

## بررسی تحلیلی و عددی کمانش تیر همگن پوشیده شده با مواد مدرج تابعی متخلخل، با شرایط مرزی مختلف

حمزه صالحی پور\*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ایلام

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۴/۶)

**چکیده** - در این مقاله کمانش استاتیکی تیرهای همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد مدرج تابعی متخلخل، با شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی شده است. از اصل کار مجازی برای به دست آوردن روابط حاکم بر مسئله استفاده شده است و سپس دو روش حل تحلیلی دقیق و حل عددی برای به دست آوردن نیروی کمانش و حل روابط مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روابط حاکم به صورت یک سری رابطه دیفرانسیل معمولی جفت شده هستند. در حل تحلیلی ابتدا این روابط با استفاده از یک سری عملیات ریاضی جدا می‌شوند و سپس حل می‌شوند. حل به دست آمده دارای یک سری پارامترها و ثابت‌های مجهول است. با استفاده از روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر یک دستگاه رابطه همگن استخراج می‌شود که از رویه حل نابدی می‌آن، مقدار نیروی کمانش محوری تیر به دست می‌آید. در حل عددی از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای حل روابط استاتیکی استفاده شده است. در پایان، نتایج عددی ارائه شده است و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ضخامت به طول تیر، ضخامت لایه متخلخل، مقدار پارامتر تخلخل بر روی میزان نیروی کمانش مطالعه شده است. مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش حل تحلیلی و عددی، صحت و اعتبار هر دو روش را تایید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: کمانش استاتیکی، تیر تیموشنکو، مواد مدرج تابعی متخلخل، حل تحلیلی دقیق، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته.

## Analytical and Numerical Study on the Buckling of Homogeneous Beams Coated by a Functionally Graded Porous Layer with Different Boundary Conditions

H. Salehipour \*

Department of Mechanical Engineering, Ilam University, Ilam, Iran.

**Abstract:** In this paper, static buckling of homogeneous beams coated by a functionally graded porous layer with different

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: h.salehipour@ilam.ac.ir

boundary conditions is investigated based on the Timoshenko beam theory. The principle of virtual work has been used to obtain the governing equations. Two different methods, namely analytical solution and numerical solution are used to solve the governing equations and extract the buckling force. The governing equations are coupled as a series of ordinary differential equations. In the analytical solution, these equations are first uncoupled using a series of mathematical operations, and are then solved. The obtained solution has a series of parameters and unknown constants. Using the boundary conditions at the boundaries of the beam, a homogeneous system of equations is extracted, from which the axial buckling force is obtained. In the numerical solution, the generalized differential quadrature method is used to solve the static equations. Finally, the numerical results are presented and the effects of various parameters such as thickness to beam length ratio, porous layer thickness, porosity parameter, etc. on the buckling of the beam are investigated. Comparison of the results obtained from the two analytical and numerical solution methods confirms the accuracy and validity of both methods.

**Keywords:** Static buckling, Timoshenko beam, Functionally graded porous material, Exact analytical solution, Generalized differential quadrature method.

## فهرست علائم

$u_z$	مولفه جابه‌جایی در راستای ضخامت $z$ تیر	$b$	عرض تیر
$u_0$	جابه‌جایی محوری در سطح میانی تیر	$\bar{E}$	مدول الاستیسیته
$W$	کار خارجی ناشی از نیروی محوری کمانش	$e_s$	پارامتر تخلخل
$w_0$	جابه‌جایی عرضی در سطح میانی تیر	$h$	ضخامت تیر
$x_i$	نقاط شبکه	$h_0$	ضخامت لایه همگن
$\alpha$	پارامتر تخلخل	$L$	طول تیر
$\nu$	ضریب پواسون	$L_{ij}^{(g)}$	ضریب وزن برای مشتق مرتبه $g$ ام
$\psi$	چرخش تیر حول صفحه میانی	$n$	تعداد نقاط شبکه‌بندی
$\sigma_{ij}$	مولفه تنش	$P_0$	بار محوری عمل‌کننده بر تیر
$\epsilon_{ij}$	مولفه کرنش	$U$	انرژی پتانسیل
		$u_x$	مولفه جابه‌جایی در راستای محور طولی $x$

## ۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup> (FGM) ابتدا توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی در دهه ۸۰ میلادی در قرن بیستم معرفی شدند. درصد اجزا تشکیل‌دهنده در این مواد کامپوزیتی از یک نقطه از بدنه ماده تا نقطه دیگر در آن به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند و از اینرو خواص فیزیکی و مکانیکی نیز از یک نقطه تا نقطه دیگر در داخل ماده نیز به صورت پیوسته تغییر می‌کند. در مواد کامپوزیتی چند لایه، لایه‌ها بر اثر تنش‌های حرارتی و یا تنش‌های نیرویی زیاد جدا می‌شوند که با پیدایش مواد FGM این مشکلات حل شدند. از این‌رو مواد FGM توانستند در تعدادی زیادی از کاربردهای صنعتی جایگزین مناسبی برای

مواد کلاسیک مرسوم باشند [۱ و ۲].

امروزه نسل جدیدی از مواد به نام مواد متخلخل<sup>۲</sup> به دلیل ویژگی‌های منحصر به فردی که دارند مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان در سرتاسر دنیا قرار گرفتند و در بسیاری از صنایع از جمله صنایع هوافضا، خودروسازی و مهندسی عمران استفاده می‌شوند [۳-۶]. مواد متخلخل به دلیل سبک بودن و همچنین دارا بودن حفره‌های زیاد قادر به جذب درصد بالایی از انرژی هستند و می‌توانند به عنوان سازه‌های مقاوم تحت اثر بار دینامیکی مورد استفاده قرار گیرند. در سال‌های اخیر، موادی توسعه داده شده‌اند که تخلخل در آنها از یک نقطه تا نقطه دیگر به صورت تدریجی تغییر می‌کند. این دسته از مواد را مواد مدرج تابعی متخلخل<sup>۳</sup> (FGP) می‌نامند که کاربردهای گوناگونی در

با استفاده از یک تئوری برشی بهبودیافته مرتبه بالاتر ورق و شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۸</sup>، نیروی کماتش ورق را به صورت فرم- بسته استخراج کردند و نتایج مفصلی به صورت عددی ارائه کردند. رفیعی آناماق و بدیز رفتار ارتعاشی و کماتشی ورق‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافین<sup>۹</sup> را با استفاده از روش طیفی چیشف<sup>۱۰</sup> و تئوری برشی مرتبه اول ورق بررسی کردند [۱۹]. هانگ و همکاران کماتش غیرخطی پوسته‌های FGP با ضخامت متغیر قرار گرفته در یک محیط الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند [۲۰]. آنها با استفاده از روش گلرکین یک پاسخ فرم بسته برای نیروی کماتش به دست آوردند و مشاهده کردند که تداخل می‌تواند تأثیر قابل توجهی روی نیروی کماتش داشته باشد. فروتن و همکاران کماتش‌های استاتیکی و دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ناقص FGP را با استفاده از روش عددی رانگ کوتا<sup>۱۱</sup> مورد مطالعه قرار دادند [۲۱]. نگوین و همکاران یک نظریه برشی مرتبه بالای سه متغیره را مورد استفاده قرار داده و خمش استاتیکی، ارتعاشات آزاد، کماتش و پایداری ورق‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافن را بررسی کردند [۲۲]. انتخاب این تئوری سبب شد تا نتایج با دقت بالا به دست آیند. پایداری غیرخطی و کماتش ناشی از ضربه بر پوسته FGP نانوکامپوزیتی با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی توسط لی بررسی شده است. در مقاله ایشان از مدل متقارن برای توزیع نقاط تداخل استفاده شده است [۲۳]. لی و همکاران کماتش استاتیکی پوسته‌های FGP تقویت شده با پلاکت‌های گرافن که تحت یک میدان حرارتی قرار دارند را با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق بررسی کردند [۲۴]. آنها از روش انرژی و تئوری پوسته‌های نازک برای به دست آوردن روابط حاکم استفاده کردند. زو و همکاران کماتش استاتیکی و دینامیکی لوله‌های FGP با نقص هندسی را بررسی کردند [۲۵]. آنها تغییرات خواص تداخل را در راستای شعاعی در نظر گرفتند و از تئوری تیر اوپلر-برنولی به همراه روش انرژی برای استخراج روابط استفاده کردند. سپس روابط را با استفاده از یک روش تحلیلی دقیق حل

صنایع مختلف دارند [۱۰-۷].

