

ارائه الگوریتم فراابتکاری برای حل مسائل بهینه‌سازی عددی با الهام از مفهوم تاوه در فیزیک شاره

نیما مشهدی محمدرضا و حسام عمرانیپور*

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۲/۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۶/۳۰)

چکیده - یکی از مسائل مهم در مهندسی، یافتن نقاط بهینه سراسری توابع مورد استفاده است. یافتن چنین نقطه‌ای در برخی از توابع به علت‌هایی نظیر تعداد ابعاد بالا یا عدم توانایی مشتق‌گیری از تابع، به راحتی امکان پذیر نیست. همچنین در مدل‌سازی مهندسی روابط بسیاری از توابع در اختیار نیست اما به صورت جعبه سیاه می‌توان به آنها ورودی داد و از آنها خروجی گرفت. از این رو با دلایل مطرح شده، الگوریتم‌های فراابتکاری ارائه می‌شوند. در این مقاله الگوریتمی فراابتکاری برگرفته از رفتار تاوه‌ها در فیزیک شاره ارائه شده است. الگوریتم از دیدگاه فنی از تاوه‌هایی ساخته می‌شود. هر تاوه شامل چند ذره است. ذرات با استفاده از ماتریس دوران ارائه شده حرکت می‌کنند. این حرکت موجب جستجوی محلی می‌شود. همچنین هر تاوه با انتخاب یکی از تاوه‌های دیگر با الگوریتم انتخاب، سعی در فرار از بهینه محلی و رسیدن به بهینه سراسری دارد. الگوریتم با عملگرهای خود به اکتشاف و استخراج در تابع مورد نظر می‌پردازد. نوآوری دیگر این مقاله، ارائه دو معیار ارزیابی جدید برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی است. این دو معیار رفتار و همگرایی الگوریتم‌ها را در طی مسیر رسیدن به نقطه بهینه سراسری و یا افتادن در بهینه محلی، نشان می‌دهند. الگوریتم پیشنهادی پیاده‌سازی شده و با الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی مرز دانش مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته است. مشاهده شد که روش پیشنهادی می‌تواند روی اکثر توابع معیار، از بیست و چهار تابع معیار در ابعاد مختلف، به نتایج بهتری نسبت به سایر روش‌ها دست یابد. (تمام کدها در صفحه <http://web.nit.ac.ir/h.omranpour/> در دسترس است).

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی عددی، الگوریتم‌های فراابتکاری، فضای جستجو، معیار ارزیابی، الگوریتم بهینه‌سازی تاوه.

A Meta-heuristic Algorithm for Global Numerical Optimization Problems inspired by Vortex in fluid physics

N. Mashhadi Mohammad Reza and H. Omranpour*

Department of Electrical and Computer Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

Abstract: One of the most important issues in engineering is to find the optimal global points of the functions used. It is not

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: h.omranpour@nit.ac.ir

easy to find such a point in some functions due to the reasons such as large number of dimensions or inability to derive them from the function. Also in engineering modeling, we do not have the relationships of many functions, but we can input and output them as a black box. Therefore, the meta-heuristic algorithms are presented.

In this paper, a meta-heuristic algorithm based on the behavior of vortices in fluid physics is presented. Technically, the algorithm is made up of vortices. Each vortex contains some particles. The particles move by the presented rotation matrix. This movement causes the local search. Also by selecting another vortex through the selection algorithm, each vortex attempts to escape the local optima and reach the global optima. The algorithm will explore and exploit the given function using its operators. Another innovation of this paper is the introduction of two new evaluation criteria for optimization algorithms. These two criteria show the behavior and convergence of algorithms along the way to reach the global optimal point or fall into the local optima. The proposed algorithm has been implemented, evaluated and compared with the numerical optimization state of the art algorithms. It was observed that the proposed method was able to achieve better results than most of the other methods in the major of twenty-four standard functions in different dimensions. (All codes available at <http://web.nit.ac.ir/h.omranpour/>).

Keywords: Numerical Optimization, Meta-Heuristic Algorithms, Search Space, Evaluation Criteria, Vortex Optimization Algorithm (VOA).

فهرست علائم

R_i	شعاع تاوه که کران آن درصدی از بازه‌ی آن بعد است	P_{jv_i}	موقعیت ذره j ام از تاوه V_i ام
$V_{i, it}$	سرعت تاوه	a_1	ضریب
M_R	ماتریس دوران	VHC	ابرمکعب پراکندگی جستجو
Ω	ضریب $a1$ یک ضریب که عددی رندوم در بازه $[0, 1]$ است		

۱- مقدمه

طی چند دهه اخیر، روش‌های متنوعی برای حل مسائل بهینه‌سازی ارائه شده است. دو نمونه از معروف‌ترین الگوریتم‌ها که تاکنون بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند، الگوریتم ژنتیک^۱ در مسائل گسسته و الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۲ در مسائل پیوسته هستند. الگوریتم ژنتیک برگرفته از نظریه فرگشت داروین است و در تاکنون در مسائل بسیاری از مورد استفاده قرار گرفته است و نقطه ضعف آن تنظیم پارامترهای آن است. تاکنون محققین بسیاری سعی در بهبود این الگوریتم داشته‌اند، اما همچنان نسخه اولیه این الگوریتم بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱ و ۲]. الگوریتم ازدحام ذرات از اولین الگوریتم‌های بهینه‌سازی در توابع پیوسته به‌شمار می‌رود که دقت خوبی در بسیاری از توابع دارد [۳]. اما یکی از اصلی‌ترین مشکلات این الگوریتم، گیر افتادن در بهینه‌های محلی است [۴]. این الگوریتم‌ها در دسته الگوریتم‌های هوش تجمعی^۳ قرار می‌گیرند. بعضی دیگر از روش‌های بهینه‌سازی مانند روش

بهینه‌سازی جستجوی ممنوعه^۴ و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید^۵، نیز وجود دارند که مبتنی بر جمعیت نیستند [۵]. بعضی از این روش‌ها بر اساس طبیعت و بعضی مانند الگوریتم بهینه‌سازی سینوس کسینوس، بر اساس رفتار انسان‌ها و همچنین روابط ریاضی ارائه شده‌اند [۶]. در حالت کلی تمامی این الگوریتم‌ها، به‌نام الگوریتم‌های فراابتکاری^۶ نام‌گذاری می‌شوند. این الگوریتم‌ها با جستجو در فضای مورد بررسی به‌دنبال یافتن نقطه بهینه سراسری و یا حداقل یافتن نقطه‌ای در نزدیکی نقطه بهینه‌ی سراسری هستند [۷]. طبق نظریه «نه به غذای مجانی»^۷، هیچ الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی وجود ندارد که برای تمامی توابع بتواند نقطه بهینه را به‌درستی تشخیص دهد. از این رو تمامی محققین این حوزه به‌دنبال ارائه الگوریتم‌هایی هستند که دقت بیشتری در اکثر توابع و یا در توابعی خاص داشته باشند [۸].

در خصوص ضرورت این روش‌ها و کاربرد آنها می‌توان به این موارد اشاره کرد: عدم مشتق‌پذیری توابع، تعداد ابعاد بالای

به دنبال یافتن مسیرهای بهینه می‌گردد. این رفتار مورچه‌ها بر اساس استفاده از فرومون‌های بجا مانده از حرکت مورچه‌ها و رفتار گاه‌تصادفی آنها به دست می‌آید. مورچه‌های مصنوعی فرآیندهای راه‌حل هستند که پاسخ‌های کاندید را برای مساله مورد نظر با استفاده از اطلاعات فرومون که براساس تجربه جستجوی مورچه‌ها و احتمالاً اطلاعات اکتشافی موجود تطبیق داده می‌شود، می‌سازند [۱۴].

الگوریتم شکار جمعی (HS)، یک الگوریتم بهینه‌سازی جدید الهام‌گرفته از شکار گروهی از حیوانات از قبیل شیرها، گرگ‌ها و دلفین‌ها است. اگرچه این شکارچیان در شیوه شکار تفاوت دارند اما همه آن‌ها به دنبال شکار یک گروه هستند. شکارچیان طعمه را محاصره کرده و به تدریج حلقه محاصره را می‌بندند تا اینکه طعمه را گیر بیندازند. علاوه بر این، هر عضو گروه موضع خود را براساس موقعیت خود و موقعیت سایر اعضا اصلاح می‌کند. اگر طعمه از حلقه فرار کند، شکارچیان گروه را دوباره سازماندهی می‌کنند تا دوباره طعمه را محاصره کنند [۲۳].

در الگوریتم میگو (KH) یک الگوریتم جدید الهام‌گرفته از الگوهای زیستی برای حل مسایل بهینه‌سازی پیشنهاد شده است. این الگوریتم براساس شبیه‌سازی رفتار توده‌وار افراد است. حداقل فاصله هر فرد از غذا و از بیش‌ترین تراکم گله به‌عنوان تابع هدف برای حرکت در نظر گرفته می‌شود. موقعیت مکانی وابسته به زمان توسط سه عامل اصلی فرموله شده است: الف) حرکت ناشی از حضور دیگران (ب) فعالیت جستجو و ج) انتشار تصادفی. برای مدلسازی دقیق‌تر رفتار غیرخطی، دو عملگر ژنتیکی تطبیقی به الگوریتم اضافه می‌شوند [۲۵].

از دیدگاه کاربری در روش جستجوی موریانه (TA) یک الگوریتم الهام‌گرفته از زیست‌شناسی موریانه ارائه شده است. موریانه به‌طور مستقیم به مساله مسیریابی در حوزه‌ی توپولوژی شبکه پویا می‌پردازد. در الگوریتم موریانه، اطلاعات وضعیت شبکه در شبکه از طریق عبور بسته‌ها تعبیه شده است. تصمیمات مسیریابی احتمالی مبتنی بر این اطلاعات هستند

تابع و تعداد بسیار زیاد بهینه محلی، نداشتن رابطه مستقیم تابع و داشتن یک مدل جعبه سیاه^۸ از آن. از جمله کاربردهای مهم این روش‌ها، حل مسائل بهینه‌سازی در مدل‌های مهندسی [۹]، یافتن پارامترهای روش‌های یادگیری ماشین جهت حل مسائل مهم دسته‌بندی، خوشه‌بندی و رگرسیون هستند [۱۰]. از این‌رو با دلایل مطرح شده، الگوریتم‌های فراابتکاری ارائه می‌شوند.

