

آنالیز ناپایداری دینامیکی ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی تحت جرم‌های متحرک

مهران قمشی بزرگ

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی جندی شاپور

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۱۷ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۸/۲۳)

چکیده - در این مقاله، ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک^۱ و تشدید خارجی^۲ ورق‌های مدرج تابعی^۳ نسبتاً ضخیم تحت عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک بررسی شده است. فرض می‌شود که مدول یانگ و جرم واحد حجم ورق به‌طور پیوسته در سرتاسر ضخامت ورق تغییر کرده و از یک تابع توانی از یک کسر حجمی^۴ تبعیت می‌کنند. ورق‌های مستطیلی در نظر گرفته شده دارای دو تکیه‌گاه ساده در دو لبه متقابل به‌هم هستند در حالی که همه ترکیب‌های ممکن دیگر از شرایط مرزی آزاد، تکیه‌گاه ساده و گیردار برای دو لبه دیگر می‌تواند در نظر گرفته شود. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کوپل شده حاکم بر ورق مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و تنش‌های برشی عرضی استخراج شده و همه مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک در فرمول‌بندی دینامیکی لحاظ شده است. با استفاده از روش گالرکین^۵، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب وابسته به زمان تبدیل شده‌اند. از روش نیمه‌تحلیلی آنالیز هموتوبی^۶ برای به‌دست آوردن نواحی پایدار و ناپایدار و منحنی‌های تشدید خارجی در فضای پارامترهای سیستم استفاده شده است. اثر مقادیر اندیس توان^۷ کسر حجمی، نسبت ضخامت به طول ورق و ترکیب‌های متفاوت شرایط مرزی روی پایداری دینامیکی سیستم بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که کاهش اندیس توان کسر حجمی، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق و درجه بالاتر قیود اعمال شده به دو لبه دیگر ورق (به ترتیب آزاد، تکیه‌گاه ساده و گیردار) سبب انتقال ناحیه ناپایدار و منحنی‌های تشدید به بالای صفحه پارامترها شده و از نقطه‌نظر فیزیکی، سیستم پایدارتر می‌شود. برای تایید نتایج روش آنالیز هموتوبی علاوه بر استفاده از شبیه‌سازی عددی جابجایی نقطه میانی ورق، از تئوری فلاکه^۸ نیز استفاده شده است. همچنین در یک حالت خاص، نتایج این مطالعه با نتایج مطالعه دیگر مقایسه و تایید شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق مدرج تابعی، جرم متحرک، پایداری دینامیکی، روش آنالیز هموتوبی.

Dynamic Instability Analysis of Transverse Vibrations of Functionally Graded Rectangular Plates under Moving Masses

M. Ghomeshi Bozorg

Department of Mechanical Engineering, Jundi Shapur University of Technology, Dezful, Iran.

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m.ghomeshibozorg@jsu.ac.ir

Abstract: In this paper, dynamic instability due to parametric and external resonances of moderately thick functionally graded rectangular plates, under successive moving masses, is examined. Plate mass per unit volume and Young's modulus are assumed to vary continuously through the thickness of the plate and obey a power-law distribution of the volume fraction of the constituent. The considered rectangular plates have two opposite simply supported edges while all possible combinations of free, simply supported and clamped boundary conditions are applied to the other two edges. The governing coupled partial differential equations of the plate are derived based on the first-order shear deformation theory with consideration of the rotational inertial effects and the transverse shear stresses. All inertial components of the moving masses are considered in the dynamic formulation. Using the Galerkin procedure, the partial differential equations are transformed into a set of ordinary differential equations with time-dependent coefficients. The Homotopy Analysis Method (HAM) is implemented as a semi-analytical method to obtain stable and unstable zones and external resonance curves in a parameters space. The effects of the index of volume fraction, thickness to length ratio, and different combinations of the boundary conditions on the dynamic stability of the system are also investigated. The results indicate that decreasing the index of volume fraction, increasing thickness to length ratio, and higher degree of edge constraints (respectively from free to simply-supported to clamped) applied to the other two edges of the plate shift up the instability region and resonance curves in the parameters plane and, from a physical point of view, the system becomes more stable. In addition to using numerical simulations of the plate midpoint displacement, Floquet theory is also employed to validate the HAM results. Finally, the results of this study, in a particular case, are compared and validated with the results of other works.

Keywords: Functionally graded plate, Moving mass, Dynamic stability, Homotopy analysis method.

فهرست علائم

سرعت جسم متحرک (m.s^{-1})	V	طول ورق (شکل ۱) (m)	a
موقعیت جرم متحرک (شکل ۱) (m)	X_{M1}, X_{M2}	تابع زمانی متناظر با شکل مود j ام	$A_j(t)$
چگالی (۲) (Kg.m^{-3})	ρ	حل معادله رتبه i ام هموتوبی	\bar{A}_i
جابجایی زاویه‌ای (۳) (rad)	φ_1, φ_2	عرض ورق (شکل ۱) (m)	b
جابجایی خطی (۳) (m)	φ_3	مدول یانگ (N.m^{-2})	E
تنش (۴) (N.m^{-2})	σ	شتاب جاذبه زمین (m.s^{-2})	g
ضریب پواسون (۴)	ν	ضخامت ورق (شکل ۱) (m)	h
توابع شکل ورق (۱۰)	$\tilde{\varphi}_{1j}, \tilde{\varphi}_{2j}, \tilde{\varphi}_{3j}, \dots$	جرم واحد سطح ورق (۷) (Kg.m^{-2})	I_1
نسبت طول به عرض ورق (۱۲)	η	گشتاور اینرسی واحد سطح ورق (۷) (Kg)	I_2
نسبت ضخامت به طول ورق (۱۲)	δ	ضریب اصلاح برش (۴)	k
ژامین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق (۱۲)	ω_j	جرم جسم متحرک (شکل ۱)	M
دلتهای کرانکر (۲۸)	δ_{ij}	مؤلفه‌های گشتاور خمشی (۴) (N.m)	$M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$
پارامتر بدون بعد فرکانس پایه (جدول ۲)	$\bar{\beta}_1$	گشتاور پیچشی (۴) (N.m)	M_{13}, M_{23}
دلتهای دیراک (۳۴)	$\bar{\delta}$	اندیس توان کسر حجمی (۱)	p
پارامتر بدون بعد جرم (۳۸)	α	نیروی وارد بر واحد سطح ورق (۷) (N.m^{-2})	P
پارامتر بدون بعد سرعت (۳۸)	γ	نیروی جرم متحرک به ورق (۳۱) (N)	P_M
پارامتر بدون بعد زمان (۴۶)	τ	مؤلفه‌های نیروی برشی (۴) (N)	Q_1, Q_2
پارامتر کمکی (۴۹)	$\tilde{\lambda}$	پارامتر مصنوعی	r
امین ضریب بسط (۵۱)	λ_i	زمان (sec)	t
فرکانس پاسخ (۵۱)	ω	مؤلفه‌های جابجایی (m)	U_1, U_2, U_3, \dots

۱- مقدمه

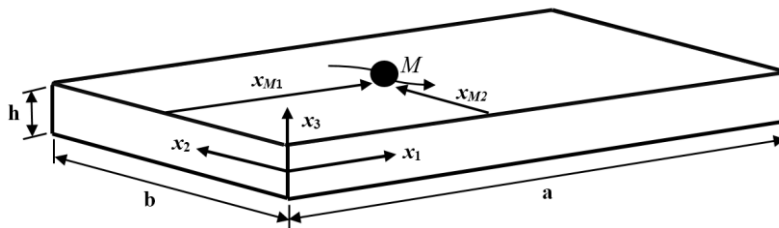
ورق‌ها در صنایع مختلف دارای کاربردهای فراوانی هستند. بنابراین برای طراحان شناخت رفتار دینامیکی ورق‌ها یک نیاز ضروری است. در این میان به دلیل کاهش تمرکز تنش و تنش‌های باقیمانده در ورق‌هایی از جنس مواد مدرج تابعی، استفاده از آنها به طور روزافزونی در صنایع مختلف مورد توجه قرار گرفته است.

در مقایسه با تعداد مطالعاتی که در زمینه ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مدرج تابعی انجام شده است، تعداد محدودی از آنها به مسئله پاسخ دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت عبور بار متحرک پرداخته‌اند. ملک‌زاده و همکاران با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۹ و به‌کارگیری اصل هامیلتون^{۱۰} و روش المان محدود، پاسخ پوسسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی - مکانیکی متحرک و بارهای متحرک نامتقارن را مورد مطالعه قرار دادند [۱ و ۲]. سونگ و همکاران فقط با در نظر گرفتن مؤلفه اینرسی حاصل از شتاب قائم جرم متحرک، با استفاده از تئوری ورق کلاسیک^{۱۱} و روش حل ریلی - ریتز بهبود یافته^{۱۲} برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت بار متحرک اقدام کردند [۳]. یوسف‌زاده و همکاران با صرف نظر کردن از اینرسی جرم متحرک و مدل نمودن آن به صورت یک نیروی متحرک، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی از جنس مدرج تابعی در تماس با سیال غیرقابل تراکم تحت بار متحرک را مطالعه کردند [۴]. در هیچ یک از این مطالعات اثر تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک در تعیین پاسخ دینامیکی سیستم لحاظ نشده است.