در چند سال اخیر محققانی از سراسر دنیا به بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های تشکیل شده از مواد FGP پرداخته‌اند. در ادامه پژوهش‌هایی که به بررسی کماتش این سازه‌ها پرداخته‌اند را بررسی می‌کنیم. مجاهدین و همکاران کماتش ورق‌های دایره‌ای FGP را براساس یک تئوری برشی مرتبه بالاتر ورق مطالعه کردند و نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول مقایسه کردند [۱۱]. کیتوپورنیچای و همکاران ارتعاشات آزاد و کماتش تیرهای FGP را براساس تئوری تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. آنها از روش ریتز برای حل روابط استفاده و تأثیر پارامترهای مختلف را بر رفتار مکانیکی سازه بررسی کردند. آنها در یک مقاله دیگر، همین روش حل را برای مطالعه ارتعاشات آزاد و کماتش ورق‌های FGP براساس تئوری برشی مرتبه اول ورق‌ها به کار بردند [۱۳]. دانگ و همکاران کماتش پوسته‌های استوانه‌ای FGM در حال چرخش که با نانو کامپوزیت متخلخل<sup>۴</sup> تقویت شده‌اند را مورد بررسی قرار دادند [۱۴]. آنها از تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها استفاده کردند و تغییرات خواص را فقط در راستای ضخامت و در جهت شعاعی پوسته در نظر گرفتند. همچنین آنها روش گلرکین<sup>۵</sup> را به همراه یک سری توابع وزن خاص برای شرایط مرزی مختلف به کار بردند. ژه هوان و همکاران کماتش غیرخطی ورق‌های FGP تقویت شده را مورد مطالعه قرار دادند [۱۵]. آنها دائل تئوری<sup>۶</sup> را به همراه تئوری برشی مرتبه اول ورق برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند، سپس روش گلرکین را برای حل روابط به کار بردند. لیو و همکاران کماتش جفت شده مکانیکی-حرارتی تیرهای ساندویچی (چند لایه) FGP را با استفاده از تئوری برشی سینوسی تیر به‌ازای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند [۱۶]. یاس و رحیمی کماتش حرارتی تیرهای نانوکامپوزیتی FGP را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۷</sup> (GDQM) برای شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار دادند [۱۷]. ترینه و همکاران کماتش تصادفی ورق‌های FGP را براساس یک روش نیمه تحلیلی مطالعه کردند [۱۸]. آنها

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

از دو روش حل مزایای مربوط به خود را دارند. در حل عددی مطالعه پارامتری کماتش آسانتر است و نتایج به دست آمده دقیق هستند. در روش عددی GDQM نیز می توان به نتایج نسبتاً دقیق در حد نتایج حل تحلیلی دست یافت که کاملاً در جدول های ارائه شده در مقاله، این امر مشهود است. ارائه نتایج با استفاده از روش عددی برای یک طیف گسترده از مقادیر پارامترها بسیار ساده تر است، زیرا می توان با استفاده از کدنویسی و حلقه های تکرار این کار را به سادگی انجام داد. در پایان و در بخش نتایج هم تأثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ضخامت لایه FGP به کل ضخامت تیر، میزان تخلخل، و تابع توزیع تخلخل روی کماتش تیر بررسی می شود.

## ۲- مدل سازی ریاضی

۲-۱- تیر همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP یک تیر همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP به همراه جزییات هندسه تیر و محورهای مختصات در شکل (۱) نمایش داده شده است. محورهای  $x$  و  $z$  به ترتیب در راستای طول و ضخامت تیر هستند. تابع توزیع تخلخل در راستای ضخامت لایه FGP براساس یکی از سه مدل غیریکنواخت متقارن (مدل ۱)، غیریکنواخت غیر متقارن (مدل ۲) و یکنواخت (مدل ۳) در نظر گرفته می شود که رابطه مدول الاستیسیته بر حسب مختصه  $z$  در راستای ضخامت براساس این سه مدل به شرح زیر است [۲۷]:

$$E(z) = \begin{cases} \bar{E} & z < h_0 - h/2 \\ \bar{E} \left( 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi(z - h_0/2)}{h - h_0} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases} \quad (۱-الف)$$

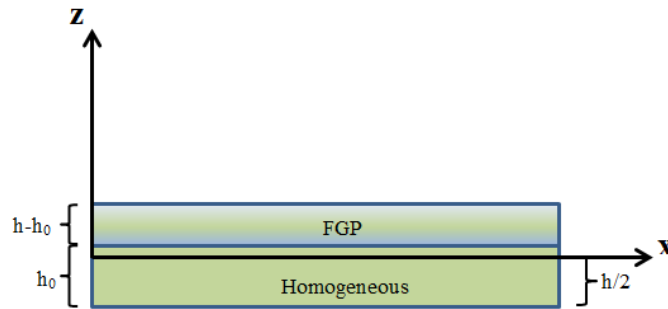
$$E(z) = \begin{cases} \bar{E} & z < h_0 - h/2 \\ \bar{E} \left( 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi(z - (h_0 - h/2))}{2(h - h_0)} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases} \quad (۱-ب)$$

$$E(z) = \begin{cases} \bar{E} & z < h_0 - h/2 \\ \bar{E}(1 - e_0 \alpha) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases} \quad (۱-پ)$$

که در روابط بالا  $\bar{E}$  مدول الاستیسیته در کف لایه FGP است.

کردند و تأثیر پارامترهای مختلف روی نیروی کماتش را بررسی کردند. کوونگ-لو و همکاران یک حل سه بعدی برای ارتعاشات آزاد و همچنین کماتش ورق های دایره ای و پوسته های استوانه ای FGP با استفاده از روش تجزیه و تحلیل ایزوژئومتریکی<sup>۱۲</sup> انجام دادند [۲۶].

یکی از کاربردهای مهم مواد FGP استفاده از آنها به عنوان لایه های پوششی برای سازه های غیر متخلخل به عنوان جاذب انرژی و عایق است که استحکام لازم را نیز در برابر نیروهای خارجی دارد. تاکنون پژوهش های بسیار اندکی در این زمینه صورت گرفته است و علت آن نوپا بودن مواد FGP است. در پژوهش حاضر کماتش تیرهای همگن پوشیده شده با لایه FGP براساس تئوری تیر تیموشنکو (مرتب اول) بررسی می شود. بررسی رفتار کماتشی اینگونه از تیرها و اثر ضخامت لایه های مختلف روی مقادیر نیروی کماتش تیر اصلی ترین نوآوری مقاله است که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. حل مساله فوق تاکنون با هیچ کدام از روش های تحلیلی و عددی انجام نشده است. از اصل کار مجازی برای به دست آوردن روابط کماتش و شرایط مرزی استفاده می شود. در ادامه، روابط دیفرانسیل حاکم بر مساله با استفاده از دو روش حل تحلیلی دقیق و روش عددی GDQM حل می شوند. روش تحلیلی ارائه شده برای اولین بار است که برای بررسی رفتار تیرهای FGP براساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه می شود. روش حل تحلیلی یک روش ریاضی است که به صورت کاملاً دقیق مقادیر نیروی کماتش را به صورت پارامتری و براساس حل تحلیلی معادلات کماتش استخراج می کند. در روش حل عددی از روش عددی محبوب و کاربردی GDQM استفاده است. روش GDQM بر این اساس استوار است که معادلات دیفرانسیل را بر اساس نقاط شبکه به صورت یک چندجمله ای (درجه چندجمله ای متناسب با نقاط شبکه است) که از نقاط شبکه می گذرد تقریب می زند و بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل به یک سری معادلات گسسته شبکه بندی شده تبدیل می شوند. از مزایای حل GDQM ارائه جواب های دقیق و بسیار نزدیک به حل تحلیلی است. هر کدام



شکل ۱- تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP به همراه هندسه و مختصات

(۳) استخراج شوند. کرنش‌ها برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial u_0 / \partial x + z \partial \psi / \partial x \\ \lambda_{xz} &= \partial w_0 / \partial x + \psi \end{aligned} \quad (۴)$$

و تنش‌ها نیز برحسب کرنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(z) \varepsilon_{xx} = \\ &E(z) (\partial u_0 / \partial x + z \partial \psi / \partial x) \\ \sigma_{xz} &= (E(z) / (1 + \nu)) \lambda_{xz} = \\ &(E(z) / (1 + \nu)) (\partial w_0 / \partial x + \psi) \end{aligned} \quad (۵)$$

برای استخراج روابط استاتیکی و شرایط مرزی از اصل کار مجازی استفاده می‌شود که رابطه آن به صورت زیر است:

$$\delta(W - U) = 0 \quad (۶)$$

که در این رابطه  $W$  و  $U$  به ترتیب کار خارجی ناشی از نیروی محوری کمانش و انرژی پتانسیل هستند و به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^L \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} dx dy dz \quad (۷-الف)$$

$$\delta W = \int_0^L P_0 (\partial w_0 / \partial x) (\delta \partial w_0 / \partial x) dx \quad (۷-ب)$$