نقاط مشترک این الگوریتم‌ها در سه مرحله پخش تصادفی عامل‌های جستجو، جابه‌جایی ذرات و تبادل اطلاعات و همچنین بررسی میزان بهینگی عامل‌ها براساس تابع ارزیابی است. تمامی الگوریتم‌های فراابتکاری این مراحل را در گام‌های خود دارند. این الگوریتم‌ها غالباً الهام گرفته از طبیعت و یا فیزیک هستند و می‌توان متدهای الهام‌گیری آنها را به چهار دسته‌ی کلی (۱) براساس تکامل، (۲) بر اساس رفتار حیوانات، (۳) براساس فیزیک و ریاضیات (۴) براساس رفتارهای انسانی، دسته‌بندی کرد. از جمله الگوریتم‌های فراابتکاری بهینه‌سازی براساس تکامل می‌توان به الگوریتم‌های ذیل اشاره کرد: الگوریتم ژنتیک [۱۱]، استراتژی تکاملی [۱۲]، برنامه‌نویسی ژنتیک [۱۳]. چون این الگوریتم‌ها الگوریتم‌های پایه و متداول هستند، به ذکر نام و مرجع آنها بسنده می‌کنیم. انواع گوناگونی از الگوریتم‌های مبتنی بر رفتار حیوانات وجود دارند که عبارتند از: کلونی مورچگان ACO [۱۴]، کلونی زنبور عسل BCPA و WSA و ABC [۱۵-۱۷]، جستجوی فاخته CS [۱۸]، جستجوی دلفین DPO و DE [۱۹ و ۲۰]، الگوریتم خفاش BA [۲۱]، الگوریتم کرم شب‌تاب FA [۲۲]، الگوریتم شکار جمعی HS [۲۳]، الگوریتم تزویج پرندگان BMO [۲۴]، الگوریتم میگو KH [۲۵]، الگوریتم کرم میوه FOA [۲۶]، جستجو بر اساس رفتار میمون‌ها MS [۲۷]، جستجو بر اساس رفتار موریانه TA [۲۸]، بهینه‌سازی گرگ‌های خاکستری GWO [۲۹]، بهینه‌سازی موجود دریایی اسلپ SSA [۳۰]، بهینه‌سازی نهنگ WOA [۳۱] و بهینه‌سازی شیر مورچه ALO [۳۲].

بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها (ACO)، یک الگوریتم فراابتکاری است که با الهام از رفتار حرکتی جمعی مورچه‌ها

با توجه به مکان یک نهنگ تصادفی تولید می‌شود. این تابع باعث جستجوی فضای مساله و تولید پاسخ‌های متنوع خواهد شد [۳۱]. الگوریتم بهینه‌سازی شیر مورچه (ALO) با الهام از حرکات نوعی از مورچه‌ها برای رسیدن به شکار ارائه شده است. این الگوریتم با استفاده از روش انتخاب چرخ رولت مورچه‌های نسل بعد را انتخاب می‌کند. در واقع می‌توان اینگونه بیان کرد که این روش ترکیبی از روش‌های بهینه‌سازی گروه ذرات و الگوریتم ژنتیک است [۳۲].

الگوریتم‌های فراابتکاری، برگرفته از طبیعت براساس فیزیک، الگوریتم‌هایی هستند که از قوانین موجود فیزیک و ریاضی در جهان، نشات می‌گیرند. از جمله الگوریتم‌هایی که از این متد الهام گرفته‌اند می‌توان به الگوریتم انفجار بزرگ (BBO) [۳۳]، الگوریتم بهینه‌سازی جهان کوچک (SWO) [۳۴]، الگوریتم بهینه‌سازی سیاه چاله (BHO) [۳۵]، بهینه‌سازی چند جهانی (MVO) [۳۶] و بهینه‌سازی شعاع نور (RO) [۳۷]، اشاره کرد.

الگوریتم MVO یک الگوریتم الهام‌گرفته از طبیعت به نام بهینه‌ساز چند جهانی است. ایده‌های اصلی این الگوریتم بر پایه سه مفهوم در کیهان‌شناسی است که عبارتند از سفیدچاله، سیاه‌چاله و کرم‌چاله هستند. مدل‌های ریاضی این سه مفهوم به ترتیب برای انجام جستجو، بهره‌برداری و جستجوی محلی توسعه یافته‌اند [۳۶].

در الگوریتم RO، یک روش فراابتکاری جدید به نام بهینه‌سازی شعاع ارائه شده است. همانند دیگر روش‌های چند عاملی، بهینه‌سازی شعاع دارای تعداد ذرات تشکیل‌شده از متغیرهای مساله است. این عوامل به‌عنوان شعاع نور در نظر گرفته می‌شوند. براساس قانون شکست نور، هنگامی که نور از یک محیط با چگالی کمتر به محیط با چگالی بیشتر حرکت می‌کند، تغییر جهت می‌دهد. این رفتار به عواملی در کاوش فضای جستجو در مراحل اولیه فرآیند بهینه‌سازی و تبدیل آنها به مراحل نهایی کمک می‌کند. این قانون ابزار اصلی الگوریتم بهینه‌سازی شعاع است [۳۷].

به‌طوری که استفاده از مسیرهای با حداکثر مطلوبیت یک ویژگی نوظهور است. این رویکرد انطباقی برای مسیریابی، میزان ترافیک کنترلی موردنیاز برای حفظ عملکرد شبکه را کاهش می‌دهد. ماهیت تصادفی رفتار موربانه برای یافتن روشی برای به حداکثر رساندن عملکرد مسیریابی، کشف شده است. این تحلیل بر برآوردگر متریک مسیریابی متمرکز است که به‌عنوان فرومون در زمینه بیولوژیکی شناخته می‌شود. نرخ خرابی فرومون طوری تنظیم می‌شود که بهترین برآورد ممکن از سودمندی یک لینک را برای تحویل یک بسته به مقصد، با در نظر گرفتن نوسانات یا زمان همبستگی، از شبکه ایجاد کند [۲۸].

یکی از پر استفاده‌ترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی روش بهینه‌سازی گرگ‌های خاکستری (GWO) است. در این روش گرگ‌ها به سه گروه تقسیم می‌شوند. گروه‌ها به‌صورت سلسله مراتبی یکدیگر را رهبری می‌کنند. این نوآوری موجب شده است که روش بتواند از بهینه‌های محلی در بسیاری از مسائل خارج شود و پاسخ مناسبی ارائه نماید [۲۹]. الگوریتم بهینه‌سازی موجودات دریایی اسلپ (SSA)، با استفاده از یک عامل راهبر، با بهترین مقدار ارزیابی و چند پیرو، ارائه شده است. این الگوریتم از دیدگاه کلی مشابه با روش بهینه‌سازی گروه ذرات (PSO) است اما در روابط ارائه شده برای حرکت عامل‌ها، تفاوت مشاهده می‌شود [۳۰]. یکی دیگر از این نوع الگوریتم‌ها، الگوریتم بهینه‌سازی نهنگ است (WOA). این الگوریتم با تولید تصادفی تعدادی نهنگ آغاز می‌شود. هر نهنگ نشان‌دهنده یک پاسخ برای مسئله است. نهنگ‌ها سعی می‌کنند خود را به طعمه (پاسخ بهینه) نزدیک کنند. نزدیک شدن نهنگ‌ها به طعمه با مکانیزم شبکه حباب انجام می‌شود. تابع دیگری وجود دارد که با الهام از چرخش نهنگ‌ها به دور طعمه طراحی شده است. از آنجایی که این دو تابع جدید یک نهنگ را، با توجه به مکان بهترین نهنگ موجود، تغییر می‌دهند، آنها را می‌توان توابع استخراج الگوریتم در نظر گرفت. الگوریتم نهنگ برای تقویت فاز اکتشاف از تابع دیگری استفاده می‌کند که در آن مکان نهنگ

به دنبال انتشار الگوریتم‌های فراابتکاری با دقتی بالاتر و قابل استفاده برای مجموعه مسائل بیشتر هستند. زیرا همان‌گونه که بیان شد با اثبات منطقی نظریه «نه به غذای مجانی» چنین نتیجه می‌شود که هیچ الگوریتم فراابتکاری نیست که پاسخگوی تمامی مسائل بهینه‌سازی باشد [۸]. از اینرو در این مقاله روشی با هدف افزایش دقت بهینه‌سازی ارائه می‌شود. الگوریتم پیشنهادی در این مقاله بر اساس مفهوم تاوه^۹ در فیزیک شماره ۱^۰ است. در یک تاوه، عملیاتی نظیر دوران و همچنین حرکت در راستای شیب سطح وجود دارد که با الهام از آنها روابط و الگوریتمی ارائه شده است. این روابط با این مفاهیم به اکتشاف و استخراج روی تابع برای ابعاد مختلف می‌پردازد که این عملیات برای فرار از بهینه محلی و همگرایی به بهینه سراسری ارائه می‌شود.

در بخش بعدی به ارائه مفهوم تاوه و دانش مورد نیاز برای فهم رفتار تاوه پرداخته می‌شود. در بخش سوم روش بهینه‌سازی پیشنهادی به همراه روابط و الگوریتم بهینه‌سازی عددی تاوه ارائه می‌شود. در بخش چهارم به مقایسه نتایج الگوریتم ارائه شده با سایر الگوریتم‌های بهینه‌سازی مطرح در تحقیقات مرتبط در شرایط یکسان روی بیست و چهار تابع معیار می‌پردازیم. در انتها به نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای آینده پرداخته می‌شود.