یکی از جنبه‌های مهم در مسئله یک عضو الاستیک تحت عبور جسم متحرک، شناخت شرایطی است که سبب بروز ناپایداری دینامیکی در عضو الاستیک می‌شود. لحاظ تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم‌های متحرک و عبور متناوب آنها از روی یک عضو الاستیک سبب می‌شود که ضرایب معادله حاکم بر ارتعاشات سیستم به طور متناوب با زمان تغییر کرده و این نوع سیستم‌ها جزء سیستم‌های متغیر با زمان دسته‌بندی شوند. تغییر

ضرایب با زمان نقش تحریک پارامتریک را برای سیستم ایفا می‌کند که می‌تواند در شرایط معینی سبب ناپایداری دینامیکی یا به اصطلاح تشدید پارامتریک در سیستم شود. در این نوع سیستم‌ها، در شرایط دیگری، می‌تواند پاسخ فزاینده ایجاد شود به این ترتیب که اگر در معادلات حاکم، فرکانس عبارت تحریک کننده با فرکانس پاسخ همگن سیستم برابر شود شرایط برای رشد فزاینده پاسخ دینامیکی سیستم ایجاد می‌شود. به این حالت، وقوع تشدید خارجی در سیستم گفته می‌شود.

تشدید پارامتریک در سیستم‌های تحت عبور جرم متحرک توسط محققان متعددی مورد توجه قرار گرفته است. نلسون و کانور [۵] و ماکرتیچ [۶] برای تیر با تکیه‌گاه ساده و تحت اثر عبور جرم‌های متحرک، با استفاده از روش تئوری فلاکه نواحی پایدار و ناپایدار را در فضای پارامترهای سیستم تعیین کردند. آلدريم و باز با استفاده از تئوری تحریک تکانشی پایداری تیر تحت اثر حرکت متناوب جرم‌های متحرک را مطالعه کردند [۷]. راثو [۸] برای بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی تحت بار متحرک و پیرمادیان و همکاران [۹] در بررسی اثر تغییر شکل‌های بزرگ بوجود آمده در تیر تحت عبور جرم متحرک روی نتایج آنالیز پایداری، از روش مقیاس‌های چندگانه جهت تعیین شرایط وقوع ناپایداری استفاده کردند. ترکان و همکاران پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نازک با تکیه‌گاه ساده تحت عبور پی در پی جرم‌های متحرک را با استفاده از روش پارامترهای فشرده مطالعه کردند [۱۰]. آنها در دو مطالعه دیگر با استفاده از روش هارمونیک بالانس نمودی برای سه حالت حرکت متوالی جرم‌های متحرک روی خط راست، خط مورب و مسیر دایره‌ای روی یک ورق نسبتاً ضخیم، نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه پارامترهای جسم متحرک تعیین کردند [۱۱ و ۱۲]. مطالعات انجام شده توسط قمشی بزرگ و همکاران [۱۳]، در مسئله تیر تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با استفاده از روش اختلالی هموتوبی^{۱۳} و حسن‌آبادی و همکاران [۱۴]، در مسئله ورق تحت عبور متوالی جرم متحرک با استفاده از روش آنالیز مودال بهبود یافته^{۱۴} و تعیین ماکزیمم فاکتور بزرگنمایی



شکل ۱- ورق مدرج تابعی تحت عبور جرم متحرک

و شبیه‌سازی‌های عددی لازم انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش آنالیز هموتویی با دقت مناسبی شرایط پایداری سیستم ورق مدرج تابعی - جرم متحرک را پیش‌بینی کرده و می‌تواند به‌عنوان روشی مناسب برای آنالیز پایداری دینامیکی این سیستم در نظر گرفته شود.

۲- معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدرج تابعی

شکل (۱) یک ورق مستطیلی مدرج تابعی نسبتاً ضخیم و ایزوتروپیک^{۱۶} به طول a ، عرض b و ضخامت h تحت عبور جرم متحرک به جرم M را نشان می‌دهد.

سیستم مختصات کارترین (x_1, x_2, x_3) برای بیان روابط ریاضی استفاده می‌شود. صفحه x_1, x_2 در سطح میانی ورق تغییر شکل نیافته قرار داده شده است و مختصات (x_{M1}, x_{M2}) موقعیت لحظه‌ای جرم متحرک روی صفحه را نشان می‌دهد. ورق در امتداد دو لبه متقابل و موازی $x_1 = a$ و $x_1 = 0$ دارای تکیه‌گاه ساده است که در دو لبه $x_2 = b$ و $x_2 = 0$ ممکن است دارای تکیه‌گاه ساده، آزاد و یا گیردار باشد. ورق مدرج تابعی به صورت مخلوطی از یک فلز و یک سرامیک در نظر گرفته شده که خواص ماده به صورت پیوسته در جهت ضخامت تغییر می‌کند. بر این اساس به صورت زیر یک تابع کسر حجمی برای بیان تغییر مدول یانگ و چگالی ورق در نظر گرفته شده است:

$$E(x_r) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{x_r}{h} \right)^p \quad (1)$$

$$\rho(x_r) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{x_r}{h} \right)^p \quad (2)$$

دینامیکی^{۱۵} ورق، از جمله مطالعات محدودی هستند که با در نظر گرفتن مشخصه متغیر با زمان سیستم‌های الاستیک تحت جرم متحرک، شرایط بروز تشدید خارجی را نیز مورد توجه قرار داده‌اند. بر اساس بهترین دانش نگارنده تاکنون شرایط بروز ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی در ورق مدرج تابعی تحت عبور جرم‌های متحرک بررسی نشده است. در این مطالعه با در نظر گرفتن تمام مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک و با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادله حاکم بر ارتعاشات یک ورق مدرج تابعی مستطیلی نسبتاً ضخیم تحت عبور متوالی جرم‌های تعیین شده و سپس با استفاده از روش آنالیز هموتویی شرایط ناپایداری دینامیکی سیستم بررسی می‌شود. پس از آن نتایج از طریق تعیین ضابطه مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ضابطه منحنی‌های مکان هندسی شرایط بروز تشدید در صفحه پارامترها تعیین می‌شوند. به این ترتیب با تعیین شرایط وقوع ناپایداری و بروز تشدید در این سیستم سعی می‌شود تا مطالعات گذشته از این جنبه تکمیل شده و توانایی روش آنالیز هموتویی در تعیین شرایط پایداری دینامیکی این سیستم نیز نشان داده شود. ویژگی روش آنالیز هموتویی نسبت به روش اختلالی هموتویی این است که در روش آنالیز هموتویی از طریق تامین شرایط لازم برای تضمین همگرایی حل، دقت نتایج افزایش می‌یابد [۱۵]. به منظور تکمیل بررسی، اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی، که مبین نحوه توزیع مواد در جهت ضخامت ورق مدرج تابعی است، اثر نسبت ضخامت به طول ورق و اثر شرایط مرزی ورق روی شرایط پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه برای تایید نتایج به دست آمده از روش آنالیز هموتویی، مقایسه

آن ثابت و برابر $\frac{\pi}{3}$ در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای D_1 و D_2 نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$D_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} dx_3, \quad (5)$$

$$D_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} x_3^2 dx_3$$

و در روابط نیروهای برشی Q_1 و Q_2 برای ورق مدرج تابعی مورد نظر، ضریب اصلاح برش k^T به صورت زیر تعیین می‌شود [۱۷]:

$$k^T = \frac{5}{6} + \frac{0.75(e^{-\nu/25p} - e^{-p})}{a} \left(\frac{1.0h}{a} - 2 \right) - \frac{0.62(e^{-\nu/25p} - e^{-p})}{a} \left(\frac{1.0h}{a} - 1 \right) \quad (6)$$

با استفاده از معادله ناویر^{۱۹} در سیستم مختصات دکارتی و پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادلات حاکم بر ورق مستطیلی مدرج تابعی به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۶]:

$$\begin{aligned} M_{1,1} + M_{1,2} - Q_1 &= -I_1 \ddot{\phi}_1, \\ M_{1,2} + M_{2,2} - Q_2 &= -I_2 \ddot{\phi}_2, \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - P &= I_3 \ddot{\phi}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن P نیروی عرضی عمود بر واحد سطح ورق و یک نقطه در بالای هر پارامتر مبین مشتق جزئی آن پارامتر نسبت به زمان t است و عبارات اینرسی I_1 و I_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) dx_3, \quad (8)$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) x_3^2 dx_3$$

از جای گذاری روابط (۴) در معادلات (۷)، معادلات حاکم بر حرکت ورق بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{D_1(1-\nu)}{2} \nabla^T \phi_1 + \frac{D_1(1+\nu)}{2} (\phi_{1,1} + \phi_{2,2})_{,1} - \frac{D_1 k^T (1-\nu)}{2} (\phi_1 - \phi_{2,1}) &= I_1 \ddot{\phi}_1, \\ \frac{D_2(1-\nu)}{2} \nabla^T \phi_2 + \frac{D_2(1+\nu)}{2} (\phi_{1,1} + \phi_{2,2})_{,2} - \frac{D_2 k^T (1-\nu)}{2} (\phi_2 - \phi_{2,2}) &= I_2 \ddot{\phi}_2, \\ \frac{D_1 k^T (1-\nu)}{2} (\nabla^T \phi_1 - \phi_{1,1} - \phi_{2,2}) - P &= I_3 \ddot{\phi}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن ∇^T نماد عملگر لاپلاسین است.

در این روابط زیر نویس m و c به ترتیب مشخصه فلز و سرامیک را مشخص می‌کنند و p اندیس توان کسر حجمی است که فقط مقادیر مثبت را می‌تواند بگیرد. از روابط (۱) و (۲) ملاحظه می‌شود که مستقل از مقدار p ، در صفحه پایینی $x_3 = -\frac{h}{2}$ ورق از فولاد خالص و در صفحه بالایی $x_3 = \frac{h}{2}$ ورق از سرامیک خالص تشکیل شده است و به ازای $p=0$ ورق کاملاً از سرامیک و به ازای $p \rightarrow \infty$ ورق کاملاً از فلز تشکیل یافته است.