که در این رابطه  $P_0$  بار محوری عمل کننده بر تیر است. محل اعمال بار محوری تیر همانند آنچه که در سایر مقالات بیان شده است درست در مرکز آن و یا به عبارت بهتر در تارمیانی تیر در نظر گرفته شده است. با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۶) - (الف) و سپس جایگذاری روابط (۷) در رابطه (۶) و استفاده از روش انتگرال جزء به جزء، و سپس مساوی صفر قرار دادن ضرایب  $\delta u_0$ ،  $\delta \psi$  و  $\delta w_0$ ، روابط کمانش استاتیکی به همراه روابط شرایط مرزی به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$e_0$  و  $\alpha$  پارامترهای تخلخل هستند که از یکدیگر مستقل نیستند و می‌توان با استفاده از رابطه زیر مقدار  $\alpha$  را بر حسب  $e_0$  به دست آورد:

$$\alpha = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (۲)$$

## ۲-۲- تئوری تیر تیموشنکو (برشی مرتبه اول)

در تئوری تیر تیموشنکو یا همان تئوری برشی تیر مرتبه اول، جابه‌جایی‌ها در سه جهت مختصات برای تیر به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= u_0(x, t) + z \psi(x, t) \\ u_y(x, y, z, t) &= 0 \\ u_z(x, y, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (۳)$$

که  $u_x$  و  $u_z$  به ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی در راستای محور طولی  $x$  و در راستای ضخامت  $z$  تیر هستند. همچنین  $u_y$  و  $w_0$  مولفه‌های جابه‌جایی در سطح میانی تیر و  $\psi$  میزان چرخش تیر حول صفحه میانی تیر هستند. از آنجا که از تئوری برشی مرتبه اول تیر برای استخراج روابط حاکم بر مسئله استفاده می‌شود و این تئوری متغیرهای مربوط به چرخش صفحه میانی را دارد، از اینرو می‌توان اطمینان حاصل کرد که مدل‌سازی فوق اثرات متقابل خمش و نیروی محوری تیر را در نظر می‌گیرد.

## ۲-۳- روابط کمانش و شرایط مرزی

برای به دست آوردن روابط حاکم بر مسئله، در ابتدا باید مولفه‌های کرنش و تنش برحسب مولفه‌های جابه‌جایی در رابطه

جفت شده دیفرانسیلی خارج کرد. از رابطه (۱۱- الف)  $\delta u_o / \partial x^2$  در رابطه (۱۱- ب) جایگذاری می‌شود و رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left( E_\gamma - \frac{E_1}{E_o} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_o}{\gamma(1+\nu)} \left( \frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi \right) = 0 \quad (13)$$

از رابطه بالا  $\partial w_o / \partial x$  به دست آمده و در رابطه (۱۱- پ) جایگذاری می‌شود که منجر به استخراج رابطه دیفرانسیلی زیر برحسب فقط مولفه جابه‌جایی  $\psi$  می‌شود:

$$\left( E_\gamma - \frac{E_1}{E_o} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - P_o \frac{\gamma(1+\nu)}{E_o} \left( \left( E_\gamma - \frac{E_1}{E_o} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_o}{\gamma(1+\nu)} \psi \right) = 0 \quad (14)$$

رابطه بالا یک رابطه دیفرانسیلی همگن خطی مرتبه ۳ برحسب متغیر جابه‌جایی  $\psi$  است. از حل رابطه بالا، تابع  $\psi$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi = \sum_{i=1}^3 \bar{\psi}_i e^{\zeta_i x} \quad (15)$$

با جایگذاری  $\psi$  از رابطه (۱۵) در روابط (۱۳) و (۱۱- الف) و حل خصوصی آنها برای متغیرهای  $w_o$  و  $u_o$ ، نتایج زیر استخراج می‌شوند:

$$u_o = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i e^{\zeta_i x} + \bar{\psi}_\delta x + \bar{\psi}_\epsilon \quad (16)$$

$$w_o = \sum_{i=1}^3 \bar{w}_i e^{\zeta_i x} + \bar{\psi}_\varphi$$

که

$$\bar{u}_i = -\frac{E_1}{E_o} \bar{\psi}_i \quad (17)$$

$$\bar{w}_i = \frac{\gamma(1+\nu)}{E_o \zeta_i} \left( \left( E_\gamma - \frac{E_1}{E_o} \right) \zeta_i^2 - \frac{E_o}{\gamma(1+\nu)} \right) \bar{\psi}_i$$

هر سه مولفه جابه‌جایی برحسب شش ضریب  $\bar{\psi}_i$  بیان می‌شوند. با جایگذاری این مولفه‌های جابه‌جایی در روابط شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۹)، یک دستگاه شش رابطه شش-مجهول برحسب متغیرهای  $\bar{\psi}_i$  به دست می‌آید که از حل نابدیهی آن مقدار نیروی کمانش نتیجه می‌شود.

$$\delta u_o : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (8-الف)$$

$$\delta \psi : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - F_{xz} = 0 \quad (8-ب)$$

$$\delta w_o : \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} - P_o \frac{\partial w_o}{\partial x} = 0 \quad (8-پ)$$

و روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u_o = 0 \quad \text{or} \quad N_{xx} = 0 \quad (9-الف)$$

$$\psi = 0 \quad \text{or} \quad M_{xx} = 0 \quad (9-ب)$$

$$w_o = 0 \quad \text{or} \quad F_{xz} - P_o \frac{\partial w_o}{\partial x} = 0 \quad (9-پ)$$

که در روابط بالا:

$$N_{xx} = \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \sigma_{xx} dz dy \quad (10-الف)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \sigma_{xx} z dz dy \quad (10-ب)$$

$$F_{xz} = \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \sigma_{xz} dz dy \quad (10-پ)$$

با استفاده از روابط ۵ و ۹ در روابط (۸) می‌توان روابط استاتیکی را به صورت زیر برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به دست آورد:

$$\delta u_o : E_o \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (11-الف)$$

$$\delta \psi : E_1 \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + E_\gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{E_o}{\gamma(1+\nu)} \left( \frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi \right) = 0 \quad (11-ب)$$

$$\delta w_o : \frac{E_o}{\gamma(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - P_o \frac{\partial w_o}{\partial x} = 0 \quad (11-پ)$$

که در روابط بالا:

$$\begin{Bmatrix} E_o \\ E_1 \\ E_\gamma \end{Bmatrix} = \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \int_{-h/\gamma}^{b/h/\gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \times E(z) dz \quad (12)$$

### ۳- حل روابط حاکم بر مسئله

#### ۳-۱- روش حل تحلیلی

برای حل روابط حاکم بر مسئله، ابتدا باید روابط را از حالت

$$\frac{\partial^r u_0}{\partial x^r}(x = x_i) = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(r)} u_0(x_j) \quad (22-الف)$$

$$\frac{\partial^r \psi}{\partial x^r}(x = x_i) = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(r)} \psi(x_j), \quad (22-ب)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x = x_i) = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(1)} \psi(x_j)$$

$$\frac{\partial^r w_0}{\partial x^r}(x = x_i) = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(r)} w_0(x_j), \quad (22-پ)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}(x = x_i) = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(1)} w_0(x_j)$$

با استفاده از روابط (۲۲) می‌توان روابط کمانش (۱۱) را به روابطی گسسته در تمام نقاط شبکه تبدیل کرد. در این صورت تعداد  $3 \times n$  رابطه گسسته در نقاط شبکه برحسب  $3 \times n$  مولفه جابه‌جایی  $u_0(x_i)$ ،  $\psi(x_i)$  و  $w_0(x_i)$  به‌دست می‌آیند. همچنین با استفاده از روابط (۱۰) در روابط شرایط مرزی (۹)، تعداد شش رابطه برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به‌دست می‌آید که این شش رابطه با شش رابطه کمانش استاتیکی در نقاط مرزی جایگزین می‌شود. از مجموع روابط استاتیکی در نقاط درونی شبکه و شش رابطه شرایط مرزی، به تعداد  $3 \times n$  رابطه همگن برحسب  $3 \times n$  مولفه جابه‌جایی  $u_0(x_i)$ ،  $\psi(x_i)$  و  $w_0(x_i)$  به‌دست می‌آیند که از حل نابدهی آن نیروی کمانش تیر استخراج می‌شود.