۲- مفهوم تاوه در فیزیک شاره

به ناحیه‌ای در شاره که ذرات حرکتی چرخشی حول مرکز انجام می‌دهند، تاوه می‌گویند. این چرخش روی محوری فرضی انجام می‌شود که آن را جریان تاوه می‌نامند. همچنین از مهم‌ترین مفاهیم در تاوه‌ها، برداری است که حرکت دورانی محلی را در یک تاوه توصیف می‌کند. این بردار، تاوگی نام دارد. یک تاوهی چرخشی، از طریق یک نیروی خارجی، می‌تواند در حالت خود باقی بماند. این نیروی خارجی توسط حرکت خود سیال، ایجاد نمی‌شود. تاوه با وجود نیروی خارجی، تاوگی غیر صفری نسبت به هسته دارد. این بدان معنی است که تاوه ایجاد شده، متلاشی نمی‌شود و حرکت رو به

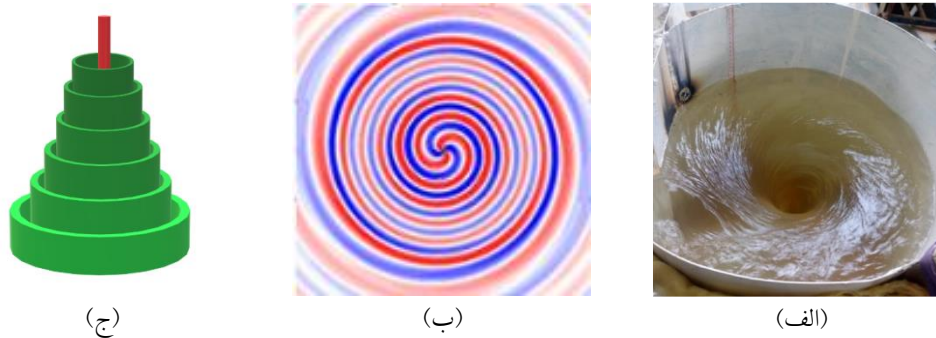
الگوریتم‌های فراابتکاری براساس رفتار انسانی، از مدل‌سازی و بررسی رفتار و اعمال انسان در شرایط و موقعیت‌های گوناگون نشأت می‌گیرد. از جمله الگوریتم‌های فراابتکاری بر اساس رفتار انسانی می‌توان الگوریتم رقابت استعماری (ICA) [۳۸] و الگوریتم بهینه‌سازی جامعه و تمدن (SCO) [۳۹]، را نام برد.

توانایی تعامل دو طرفه رفتار اجتماعی بنیادی در تمام جوامع بشری است. تعاملات اجتماعی افراد را قادر می‌سازند که سریع‌تر از تکامل زیستی، براساس وراثت ژنتیکی، خود را وفق داده و بهبود بخشند. این مفهوم محرک اساس الگوریتم بهینه‌سازی معرفی شده در روش SCO است که از تعاملات درون یک جامعه رسمی و تمدن مدل شده برای حل مسایل بهینه‌سازی استفاده می‌کند. یک جامعه به مجموعه‌ای از نقاط در فضای پارامتری مربوط می‌شود درحالی که یک تمدن مجموعه‌ای از تمامی جوامع است. هر جامعه‌ای دارای مجموعه‌ای از افراد دارای عملکرد بهتر (رهبران) است که به دیگران کمک می‌کنند تا از طریق تبادل اطلاعات بهبود یابند. این امر منجر به مهاجرت یک نقطه به سمت عملکرد بهتر، مشابه با عملکرد جستجوی محلی تشدید شده، می‌شود. رهبران تنها از طریق تبادل اطلاعات درون جامعه‌ای که منجر به مهاجرت یک رهبر از یک جامعه به جامعه دیگر می‌شود، بهبود می‌یابند. این کار به جوامع بهتر برای توسعه و شکوفایی و در واقع همگرا شدن به بهینه سراسری تابع مورد نظر، کمک می‌کند [۳۹].

روشی با الهام از تاوه با استفاده از چند ذره در هر شعاع ارائه شده است [۴۰]. این شعاع‌ها در شاره حرکت میکنند و ذرات نیز میتوانند در همان شعاع به حرکت خود ادامه دهند. بدین ترتیب جستجو در این روش صورت می‌گیرد. از نوآوری‌های روش پیشنهادی، چرخش‌ها و روابط جدید شعاع‌ها به صورت غیرخطی است که موجب رسیدن به دقت بالاتری شده است. از سوی دیگر در این مقاله دو معیار جدید ارزیابی نیز ارائه شده است.

با این همه، مهندسی و دانشمندان علوم کامپیوتر هر ساله

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱



شکل ۱- نمایی از لوله‌های تاوه در سیالات، (الف) تشکیل تاوه در سیال [۴۳]، (ب) شبیه‌سازی حرکت لوله‌های تاوه در سیال [۴۴] و (ج) شبیه‌سازی لوله‌های تاوه در سیال

جریان، به صورت مارپیچ تبدیل شده‌اند. در نتیجه می‌توان گفت که هنگام حضور یک ذره از سیال در انتهای ترین لوله تاوه، این ذره با سرعت دورانی غیریکنواخت، نسبت به مرکز دوران کرده و به لوله‌های تاوه درونی‌تر، منتقل می‌شود تا زمانی که به لوله تاوه با قطر صفر برسد [۴۱].

۳- الگوریتم بهینه‌سازی عددی پیشنهادی

در این الگوریتم، ابتدا تعدادی تاوه با شعاع‌هایی متفاوت برای لوله تاوه‌ی خارجی ایجاد می‌شود. برای ساده‌سازی توضیح چنین شعاعی آن را شعاع تاوه می‌نامیم. محاسبه شعاع تاوه پیشنهادی برای هر تابع از رابطه (۱) تبعیت می‌کند:

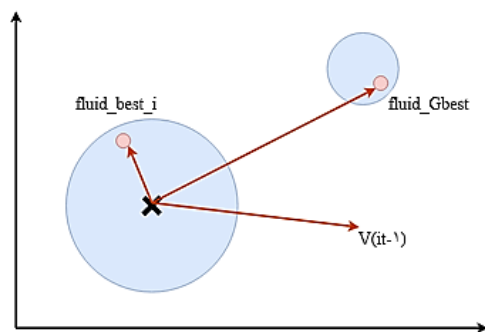
$$R_i = \frac{(ub-lb)}{2} \times \left[0.02 + \left[0.18 \times \frac{(\exp(4(i-1)))}{e^4 - 1} \right] \right] \quad (1)$$

در این رابطه i شماره تاوه، MV حداکثر تعداد تاوه و ub و lb به ترتیب برابر با کران بالا و کران پایین هستند. این رابطه یک توالی صعودی از اعداد ایجاد می‌کند که به عنوان شعاع هر تاوه مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان نمونه در شکل (۲) تنوع شعاعی برای لوله‌های تاوه‌ها که با استفاده از رابطه (۱) به دست آمده، قابل مشاهده است. عدم یکسان بودن شعاع‌ها سبب می‌شود تا هر تاوه در فضای جستجو به میزان متفاوتی تأثیر بگذارد و این تأثیرگذاری متفاوت، همان‌طور که در ادامه به آن اشاره می‌شود، جستجوی محلی را بهینه می‌کند. الگوریتم با

پایین ذرات سیال ادامه می‌یابد [۴۱].

برای ادامه به دو تعریف خط جریان سیال و خط تاوه نیاز است. خط جریان سیال، خطی است که در همه جا با بردار سرعت ذرات مماس است. خط تاوه نیز خطی است در همه جا مماس بر بردار تاوگی است. حال با این تعاریف می‌توان گفت که یک بردار ساکن، که مجموع نیروهای داخلی ذرات صفر است، خط جریان سیال یک حلقه بسته حول محور و خط تاوه به تقریب موازی محور است [۴۲]. در نتیجه استوانه‌ای را می‌توان فرض کرد که در همه جا بر سرعت جریان و تاوگی مماس است. این سطح را لوله‌ی تاوه می‌نامند و در اطراف محور چرخش قرار دارد. با این اوصاف، می‌توان محور تاوه را نیز یک لوله تاوه با قطر صفر فرض کرد. از آنجایی که تاوه پیوسته است، لذا تعداد لوله‌های میانی بین بیرونی‌ترین لوله تاوه و مرکز، بسیار زیاد است (شکل ۱).

هر تاوه پس از ایجاد، به سرعت گسترش می‌یابد و خم می‌شود و تمامی خطوط پایانی را حذف می‌کند. این خمیدگی سبب می‌شود که سیال شکلی مانند قیف جبرئیل به خود بگیرد. هنگامی که ذرات سیال در مسیرهایی دوار حرکت می‌کنند، رگه‌های مارپیچ دیده می‌شوند. که این رگه‌ها به علت جابجا شدن ذرات از لوله با قطر بیشتر به لوله داخلی است. این رگه‌های مارپیچ در حقیقت ابرهایی از سیال هستند که در آغاز چندین لوله تاوه را تشکیل می‌دهند و به علت تفاوت در سرعت



شکل ۳- بردارهای مورد استفاده در حرکت تاوها

جستجو منتقل می‌شود.

ضریب Ω در معادله (۲) به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$\Omega = \left| \frac{\exp\left(\frac{\epsilon \times ((M_{it} - it) - 1)}{M_{it} - 1}\right) - 1}{\exp(\epsilon) - 1} \right| + 10^{-\nu} \quad (4)$$

Ω ضریبی است که در ابتدا سبب همگرایی سریع تاوها می‌شود. اما با افزایش تکرارها، این ضریب به تدریج کاهش می‌یابد تا پس از گذشت حدود ربع تکرارها، Ω به عددی نزدیک به صفر می‌رسد. این کار سبب محدود کردن منطقه‌ی جستجوی سراسری ذرات می‌شود. پس از رسیدن به این نقطه، سرعت همگرایی تاوها به آرامی افزایش می‌یابد تا با دقت بیشتری به جستجو پردازند (شکل ۴). حال همه ذرات یک تاوه باید با تاوه حرکت کنند و از یک لوله تاوه به سمت لوله تاوه داخل تر بروند. برای این هدف رابطه (۵) ارائه می‌شود.

$$P_{jv_i} = V_{center_i} + \left[a_1 \times \overline{x_{i,j}} \times M_R \right] \quad (5)$$

که در آن P_{jv_i} موقعیت ذره i ام از تاوه i ام، a_1 ضریبی است که توسط رابطه (۶) محاسبه می‌شود.