جابجایی نقاط ورق در امتداد محورهای x_1 و x_2 به ترتیب با U_1 و U_2 و جابجایی در جهت عمود بر سطح میانی تغییر شکل نیافته به وسیله U_3 نشان داده می‌شود. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در دستگاه مختصات کارتزین (x_1, x_2, x_3) مؤلفه‌های جابجایی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} U_1 &= -x_2 \phi_1(x_1, x_2, t), \\ U_2 &= -x_1 \phi_2(x_1, x_2, t), \\ U_3 &= \phi_3(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن ϕ_1 و ϕ_2 به ترتیب جابجایی‌های زاویه‌ای حول محور x_1 و x_2 در صفحه میانی هستند و ϕ_3 جابجایی عرضی است و t متغیر زمان است. با فرض کوچک بودن جابجایی‌ها و با استفاده از روابط کرنش - جابجایی و روابط تنش - کرنش، برآیند گشتاورهای خمشی، گشتاورهای پیچشی و نیروهای برشی عرضی در واحد طول برای ورق مستطیلی مدرج تابعی بر حسب جابجایی‌های ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ_3 به صورت زیر حاصل می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 = -D_1 (\phi_{1,1} + \nu \phi_{2,2}), \\ M_{1,2} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = -D_2 (\phi_{2,2} + \nu \phi_{1,1}), \\ M_{2,2} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = -\frac{D_2(1-\nu)}{2} (\phi_{1,1} + \nu \phi_{2,2}), \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 = -\frac{D_1(1-\nu)k^T}{2} (\phi_1 - \nu \phi_{2,1}), \\ Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 = -\frac{D_2(1-\nu)k^T}{2} (\phi_2 - \nu \phi_{2,2}) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ و ν ضریب پواسون^{۱۷} است که مقدار

۳- گسسته‌سازی معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم، از روش گالرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای^{۲۰} به معادلات دفرانسیل معمولی^{۲۱} استفاده می‌شود. برای این منظور توابع φ_1 ، φ_2 و φ_3 مطابق روابط زیر به دامنه زمان و مکان جداسازی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, t) &= \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{1j}(X_1, X_2) A_j(t), \\ \varphi_2(x_1, x_2, t) &= \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{2j}(X_1, X_2) A_j(t), \end{aligned} \quad (10)$$

که در این روابط $\tilde{\varphi}_{1j}$ ، $\tilde{\varphi}_{2j}$ و $\tilde{\varphi}_{3j}$ توابع شکل زام، $A_j(t)$ تابع زمانی متناظر با شکل مود زام و X_1 و X_2 پارامترهای بدون بعدی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$X_1 = \frac{x_1}{a}, \quad X_2 = \frac{x_2}{b} \quad (11)$$

به منظور عمومیت بخشیدن به معادلات و تحلیل آنها، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{a}{b}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad \beta_{1j} = \omega_j \sqrt{\frac{I_1}{D_1}}, \\ \beta_{2j} &= a \omega_j \sqrt{\frac{I_1}{D_1}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \end{aligned} \quad (12)$$

در این روابط ω_j نماد فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی است. با جای‌گذاری روابط (۱۰) در معادلات حاکم (۹)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\begin{aligned} & \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) + \frac{v_2}{v_1} \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) - \\ & \frac{D_2 k^2 a^2}{D_1} \left(\tilde{\varphi}_{1j} - \tilde{\varphi}_{2j,1} \right) \end{aligned} \right] A_j(t) = \\ & \frac{I_1 a^2}{D_1 v_1} \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{1j} \ddot{A}_j(t), \\ \sum_{j=1}^n \left[\begin{aligned} & \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) + \frac{v_2}{v_1} \eta \left(\tilde{\varphi}_{1,j,22} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) - \\ & \frac{D_2 k^2 a^2}{D_1} \left(\tilde{\varphi}_{1j} - \eta \tilde{\varphi}_{2j,2} \right) \end{aligned} \right] A_j(t) = \\ & \frac{I_1 a^2}{D_1 v_1} \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{1j} \ddot{A}_j(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\left(\tilde{\varphi}_{2,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{2,j,22} \right) - \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) \right] A_j(t) - \\ \frac{a}{D_1 k^2 v_1} P = \frac{I_1 a^2}{D_1 k^2 v_1} \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{2j} \ddot{A}_j(t) \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_i}$ ، $(\cdot)_{,ij} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial X_i \partial X_j}$ ، $v_1 = \frac{1-v}{2}$ و $v_2 = \frac{1+v}{2}$ است.

۳-۱- آنالیز ارتعاشات آزاد

برای دستیابی به شکل مودهای ارتعاشی، ضرورت دارد که آنالیز ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی مورد بررسی قرارگیرد. حل هارمونیک ارتعاشات آزاد ورق برای جابجایی عرضی φ_2 و جابجایی زاویه‌ای φ_1 و φ_3 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\varphi_1(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{1j}(X_1, X_2) e^{i\omega_j t}, \quad (14)$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{2j}(X_1, X_2) e^{i\omega_j t}, \quad (15)$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^n a \tilde{\varphi}_{3j}(X_1, X_2) e^{i\omega_j t} \quad (16)$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ است. از جای‌گذاری دسته روابط (۱۴) تا (۱۶) و $P=0$ در معادلات (۹)، سه معادله کوپله زیر برای ارتعاشات آزاد ورق حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\begin{aligned} & \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) + \frac{v_2}{v_1} \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) - \\ & \frac{D_2 k^2 a^2}{D_1} \left(\tilde{\varphi}_{1j} - \tilde{\varphi}_{2j,1} \right) \end{aligned} \right] = \\ & - \frac{I_1 a^2}{D_1 v_1} \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \tilde{\varphi}_{1j}, \\ \sum_{j=1}^n \left[\begin{aligned} & \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) + \frac{v_2}{v_1} \eta \left(\tilde{\varphi}_{1,j,22} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) - \\ & \frac{D_2 k^2 a^2}{D_1} \left(\tilde{\varphi}_{1j} - \eta \tilde{\varphi}_{2j,2} \right) \end{aligned} \right] = \\ & - \frac{I_1 a^2}{D_1 v_1} \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \tilde{\varphi}_{2j}, \\ \sum_{j=1}^n \left[\left(\tilde{\varphi}_{2,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{2,j,22} \right) - \left(\tilde{\varphi}_{1,j,11} + \eta \tilde{\varphi}_{1,j,22} \right) \right] = - \frac{I_1 a^2}{D_1 k^2 v_1} \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \tilde{\varphi}_{2j} \end{aligned} \quad (17)$$

پارامتر s_{rj} ، s_{rj} و s_{rj} به صورت زیر به ترتیب با پارامترهای α_{rj} ، α_{rj} و α_{rj} ارتباط دارند:

$$\alpha_{rj}^+ = \mu_r^+ + \eta^+ s_{rj}^+, \quad \alpha_{rj}^- = \mu_r^- - \eta^- s_{rj}^-, \quad (23)$$

$$\alpha_{rj}^+ = \mu_r^+ - \eta^+ s_{rj}^+$$

با استفاده از شرایط مرزی ورق، ثابت‌های A_1 تا A_6 در دسته توابع (۲۲) تعیین می‌شوند. شرایط تکیه‌گاه ساده در امتداد لبه‌های $X_1 = 1$ و $X_1 = 0$ به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$M_{r1} = \tilde{\varphi}_r = \tilde{\varphi}_r = 0 \quad (24)$$

و شرایط مرزی در امتداد لبه‌های $X_r = 1$ و $X_r = 0$ برای لبه آزاد:

$$M_{rr} = M_{r\tau} = Q_r = 0 \quad (25)$$

و برای یک لبه تکیه‌گاه ساده:

$$M_{rr} = \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_r = 0 \quad (26)$$

و برای لبه گیردار به صورت:

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_r = \tilde{\varphi}_r = 0 \quad (27)$$

قابل بیان هستند. جای‌گذاری روابط (۲۲) در روابط (۱۸) و جای‌گذاری نتیجه در شرایط مرزی مناسب در امتداد لبه‌های $X_r = 1$ و $X_r = 0$ ، به شش معادله همگن منجر می‌شود. صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب معادله همگن حاصل، که شرط وجود حل غیربدیهی برای این معادلات است، معادله فرکانسی سیستم را معرفی می‌کند که از حل آن فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی حاصل شده و سپس ضرایب توابع شکل از حل دستگاه معادلات مشخص می‌شوند.

در این مطالعه، در ورق مدرج تابعی از آلومینیوم به‌عنوان فلز و از آلومینا^{۲۲} به‌عنوان سرامیک استفاده شده است. جدول (۱) مدول یانگ و چگالی مواد استفاده شده در ورق مدرج تابعی را نشان می‌دهد.