### ۳- نتایج عددی

به‌منظور ارائه نتایج مقایسه‌پذیر، از مقدار بی بعد شده زیر برای نیروی کمانش در نتایج عددی استفاده می‌شود:

$$\bar{P}_0 = P_0 / \bar{A}, \quad \bar{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \int E(z) dz dy \quad (23)$$

از آنجا که مسئله کمانش تیرهای همگن پوشیده شده با لایه FGP تاکنون در هیچ مرجعی بررسی نشده است لذا به‌منظور مقایسه نتایج و صحت‌سنجی نتایج، کمانش یک تیر FGM برای بررسی و مقایسه در نظر گرفته شده است. در جدول (۱) مقدار نیروی کمانش یک تیر FGM با تابع توزیع خواص توانی و سه

### ۳-۲- روش حل عددی GDQM

در روش حل عددی GDQM، مشتق مرتبه  $g$ ام یک تابع مفروض در نقطه  $x_i$  به‌صورت زیر برحسب مقادیر تابع در نقاط شبکه‌بندی بیان می‌شود [۲۸]:

$$\left. \frac{\partial^g f(x)}{\partial x^g} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^n L_{ij}^{(g)} f(x_j) \quad (18)$$

که در رابطه بالا  $L_{ij}^{(g)}$  ضریب وزن برای مشتق مرتبه  $g$ ام و  $n$  تعداد نقاط شبکه‌بندی است که این نقاط در مسئله مورد بررسی در راستای محور طولی تیر است. این ضرایب برای مشتق مرتبه اول با استفاده از روابط زیر بیان می‌شوند:

$$L_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{t=1, t \neq i}^n (x_i - x_t)}{(x_i - x_j) \prod_{t=1, t \neq j}^n (x_j - x_t)}, \quad i \neq j \quad (19-الف)$$

$$L_{ij}^{(1)} = - \sum_{t=1, t \neq j}^n L_{it}^{(1)}, \quad i = j \quad (19-ب)$$

برای مشتق‌های مرتبه بالاتر از یک، مقادیر این ضرایب به‌صورت زیر و با استفاده از روابط بازگشتی به‌دست می‌آیند:

$$L_{ij}^{(g)} = g \left( L_{ii}^{(g-1)} L_{ij}^{(1)} - \frac{L_{ij}^{(g-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i = j \quad (20-الف)$$

$$L_{ij}^{(g)} = - \sum_{t=1, t \neq j}^n L_{it}^{(g)}, \quad i = j \quad (20-ب)$$

توزیع نقاط شبکه در راستای محور طولی تیر می‌تواند به‌صورت یکنواخت و یا غیریکنواخت باشد. تاکنون تابع‌های توزیع مختلفی برای نقاط شبکه در روش GDQM ارائه شده است که در مقاله حاضر از تابع زیر که یک تابع توزیع پرترفدار در بین دانشمندان این حوزه است استفاده می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right) \times L \quad (21)$$

که در رابطه بالا  $L$  طول تیر است. مشتق‌های مولفه‌های جابه‌جایی در روابط کمانش (۱۱) با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) به‌صورت زیر به روابط گسسته تبدیل می‌شوند:

جدول ۱- مقایسه مقدار نیروی کمانش بی بعد شده  $P.L^2/(12h^3)$  برای یک تیر FGM با شرایط مرزی مختلف ( $L/h = 5$ )

شرایط مرزی	تئوری و روش حل	k=0	k=1	k=2	k=5	k=10
S-S	وو و همکاران [۲۹]	۴۹/۵۹۰۱	۲۵/۲۱۱۶	۱۹/۶۱۲۴	۱۶/۰۸۴۲	۱۴/۴۱۱۶
	نگوین و همکاران [۳۰]	۴۸/۸۴۰۶	۲۴/۶۸۹۴	۱۹/۱۵۷۷	۱۵/۷۳۵۵	۱۴/۱۴۴۸
	کھیا و توران [۳۱]	۴۸/۵۹۰۷	۲۴/۵۸۱۵	۱۹/۱۶۱۷	۱۵/۹۴۱۷	۱۴/۳۴۴۵
	روش تحلیلی حاضر	۴۸/۵۹۰۳۵	۲۴/۵۸۱۳۸	۱۹/۱۶۱۶۲	۱۵/۹۴۱۷۲	۱۴/۳۴۴۴۶
C-C	وو و همکاران [۲۹]	۱۶۰/۱۰۷۰	۸۳/۶۹۵۸	۶۴/۱۲۲۷	۴۹/۳۸۵۶	۴۳/۱۵۷۹
	نگوین و همکاران [۳۰]	۱۵۴/۵۶۱۰	۸۰/۵۹۴۰	۶۱/۷۶۶۶	۴۷/۷۱۷۴	۴۱/۷۸۸۵
	کھیا و توران [۳۱]	۱۵۱/۹۴۳۰	۷۹/۳۹۰۳	۶۱/۷۴۴۹	۴۹/۵۸۲۸	۴۳/۵۰۱۴
	روش تحلیلی حاضر	۱۵۱/۹۳۱۹	۷۹/۳۸۱۴۱۹	۶۱/۷۴۰۱۶	۴۹/۵۷۹۰۸	۴۳/۴۹۸۲۳
C-F	وو و همکاران [۲۹]	۱۳/۰۹۹۳	۶/۶۰۶۷	۵/۱۶۸۰	۴/۳۳۹۰	۳/۹۱۲۱
	نگوین و همکاران [۳۰]	۱۳/۰۷۷۱	۶/۵۴۲۷	۵/۰۹۷۷	۴/۲۷۷۲	۳/۸۸۲۰
	کھیا و توران [۳۱]	۱۳/۰۵۹۴	۶/۵۳۵۲	۵/۰۹۸۱	۴/۲۹۲۶	۳/۸۹۷۰
	روش تحلیلی حاضر	۱۳/۰۵۹۳۵	۶/۵۳۵۱۷	۵/۰۹۸۱۲	۴/۲۹۲۵۲	۳/۸۹۶۹۸

حاصل از این پژوهش و مرجع [۳۱]، روش‌های حل متفاوت استفاده شده در دو پژوهش است.

در جدول (۲) با استفاده از هر دو روش حل تحلیلی و عددی، مقدار نیروی کمانش به‌ازای نسبت‌های مختلف ضخامت ورق و ضخامت لایه FGP، و همچنین مقادیر مختلف پارامتر تخلخل مدل نوع یک، ارائه شده است. در همه مثال‌های عددی این مقاله از فوم فولادی با خواص  $\bar{E} = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.3$  استفاده شده است. شرایط مرزی بررسی شده در این جدول مفصل-مفصل (S-S) و مفصل-گیردار (S-C) هستند.

برای به‌دست آوردن نتایج عددی با استفاده از روش GDQM از ۳۱ نقطه شبکه استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود همگرایی و انطباق خوبی بین نتایج حاصل از دو روش حل عددی و تحلیلی وجود دارد که تایید کننده صحت و دقت هر دو روش حل است. نتایج مشابهی در جدول (۳) به‌ازای تابع تخلخل نوع دوم ارائه شده است که نتایج حاصل از دو روش حل مختلف در این جدول نیز از انطباق کامل برخوردارند. در جدول‌های (۴) و (۵) برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) و گیردار-آزاد (C-F)، مشابه آنچه که در جدول‌های (۲) و (۳)

شرط مرزی مختلف مفصل-مفصل (S-S)، گیردار-گیردار (C-C)، و گیردار-آزاد (C-F) ارائه شده و با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. مدول الاستیسته تیر FGM در راستای ضخامت به‌صورت زیر است:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m, \quad (24)$$

$$E_m = 70 \text{ GPa}, \quad E_c = 280 \text{ GPa}$$

مقدار ضریب پواسون نیز ثابت و برابر  $0.3$  است. نتایج ارائه شده توسط وو و همکاران [۲۹]، نگوین و همکاران [۳۰]، و کھیا و توران [۳۱] به‌ترتیب براساس تئوری برشی تیر مرتبه اول، تئوری برشی تیر مرتبه بالاتر، و یک تئوری سه‌بعدی هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود تقارب خوبی بین نتایج به‌دست آمده از این مقاله و نتایج ارائه شده توسط مراجع [۳۱]-[۲۹] وجود دارد. همگرایی در بین نتایج حاصل از مقاله حاضر و مرجع [۳۱] بسیار بیشتر از دو مورد دیگر است که علت آن در این است که پژوهش حاضر و پژوهش ارائه شده در مرجع [۳۱] هر دو براساس تئوری برشی مرتبه اول تیر انجام شده‌اند. البته قابل توجه است که حل ارائه شده در مرجع [۳۱] بر اساس روش اجزا محدود<sup>۱۳</sup> است و علت اختلاف کوچک بین نتایج



جدول ۲- مقدار نیروی کمانش بی بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به ازای تابع تخلخل نوع ۱ و شرایط مرزی S-S و S-C