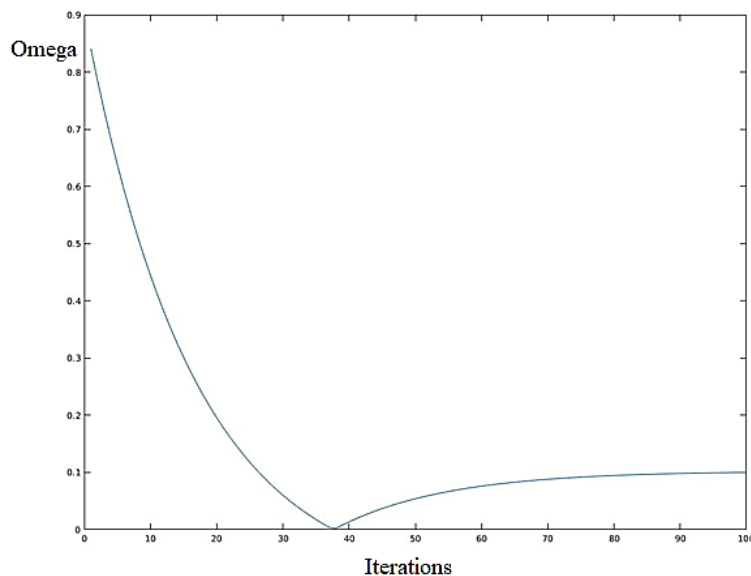
$$a_1 = \frac{M_{it} - it}{M_{it}} \quad (6)$$

که در آن M_{it} حداکثر تعداد تکرار و it شماره تکرار کنونی است. $\overline{x_{i,j}}$ برداری از مرکز قبلی تاوه i ام به سمت ذره j ام، M_R ماتریس دوران، و V_{center_i} موقعیت فعلی مرکز تاوه i ام است. M_R سبب می‌شود که ذره در لوله تاوه کنونی دوران یابد و

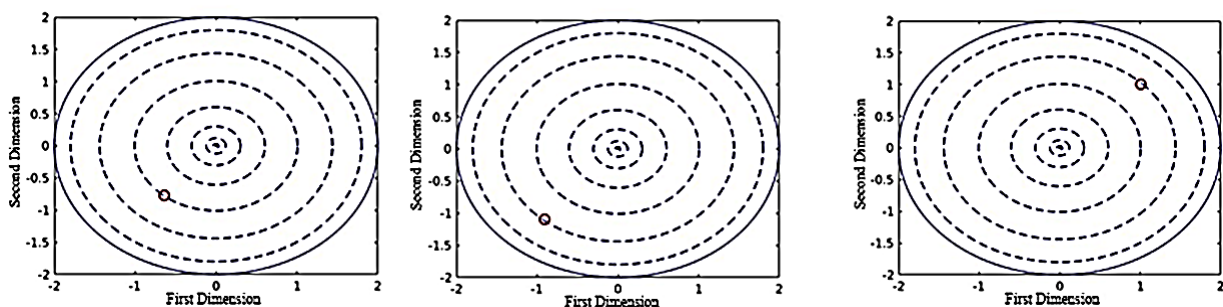
اکسترمم‌های محلی می‌شود. بدین صورت که هر تاوه به جای انتقال خطی به سمت نقطه هدف، با دوران بردار انتقال، به ناحیه‌ای در اطراف آن هدف منتقل می‌شود (شکل ۳).

در فاز بهترین سیال تصادفی همه تاوها از معیاری به نام همسایه تصادفی استفاده می‌کنند. Q پارامتری است دارای مقدار ثابت برای تمامی تاوها و می‌تواند عددی بین ۱ و $MV-1$ باشد. این مقدار مطابق با تابع و تعداد ابعاد تنظیم می‌شود. در فاز انتخاب بهترین سیال تصادفی هر تاوه Q تاوه دیگر از MV تاوه موجود در فضای جستجو به جز خودش را انتخاب می‌کند. پس از تعیین موقعیت بهترین ذره از تاوه‌های انتخاب شده با استفاده از تابع تناسب، یک بردار در جهت آن ذره ایجاد می‌شود و تاوه مورد بررسی را به سمت آن هدایت می‌کند (شکل ۳).

به کمک روابط (۱) و (۲)، هر تاوه می‌تواند با استفاده از اطلاعات به دست آمده از تکرارهای قبل و نتیجه جستجوی محلی و بهترین سراسری به سمت نقطه بهینه حرکت کند و از نقاط اکسترمم محلی فاصله بگیرد. اهمیت مرحله انتخاب بهترین سیال تصادفی در این است که دیگر همه ذرات از یک ذره به عنوان بهترین کل استفاده نمی‌کنند. این عمل سبب کاهش نقش نقاط نویز در جابه‌جایی ذرات می‌شود. نقاط نویز، نقاطی هستند که یا در مینیمم محلی گیر کرده‌اند، یا در تکرارهای بعد تمامی ذرات را به این نقاط هدایت می‌کند و یا باعث افزایش سرعت همگرایی ذرات در صفحه جستجو می‌شود. سپس بردار سرعت به دست آمده به موقعیت فعلی مرکز آن تاوه اضافه می‌شود و در نتیجه، این تاوه به یک موقعیت جدید در فضای



شکل ۴- نمودار رشد پارامتر Ω بر اساس تکرار



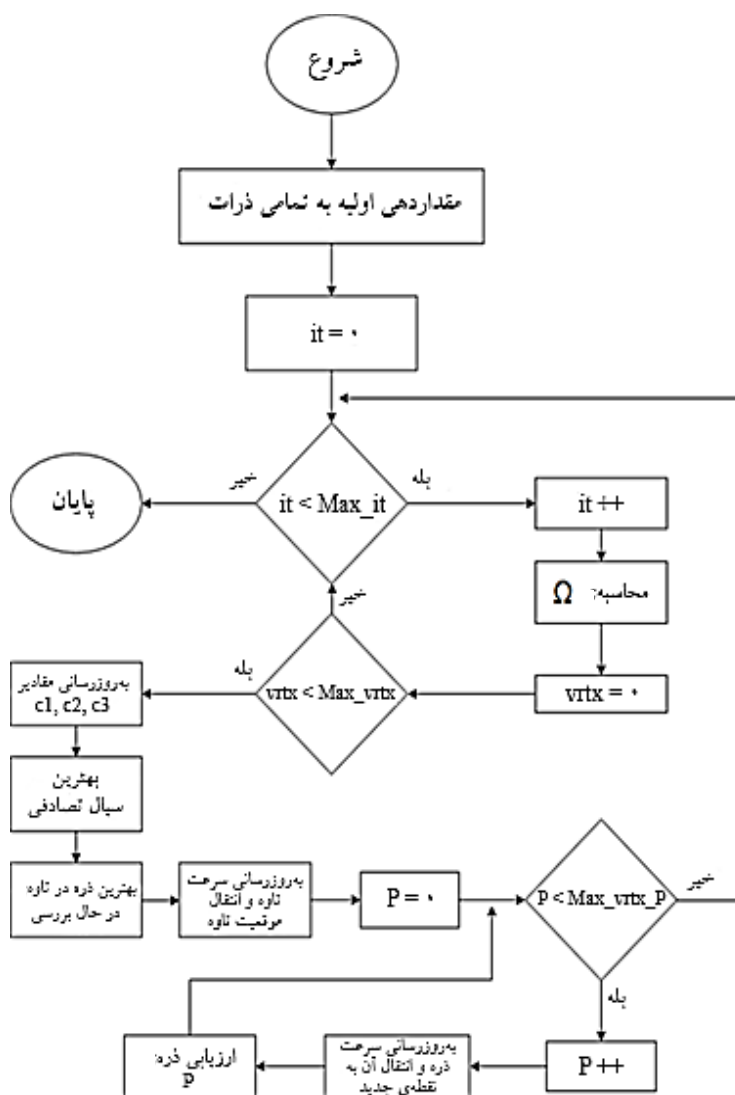
شکل ۵- دوران و انتقال ذرات در تاوه از یک لوله تاوه به لوله‌ای پایین تر به ترتیب از شکل راست به چپ در روش پیشنهادی

خاکستری GWO [۲۹]، بهینه‌سازی موجود دریایی اسلپ SSA [۳۰]، بهینه‌سازی نهنگ WOA [۳۱] و بهینه‌سازی شیر مورچه ALO [۳۲]. این الگوریتم‌ها روی سه دسته از توابع معیار استاندارد، توابع ترکیبی و توابع ادغامی در ابعاد پنج، ده و پانزده بعد با بیست بار تکرار روی هر تابع، اجرا شده است. شرایط برای تمام الگوریتم‌ها یکسان است. برای تمام الگوریتم‌های دیگر بر اساس قطعه برنامه‌ای که نویسنده همان مقاله در دسترس قرار داده است اجرا گرفته شده است. توابع ارزیابی استاندارد مورد استفاده در جدول (۱) ارائه شده است. مقدار میانگین و انحراف معیار نتایج آن که در جداول (۲) تا (۴)

باعث انتقال همان ذره به لایه‌های داخلی تر می‌شود (شکل ۵). این فرآیند تا زمانی که شرایط پایان برقرار شود ادامه پیدا خواهد کرد. شرط پایان رسیدن به حداکثر فراخوانی تابع ارزیابی است. در پایان همه تاوه‌ها به سمت یکدیگر متراکم و تمام ذرات در یک نقطه جمع می‌شوند. فلوجارت روش پیشنهادی در شکل (۶) ارائه شده است.

۴- نتایج پیاده‌سازی

الگوریتم بهینه‌سازی تاوه با چند الگوریتم بهینه‌سازی دیگر مقایسه شده است که عبارتند از: بهینه‌سازی گرگ‌های



شکل ۶- فلوجارت روش فراابتکاری تاوه پیشنهادی

ارزیابی g در x و سپس ارزیابی f در نتیجه g است. استفاده از این توابع پیشنهادی در مقایسه الگوریتم‌های بهینه‌سازی بدین گونه است که با استفاده از Dim (تعداد ابعاد تابع اصلی) تابع و قراردادن نتیجه آنها در یک تابع Dim بعدی دیگر، اقدام به یافتن اکسترمم سراسری تابع اصلی می‌کند. این توابع با این دیدگاه ارائه شده‌اند که پیچیدگی فضای جستجو بالاتر رود. روابط توابع ادغامی در جدول (۹) ارائه شده است. نتایج آن در جدول‌های (۱۰) تا (۱۲) برای ابعاد متفاوت ارائه شده است.

به ترتیب با نام‌های Std و Ave مشخص شده است، که برای آزمایش‌های دارای ابعاد متفاوت ارائه شده است. همچنین برای افزایش پیچیدگی فضای جستجو از توابع ترکیبی استفاده شده است. روابط توابع ترکیبی در جدول (۵) ارائه شده است. نتایج آن در جداول (۶) تا (۸) برای ابعاد متفاوت ارائه شده است.