در ادامه برای موارد مدنظر در بررسی، شامل اثر اندیس توان کسر حجمی (p)، نسبت ضخامت به طول ورق (δ) و شرایط مرزی ورق روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{r1}$ ، $\tilde{\varphi}_{r1}$ و $\tilde{\varphi}_{r1}$ به دست می‌آید. سپس با توجه به ویژگی تعامل مودهای ارتعاشی در ورق‌های مستطیلی می‌توان نوشت:

هاشمی حسینی و همکاران نشان دادند که در شرایطی که حداقل دو لبه متقابل ورق مدرج تابعی دارای تکیه‌گاه ساده باشد، با در نظر گرفتن حل عمومی معادلات (۱۷) بر حسب توابع پتانسیل بی‌بعد W_{rj} ، W_{rj} و W_{rj} به صورت:

$$\tilde{\varphi}_{rj} = c_{rj} W_{rj,1} + c_{rj} W_{rj,1} - \eta W_{rj,2}, \quad (18)$$

$$\tilde{\varphi}_{rj} = c_{rj} \eta W_{rj,2} + c_{rj} \eta W_{rj,2} - W_{rj,1},$$

$$\tilde{\varphi}_{rj} = W_{rj} + W_{rj}$$

امکان غیرکوپله کردن معادلات (۱۷) وجود دارد [۱۷]. پس از جای‌گذاری توابع (۱۸) در معادلات (۱۷) و انجام عملیات ریاضی لازم ضرایب c_{rj} و c_{rj} به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$c_{rj} = 1 - \frac{1}{v_1} \left(\frac{\alpha_{rj}^+}{\alpha_{rj}^-} \right)^T, \quad c_{rj} = 1 - \frac{1}{v_1} \left(\frac{\alpha_{rj}^-}{\alpha_{rj}^+} \right)^T \quad (19)$$

که در آن

$$\alpha_{rj}^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{rj}^+}{\varepsilon^+} - \frac{\beta_{rj}^+}{k^+ v_1} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{rj}^+}{k^+ v_1} + \frac{\beta_{rj}^+}{\varepsilon^+} \right) \right)^2 - \frac{\beta_{rj}^+}{\varepsilon^+}},$$

$$\alpha_{rj}^- = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{rj}^-}{k^+ v_1} + \frac{\beta_{rj}^-}{\varepsilon^+} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{rj}^-}{k^+ v_1} + \frac{\beta_{rj}^-}{\varepsilon^+} \right) \right)^2 - \frac{\beta_{rj}^-}{\varepsilon^+}}, \quad (20)$$

$$\alpha_{rj}^+ = \left(\frac{\beta_{rj}^+}{k^+ v_1} - \frac{k^+}{\varepsilon^+} \right)$$

به این ترتیب معادله (۱۷) می‌تواند بر حسب سه تابع پتانسیل بدون بعد به شکل زیر بازنویسی شود

$$W_{rj,1} + \eta^+ W_{rj,2} = -\alpha_{rj}^+ W_{rj},$$

$$W_{rj,1} + \eta^- W_{rj,2} = -\alpha_{rj}^- W_{rj}, \quad (21)$$

$$W_{rj,1} + \eta^+ W_{rj,2} = -\alpha_{rj}^+ W_{rj}$$

برای شرایط تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_r = 0$ مجموعه حل زیر برای دسته معادلات (۲۱) می‌تواند نوشته شود:

$$W_{rj} = \left(A_1 \sin(s_{rj} X_r) + A_2 \cos(s_{rj} X_r) \right) \sin(\mu_r X_1),$$

$$W_{rj} = \left(A_3 \sinh(s_{rj} X_r) + A_4 \cosh(s_{rj} X_r) \right) \sin(\mu_r X_1),$$

$$W_{rj} = \left(A_{r1} \sinh(s_{rj} X_r) + A_{r2} \cosh(s_{rj} X_r) \right) \sin(\mu_r X_1) \quad (22)$$

که در این روابط $\mu_r = \mu_r = \mu_r = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) و

جدول ۱- مدول یانگ و چگالی فلز و سرامیک استفاده شده در ورق مدرج تابعی

فلز آلومینوم		سرامیک آلومینا	
چگالی (Kg.m ⁻³)	مدول یانگ (Gpa)	چگالی (Kg.m ⁻³)	مدول یانگ (Gpa)
۲۷۰۲	۷۰	۳۸۰۰	۳۸۰

جدول ۲- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{r_i}$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ برای مقادیر مختلف اندیس توان کسر

حجمی (p) ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی SSSS، $\eta = \frac{a}{b} = 1$ و $\delta = h/a = 0.1$

p	$\tilde{\varphi}_{r_i}$	$\bar{\beta}_1 [17]$
0	$(0.4664 \sin(3/0.881X_r) - 0.0002 \sinh(5/2895X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.05769
0.5	$(0.4645 \sin(2/9754X_r) - 0.0008 \sinh(5/2367X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.04920
1	$(0.4666 \sin(2/8199X_r) - 0.0017 \sinh(5/1567X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.04454
10	$(0.4738 \sin(2/8677X_r) - 0.0014 \sinh(5/1529X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.03627
بینهایت	$(0.4671 \sin(3/1390X_r) - 0.0001 \sinh(5/3155X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.02936

جدول ۳- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_{r_i}$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول

ورق مدرج تابعی با شرایط مرزی SSSS، $\eta = \frac{a}{b} = 1$ و $\delta = \frac{h}{a} = 10$

δ	$\tilde{\varphi}_{r_i}$	$\bar{\beta}_1 [17]$
0.05	$(0.4504 \sin(3/8182X_r) + 0.0016 \sinh(5/8112X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.00963
0.1	$(0.4738 \sin(2/8677X_r) - 0.0014 \sinh(5/1529X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.03627
0.2	$(0.5810 \sin(3/7976X_r) + 0.0036 \sinh(5/2677X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.1304

۲-۳- آنالیز ارتعاشات اجباری

با استفاده از رابطه (۱۷)، رابطه (۱۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum_{j=1}^n -\omega_j^2 \tilde{\varphi}_{r_j} A_j(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{r_j} \ddot{A}_j(t), \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n -\omega_j^2 \tilde{\varphi}_{r_j} A_j(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{r_j} \ddot{A}_j(t), \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n -\omega_j^2 \tilde{\varphi}_{r_j} A_j(t) + \frac{1}{aI_1} P_M = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{r_j} \ddot{A}_j(t), \quad (31)$$

که در (۳۱) نیروی وارد بر ورق از سوی جرم متحرک است. با ضرب طرفین تساوی (۲۹) در $\tilde{\varphi}_i$ و (۳۰) در $\tilde{\varphi}_{r_i}$ و (۳۱) در $\tilde{\varphi}_{r_i}$ و جمع طرفین سه تساوی حاصل و انتگرال‌گیری

$$\int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\varphi}_{r_i} \tilde{\varphi}_{r_j} + \tilde{\varphi}_{r_i} \tilde{\varphi}_{r_j} + \tilde{\varphi}_{r_i} \tilde{\varphi}_{r_j}) dX_1 dX_2 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (28)$$

بر این اساس نسبت به نرمال‌سازی شکل مودهای به دست آمده اقدام شده است. برای هر مورد در جدول‌های (۴) - (۲)، اولین شکل مود نرمال $\tilde{\varphi}_{r_i}$ به همراه پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ متناظر به دست آمده از [۱۷] ارائه شده‌اند. لازم به توضیح است که به عنوان مثال نماد SCSF نشان‌دهنده این است که لبه‌های $X_1 = 1$ و $X_1 = 0$ تکیه‌گاه ساده (S) دارند و لبه $X_2 = 0$ گیردار (C) و لبه $X_2 = 1$ آزاد (F) است.

جدول ۴- اولین شکل مود $\tilde{\varphi}_r$ و پارامتر فرکانس پایه $\bar{\beta}_1 = \omega_r h \sqrt{\rho_c / E_c}$ برای شرایط مرزی مختلف ورق مدرج تابعی با

$$\text{مشخصات } p=1 \text{ و } \eta = \frac{a}{b} = 2, \delta = \frac{h}{a} = 0.15$$

شرایط مرزی	$\tilde{\varphi}_r$	$\bar{\beta}_1 [17]$
SSSS	$(0.3947 \sin(4.0616 X_r) + 0.0147 \sinh(3.7553 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.20592
SFSF	$(-0.5277 \sinh(0.4387 X_r) + 0.5171 \cosh(0.4387 X_r) - 0.0131 \sinh(2.1406 X_r) + 0.0238 \cosh(2.1406 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.04970
SCSC	$(0.3536 \sin(3.3042 X_r) - 0.1563 \cos(3.3042 X_r) - 0.1630 \sinh(3.4254 X_r) + 0.1563 \cosh(3.4254 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.26091
SCSF	$(0.4815 \sin(1.5215 X_r) - 0.2279 \cos(1.5215 X_r) - 0.2112 \sinh(2.5679 X_r) + 0.2279 \cosh(2.5679 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.10066
SSSF	$(0.5197 \sin(1.0967 X_r) + 0.0161 \sinh(2.3955 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.07851
SSSC	$(0.3841 \sin(3.1141 X_r) - 0.0007 \sinh(3.3364 X_r)) \sin(\pi X_r)$	0.23262

از طرفین تساوی به دست آمده روی کل سطح ورق، نتیجه زیر هستند: به دست می آید:

$$\frac{d\varphi_r}{dt} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \quad (35)$$

$$\frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \right) \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \right) \frac{\partial x_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} \right) \quad (36)$$

برای وقتی که مطابق شکل (۲) جرم متحرک با سرعت ثابت V روی ورق مدرج تابعی بر روی مسیر خط مستقیم $x_r = \frac{b}{\gamma}$ حرکت می کند، با جای گذاری (۳۶) در (۳۴) و انجام عملیات جبری لازم، ضابطه نیروی وارد بر ورق به صورت زیر حاصل می شود:

$$P_M(x_1, x_r, t) = M \left(g - \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} - 2V \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_1 \partial t} - V^2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_1^2} \right) \times \bar{\delta}(x_1 - Vt) \bar{\delta}(x_r - \frac{b}{\gamma}) \quad (37)$$