S-C		S-S		$e_0$	$h_0/h$	L/h
روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی			
۰/۰۱۲۸۳	۰/۰۱۲۸۳	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۳	۰/۰	۱۰
۰/۰۱۱۱۷	۰/۰۱۱۱۷	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۶		
۰/۰۱۳۲۶	۰/۰۱۳۲۶	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۶		
۰/۰۱۳۱۷	۰/۰۱۳۱۷	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۱۱۷۰	۰/۰۱۱۷۰	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۶		
۰/۰۰۳۳۵۹	۰/۰۰۳۳۵۹	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۳	۰/۰	۲۰
۰/۰۰۲۹۴۳	۰/۰۰۲۹۴۳	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۶		
۰/۰۰۳۴۶۲	۰/۰۰۳۴۶۲	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۳۰۸۶	۰/۰۰۳۰۸۶	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۶		
۰/۰۰۳۴۲۷	۰/۰۰۳۴۲۸	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۳۰۳۷	۰/۰۰۳۰۳۷	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۶		

جدول ۳- مقدار نیروی کمانش بی بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به ازای تابع تخلخل نوع ۲ و شرایط مرزی S-S و S-C

S-C		S-S		$e_0$	$h_0/h$	L/h
روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی			
۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۱۱۸۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۳	۰/۰	۱۰
۰/۰۰۸۶۷۹	۰/۰۰۸۶۷۹	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۶		
۰/۰۱۳۷۱	۰/۰۱۳۷۱	۰/۰۰۶۹۲۷	۰/۰۰۶۹۲۷	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۱۲۸۷	۰/۰۱۲۸۷	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۶		
۰/۰۱۳۴۳	۰/۰۱۳۴۳	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۱۲۲۶	۰/۰۱۲۲۶	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۶		
۰/۰۰۳۰۷۷	۰/۰۰۳۰۷۷	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۳	۰/۰	۲۰
۰/۰۰۲۲۵۹	۰/۰۰۲۲۵۹	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۶		
۰/۰۰۳۵۸۵	۰/۰۰۳۵۸۵	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۳۳۸۰	۰/۰۰۳۳۷۹	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۶		
۰/۰۰۳۴۹۸	۰/۰۰۳۴۹۸	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۳۱۸۹	۰/۰۰۳۱۸۹	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۶		

جدول ۴- مقدار نیروی کماتش بی بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به ازای تابع تخلخل نوع ۱ و

شرایط مرزی C-F و C-C

C-F		C-C		e.	h <sub>o</sub> /h	L/h
روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی			
۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۰۱۶۵۶	۰/۰۲۳۹۸	۰/۰۲۳۹۸	۰/۳	۰/۰	۱۰
۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۰۱۴۵۳	۰/۰۲۰۷۴	۰/۰۲۰۷۴	۰/۶		
۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۰۱۷۰۶	۰/۰۲۴۸۲	۰/۰۲۴۸۲	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۰۱۵۲۲	۰/۰۲۲۰۵	۰/۰۲۲۰۵	۰/۶		
۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۰۱۶۸۸	۰/۰۲۴۷۳	۰/۰۲۴۷۳	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۰۱۴۹۵	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۲۲۰۲	۰/۶		
۰/۰۰۰۴۱۶	۰/۰۰۰۴۱۶	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۰۰۶۴۸۹	۰/۳	۰/۰	۲۰
۰/۰۰۰۳۶۵	۰/۰۰۰۳۶۴	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۰۰۵۶۷۵	۰/۶		
۰/۰۰۰۴۲۹	۰/۰۰۰۴۲۹	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۰۰۶۶۹۲	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۰۳۸۲	۰/۰۰۰۳۸۲	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۰۰۵۹۶۳	۰/۶		
۰/۰۰۰۴۲۴	۰/۰۰۰۴۲۴	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۰۰۶۶۳۰	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۰۳۷۵	۰/۰۰۰۳۷۵	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۰۰۵۸۸۰	۰/۶		

جدول ۵- مقدار نیروی کماتش بی بعد شده یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP، به ازای تابع تخلخل نوع ۲ و

شرایط مرزی C-F و C-C

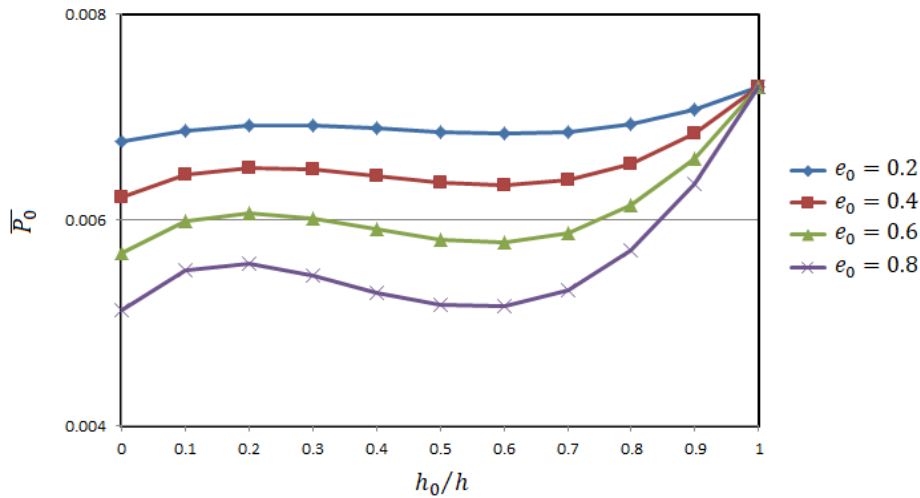
C-F		C-C		e.	h <sub>o</sub> /h	L/h
روش عددی	روش تحلیلی	روش عددی	روش تحلیلی			
۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۰۱۵۱۶	۰/۰۲۲۱۳	۰/۰۲۲۱۳	۰/۳	۰/۰	۱۰
۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۱۶۳۰	۰/۰۱۶۳۰	۰/۶		
۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۰۱۷۶۸	۰/۰۲۵۶۲	۰/۰۲۵۶۲	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۰۱۶۶۸	۰/۰۲۳۹۶	۰/۰۲۳۹۶	۰/۶		
۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۰۱۷۲۳	۰/۰۲۵۲۰	۰/۰۲۵۲۰	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۰۱۵۷۱	۰/۰۲۳۰۳	۰/۰۲۳۰۳	۰/۶		
۰/۰۰۰۳۸۱	۰/۰۰۰۳۸۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۰۰۵۹۵۰	۰/۳	۰/۰	۲۰
۰/۰۰۰۲۸۰	۰/۰۰۰۲۸۰	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۰۰۴۳۷۱	۰/۶		
۰/۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۶۹۲۶	۰/۰۰۶۹۲۶	۰/۳	۰/۳۵	
۰/۰۰۰۴۱۹	۰/۰۰۰۴۱۹	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۰۰۶۵۲۳	۰/۶		
۰/۰۰۰۴۳۳	۰/۰۰۰۴۳۳	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۰۰۶۷۶۶	۰/۳	۰/۷	
۰/۰۰۰۳۹۴	۰/۰۰۰۳۹۴	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۰۰۶۱۷۰	۰/۶		

آمده، وجود دارد.

در شکل (۲) نمودار مقدار نیروی کماتش بی بعد شده تیر با

ارائه شد، نیروی کماتش محاسبه و ارائه شده است. در این

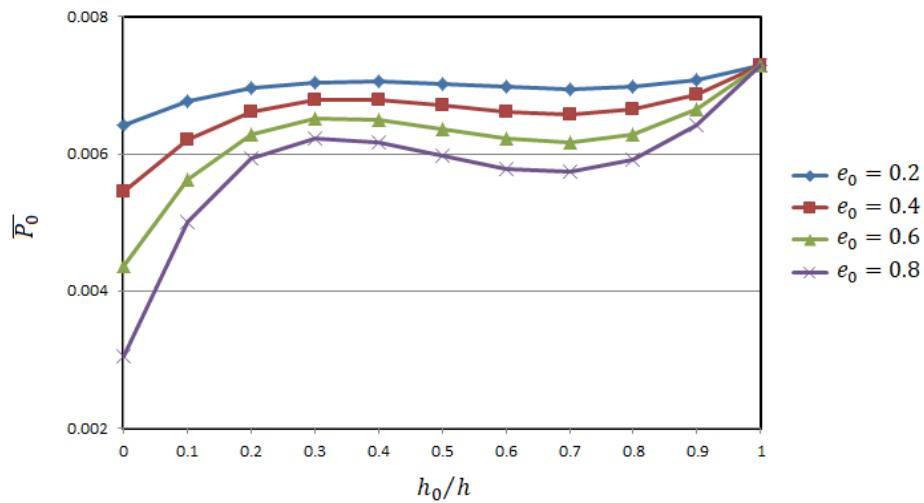
جدول ها نیز انطباق کامل بین نتایج عددی و تحلیلی به دست