در این مقاله معیار جدیدی برای مقایسه ارائه شده است که در آن از ادغام توابع استفاده شده است. ادغام دو تابع f و g به صورت $f(g(x))$ یا fog نمایش داده می‌شود که به معنای

جدول ۱- روابط توابع ارزیابی استاندارد

Function	Range	f_{min}
$f_1(x) = \sum x_i^r$	$[-100, 100]$	0
$f_2(x) = \sum(x_i) + \prod(x_i)$	$[-10, 10]$	0
$f_3(x) = (\sum x_j)^r$	$[-100, 100]$	0
$f_4(x) = \max_i((x_i), 1 \leq i \leq n)$	$[-100, 100]$	0
$f_5(x) = \sum \left(100(x_{i+1} - x_i)^r + (x_i - 1)^r \right)$	$[-30, 30]$	0
$f_6(x) = \sum ((x_i + 0.5))^r$	$[-100, 100]$	0
$f_7(x) = \sum i x_i^r + \text{random}(0,1)$	$[-1/28, 1/28]$	0
$f_8(x) = \sum (x_i^r - 10 \cos(r\pi x_i) + 10)$	$[-5/12, 5/12]$	0
$f_9(x) = -20 \exp\left(-0.7 \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^r}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum \cos(r\pi x_i)\right) + 20 + e$	$[-32, 32]$	0
$f_{10}(x) = \frac{1}{r000} \sum x_i^r - \prod \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	$[-600, 600]$	0
$y_i = 1 + \frac{x_i + 1}{r}$	-	-
$u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m, & x_i > a \\ 0, & -a < x_i < a \\ -k(x_i - a)^m, & x_i < -a \end{cases}$	-	-
$f_{11}(x) = \frac{\pi}{n} \left(10 \sin(\pi y_1) + \sum (y_i - 1)^r (1 + 10 \sin^r(\pi y_{i+1})) + (y_n - 1)^r \right) + \sum u(x_i, 10, 100, r)$	$[-50, 50]$	0
$f_{12}(x) = 0.1 \left(\sin^r(r\pi x_1) + \sum (x_i - 1)^r (1 + \sin^r(r\pi x_i + 1)) + (x_n - 1)^r (1 + \sin^r(r\pi x_n)) \right) + \sum u(x_i, 5, 100, r)$	$[-50, 50]$	0
$f_{13}(x) = -\sum \sin(x_i) \left(\sin\left(\frac{i x_i^r}{\pi}\right) \right)^{rm}, m = 10$	$[0, \pi]$	-4/687

مورد مقایسه قرار گرفت. نتایجی که مرجع [40] گزارش کرده در برابر نتایج روش پیشنهادی این مقاله در جدول (۱۳) ارائه شده است. نتایج، نشان‌دهنده برتری روش ارائه شده در این مقاله است.

برای مقایسه روش پیشنهادی با روش VS [40]، نتایجی در مقاله مرجع [40] در تابع F13 در دو حالت ارزیابی شده است که شرایطی مشابه آزمایش‌های روش پیشنهادی دارد؛ لذا به مقایسه این دو روش پرداخته می‌شود. تابع F13 در دو حالت آزمایش اول و آزمایش دوم در حالت‌های پنج بعدی و ده بعدی

جدول ۲- نتایج پیاده‌سازی روی توابع ارزیابی استاندارد در پنج بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F1	7/82175e-20	9/94255e-20	8/67960e-14	2/20570e-13	8/40705e-10	1/37777e-9	2/26716e-9	5/58724e-9	3/00711e-7	4/74382e-7
F2	3/41909e-11	2/42218e-11	6/43373e-9	8/03784e-9	3/04956e-5	7/06796e-5	6/56333e-7	6/86721e-7	9/39889e-5	8/99245e-5
F3	2/34148e-13	6/18081e-13	2/65125e-7	6/50638e-7	7/04625e-3	1/73340e-2	6/73229e+1	8/28966e+1	9/12959e-1	3/06211e+0
F4	1/07702e-9	8/88323e-10	6/80560e-6	1/47249e-5	1/75042e-5	1/35924e-5	5/24582e-1	6/68714e-1	1/09281e-3	2/27038e-3
F5	1/02891e+1	4/05551e+1	2/10097e+0	1/04824e+0	6/95743e+1	1/63224e+2	1/37758e+2	3/32804e+2	2/14889e+2	5/32395e+2
F6	5/86229e-20	6/73371e-20	2/74321e-5	1/50674e-5	2/57125e-9	7/10438e-9	1/55392e-3	1/91337e-3	1/92277e-7	2/37853e-7
F7	2/49160e-3	1/92204e-3	7/20510e-4	5/25618e-4	3/31665e-3	2/14231e-3	7/05077e-3	8/47539e-3	7/52415e-3	7/54534e-3
F8	1/54219e+0	1/22815e+0	1/98415e+0	1/48682e+0	4/22857e+0	2/51862e+0	3/21641e+0	4/11899e+0	5/37277e+0	2/93026e+0
F9	1/10260e-10	7/05121e-11	1/00796e-7	1/15191e-7	3/96319e-1	8/27625e-1	1/35745e-5	1/06058e-5	8/29361e-2	3/67960e-1
F10	8/25285e-2	5/19730e-2	8/03441e-2	6/48520e-2	2/15082e-1	1/18932e-1	1/89911e-1	2/17075e-1	1/49802e-1	1/08595e-1
F11	3/93507e-21	4/68355e-21	1/74782e-5	1/16840e-5	3/81038e-1	7/69333e-1	1/27411e-1	3/20028e-1	2/35873e+0	3/05494e+0
F12	5/49368e-4	2/45685e-3	4/45810e-5	2/18140e-5	1/34811e-3	3/36009e-3	1/06731e-2	1/23392e-2	1/66666e-3	5/18860e-3
F13	8/13842e-4	1/22204e-3	6/31186e-4	1/28408e-20	1/89231e-3	4/37143e-3	9/47030e-4	6/98043e-4	3/10772e-3	1/85589e-3

جدول ۳- نتایج پیاده‌سازی روی توابع معیار استاندارد در ده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F1	2/04175e-24	2/21770e-24	8/16115e-16	1/29498e-15	4/33506e-9	4/75949e-9	8/55761e-19	1/57737e-18	5/5730e-6	5/47923e-6
F2	1/48867e-13	1/96490e-13	1/62517e-9	2/23170e-9	1/59260e-2	3/19141e-2	5/13090e-12	1/21114e-11	2/08575e+0	2/38359e+0
F3	8/61230e-5	1/79380e-4	2/96579e-6	6/09816e-6	3/56140e+0	9/77948e+0	1/32797e+3	9/84558e+2	9/50752e+1	8/73337e+1
F4	9/19717e-8	1/63301e-7	2/39956e-5	1/76804e-5	2/05595e-2	3/77674e-2	2/31371e+0	2/76887e+0	7/26286e-1	1/31075e+0
F5	1/22795e+1	2/08324e+1	7/04463e+0	1/03786e+0	1/80855e+2	4/62112e+2	7/82153e+0	5/45718e-1	2/63291e+2	3/94032e+2
F6	4/46819e-24	1/02767e-23	4/80760e-5	1/53420e-5	1/21458e-8	3/72396e-8	9/57123e-3	7/17271e-3	8/30599e-6	6/50340e-6
F7	6/2857e-3	5/95016e-3	1/56786e-3	1/14607e-3	9/86638e-3	5/52783e-3	5/79828e-3	9/13542e-3	1/94383e-2	1/08119e-2
F8	2/28841e+0	1/21214e+0	3/37004e+0	2/85525e+0	9/00437e+0	5/87717e+0	3/59281e+0	9/41208e+0	1/74118e+1	7/03169e+0
F9	5/29532e-13	3/68425e-13	1/60509e-8	1/89216e-8	6/69969e-1	8/12274e-1	2/18935e-10	3/82422e-10	9/10922e-1	9/84039e-1
F10	2/35148e-2	1/84697e-2	3/81866e-2	3/00045e-2	1/56962e-1	9/19161e-2	6/73121e-2	1/40398e-1	1/89804e-1	1/12222e-1
F11	4/67949e-26	7/01817e-26	3/04188e-3	7/40290e-3	1/35489e+0	1/12350e+0	1/98859e-2	1/96956e-2	2/38512e+0	1/68262e+0
F12	3/29621e-3	5/16585e-3	4/92039e-3	2/18276e-2	4/37055e-3	6/36736e-3	3/57915e-2	2/79505e-2	3/04089e-3	3/769626e-3
F13	5/36230e-4	3/78452e-4	2/56603e-3	6/09112e-3	8/43024e-4	3/90051e-4	9/25308e-4	6/07447e-4	3/81654e-3	3/5059524e-3

جدول ۴- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار استاندارد در پانزده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F1	2/85361 e-11	2/40883 e-11	4/08791 e-6	3/29811 e-6	1/47250 e+0	1/22929 e+0	2/16699 e-9	2/80022 e-9	1/18497 e+1	1/97512 e+1
F2	1/60117 e-6	1/52673 e-6	2/97772 e-4	1/42971 e-4	1/00613 e+0	1/13629 e+0	2/42350 e-6	1/41526 e-6	1/50431 e+1	9/97475 e+0
F3	3/77418 e-1	5/92152 e-1	3/11565 e-1	2/99188 e-1	1/64457 e+2	1/01382 e+2	2/18811 e+3	1/92925 e+3	7/72236 e+2	3/86605 e+2
F4	1/63800 e-3	2/04348 e-3	4/49611 e-2	3/70574 e-2	2/19308 e+0	1/09868 e+0	1/16314 e+1	1/60820 e+1	6/20263 e+0	2/48253 e+0
F5	1/04165 e+1	2/59146 e+0	1/47095 e+1	1/16644 e+1	3/84787 e+2	5/18927 e+2	1/32484 e+1	3/88919 e-1	1/89803 e+3	2/45228 e+3
F6	2/24684 e-11	1/116410 e-11	2/56721 e-2	7/79914 e-2	2/27241 e+0	2/91069 e+0	5/80759 e-2	4/40046 e-2	1/04925 e+1	2/31973 e+1
F7	1/26277 e-2	8/99233 e-3	2/05494 e-3	8/39395 e-4	1/58690 e-2	9/19397 e-3	3/29958 e-3	2/46541 e-3	4/27633 e-2	3/38588 e-2
F8	5/62152 e+0	1/99711 e+0	8/97090 e+0	2/65940 e+0	1/10696 e+1	4/74806 e+0	3/46866 e+0	1/21840 e+1	2/32289 e+1	1/07156 e+1
F9	2/44321 e-1	6/03684 e-1	6/14345 e-4	4/35154 e-4	2/17491 e+0	7/67081 e-1	1/40251 e-5	1/26425 e-5	4/20849 e+0	1/63872 e+0
F10	4/43760 e-2	4/28720 e-2	2/89102 e-2	2/76597 e-2	4/74834 e-1	2/97524 e-1	5/80124 e-2	1/06559 e-1	5/12503 e-1	3/97463 e-1
F11	4/14676 e-2	8/50897 e-2	4/36694 e-3	7/06660 e-3	2/23030 e+0	1/77790 e+0	8/88588 e-2	3/06890 e-1	2/89260 e+0	2/13005 e+0
F12	3/29621 e-3	5/16585 e-3	5/77290 e-3	1/74424 e-2	7/54588 e-1	7/57684 e-1	8/43324 e-2	4/43273 e-2	4/54655 e+0	5/98496 e+0
F13	3/58751 e-4	2/29250 e-4	5/96223 e-4	2/30290 e-4	6/72134 e-4	3/58939 e-4	6/47117 e-4	3/15115 e-4	2/14284 e-3	4/31976 e-3