برای ارائه سایر روابط می توان پارامترهای بدون بعدی به صورت:

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_{i,j} + \tilde{\varphi}_{r,i} \tilde{\varphi}_{r,j} + \tilde{\varphi}_{r,i} \tilde{\varphi}_{r,j}) dX_1 dX_r \right) \ddot{A}_j(t) + \sum_{j=1}^n \left(\omega_j \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_{i,j} + \tilde{\varphi}_{r,i} \tilde{\varphi}_{r,j} + \tilde{\varphi}_{r,i} \tilde{\varphi}_{r,j}) dX_1 dX_r \right) A_j(t) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{aI_M} P_M \tilde{\varphi}_{r,i} dX_1 dX_r \quad (32)$$

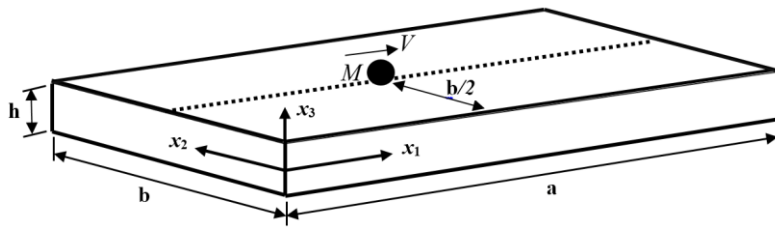
با توجه به رابطه (۲۸) و با استفاده از شکل مودهای نرمال، رابطه (۳۲) به صورت زیر ساده می شود:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \ddot{A}_j(t) + \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \delta_{ij} A_j(t) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{aI_M} P_M \tilde{\varphi}_{r,i}(X_1, X_r) dX_1 dX_r \quad (33)$$

نیروی وارد از جرم متحرک بر ورق P_M به صورت (۳۴) بیان می شود:

$$P_M(x_1, x_r, t) = M \left(g - \frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} \right) \bar{\delta}(x - x_{M1}) \bar{\delta}(y - x_{M2}) \quad (34)$$

که در آن $\bar{\delta}$ نماد تابع دلتای دیراک^{۳۳} است که برای نشان دادن موقعیت بار اعمال شده روی ورق استفاده شده است. مشتق زمانی اول و دوم φ_r به صورت (۳۵) و (۳۶) قابل تعیین



شکل ۲- عبور جرم متحرک با سرعت ثابت V از روی ورق مدرج تابعی روی مسیر خط مستقیم $x_1 = \frac{b}{\gamma}$

از جدول‌های (۲)، (۳) و (۴) ملاحظه می‌شود که برای موارد مدنظر در آنالیز پایداری دینامیکی، فرم کلی شکل مود $\tilde{\varphi}_{ri}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma})$ به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$\tilde{\varphi}_{ri}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) = K_i \sin(\pi X_i) \quad (42)$$

که در هر مورد، ضریب K_i از جدول‌های مذکور قابل محاسبه هستند. از جای‌گذاری رابطه (۴۲) در معادله (۴۱)، معادله حاکم بر مختصات مودال به شکل معادله (۴۳) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & (1 + K_i^2 \alpha^2 \sin^2(\gamma \omega_i t)) \ddot{A} + \\ & (\gamma K_i^2 \alpha \gamma \omega_i \sin(\gamma \omega_i t) \cos(\gamma \omega_i t)) \dot{A} + \\ & (\omega_i^2 - K_i^2 \alpha^2 (\gamma \omega_i)^2 \sin^2(\gamma \omega_i t)) A = \\ & K_i \frac{\alpha g}{a} \sin(\gamma \omega_i t) \end{aligned} \quad (43)$$

چنانچه فرض شود که وقتی یک جسم متحرک ورق را ترک می‌کند جسم متحرک دیگری با مشخصات یکسان با جرم و سرعت جسم قبلی روی ورق وارد می‌شود، ورق تحت یک تحریک متناوب قرار گرفته و ضرایب رابطه (۴۳) متناوب با دوره تکرار تحریک $T = \frac{a}{V}$ می‌شوند. به منظور انعکاس این واقعیت، با در نظر گرفتن بسط فوریه ضرایب معادله (۴۳)، معادله (۴۴) نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{K_i^2 \alpha^2}{\gamma} (1 - \cos^2(\gamma \omega_i t)) \right) \ddot{A} + (K_i^2 \alpha \gamma \omega_i \sin(\gamma \omega_i t)) \dot{A} + \\ & \left(\omega_i^2 - \frac{K_i^2 \alpha^2 (\gamma \omega_i)^2}{\gamma} (1 - \cos^2(\gamma \omega_i t)) \right) A = \\ & K_i \frac{\alpha g}{a} \left(\frac{\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \cos(\gamma n \omega_i t)}{\pi(1 - \gamma n^2)} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{M}{I_1 ab}, \quad \gamma = \frac{\pi V}{a \omega_1} \quad (38)$$

تعریف کرد که در آن ω_1 اولین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی است. همچنین I_1 جرم واحد سطح ورق است که از (۸) قابل محاسبه است. با استفاده از رابطه (۱۶) و با جای‌گذاری رابطه (۳۷) در (۳۳) و پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادله حاکم بر مختصات مودال به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$T(t)\ddot{A} + Y(t)\dot{A} + \Lambda(t)A = f(t) \quad (39)$$

که در آن درایه‌های ضرایب ماتریسی (۳۹) به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \delta_{ij} + \alpha \tilde{\varphi}_{ri}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}_{rj}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}), \\ Y_{ij} &= \frac{\gamma \alpha \gamma \omega_i}{\pi} \tilde{\varphi}_{ri}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}'_{rj}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}), \\ \Lambda_{ij} &= \omega_i^2 \delta_{ij} + \frac{\alpha (\gamma \omega_i)^2}{\pi^2} \tilde{\varphi}_{ri}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}''_{rj}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}), \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن $\tilde{\varphi}'_{rj}$ و $\tilde{\varphi}''_{rj}$ به ترتیب اولین و دومین مشتق شکل مود $\tilde{\varphi}_{rj}$ نسبت به X_i هستند. با در نظر گرفتن اولین مود ارتعاشی، معادله حاکم بر مختصات مودال سیستم به صورت رابطه (۴۱) درمی‌آید:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \alpha \tilde{\varphi}_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \right) \ddot{A} + \\ & \left(\frac{\gamma \alpha \gamma \omega_1}{\pi} \tilde{\varphi}_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}'_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \right) \dot{A} + \\ & \left(\omega_1^2 + \frac{\alpha (\gamma \omega_1)^2}{\pi^2} \tilde{\varphi}_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \tilde{\varphi}''_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \right) A = \\ & \frac{\alpha g}{a} \tilde{\varphi}_{r1}(\frac{Vt}{a}, \frac{1}{\gamma}) \end{aligned} \quad (41)$$

توسط لیو [۱۵] برای حل نیمه تحلیلی معادلات دیفرانسیل معرفی شده، استفاده می‌شود. در این روش در ابتدا معادله دیفرانسیل به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{A} + N(A, \dot{A}, \ddot{A}, t) = 0, \quad A(0) = 0, \quad \dot{A}(0) = 0 \quad (48)$$

که در حالت کلی N یک اپراتور دیفرانسیلی غیرخطی است که از معادله دیفرانسیل مورد نظر قابل تعیین است. در گام بعد معادله تغییر شکل مرتبه صفر این روش برای معادله دیفرانسیل (۴۸) به صورت:

$$(1-r)(\ddot{A} + A) = \lambda r(\ddot{A} + N(A, \dot{A}, \ddot{A}, t)) \quad (49)$$

نوشته می‌شود که در آن λ یک پارامتر کمکی غیر صفر برای تامین شرایط لازم برای همگرایی حل است و r یک پارامتر مصنوعی است که بین صفر و یک تغییر می‌کند $r \in [0, 1]$ که به ازای $r=0$ معادله (۴۹) به یک معادله خطی ساده تبدیل شده و به ازای $r=1$ همان معادله (۴۸) حاصل می‌شود. با افزودن و کاستن A از سمت راست تساوی (۴۹)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(1-r)(\ddot{A} + A) = \lambda r(\ddot{A} + N(A, \dot{A}, \ddot{A}, t)) + A - 1 \times A \quad (50)$$

در رابطه (۵۰) با جای گذاری ضریب ۱ به وسیله یک سری توانی از r به جای ضریب به صورت

$$1 = \omega^r - \sum_{i=1}^n r^i \lambda_i \quad (51)$$

که در آن ω مبین فرکانس پاسخ سیستم است و λ_i ها ضرایب این سری هستند، معادله هموتوبی به صورت زیر می‌تواند مرتب شود:

$$(1-r)\ddot{A} + \left(\omega^r - r - \sum_{i=1}^n r^i \lambda_i \right) A = \lambda r(\ddot{A} + N(A, \dot{A}, \ddot{A}, t)) \quad (52)$$

حل معادله (۴۸) به صورت یک سری توانی از r به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A = \sum_{i=1}^n r^i \bar{A}_i \quad (53)$$