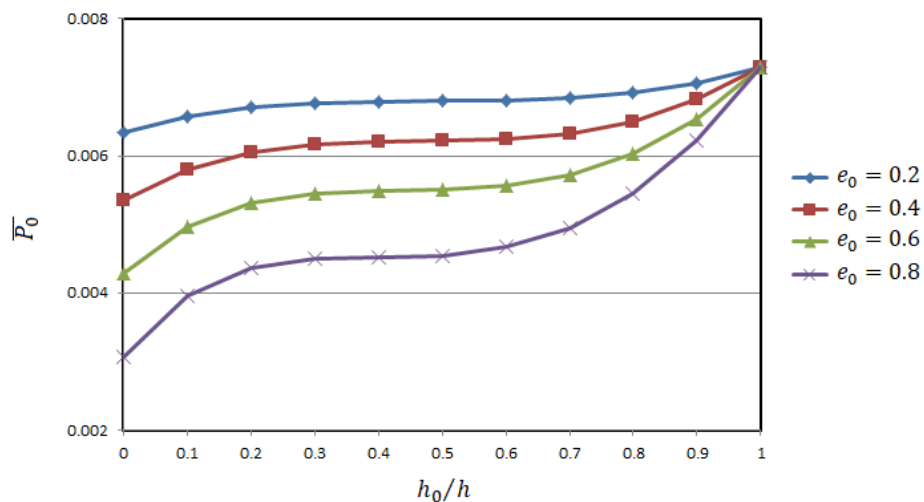
شکل ۲- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۱ و شرایط مرزی S-S

می یابد. همان طور که دیده می شود بیشترین میزان تغییرات و شیب نمودارها در انتهای نمودارها و مربوط به زمانی است که بیشتر ضخامت ورق را لایه همگن تشکیل می دهد و به بیان دیگر افزایش یک لایه کوچک FGP روی تیر همگن می تواند تغییرات زیادی را در سختی خمشی تیر و نیروی کمانش ایجاد کند. همچنین افزایش پارامتر تخلخل موجب کاهش نیروی کمانش و در نتیجه کاهش مقدار سختی خمشی تیر می شود. به بیان دیگر به منظور طراحی تیرهای پوشیده شده با لایه FGP براساس تخلخل نوع یک، که از استحکام لازم نیز برخوردار باشند، باید تا حد امکان پارامتر تخلخل کوچک باشد؛ البته باید طوری باشد که وظیفه اصلی آن که جذب انرژی است را مختل نکند؛ و همچنین ضخامت لایه FGP در محدوده منطقه بیشینه نمودارهای نشان داده شده باشد. نمودارهای مشابهی در شکل های (۳) و (۴) برای نوع های دوم و سوم تابع توزیع تخلخل ارائه شده اند. روند کلی نمودارها برای تابع توزیع نامتقارن نوع دوم در شکل (۳) و تابع توزیع یکنواخت نوع سوم در شکل (۴) مشابه نمودارهای شکل (۲) است با این تفاوت که در شکل (۳) تغییرات و شیب نمودارها در ابتدا بسیار زیاد است و در شکل (۴) که مربوط به تخلخل یکنواخت لایه

شرایط مرزی دو طرف مفصل در برابر نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر به ازای چهار مقدار مختلف ۰/۲، ۰/۴، ۰/۶، و ۰/۸ پارامتر تخلخل نوع یک رسم شده است. مشاهده می شود که با افزایش ضخامت لایه همگن تیر از صفر تا صد درصد، در ابتدا مقدار نیروی کمانش افزایش می یابد و سپس کاهش و در انتها نیز دوباره افزایش می یابد. به عبارت دیگر نمودارهای فوق دارای یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه نسبی هستند. لایه FGP یک لایه متخلخل است و نسبت به لایه همگن چگالی حجمی کمتری دارد و از این رو باید هرچه میزان ضخامت لایه FGP افزایش پیدا کند مقدار نیروی کمانش نیز افزایش پیدا کند. اما همان طور که دیده می شود محدوده ای وجود دارد که با افزایش ضخامت لایه FGP مقدار نیروی کمانش نیز افزایش پیدا می کند (ناحیه وسط نمودارها بین نقاط بیشینه و کمینه) که این مهم باید حتما در طراحی چنین سازه هایی مورد توجه قرار گیرد. با افزایش پارامتر تخلخل، شیب تغییرات نمودارها نیز افزایش می یابد به طوری که به ازای مقدار ۰/۸ پارامتر تخلخل بیشترین میزان شیب نمودارها مشاهده می شود که به بیان دیگر با افزایش مقدار پارامتر تخلخل تأثیر تغییر ضخامت لایه ها روی مقدار نیروی کمانش افزایش



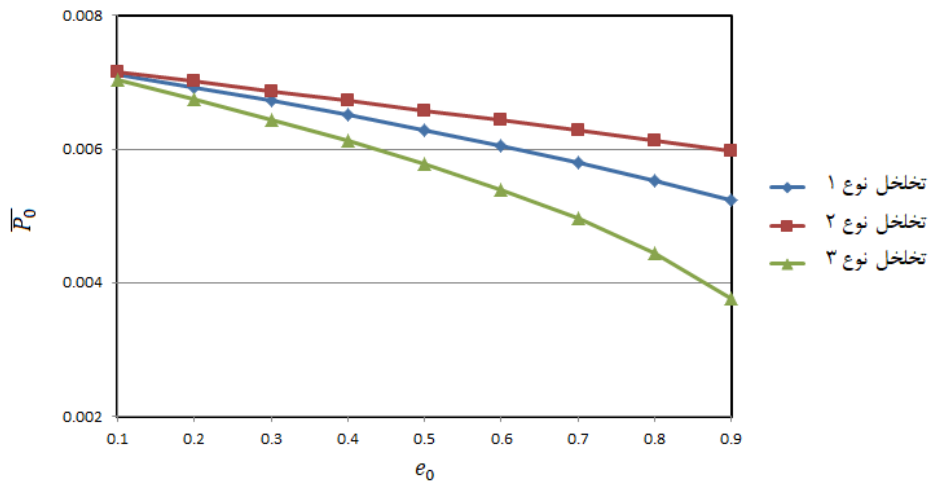
شکل ۳- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۲ و شرایط مرزی S-S



شکل ۴- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با تابع تخلخل از نوع ۳ و شرایط مرزی S-S

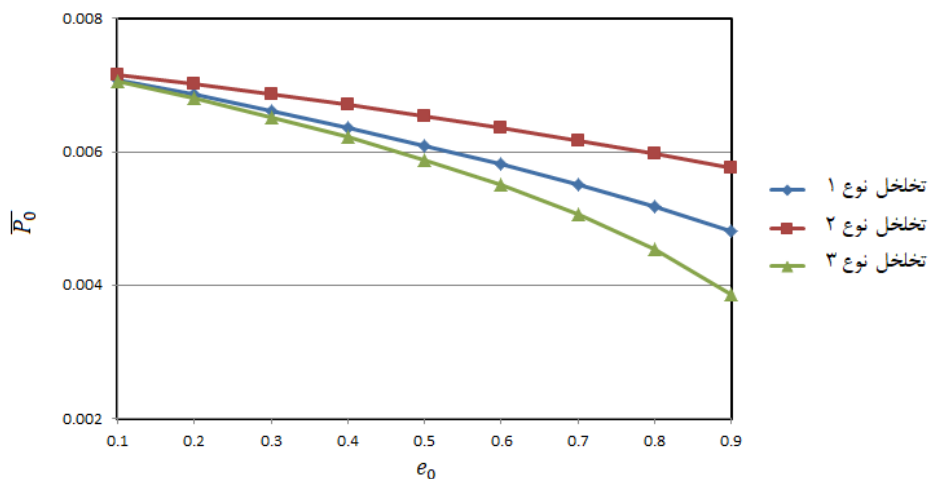
امکان نیز کوچک باشد. البته ضخامت لایه FGP باید در حدی باشد که وظیفه اصلی آن که جذب انرژی است را مختل نکند. در شکل (۵) نمودار تغییرات نیروی کمانش یک تیر با شرایط مرزی مفصل-مفصل نسبت به پارامتر تخلخل  $e_0$  برای نسبت  $h_0/h = 0.25$  و سه نوع تابع توزیع تخلخل مختلف رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش تخلخل

FGP است، نمودارها مقدار کمینه و بیشینه نسبی ندارند و در یک محدوده ای شیب نمودارها به ازای این نوع تخلخل بسیار کم و در حد صفر است. به بیان دیگر به منظور طراحی تیرهای پوشیده شده با لایه FGP براساس تخلخل نوع یک، که از استحکام لازم نیز برخوردار باشند، باید تا حد امکان پارامتر تخلخل کوچک باشد و همچنین ضخامت لایه FGP تا حد



شکل ۵- نمودار تغییرات نیروی کماتش بی بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل e<sub>0</sub>.

