامعینی در سیستم افزایش پیدا کرده و قابلیت اطمینان برداشت‌کننده کاهش پیدا می‌کند. همچنین به منظور بررسی تأثیر نامعینی در پارامترها مهم سیستم برداشت انرژی، نتایج حاصل در شکل‌های (۷)–(۹) با هم مقایسه می‌شوند و از مقایسه شکل‌ها، مشاهده می‌شود حوالی فرکانس طبیعی واریانس مربوط به نامعینی در ضخامت تیر هدفمند بیشترین مقدار دارد

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود هرچند میزان توان قابل استحصال در فرکانس طبیعی اول به مراتب بیشتر از سایر فرکانس‌ها است که علت این امر، به وجود آمدن کرنش‌های زیاد در مود اول ارتعاشی است، ولی با توجه به نمودار واریانس در حوالی فرکانس طبیعی اول تأثیر نامعینی در سیستم افزایش پیدا کرده و قابلیت اطمینان برداشت‌کننده کاهش پیدا می‌کند.

همچنین در شکل‌های (۷)–(۹) مقادیر میانگین، واریانس و حد بالا و پایین برای مقدار توان تولیدی توسط مبدل پیزوالکتریک به ترتیب به‌ازای نامعینی در طول تیر، نامعینی در عرض تیر و نامعینی در مقدار ضخامت تیر هدفمند نشان داده



شکل ۸- نتایج آماری مرتبط با مقدار توان تولید شده از برداشت کننده انرژی در اثر نامعینی در عرض تیر



شکل ۹- نتایج آماری مرتبط با مقدار توان تولید شده از برداشت کننده انرژی در اثر نامعینی در ضخامت تیر

تولیدی مطالعه شد و در نهایت تأثیر نامعینی در پارامترهای سیستم روی مقدار انرژی تولیدی به صورت آماری بررسی شد.

مهم ترین نتایج به شرح زیر است:

- ولتاژ خروجی رابطه مستقیمی با مقاومت الکتریکی دارد، یعنی با افزایش مقاومت الکتریکی اندازه ولتاژ برداشت شده از سیستم افزایش می یابد.
- هرچند میزان توان قابل استحصال در فرکانس طبیعی اول به مراتب بیشتر از سایر فرکانس ها است ولی در حوالی فرکانس طبیعی اول تأثیر نامعینی در سیستم افزایش پیدا کرده و قابلیت اطمینان برداشت کننده کاهش پیدا می کند.
- توان تولیدی به تغییر در پارامتر ضخامت تیر هدفمند

و واریانس مربوط به نامعینی در عرض تیر کمترین مقدار را دارد که این نشان از این است که توان تولیدی به تغییر در پارامتر ضخامت تیر هدفمند بیشترین حساسیت و نسبت به تغییر در پارامتر عرض تیر کمترین حساسیت را دارد که در طراحی باید این موارد مورد توجه قرار گیرد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله تیر هدفمند با لایه پیزوالکتریک تحت تحریک پایه مدل سازی شده و معادلات کوپل دینامیکی ارتعاش سیستم و ولتاژ تولید شده توسط پیزوالکتریک ها استخراج شد. پس از اعتبارسنجی نتایج، تأثیر پارامترهای برداشت کننده روی توان

بیشترین حساسیت و نسبت به تغییر در پارامتر عرض تیر
کمترین حساسیت را دارد که در طراحی باید مورد توجه قرار
گیرد.

واژه‌نامه

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. lead zirconate titanate | 3. unimorph |
| 2. functionally graded | 4. travelling multi oscillator |

مراجع

- Erturk, A. and Inman, D. J., *Piezoelectric Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, 2011.
- Smits, J. G. and Choi, W. s., "The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 38, pp. 256-270, 1991.
- Kim, S. H., Ahn, J. H., Chung, H. M. and Kang, H. W., "Analysis of Piezoelectric Effects on Various Loading Conditions for Energy Harvesting in a Bridge System", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 167, pp. 468-483, 2011.
- Wu, X., Lee and D. W., "An Electromagnetic Energy Harvesting Device Based on High Efficiency Windmill Structure for Wireless Forest Fire Monitoring Application", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 219, pp. 73-79, 2014.
- Zurkinden, A., Campanile, F. and Martinelli, L., "Wave Energy Converter Through Piezoelectric Polymers", *Proceedings of the COMSOL Users Conference (Grenoble)*, 2007.
- Xie, X., Wang, Q. and Wu, N., "Potential of a Piezoelectric Energy Harvester From Sea Waves", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 1421-1429, 2014.
- Cleante, V. G., Brennan, M. J., Gatti, G. and Thompson, D. J., "On the Target Frequency for Harvesting Energy From Track Vibrations Due to Passing Trains", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 114, pp.212-223, 2019.
- Chen, C., Sharafi, A. and Sun, J. Q., "A High Density Piezoelectric Energy Harvesting Device From Highway Traffic-Design Analysis and Laboratory Validation", *Applied Energy*, Vol. 269, pp. 115073, 2020.
- Zou, H. X., Li, M., Zhao, L. C., Gao, Q. H., Wei, K. X., Zuo, L. and Zhang, W. M., "A Magnetically Coupled Bistable Piezoelectric Harvester for Underwater Energy Harvesting", *Energy*, Vol. 217, p. 119429, 2021
- Wang, Q., Pei, X., Wang, Q. and Jiang, S., "Finite Element Analysis of A Unimorph Cantilever for Piezoelectric Energy Harvesting", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol. 40, pp. 341-351, 2012.
- Amini, Y., Emdad, H. and Farid, M., "Finite Element Modeling of Functionally Graded Piezoelectric Harvesters", *Composite Structures*, Vol. 129, pp. 165-176, 2015.
- Amini, Y., Fatehi, P., Heshmati, M. and Parandvar, H., "Time Domain and Frequency Domain Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Harvesters Subjected to Random Vibration: Finite Element Modeling", *Composite Structures*, Vol. 136, pp. 384-393, 2016.
- Derayatifar, M., Tahani, M. and Moeenfar, H., "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Energy Harvesters", *Composite Structures*, Vol. 182, pp. 199-208, 2017.
- Biswal, A. R., Roy, T. and Behera, R. K., "Optimal Vibration Energy Harvesting From Non-Prismatic Axially Functionally Graded Piezolaminated Cantilever Beam Using Genetic Algorithm", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 28, pp. 1957-1976, 2017.
- Fatehi, P. and Farid, M., "Piezoelectric Energy Harvesting from Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Beams: Finite-Element Approach", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 145, p. 04018116, 2019.
- Heshmati, M. and Amini, Y., "A Comprehensive Study on The Functionally Graded Piezoelectric Energy Harvesting From Vibrations of a Graded Beam Under Travelling Multi-Oscillators", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 66, pp. 344-361, 2019.
- Larkin, K. and Abdelkefi, A., "Neutral Axis Modeling and Effectiveness of Functionally Graded Piezoelectric Energy Harvesters", *Composite Structures*, Vol. 213, pp. 25-36, 2019.
- Chu, L., Li, Y. and Dui, G., "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Flexoelectric Nanoscale Energy Harvesters", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 167, p. 105282, 2020.
- Erturk, A. and Inman, D. J., "A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 130, p. 041002, 2008.

20. Allen, M. P. and Tildesley, D. J., *Computer Simulation of Liquids*, Oxford university press, 2017.
21. Johnson, R. and Bhattacharyya, G., *Statistical Concepts and Methods*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1977.
22. Choi, S. K., Grandhi, R. and Canfield, R. A., *Reliability-Based Structural Design*, Springer Science & Business Media, 2006.