که در آن \bar{A}_i حل معادله رتبه i ام هموتوبی و λ_i ، i امین

با توجه به تفاوت فرکانس پایه ω_1 و جرم واحد سطح I_1 ورق‌ها در مطالعه اثر اندیس توان کسر حجمی و همچنین اثر نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی ورق روی نتایج آنالیز، از رابطه (۳۸) ملاحظه می‌شود که مقادیر یکسان α و γ در ورق‌های متفاوت، مبین مقادیر متفاوت برای جرم و سرعت جسم متحرک هستند. به دلیل لزوم یکسان بودن مقادیر جرم و سرعت جسم‌های متحرک در راستای مقایسه نتایج حاصل از ورق‌های متفاوت، از میان مجموعه ورق‌هایی که نتایج آنالیز پایداری دینامیکی آنها مورد مقایسه قرار می‌گیرند، یک ورق به عنوان ورق مرجع انتخاب می‌شود. با استفاده از فرکانس پایه و جرم واحد سطح ورق مرجع (I_{R1}, ω_{R1}) و تعریف پارامتر بدون بعد جرم α_R و سرعت γ_R به صورت:

$$\alpha_R = \frac{M}{I_{R1} ab}, \quad \gamma_R = \frac{\pi V}{a \omega_{R1}} \quad (45)$$

معادله حاکم بر مختص مودال (۴۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(1 + \frac{K_r \alpha_R (1 - \cos(\gamma_R \tau))}{\gamma_R K_r} \right) \ddot{A} + \left(\frac{K_r \alpha_R \gamma_R \omega_{R1} \sin(\gamma_R \tau)}{K_r} \right) \dot{A} + \left(\omega^r - \frac{K_r \alpha_R (\gamma_R \omega_{R1})^r (1 - \cos(\gamma_R \tau))}{\gamma_R K_r} \right) A = \frac{K_r \alpha_R g}{K_r a} \left(\frac{\gamma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \cos(\gamma n \tau)}{\pi (1 - \gamma n^r)} \right) \quad (46)$$

در این رابطه پارامتر بدون بعد K_r نسبت جرم واحد سطح ورق تحت عبور جرم متحرک به جرم واحد سطح ورق مرجع است که به همراه پارامتر بدون بعد τ به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$K_r = \frac{I_1}{I_{R1}}, \quad \tau = \gamma_R \omega_{R1} t \quad (47)$$

۴- آنالیز پایداری

۴-۱- روش آنالیز هموتوبی

به منظور انجام آنالیز پایداری، از روش آنالیز هموتوبی، که

که در آن $\bar{\alpha}_R = \frac{K_1^* \alpha_R}{(\gamma K_1)}$ و $\bar{\omega}_R = \gamma_R \omega_R$ است. با تعیین عبارات دارای توان مساوی، یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} r^1: \dot{\bar{A}}_1 + \omega^1 \bar{A}_1 &= 0, \\ r^1: \ddot{\bar{A}}_1 + \omega^1 \bar{A}_1 &= \\ & \ddot{\bar{A}}_1 + (1 + \lambda_1) \bar{A}_1 + \lambda L(\bar{A}_1) + \\ & \frac{\gamma \bar{\alpha}_R g}{K_1 a \pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{(1 - \gamma n^2)} \cos(\gamma n \bar{\omega}_R t) \right), \\ r^1: \ddot{\bar{A}}_1 + \omega^1 \bar{A}_1 &= \\ & \ddot{\bar{A}}_1 + (1 + \lambda_1) \bar{A}_1 + \lambda_1 \bar{A}_1 + \lambda L(\bar{A}_1), \end{aligned} \quad (55-1)$$

$$\begin{aligned} r^2: \ddot{\bar{A}}_2 + \omega^2 \bar{A}_2 &= \\ & \ddot{\bar{A}}_2 + (1 + \lambda_2) \bar{A}_2 + \lambda_2 \bar{A}_2 + \lambda L(\bar{A}_2), \\ r^3: \ddot{\bar{A}}_3 + \omega^3 \bar{A}_3 &= \\ & \ddot{\bar{A}}_3 + (1 + \lambda_3) \bar{A}_3 + \lambda_3 \bar{A}_3 + \lambda_3 \bar{A}_3 + \\ & \lambda_3 \bar{A}_3 + \lambda L(\bar{A}_3), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} L(\bar{A}_k) &= \\ & (1 + \bar{\alpha}_R (1 - \cos(\gamma \bar{\omega}_R t))) \ddot{\bar{A}}_k + (\gamma \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_R \sin(\gamma \bar{\omega}_R t)) \dot{\bar{A}}_k + \\ & (\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_R^2 (1 - \cos(\gamma \bar{\omega}_R t))) \bar{A}_k, \end{aligned} \quad (55-2)$$

تمام معادلات در (55) با لحاظ شرایط اولیه $\bar{A}_k(0) = 0$ و $\dot{\bar{A}}_k(0) = 0$ بایستی به صورت متوالی حل شوند. به این ترتیب که از طریق جای‌گذاری حل معادلات رتبه پایین‌تر در معادلات رتبه بالاتر، معادلات پشت سر هم حل شده و ترم‌های سکولار به وسیله تعیین مناسب مقادیر λ_i حذف می‌شوند. در روند حل این معادلات، برای توابع $A_r(t), A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ ضابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= 0 \\ A_2(t) &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos(\gamma n \bar{\omega}_R t) + a_2 \cos(\omega t) \\ A_3(t) &= b_1 \cos((\omega + \gamma \bar{\omega}_R) t) + \\ & b_2 \cos((\omega - \gamma \bar{\omega}_R) t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{3n} \cos(\gamma n \bar{\omega}_R t) + \end{aligned}$$

ضریب بسط است. با جای‌گذاری حل (53) در معادله هموتوبی (52)، از طریق مساوی هم قرار دادن عبارات هم توان r ، یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی حاصل می‌شود که باید از طریق جای‌گذاری حل معادلات رتبه پایین‌تر در معادلات رتبه بالاتر، به صورت مرحله به مرحله حل شوند. در این روند به منظور حل معادلات باید ترم‌های سکولار^{۲۴} استخراج و از طریق تنظیم مقدار مناسب برای ضرایب λ_i حذف شوند. سپس فرکانس پاسخ از (51) با در نظر گرفتن $r=1$ در آن به دست می‌آید. از حل این دستگاه معادلات، $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$ تعیین می‌شوند و در نهایت، حل معادله (48) با در نظر گرفتن $r=1$ در (53) حاصل می‌شود. جهت تعیین پارامتر کمکی λ ، ظاهر شده در حل، از شیوه ارائه شده توسط وانگ و همکاران [۱۸] و کوین و چن [۱۹] استفاده می‌شود. در این شیوه برای تامین شرایط لازم جهت تضمین همگرایی سری حل، بازه مناسب برای λ به گونه‌ای معرفی می‌شود که در آن بازه نمودار $\omega - \lambda$ کمترین شیب را داشته باشد.

در شرایطی که مقدار زیر رادیکال عبارت ω که از رابطه (51) تعیین می‌شود منفی شود، عبارت‌هایی نمایی که با افزایش زمان رشد می‌کنند در پاسخ ظاهر می‌شوند. به این ترتیب شرایطی که سبب منفی شدن مقدار زیر رادیکال می‌شود سبب بروز ناپایداری و تشدید پارامتریک در سیستم خواهد شد. بر این اساس به منظور انجام آنالیز پایداری به روش آنالیز هموتوبی، از جای‌گذاری (53) در (52) فرم هموتوبی معادله (46) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} (1-r)(\ddot{\bar{A}}_1 + r\dot{\bar{A}}_1 + r^2\ddot{\bar{A}}_1 + \dots) + \\ (\omega^2 - r - (r\lambda_1 + r^2\lambda_2 + \dots))(\bar{A}_1 + r\bar{A}_2 + r^2\bar{A}_3 + \dots) = \\ \lambda r \left[(1 + \bar{\alpha}_R (1 - \cos(\gamma \bar{\omega}_R t))) (\ddot{\bar{A}}_1 + r\dot{\bar{A}}_1 + r^2\ddot{\bar{A}}_1 + \dots) + \right. \\ \left. \gamma \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_R \sin(\gamma \bar{\omega}_R t) (\dot{\bar{A}}_1 + r\dot{\bar{A}}_2 + r^2\dot{\bar{A}}_3 + \dots) + \right. \\ \left. (\omega_1^2 - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_R^2 (1 - \cos(\gamma \bar{\omega}_R t))) (\bar{A}_1 + r\bar{A}_2 + r^2\bar{A}_3 + \dots) - \right. \\ \left. \frac{\gamma g \bar{\alpha}_R}{K_1 a \pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{1 - \gamma n^2} \cos(\gamma n \bar{\omega}_R t) \right) \right], \end{aligned} \quad (54)$$

همان‌طور که اشاره شد در حالتی که مقدار زیر رادیکال در $A(t)$ منفی شود ناپایداری و تشدید پارامتریک در حل $A(t)$ اتفاق می‌افتد. بنابراین مرز بین دو ناحیه ناپایدار و پایدار در صفحه $\alpha_R - \gamma_R$ در واقع مکان هندسی نقاطی از صفحه است که در آنها $\omega = 0$ است. بنابراین ضابطه این مرز از مساوی قرار دادن (۶۰) با صفر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_{R, \text{border}}^{\text{HAM}} = \frac{\omega_1}{\omega_{R1}} \sqrt{\frac{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R)}{(\lambda + \nu \bar{\alpha}_R) \bar{\alpha}_R}} \quad (61)$$

مبتنی بر روش آنالیز هموتوبی برای تعیین شرایط بروز تشدید خارجی در ناحیه پایدار، آنالیز می‌تواند ادامه یابد. شرایط بروز تشدید خارجی به وسیله آنالیز توابع تحریک هارمونیک حاضر در سمت راست معادلات (۵۵) مشخص می‌شود. در این روش، فرکانس‌های تشدید به صورت زیر قابل تشخیص هستند:

$$\omega_{\text{res}} = \nu n \gamma_R \omega_{R1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