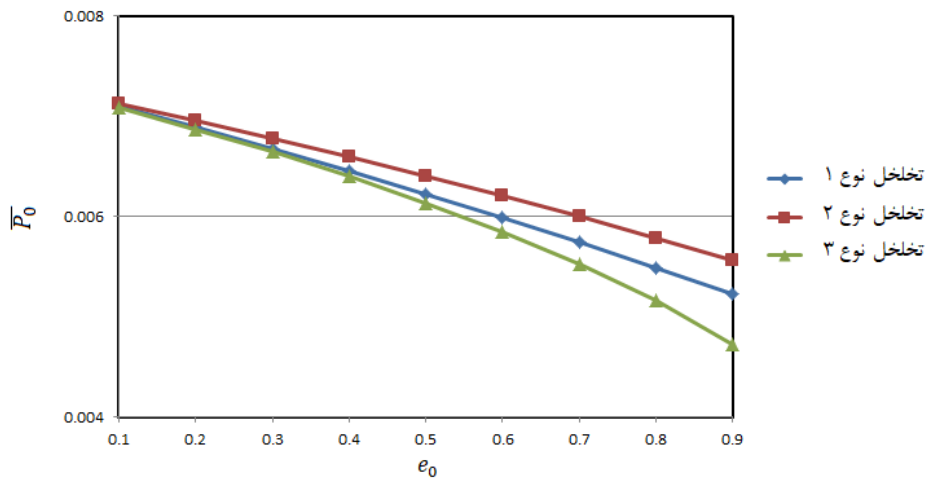
به ازای h<sub>c</sub>/h = 0.25 و شرایط مرزی S-S



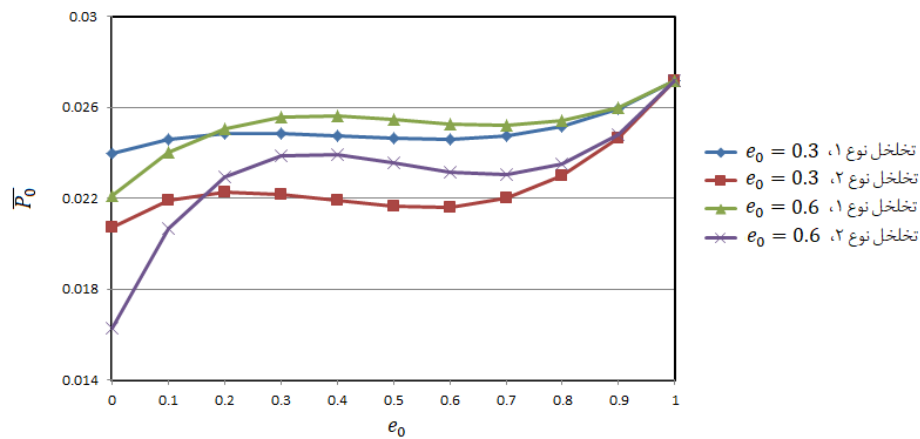
شکل ۶- نمودار تغییرات نیروی کماتش بی بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل e<sub>0</sub> به ازای h<sub>c</sub>/h = 0.5 و شرایط مرزی S-S

همان طور که قابل مشاهده است شیب نمودارهای فوق به ازای مقادیر بالای پارامتر تخلخل افزایش می یابد. با افزایش مقدار پارامتر تخلخل از صفر تا 0.9، نیروی کماتش حدود 50 درصد کاهش می یابد که می تواند منجر به ناپایداری کماتشی سازه شود. نمودارهای مشابهی در شکل های (۶) و (۷) برای نسبت های h<sub>c</sub>/h = 0.5 و h<sub>c</sub>/h = 0.75 رسم شده اند. تغییرات نمودارها در این دو شکل نیز مشابه شکل (۵) هستند و با افزایش تخلخل مقدار نیروی کماتش می یابد.

مقدار نیروی کماتش کاهش می یابد و علت آن هم کاهش جرم ماده در واحد حجم و به عبارت دیگر کاهش سختی تیر است. بیشترین تغییرات نیروی کماتش نسبت به تخلخل مربوط به تابع تخلخل یکنواخت نوع سوم و کمترین آن مربوط به تابع تخلخل غیریکنواخت نامتقارن نوع یک است. از این رو می توان نتیجه گرفت زمانی که استحکام کماتشی تیر از اهمیت بالایی برخوردار است تخلخل نامتقارن نوع یک می تواند گزینه مناسبی برای طراحی تیر در مقایسه با دو نوع تخلخل دیگر باشد.



شکل ۷- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده نسبت به پارامتر تخلخل  $e_0$  به‌ازای  $h_0/h = 0/75$  و شرایط مرزی S-S



شکل ۸- نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با شرایط مرزی C-C

نقاط کمینه و بیشینه برای تابع توزیع تخلخل نوع دوم به‌ازای مقادیر بیشتری از نسبت  $h_0/h$  در مقایسه با نوع یک رخ می‌دهد. به‌عبارت دیگر نقاط کمینه و بیشینه برای تابع توزیع تخلخل نوع دوم در مقایسه با تابع توزیع تخلخل نوع یک زمانی رخ می‌دهد که درصد بیشتری از سازه را ماده همگن تشکیل داده باشد. با افزایش ضخامت لایه FGP در تابع تخلخل نوع دوم، تغییرات نیروی کمانش در مقایسه با تابع تخلخل نوع یک بیشتر است. همچنین می‌توان از نمودارهای فوق نتیجه گرفت که تأثیر مقدار پارامتر تخلخل روی مقدار نیروی کمانش

نمودار تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد شده تیر در برابر تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار در شکل (۸) رسم شده است. در این شکل نمودارها برای دو مقدار پارامتر تخلخل  $0/3$  و  $0/6$  و دو نوع تابع توزیع تخلخل نوع ۱ و ۲ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که تغییرات مقدار نیروی کمانش برای تابع توزیع تخلخل نامتقارن نوع دوم در مقایسه با تابع توزیع متقارن نوع یک بیشتر است. نمودارها دارای یک نقطه بیشینه نسبی و یک نقطه کمینه نسبی هستند که نقطه بیشینه قبل از نقطه کمینه قرار دارد. همچنین این

آوردن روابط دیفرانسیلی حاکم بر مسئله از اصل کار مجازی استفاده شد و سپس با استفاده از دو روش حل تحلیلی دقیق و حل عددی، روابط حل شدند. در روش حل تحلیلی، ابتدا روابط دیفرانسیلی جفت شده به یک سری رابطه دیفرانسیلی جفت نشده و مستقل از هم تبدیل شدند و سپس حل شدند که در پاسخ به دست آمده تعدادی پارامتر و ثابت مجهول وجود داشت. با استفاده از روابط شرایط مرزی در دو انتهای تیر، یک دستگاه رابطه همگن استخراج شد که از رویه استخراج حل ناصفر، مقدار نیروی کماتس محوری تیر به دست آمد. همچنین در بخش دیگری از مقاله از روش GDQM برای حل عددی روابط استفاده شد. در بخش نتایج عددی مشاهده شد که با افزایش مقدار پارامتر تخلخل، مقدار نیروی کماتس کاهش می‌یابد و وجود تخلخل یکنواخت نسبت به دو نوع تابع توزیع تخلخل دیگر، تأثیر بیشتری روی مقدار نیروی کماتس دارد. همچنین مشاهده شد که با افزایش ضخامت لایه FGP از صفر تا صد درصد ضخامت تیر، مقدار نیروی کماتس تیر در ابتدا کاهش، سپس افزایش و دوباره کاهش می‌یابد و نقاط کمینه و بیشینه در نمودارها می‌توانند به‌عنوان مبنایی برای انتخاب ضخامت لایه FGP باشند که براساس این نقاط تیر دارای حداقل و حداکثر استحکام کماتس است.