جدول ۵- روابط توابع معیار ترکیبی

Function	Range	f _{min}
$f_{14}(x) = f_1(x) + f_7(x) + f_9(x)$	[-10, 10]	0
$f_{15}(x) = f_1(x) + f_4(x) + f_6(x)$	[-100, 100]	0
$f_{16}(x) = f_9(x) + f_{11}(x) + f_{12}(x)$	[-100, 100]	0
$f_{17}(x) = f_1(x) + f_5(x) + f_6(x)$	[-30, 30]	0

جدول ۶- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ترکیبی در پنج بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F14	2/89999 e-2	1/20871 e-2	2/03702 e-2	7/11747 e-3	1/0329 e+1	5/02588 e-2	5/58250 e-2	2/73239 e-2	7/42945 e-2	4/46651 e-2
F15	1/25071 e+0	3/43988 e-4	1/25013 e+0	4/22080 e-5	1/25103 e+0	9/39757 e-4	1/25000 e+0	3/49862 e-7	1/25032 e+0	2/10138 e-4
F16	3/23046 e+0	1/18968 e-1	3/20611 e+0	1/93154 e-3	3/85179 e+0	1/54423 e+0	3/82823 e+0	5/76964 e-1	3/48087 e+0	4/39348 e-1
F17	5/12259 e+0	3/36637 e-6	5/12900 e+0	2/63408 e-2	2/4690 e+2	6/53679 e+2	5/33527 e+1	2/15361 e+2	4/49627 e+2	9/53099 e+2
F18	2/64703 e+0	1/61854 e+0	2/88047 e+0	2/72676 e+0	6/25725 e+0	2/05212 e+0	2/49900 e+0	1/94007 e+0	7/45885 e+0	3/46285 e+0

جدول ۷- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ترکیبی در ده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F14	5/60675 e-2	2/28331 e-2	2/49456 e-2	6/94325 e-3	1/91756 e-1	7/37040 e-2	2/74411 e-2	1/45032 e-2	1/54298 e-1	6/72481 e-2
F15	2/40105 e+0	5/88994 e-4	2/39964 e+0	4/11652 e-5	2/40193 e+0	5/71392 e-3	2/40540 e+0	4/12136 e-3	2/40107 e+0	2/32487 e-3
F16	3/45430 e+0	4/87555 e-2	3/44223 e+0	2/85063 e-4	4/19937 e+0	1/36034 e+0	3/55626 e+0	8/26852 e-2	4/78138 e+0	1/27471 e+0
F17	1/13603 e+1	2/85895 e-8	1/13626 e+1	8/61279 e-3	6/96829 e+1	1/26545 e+2	1/13728 e+1	1/27661 e-2	2/55253 e+2	6/87507 e+2
F18	7/41878 e+0	2/60798 e+0	5/31096 e+0	1/09326 e+1	1/53756 e+1	5/87345 e+0	2/49011 e+0	1/67996 e-3	2/07019 e+1	9/48875 e+0

جدول ۸- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ترکیبی در پانزده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F142/66997e-15/17777e-21/94958e-15/18119e-21/01474e+1 3/14343e+0 1/25225e-1 5/80038e-2 1/26646e+1 1/35820e+1										
F154/94565e+02/83358e-13/05707e+0 3/77951e-1 1/84404e+2 5/68998e+1 3/57648e+0 3/06065e-1 1/1382e+2 1/14022e+2										
F166/45553e+05/20210e-15/95206e+0 1/19214e+0 9/22745e+3 3/72014e+4 5/40755e+0 1/18956e+0 2/54999e+4 5/22215e+4										
F172/99175e+18/71499e+0 3/99599e+1 2/85022e+1 2/87715e+3 2/75841e+3 5/95996e+1 1/72998e+2 7/10953e+3 7/74016e+3										
F185/31049e+01/01882e+0 1/72069e+1 4/85176e+0 3/91141e+1 7/74921e+0 1/08598e+1 9/77169e+0 4/28468e+1 1/36037e+1										

جدول ۹- روابط توابع معیار ادغامی، خروجی چند تابع به عنوان پارامتر ورودی یک تابع

Function	Range	f_{min}
$f_{18}(x) = f_{\epsilon}(f_{\lambda}, f_{\lambda}, f_{\lambda}, f_{\lambda}, f_{\lambda})$	[-100, 100]	0
$f_{19}(x) = f_{\epsilon}(f_1, f_2, f_1, f_2, f_1)$	[-32, 32]	0
$f_{20}(x) = f_1(f_5, f_6, f_7, f_{11}, f_{12})$	[-100, 100]	0
$f_{21}(x) = f_{\epsilon}(f_{11}, f_{11}, f_{11}, f_{11}, f_{11})$	[-100, 100]	0
$f_{22}(x) = f_{\epsilon}(f_r, f_r, f_r, f_r, f_r)$	[-10, 10]	0
$f_{23}(x) = f_{\epsilon}(f_{r1}, f_{r1}, f_{r1}, f_{r1}, f_{r1})$	[-35, 35]	0

جدول ۱۰- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ادغامی در پنج بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F19 6/51620e+1 6/25236e+1 5/65875e+1 3/75736e+1 6/72169e+2 8/53371e+2 3/94316e+2 6/33639e+2 3/01857e+2 4/17440e+2										
F20 1/07335e-9 6/06656e-10 2/74063e-8 4/01273e-8 3/54261e-3 1/03348e-2 3/05069e-6 4/13145e-6 2/52087e-2 1/10343e-1										
F21 2/91609e+1 3/69190e+0 2/89016e+1 1/84096e+0 4/61463e+1 3/26418e+1 3/71680e+1 1/27806e+1 3/10278e+1 3/34666e+0										
F22 1/38337e-18/1/14098e-18 1/69742e-5 1/01279e-5 5/27836e-1 9/63522e-1 4/13791e-2 6/16416e-2 9/58799e-1 1/40636e+0										
F23 3/68824e-12 1/39637e-11 2/07739e-8 3/91008e-8 8/63263e-4 3/05619e-3 3/26042e+1 1/18108e+2 5/25708e-1 1/05750e+0										
F24 4/62334e+0 1/82250e-15 4/62350e+0 8/22789e-5 1/08051e+1 4/64933e+0 1/29621e+1 1/55824e+1 7/96919e+7 3/55989e+8										

جدول ۱۱- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ادغامی در ده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F19 3/61780e+2 2/35417e+2 2/55394e+2 3/67263e+2 6/20843e+3 5/98498e+3 1/73446e+3 5/10201e+3 1/94405e+3 1/36287e+3										
F20 5/40134e-13 4/38828e-13 6/89908e-9 5/89994e-9 5/52753e-2 1/83729e-1 1/77854e-11 2/63203e-11 7/32632e+2 9/75915e+2										
F21 9/39890e+1 7/36502e+0 8/98530e+1 3/94692e-1 3/86376e+2 9/72891e+2 1/08040e+2 5/21601e+1 1/04824e+2 2/08744e+1										
F22 5/27911e-25 5/39477e-25 3/87417e-3 7/95585e-3 1/45830e+0 1/37211e+0 1/81137e-2 2/47719e-2 3/29465e+0 2/90965e+0										
F23 1/26981e-6 1/72578e-6 2/42280e-7 6/63095e-7 1/14576e-1 1/81450e-1 7/76512e+6 2/322418e+7 5/41136e+0 1/83341e+3										
F24 5/09869e+0 2/12584e+0 6/52483e+0 3/90155e+0 1/80309e+1 1/02469e+1 1/12921e+1 4/44825e+0 1/44580e+7 4/31417e+7										

جدول ۱۲- نتایج پیاده سازی روی توابع معیار ادغامی در پانزده بعد برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش های دیگران

F	VOA		GWO		SSA		WOA		ALO	
	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std	Ave	Std
F191/33507e+3	1/27552e+3	37/18427e+3	4/00683e+2	3/26768e+4	2/11296e+4	1/62645e+3	6/47204e+3	7/25342e+4	5/97430e+4	
F205/42412e-5	1/85226e-5	1/18748e-3	3/18220e-4	2/32472e+0	1/01715e+0	1/45964e-5	1/63296e-5	1/24445e+3	1/00696e+3	
F213/08090e+2	4/35206e+2	2/07862e+2	1/44440e+1	5/48250e+6	1/26133e+7	2/10557e+2	4/24527e+0	1/81174e+8	4/66227e+8	
F223/10964e-2	1/39067e-1	1/90023e-3	1/33596e-2	2/65422e+0	1/68477e+0	8/32879e-2	2/10864e-1	9/62066e+0	7/82140e+0	
F234/93286e-2	4/64533e-2	1/79611e-2	1/58784e-2	1/81004e+1	2/81257e+1	8/46955e+9	1/54356e+10	4/89234e+5	1/10297e+6	
F241/22290e+1	3/90160e+0	1/04745e+1	4/60655e+0	1/48412e+1	3/17890e+0	1/22636e+1	3/83092e+0	2/90027e+6	1/15414e+7	

جدول ۱۳- نتایج مقایسه برای روش پیشنهادی در مقایسه با روش [۴۰]

نام تابع	آزمایش اول		آزمایش دوم	
	Ave	Std	Ave	Std
VS [۴۰]	1/67469e-2	2/08092e-2	8/66838e-1	3/82153e-1
VOA	8/13842e-4	1/22204e-3	5/36230e-4	3/78452e-4

از مسئله، انتخاب الگوریتم بهینه سازی برای مسئله مورد بررسی راحت تر است.