با جای‌گذاری عبارت ω از (۶۰) بجای ω_{res} در (۶۲)، عبارت زیر برای شرایط بروز تشدید خارجی نتیجه می‌شود:

$$\gamma_{R, \text{res}}^{\text{HAM}} = \frac{\omega_1}{\omega_{R1}} \sqrt{\frac{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R)}{\nu n^2 (\lambda + \nu \bar{\alpha}_R) \bar{\alpha}_R + (\lambda + \nu \bar{\alpha}_R) \bar{\alpha}_R}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (63)$$

به عبارت دیگر رابطه (۶۳) نشان‌دهنده منحنی‌هایی در صفحه $\alpha_R - \gamma_R$ هستند که نقاط واقع روی آنها شرایط بروز تشدید خارجی را معرفی می‌کنند. از روابط (۶۱) و (۶۳) ملاحظه می‌شود که مجموع منحنی‌های حاصل از این روابط را می‌توان در یک معادله به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\gamma_{R, \text{critical}}^{\text{HAM}} = \frac{\omega_1}{\omega_{R1}} \sqrt{\frac{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R)}{\nu n^2 (\lambda + \nu \bar{\alpha}_R) \bar{\alpha}_R + (\lambda + \nu \bar{\alpha}_R) \bar{\alpha}_R}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (64)$$

که در رابطه (۶۴)، $n = 0$ نشان‌دهنده مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و مابقی متناظر با شرایط تشدید خارجی هستند.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} b_{\nu n} \cos(\nu(n+1)\bar{\omega}_{R1}t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} b_{\nu n} \cos(\nu(n-1)\bar{\omega}_{R1}t) + b_{\nu} + b_{\nu} \cos(\nu\bar{\omega}_{R1}t) + b_{\lambda} \cos(\omega t) \\ A_{\nu}(t) = & c_1 \cos((\omega + \nu\bar{\omega}_{R1})t) + \\ & c_{\tau} \cos((\omega - \nu\bar{\omega}_{R1})t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\tau n} \cos(\nu n \bar{\omega}_{R1}t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu n} \cos(\nu(n+1)\bar{\omega}_{R1}t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu n} \cos(\nu(n-1)\bar{\omega}_{R1}t) + c_{\nu} + c_{\nu} \cos(\nu\bar{\omega}_{R1}t) + \\ & c_{\lambda} \cos((\omega + \nu\bar{\omega}_{R1})t) + c_{\lambda} \cos((\omega - \nu\bar{\omega}_{R1})t) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} c_{1-n} \cos(\nu(n+2)\bar{\omega}_{R1}t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1+n} \cos(\nu(n-2)\bar{\omega}_{R1}t) + \\ & c_{1\nu} \cos(\nu\bar{\omega}_{R1}t) + c_{1\tau} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (56)$$

مجموعه ضرایب این توابع در پیوست آمده‌اند. همچنین مقادیر حاصل شده برای $\lambda_r, \lambda_{\nu}, \lambda_{\tau}$ ناشی از حل معادلات تا رتبه p^* و حذف ترم‌های سکولار به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + (1 + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R))\omega^{\nu} - \lambda(\omega^{\nu} - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^{\nu}) \\ \lambda_{\tau} &= \frac{\lambda^{\nu} \bar{\alpha}_R^{\nu}}{\lambda} (\nu \omega^{\nu} + \bar{\omega}_{R1}^{\nu}) \\ \lambda_{\nu} &= \frac{\lambda^{\nu} \bar{\alpha}_R^{\nu}}{\lambda} (1 + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R)) (\nu \omega^{\nu} + \bar{\omega}_{R1}^{\nu}) \end{aligned} \quad (57)$$

با جای‌گذاری این مقادیر در (۵۱) و لحاظ $r=1$ در آن، مقدار فرکانس ارتعاشات ω به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda(\omega_1^{\nu} - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^{\nu}) - \lambda \bar{\alpha}_R^{\nu} \bar{\omega}_{R1}^{\nu} (\nu + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R))}{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R) + \nu \lambda \bar{\alpha}_R^{\nu} (\nu + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R))}} \quad (58)$$

مقدار مناسب برای λ می‌تواند از طریق تعیین جایی که شیب $\frac{d\omega}{d\lambda}$ صفر می‌شود، تعیین شود. بر این اساس، با استفاده از رابطه (۵۸) مقدار λ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = -\frac{1}{1 + \bar{\alpha}_R} \quad (59)$$

با جای‌گذاری (۵۹) در (۵۸)، فرکانس ارتعاشات ورق مدرج تابعی تحت اثر حرکت یک جرم متحرک با مقادیر جرم و سرعت مشخص به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R)(\omega_1^{\nu} - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^{\nu}) + \bar{\alpha}_R^{\nu} \bar{\omega}_{R1}^{\nu}}{\lambda(1 + \bar{\alpha}_R)^{\nu} - \nu \bar{\alpha}_R^{\nu}}} \quad (60)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

۴-۲- روش تئوری فلاکه

در این مطالعه به منظور بررسی دقت نتیجه به دست آمده از روش آنالیز هموتوبی، از مقایسه آن با نتیجه مشابه به دست آمده از روش تئوری فلاکه استفاده می‌شود. تئوری فلاکه، روشی است که امکان آنالیز پایداری سیستم‌های خطی همگن با ضرایب متناوب را فراهم می‌کند [۲۰]. در اولین گام این روش معادله حاکم (۴۶) به فرم فضای حالت:

$$\begin{cases} \dot{q} = \{R(t)\}q + F(t) \\ \{R(t+T_p)\} = \{R(t)\}, F(t+T_p) = F(t) \end{cases} \quad (65)$$

نوشته می‌شود که در آن $q = [A, \dot{A}]^T$ و T_p دوره تناوب ضرایب معادلات فضای حالت سیستم است که با دوره تکرار بار برابر است. بر اساس این روش، بخش $F(t)$ در معادله فضا - حالت (۶۵) کنار گذاشته شده و این معادله به فرم:

$$\begin{cases} \dot{q} = \{R(t)\}q \\ \{R(t+T_p)\} = \{R(t)\} \end{cases} \quad (66)$$

ساده می‌شود. شیوه روش تئوری فلاکه به این صورت است که پایداری تمام حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و خطی با ضرایب متناوب به فرم (۶۶) را مشخص می‌کند. برای تبیین این تئوری، حل معادله (۶۶) برای شرایط اولیه $q = q(0)$ در حالت کلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q(t) = \{\phi(t)\}q \quad (67)$$

در واقع $\{\phi(t)\}$ یک ماتریس پایه است که ستون‌های آن از حل‌های مستقل خطی معادله همگن (۶۶) تشکیل شده‌اند. با تعریف ماتریس $\{C\}$ به صورت:

$$\{C\} = \{\phi(T_p)\} \quad (68)$$

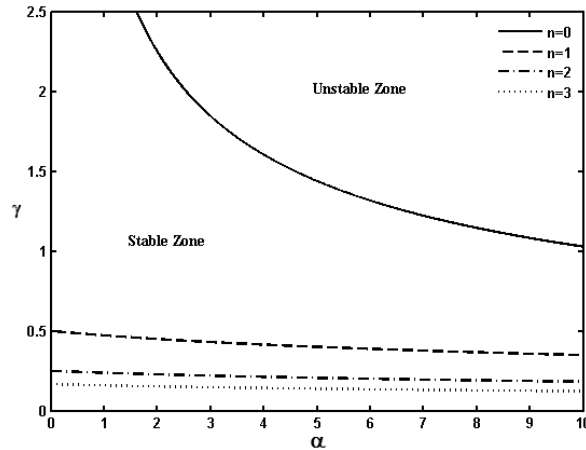
ملاحظه می‌شود که با انتگرال‌گیری عددی از رابطه (۶۶) در بازه زمانی یک دوره تناوب، می‌توان از (۶۸) ماتریس $\{C\}$ را به دست آورد. تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $\{C\}$ در داخل و روی یک دایره‌ی واحد به مرکز $(0,0)$ در صفحه مختلط باشند، سیستم پایدار است و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه در خارج از دایره‌ی مذکور قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.