برای تابع تخلخل نوع دوم بیشتر از نوع یک است. بنابراین با توجه به مطالب بالا زمانی که استحکام کماتس تیر از اهمیت بالایی برخوردار است انتخاب تابع تخلخل غیریکنواخت نوع یک گزینه مناسبتری است. نمودارهای مشابهی در شکل‌های (۹) و (۱۰) برای شرایط مرزی مفصل-گیردار و گیردار-آزاد رسم شده‌اند. روند نمودارها در این شکل‌ها نیز مشابه شکل (۸) است. از مقایسه نمودارهای شکل‌های (۸-۱۰) مشخص می‌شود که وجود شرط مرزی گیردار سبب افزایش سختی تیر و نیروی کماتس می‌شود در حالی که وجود شرایط مرزی آزاد سبب کاهش سختی تیر و در نتیجه نیروی کماتس می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار نیروی کماتس به‌ازای شرایط مرزی گیردار-گیردار رخ می‌دهد و کمترین مقدار نیروی کماتس به‌ازای شرایط مرزی گیردار-آزاد رخ می‌دهد که در این حالت نسبت به شرایط مرزی دیگر میزان نیروی کماتس بسیار کمتر است که نشان می‌دهد وجود شرط مرزی آزاد به مقدار قابل توجهی می‌تواند مقدار استحکام کماتس سازه را کاهش دهد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، کماتس استاتیکی تیرهای همگن پوشیده شده با لایه تشکیل شده از مواد FGP، با شرایط مرزی مختلف براساس تئوری تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفت. برای به‌دست

#### واژه‌نامه

- |  |   |                                 |
|--|---|---------------------------------|
| 1. functionally graded material        | 5. Galerkin method                            | 9. graphene platelets           |
| 2. porous material                     | 6. Donnell's theory                           | 10. spectral-Chebyshev approach |
| 3. functionally graded porous material | 7. generalized differential quadrature method | 11. Runge-Kutta method          |
| 4. nano composite porous               | 8. Monte Carlo simulation                     | 12. isogeometric analysis       |
|  |   | 13. finite element method       |

#### مراجع

- Udupa, G., Rao, SS., and Gangadharan, K., "Functionally Graded Composite Materials: an Overview", *Procedia Materials Science*, Vol. 5, pp. 1291-1299, 2014.
- Rafiee, M., Yang, J., and Kitipornchai, S. "Large Amplitude Vibration of Carbon Nanotube Reinforced Functionally Graded Composite Beams with Piezoelectric Layers", *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 716-725, 2013.
- Smith, B., Sznyszewski, S., Hajjar, J., Schafer, B., Arwade, S., "Steel Foam for Structures: a Review of Applications, Manufacturing and Material Properties", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 71, pp. 1-10, 2012.
- Ashby, MF., Evans, T., Fleck, NA., Hutchinson, J., Wadley, H. and Gibson, L., *Metal Foams :a Design*

- Guide, Elsevier. 2000.
5. Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J-D., Ienny, P., Croset, M., and Bernet, H., "Mechanical Properties and Non-Homogeneous Deformation of Open-Cell Nickel Foams :Application of the Mechanics of Cellular Solids and of Porous Materials", *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 289, No. 1, pp. 276-88, 2000.
  6. Banhart, J., "Manufacture, Characterization and Application of Cellular Metals and Metal Foams", *Progress in Materials Science*, Vol. 46, No. 6, pp. 559-632, 2001.
  7. Lopatnikov, SL., Gama, BA., Haque, MJ., Krauthauser, C., Gillespie, JW., Guden, M., and Hall, IW., "Dynamics of Metal Foam Deformation During Taylor Cylinder-Hopkinson Bar Impact Experiment", *Composite Structures*, Vol. 61, No. 1, pp. 61-71, 2003.
  8. Pinnoji, PK., Mahajan, P., Bourdet, N., Deck, C., and Willinger, R., "Impact Dynamics of Metal Foam Shells for Motorcycle Helmets: Experiments and Numerical Modeling", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 37, No. 3, pp. 274-284, 2010.
  9. Lefebvre, L-P., Banhart, J., and Dunand, D., "Porous Metals And Metallic Foams: Current Status and Recent Developments", *Advanced Engineering Materials*, Vol. 10, No. 9, pp. 775-787, 2008.
  10. Ahmad, Z., and Thambiratnam, DP., "Dynamic Computer Simulation and Energy Absorption of Foam-Filled Conical Tubes under Axial Impact Loading", *Composite Structures*, Vol. 87, No. 3, pp. 186-97, 2009.
  11. Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, AR., and Eslami, MR., "Buckling Analysis of Functionally Graded Circular Plates Made of Saturated Porous Materials Based on higher Order Shear Deformation Theory", *Thin-Walled Structures*, Vol. 992, pp. 83-90, 2016.
  12. Kitipornchai, S., Chen, D., and Yang, J., "Free Vibration and Elastic Buckling of Functionally Graded Porous Beams Reinforced by Graphene Platelets", *Materials & Design*, Vol. 116, pp. 656-665, 2017.
  13. Yang, J., Chen, D., and Kitipornchai, S., "Buckling and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Plates Based on Chebyshev-Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 193, pp. 281-294, 2018.
  14. Dong, YH., He, LW., Wang, L., Li, Y H., and Yang, J. "Buckling of Spinning Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Cylindrical Shells: An Analytical Study", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 82-83, pp. 466-478, 2018.
  15. Zhenhuan, Zh., Yiwen, N., Zhenzhen, T., Shengbo, Zh., Jiabin, S., and Xinsheng, X., "Accurate Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shells" *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 151, pp. 537-50, 2019.
  16. Liu, Y., Su, Sh., Huang, H., and Liang, Y. "Thermal-Mechanical Coupling Buckling Analysis of Porous Functionally Graded Sandwich Beams Based on Physical Neutral Plane", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 168, pp. 236-242, 2019.
  17. Yas, MH., and Rahimi, S. "Thermal Buckling Analysis of Porous Functionally Graded Nanocomposite Beams Reinforced by Graphene Platelets Using Generalized Differential Quadrature Method", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 107, p. 106261, 2020.
  18. Trinh, MCh., Mukhopadhyay, T., and Kim, S-E., "A Semi-Analytical Stochastic Buckling Quantification of Porous Functionally Graded Plates", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 105, p. 105928, 2020.
  19. Rafiei Anamagh, M., and Bediz, B., "Free Vibration and Buckling Behavior of Functionally Graded Porous Plates Reinforced By Graphene Platelets Using Spectral Chebyshev Approach", *Composite Structures*, Vol. 253, p. 112765, 2020.
  20. Hung, DX., Tu, TM., Long, NV., and Anh, PH., "Nonlinear Buckling and Postbuckling of FG Porous Variable Thickness Toroidal Shell Segments Surrounded by Elastic Foundation Subjected to Compressive Loads", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 107, p. 106253, 2020.
  21. Foroutan, K., Shaterzadeh, A., and Ahmadi, H., "Nonlinear Static and Dynamic Hygrothermal Buckling Analysis Of Imperfect Functionally Graded Porous Cylindrical Shells", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 77, pp. 539-53, 2020.
  22. Nguyen, QH., Nguyen, LB., Nguyen, HB., and Nguyen-Xuan, H., "A Three-Variable High Order Shear Deformation Theory for Isogeometric Free Vibration, Buckling and Instability Analysis of FG Porous Plates Reinforced by Graphene Platelets", *Composite Structures*, Vol. 245, p. 112321, 2020.
  23. Li, Zh. "Exploration of the Encased Nanocomposites Functionally Graded Porous Arches: Nonlinear Analysis and Stability Behavior", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 82, pp. 1-16, 2020.
  24. Li, Zh., Chen, Y., Zheng, J., and Sun, Q., "Thermal-Elastic Buckling of the Arch-Shaped Structures with FGP Aluminum Reinforced by Composite Graphene Platelets", *Thin-Walled Structures*, Vol. 157, p. 107142, 2020.
  25. Zhu, B., Chen, X-Ch., Guo, Y., and Li, Y-H., "Static and Dynamic Characteristics of the Post-Buckling of Fluid-Conveying Porous Functionally Graded Pipes with Geometric Imperfections", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 189, p. 105947, 2021.
  26. Cuong-Le, Th., Nguyen, KhD., Nguyen-Trong, N.,



- Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., and Abdel-Wahab, M., "A Three-Dimensional Solution for Free Vibration and Buckling of Annular Plate, Conical, Cylinder and Cylindrical Shell of FG Porous-Cellular Materials Using IGA", *Composite Structures*, Vol. 259, pp. 113216, 2021.
27. Talebizadehsardari, P., Salehipour, H., Shahgholian-Ghahfarokhi, D., Shahsavar, A., and Karimi, M., "Free Vibration Analysis of the Macro-Micro-Nano Plates and Shells Made of a Material with Functionally Graded Porosity: A Closed-Form Solution", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, under publication, 2020.
28. Shu, C., "Differential Quadrature and Its Application in Engineering", *Berlin: Springer*. 2000.
29. Vo, TP., Thai, HT., Nguyen, TK., Inam, F., and Lee, J., "A Quasi-3D Theory for Vibration and Buckling of Functionally Graded Sandwich Beams", *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 1-12, 2015.
30. Nguyen, T-K., Truong-Phong Nguyen T., Vo, TP., and Thai, H-T., "Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams by a New Higher-Order Shear Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol. 76, pp. 273-85, 2015.
31. Kahya, V., and Turan, M., "Finite Element Model for Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams Based on the First-Order Shear Deformation Theory", *Composites Part B*, Vol. 109, pp. 118-115, 2017.