دیگر معیار ارائه شده «میانگین به برزندگی بهینه» نام دارد. این معیار با آگاهی از نقطه مینیمم فضای جستجو F^* ، به میزان بهینگی رویکرد جابه جایی ذرات کاندید می پردازد. بدین معنی مقدار این معیار در هر تکرار، نرم اختلاف میانگین نقاط در فضای جستجو از نقطه F^* است. مقدار این معیار در شرایط مختلف رفتار الگوریتم در کنش با تابع را نشان می دهد. با کاهش مقدار می توان به مناسب بودن رویکرد جابه جایی ذرات در تابع مورد نظر پی برد و اگر به مقداری ثابت برسد، به معنی گیرکردن در نقطه محلی است. از آنجایی که معیار ارائه شده نیازمند آگاهی نسبت به نقطه مینیمم فضای جستجو است، تنها زمانی می توان از این معیار استفاده کرد که بررسی رفتار ذرات برای کاوش و اکتشاف در صفحه جستجو الزامی باشد. این بررسی می تواند روی توابع معیار صورت پذیرد. در شکل های (۹) - (۷) حجم ابرمکعب پراکندگی جستجوی الگوریتم و همچنین مقدار معیار میانگین به برزندگی بهینه، با دیگر الگوریتم ها برای هر تکرار مقایسه شده است. این مقایسه ها

۵- معیارهای ارزیابی پیشنهادی و تحلیل

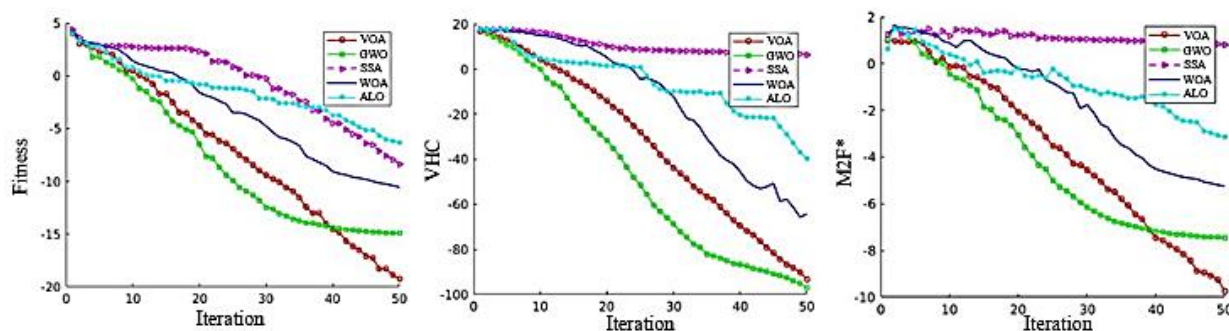
در این مقاله برای تحلیل همگرایی الگوریتم های بهینه سازی در فضای جستجو دو معیار جدید ارائه شده است. اولین معیار در هر تکرار حاکی از حجم پراکندگی ابرمکعبی است که ذرات در آن تکرار می توانند در آن ناحیه به جستجو پردازند. با توجه به پارامترها و کارایی این معیار، نام معیار را «ابرمکعب پراکندگی جستجو» می نامیم. مقدار معیار ابرمکعب پراکندگی جستجو در هر تکرار برابر است با حاصل ضرب واریانس موقعیت تمامی ذرات نسبت به هر بعد که از رابطه (۷) محاسبه می شود.

$$VHC = \prod_{D=1}^{\dim} \left(\text{var} \left([P_{1,D}, P_{2,D}, P_{3,D}, \dots, P_{n,D}] \right) \right) \quad (7)$$

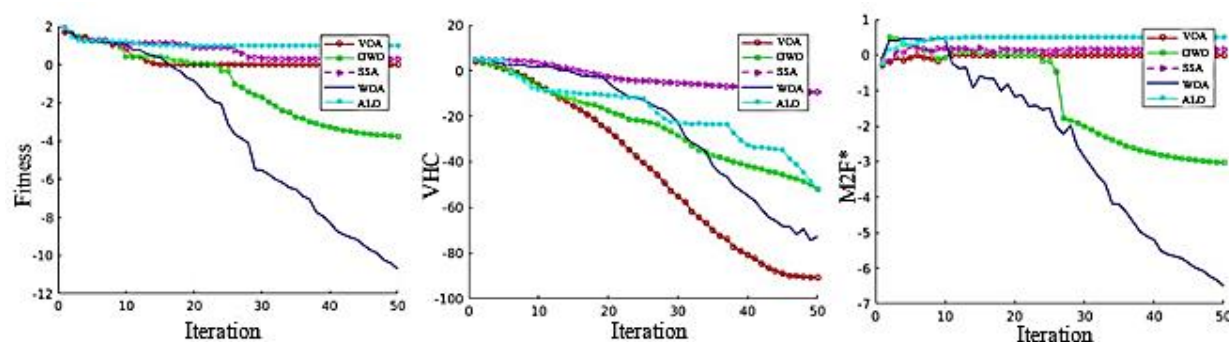
که در رابطه ارائه شده، مقدار \dim تعداد ابعاد تابع ارزیابی مورد بررسی و var نشان دهنده مقدار واریانس موقعیت ذرات در بعد مشخص شده، است.

با تحلیل نمودار حاصل از تغییرات حجم ابرمکعب پراکندگی جستجو در توابع مختلف می توان رویکرد الگوریتم مورد نظر در همگرایی را مورد کاوش قرار داد. با در نظر گرفتن این معیار در رفتار هر الگوریتم بهینه سازی و دانستن اطلاعاتی

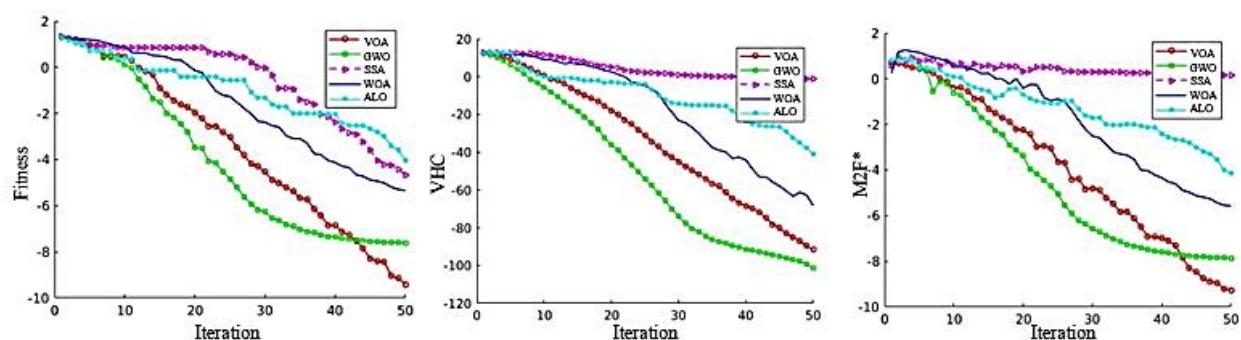
روش های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱



شکل ۷- نتایج سه معیار ارزیابی، مقدار تابع ارزیابی، ابرمکعب پراکندگی جستجو و میانگین به برازندگی بهینه بر تابع Sphere



شکل ۸- نتایج سه معیار ارزیابی، مقدار تابع ارزیابی، ابرمکعب پراکندگی جستجو و میانگین به برازندگی بهینه بر تابع Ackley



شکل ۹- نتایج سه معیار ارزیابی، مقدار تابع ارزیابی، ابرمکعب پراکندگی جستجو و میانگین به برازندگی بهینه بر تابع Rastrigin

ناحیه انتخاب شده برای جستجو و رفتار الگوریتم در کنش با تابع به‌درستی برگزیده شده است. کاهش خطی حجم ابرمکعب پراکندگی برای الگوریتم ارائه شده به دلیل تغییر بردار سرعت هر تاوه است که نشان‌دهنده استفاده مناسب از اطلاعات تمامی ذرات، حتی ذرات نويز، به‌عنوان بهترین ذره جمعی است. این اتفاق از انتخاب تصادفی نمونه‌های هر تاوه برای یافت

روی سه تابع F_1 ، F_4 ، F_{10} به نام‌های Sphere, Ackley, Rastrigin در پنج بعد انجام شده است.

همان‌طور که در شکل‌های (۹) - (۷) مشاهده می‌شود، با افزایش تکرار و کوچک‌تر شدن حجم ابرمکعب پراکندگی جستجو، معیار میانگین به برازندگی بهینه، نیز کاهش می‌یابد و دقت جواب منتخب نیز افزایش می‌یابد. این بدین معنی است که

بهترین ذره جمعی نشأت می‌گیرد.

ذرات از نقاط مینیمم محلی دوری جویند. پیشنهادات را می‌توان در غالب‌ها و برای مشکلات مختلف ارائه کرد. با یافتن ارتباط بین پارامتر استفاده شده در مرحله انتخاب بهترین سیال تصادفی، تعداد ابعاد، تعداد تاوه‌ها، تعداد عوامل جستجو در فضا و تعداد حداکثر تکرار می‌توان رابطه‌هایی برای هرکدام از این پارامترها یافت تا دیگر به صورت آزمون و خطا، آزمایش نشود و فقط با مقداری پیش‌پردازش، کیفیت الگوریتم را افزایش دهیم. همچنین با بررسی چگونگی رفتار تاوه‌های الگوریتم ارائه شده در فضای جستجو و واکاوی علل انتخاب اشتباه فضای جستجو در ابعاد بالا، می‌توان مشکل اختلال رفتاری این الگوریتم در ابعاد بالا را رفع کرد. لذا، الگوریتم تاوه می‌تواند در تمامی مسائل پیچیده در ابعاد پایین بسیار خوب عمل کند و در این ابعاد مورد استفاده قرار گیرد ولی در استفاده از مسائل با ابعاد بالا، دقت خوبی را ارائه نمی‌دهد

همین‌طور با بررسی جداول نتایج در می‌یابیم که این الگوریتم در هر سه دسته از توابع، رفتار بهتری در ابعاد پایین دارد. اما در همین توابع با ابعاد بالا، ناحیه انتخاب شده به درستی برگزیده نمی‌شود. در نتیجه رفتار الگوریتم دچار نوسانات بسیار می‌شود و ذرات در بهینه‌های محلی به‌راحتی گیر می‌کنند. با این حال، اگر دامنه مسئله مورد بهینه‌سازی ما کوچک باشد، با توجه به مقایسات انجام شده، استفاده از الگوریتم تاوه بسیار معقول‌تر است.

۶- نتیجه‌گیری

از بیست و چهار تابع معیار در ابعاد مختلف برای ارزیابی استفاده شده است. این توابع شامل توابع استاندارد، توابع ترکیبی و همچنین توابع ادغامی پیشنهادی است. ایده توابع ادغامی پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان استاندارد برای ارزیابی سایر روش‌های آینده بهینه‌سازی استفاده شود. از جمله مزیت‌های الگوریتم ارائه شده که می‌شود به آن اشاره کرد، دقت بالا در توابع و سرعت مناسب محاسبات در توابع مورد بررسی است. همچنین می‌توان به روند کاهش حجم ناحیه جستجو اشاره کرد که به درستی برگزیده می‌شود و به‌راحتی می‌تواند نواحی که دارای مقدار ارزیابی بیشتری است را تشخیص دهد و از آن نواحی دوری کند. این کار احتمالاً سبب می‌شود که از

۷- سپاسگزاری

این طرح پژوهشی با استفاده از اعتبارات ویژه پژوهشی دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل انجام شده است؛ لذا در کمال احترام از همکاری به‌عمل آمده دانشگاه نهایت قدردانی و سپاس به‌عمل می‌آید.

واژه‌نامه

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. genetic algorithm (GA) | 6. meta-heuristic algorithms | 11. volume of hyper cube (VHC) |
| 2. particle swarm optimization (PSO) | 7. no-free-lunch theorem (NFL) | 12. mean to F* (M2F*) |
| 3. swarm intelligence (SI) | 8. black box | |
| 4. Tabu search | 9. vortex | |
| 5. simulated annealing | 10. fluid physics | |

مراجع

- Mirjalili, S., Song Dong, J., Sadiq, A. S., and Faris, H., "Genetic Algorithm: Theory, Literature Review, and Application in Image Reconstruction", *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 811, pp. 69–85, 2020.
- Whitley, D., "A Genetic Algorithm Tutorial", *Statistics and Computing*, Vol. 4, No. 2, pp. 65-85. 1994.
- Kennedy J., and Eberhart, R., "Particle Swarm Optimization", *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, pp. 1942–1948, 2002.
- Chan, C. L. and Chen, C. L., "A Cautious PSO with

- Conditional Random” *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, No. 8, pp. 4120–4125, 2015.
5. Pham D. T. and Karaboga, D., “Genetic Algorithms, Tabu Search, Simulated Annealing, Neural Networks” *Intelligent Optimisation Techniques*, Vol. 1, pp. 51–240, 2000.
 6. Mirjalili, S., “SCA: A Sine Cosine Algorithm for Solving Optimization Problems”, *Knowledge-Based Systems.*, Vol. 96, pp. 120–133, 2016.
 7. Yang, X.-S., Deb, S., Fong, S., He, X., and Zhao, Y.-X., “From Swarm Intelligence to Metaheuristics: Nature-Inspired Optimization Algorithms”, *Computer*, Vol. 49, No. 9, pp. 52–59, 2016.
 8. Wolpert, D. H. and Macready, W. G., “No Free Lunch Theorems for Optimization,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 1, No. 1, pp. 67–82, 1997.
 9. Dasgupta, D., and Michalewicz, Z., Eds., *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997,
 10. Yang X.-S., *Optimization Techniques and Applications with Examples*. Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2018
 11. Holland, J. H., “Genetic Algorithms,” *Scientific American.*, Vol. 267, No. 1, pp. 66–73, 1992.
 12. Beyer, H.-G. and Schwefel, H.-P., “Evolution strategies – A comprehensive introduction”, *Natural Computing*, Vol. 1, No. 1, pp. 3–52, 2002.
 13. Koza, J.-R., *Genetic Programming: on the Programming of Computers by Means of Natural Selection*, Cambridge, Massachusetts. The MIT Press, 1998.
 14. Dorigo, M. and Stützle, T., “Ant Colony Optimization: Overview and Recent Advances”, *Handbook of Metaheuristics*, Vol. 146, pp. 227–263, 2010.
 15. Lu, X. and Zhou, Y., “A Novel Global Convergence Algorithm: Bee Collecting Pollen Algorithm”, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Vol. 5227 LNAI, pp. 518–525, 2008.
 16. Pinto, P. C., Runkler, T. A., and Sousa, J. M. C., “Wasp Swarm Algorithm for Dynamic MAX-SAT Problems”, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Vol. 4431 LNCS, No. PART 1, pp. 350–357, 2007.
 17. Karaboga, D., and Basturk, B., “Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems”, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Vol. 4529 LNAI, pp. 789–798, 2007.
 18. Yang X. S., and Deb, S., “Cuckoo Search via Levy Flights”, *2009 World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, NABIC 2009 - Proceedings*, pp. 210–214, 2010.
 19. Yang, S., Jiang, J., and Yan, G., “A Dolphin Partner Optimization”, *Proceedings of the 2009 WRI Global Congress on Intelligent Systems, GCIS 2009*, Vol. 1, pp. 124–128, 2009.
 20. Kaveh, A. and Farhoudi, N., “A New Optimization Method: Dolphin Echolocation”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 59, pp. 53–70, 2013.
 21. Yang, X.-S. S., “A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm BT - Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (NICO 2010)”, *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 284, pp. 65–74, 2010.
 22. Yang, X. S., “Firefly Algorithm, Stochastic Test Functions and Design Optimisation”, *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Vol. 2, No. 2, pp. 78–84, 2010.
 23. Oftadeh, R., Mahjoob, M. J., and Shariatpanahi, M., “A Novel Meta-Heuristic Optimization Algorithm Inspired by Group Hunting of Animals: Hunting Search”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 60, No. 7, pp. 2087–2098, 2010.
 24. Askarzadeh, A., and Rezaadeh, A., “A New Heuristic Optimization Algorithm for Modeling of Proton Exchange Membrane Fuel Cell: Bird Mating Optimizer”, *International Journal of Energy Research*, Vol. 37, No. 10, pp. 1196–1204, 2013.
 25. Gandomi, A. H., and Alavi, A. H., “Krill Herd: A New Bio-Inspired Optimization Algorithm”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, No. 12, pp. 4831–4845, 2012.
 26. Pan, W. T., “A New Fruit Fly Optimization Algorithm: Taking the Financial Distress Model as an Example”, *Knowledge-Based Systems*, Vol. 26, pp. 69–74, 2012.
 27. Mucherino, A., Seref, O., Seref, O., Kundakcioglu, O. E., and Pardalos, P., “Monkey Search: a Novel Metaheuristic Search for Global Optimization”, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 953, No. 1, pp. 162–173, 2007.
 28. Roth, M., and Wicker, S., “Termite: A Swarm Intelligent Routing Algorithm for Mobilewireless Ad-Hoc Networks”, *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 31, pp. 155–184, 2006.
 29. Mirjalili, S., Mirjalili, S. M., and Lewis, A., “Grey Wolf Optimizer”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 69, pp. 46–61, 2014.
 30. Abualigah, L., Shehab, M., Alshinwan, M., and Alabool, H., “Salp Swarm Algorithm: a Comprehensive Survey”, *Neural Computing and Applications 2019 32:15*, Vol. 32, No. 15, pp. 11195–11215, 2019.
 31. Mirjalili S., and Lewis, A., “The Whale Optimization Algorithm”, *Advances in Engineering Software*, Vol.

- 95, pp. 51–67, 2016.
32. Heidari, A. A., Faris, H., Mirjalili, S., Aljarah, I., and Mafarja, M., “Ant Lion Optimizer: Theory, Literature Review, and Application in Multi-layer Perceptron Neural Networks”, *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 811, pp. 23–46, 2020.
 33. Erol O. K., and Eksin, I., “A New Optimization Method: Big Bang–Big Crunch”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 37, No. 2, pp. 106–111, 2006.
 34. Du, H., Wu, X., and Zhuang, J., “Small-World Optimization Algorithm for Function Optimization”, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Vol. 4222 LNCS-II, pp. 264–273, 2006.
 35. Hatamlou, A., “Black Hole: A New Heuristic Optimization Approach for Data Clustering”, *Information Sciences*, Vol. 222, pp. 175–184, 2013.
 36. Mirjalili, S., Mirjalili, S. M., and Hatamlou, A., “Multi-Verse Optimizer: a Nature-Inspired Algorithm for Global Optimization”, *Neural Computing and Applications 2015 27:2*, Vol. 27, No. 2, pp. 495–513, 2015.
 37. Kaveh A., and Khayatazad, M., “A New Meta-Heuristic Method: Ray Optimization”, *Computers & Structures*, Vol. 112–113, pp. 283–294, 2012.
 38. Atashpaz-Gargari, E., and Lucas, C., “Imperialist Competitive Algorithm: An Algorithm for Optimization Inspired by Imperialistic Competition”, *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2007*, pp. 4661–4667, 2007.
 39. Ray, T., and Liew, K. M., “Society and Civilization: An Optimization Algorithm Based on the Simulation of Social Behavior”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 7, No. 4, pp. 386–396, 2003.
 40. Doğan, B., and Ölmez, T., “A New Metaheuristic for Numerical Function Optimization: Vortex Search Algorithm”, *Information Sciences*, Vol. 293, pp. 125–145, 2015.
 41. Ting, L., and Klein, R., *Viscous Vortical Flows*, Vol. 374. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991.
 42. Saffman, P. G., *Vortex Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
 43. Tayyab, M., Cheema, T. A., Malik, M. S., Muzaffar, A., Sajid, M. B., and Park, C. W., “Investigation of Thermal Energy Exchange Potential of a Gravitational Water Vortex”, *Renewable Energy*, Vol. 162, pp. 1380–1398, 2020.
 44. Sugimoto, N., “Nonlinear Interaction Between Vortex and Wave in Rotating Shallow Water”, *Vortex Structures in Fluid Dynamic Problems*, Vol. 1, pp. 33–52, 2017.