۵- نتایج آنالیز

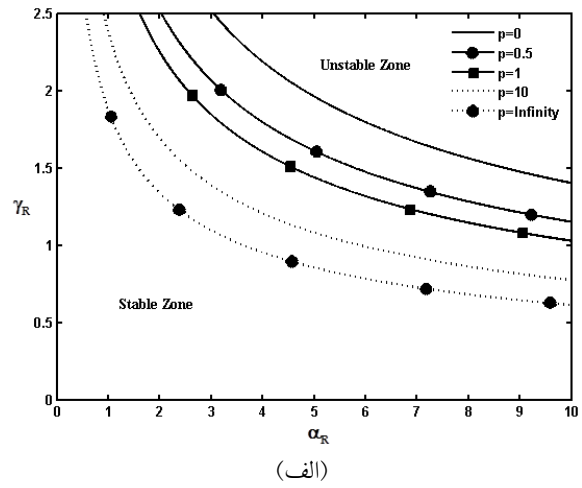
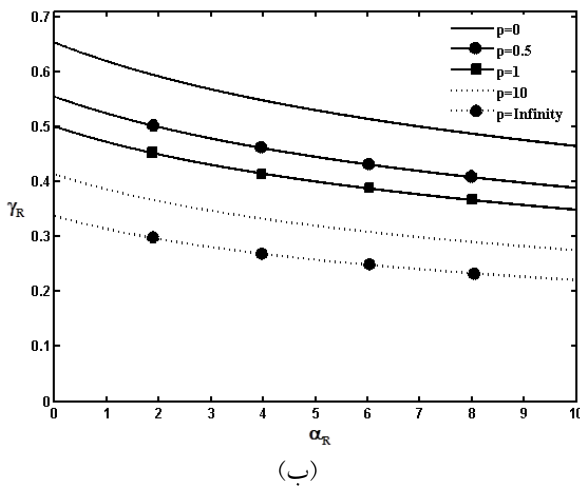
در این بخش نتایج حاصل از آنالیز پایداری دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت اثر عبور متناوب جرم‌های متحرک با استفاده از روش آنالیز هموتوبی ارائه شده است. ورق به طول سه متر ($a = 3m$) و به صورت مخلوطی از فلز آلومینیوم و سرامیک آلموینا در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته و چگالی ورق در جهت ضخامت ورق طبق روابط (۱) و (۲) تغییر کرده و خواص مکانیکی مواد مورد استفاده در آن مطابق جدول (۱) لحاظ شده است. شرایط تکیه‌گاهی ورق در لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_1 = 1$ ساده در نظر گرفته شده و مطابق شکل (۲) ورق تحت عبور متوالی جرم‌های متحرکی که روی خط مستقیم $X_2 = \frac{1}{4}$ حرکت می‌کنند قرار دارد به این ترتیب که فرض می‌شود که بلافاصله پس از خروج یک جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات جسم قبلی روی ورق وارد می‌شود. به منظور ارائه نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق مدرج تابعی - جسم متحرک، با استفاده از رابطه (۶۴) برای $n = 0$ مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و برای مقادیر $n = 1, 2, 3$ مکان هندسی شرایط بروز تشدید در بازه $0 < \alpha_R \leq 10$ و $0 < \gamma_R \leq 2/5$ از صفحه پارامترهای $\alpha_R - \gamma_R$ ترسیم شده و با بررسی اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی (p) ، نسبت ضخامت به طول ورق ($\delta = \frac{h}{a}$) و شرایط مرزی ورق روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و روی مکان هندسی شرایط بروز تشدید، بررسی جامعی از پایداری سیستم انجام شده است.

۵-۱- نتایج آنالیز پایداری سیستم ورق مدرج تابعی - جسم متحرک

در این بخش، نتایج آنالیز پایداری دینامیکی حاصل از روش آنالیز هموتوبی برای یک ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک با مشخصات SSSS، $\eta = 1$ ، $\delta = 0/1$ و $p = 1$ ارائه شده است. این نتایج در شکل (۳) نمایش داده شده‌اند. ناحیه بالای منحنی مرز، مقادیری از جرم و سرعت جرم متحرک را نشان



شکل ۳- نقشه پایداری دینامیکی ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک حاصل از روش آنالیز هموتوبی؛ SSSS، $\eta=1$ ، $\delta=0.1$ و $p=1$



شکل ۴- تأثیر اندیس توان کسر حجمی (p روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و (ب) اولین منحنی تشدید؛ SSSS، $\eta=1$ و $\delta=0.1$

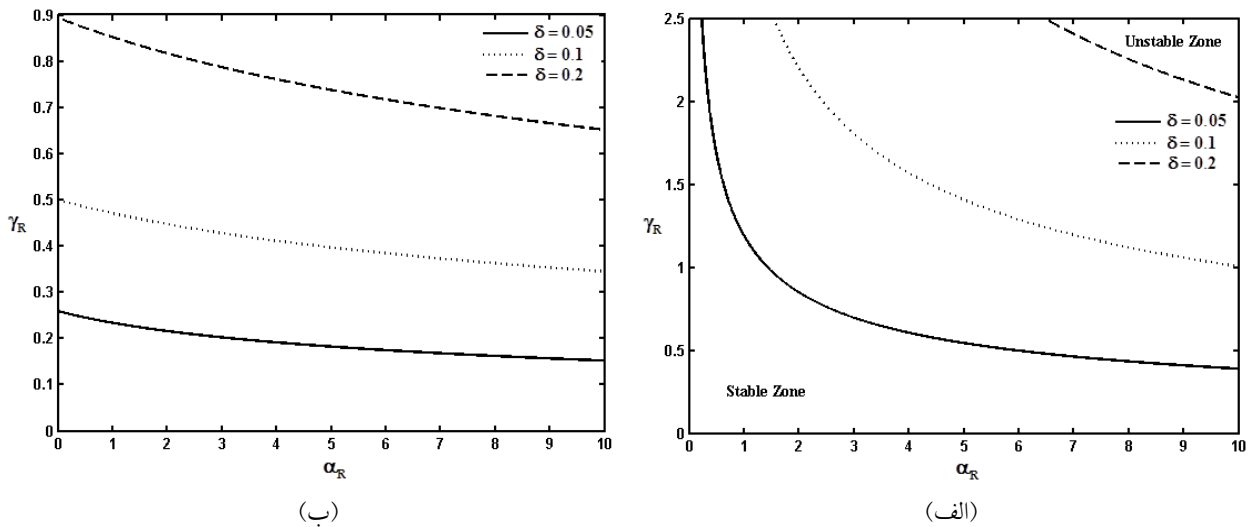
مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از مقادیر اندیس توان کسر حجمی $p=0, 0.5, 1, 10, \infty$ به ترتیب در شکل (۴-الف) و (۴-ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با اندیس توان $p=1$ به‌عنوان ورق مرجع در نظر گرفته شده است.

شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) نشان می‌دهند که با افزایش اندیس توان کسر حجمی (p) و یا به‌عبارت دیگر افزایش فاز فلز و کاهش فاز سرامیک در ترکیب ورق مدرج تابعی ناحیه ناپایدار در صفحه پارامترها وسیع‌تر شده و منحنی تشدید به

می‌دهد که سبب ایجاد ناپایداری در ورق مدرج تابعی می‌شوند. در پایین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار، ناحیه پایدار قرار گرفته است. در این ناحیه، مکان هندسی مشخصاتی از جرم و سرعت جرم متحرک که سبب شکل‌گیری تشدید در ورق مدرج تابعی می‌شوند، به‌وسیله منحنی‌های ترسیم شده، مشخص شده‌اند.

۲-۵- اثر مقدار اندیس توان کسر حجمی ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

برای ورق مدرج تابعی با مشخصات SSSS، $\eta=1$ و $\delta=0.1$ ،



شکل ۵- تاثیر نسبت ضخامت به طول ورق (δ) روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ب) اولین منحنی تشدید؛ SSSS، $\eta = 1$ و $p = 10$

۴-۵- اثر شرایط مرزی ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

برای ورق مدرج تابعی با مشخصات $\eta = 2$ ، $\delta = 0/15$ و $p = 1$ ، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از شش شرایط مرزی SSSS، SFSF، SCSC، SCSF، SSSF، SSSC به ترتیب در شکل (۶-الف) و (۶-ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با شرایط مرزی SSSS به‌عنوان ورق مرجع در نظر گرفته شده است.

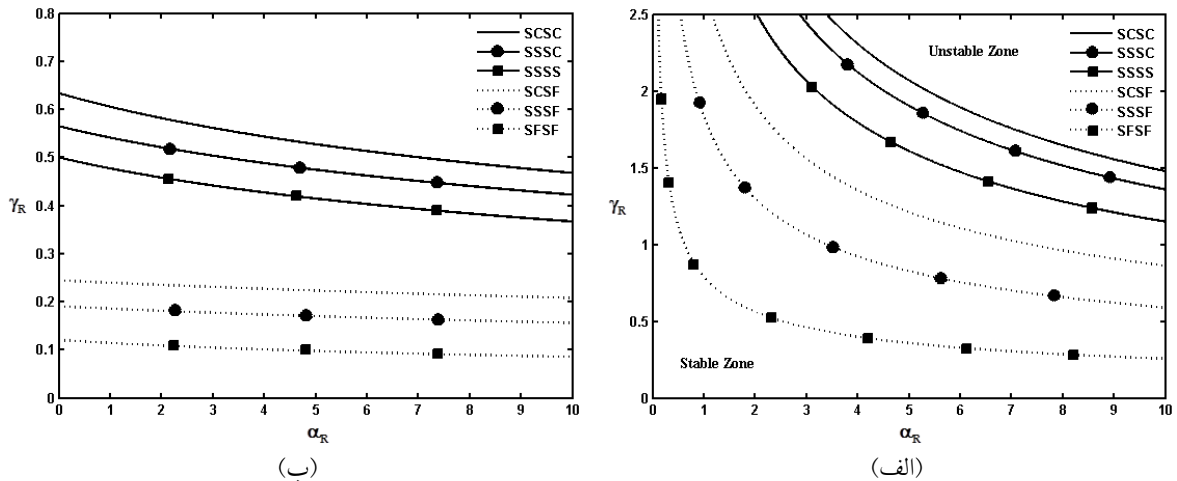
شکل (۶-الف) نشان می‌دهد که با کاهش قیود تکیه‌گاهی ورق، ناحیه‌ی ناپایدار گسترش یافته و پایداری سیستم تضعیف می‌شود. به این ترتیب که شرایط مرزی SFSF با کمترین قیود تکیه‌گاهی و SCSC با بیشترین قیود تکیه‌گاهی به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین سطح ناحیه ناپایدار را به خود اختصاص داده‌اند. از طرف دیگر شکل (۶-ب) نشان می‌دهد که کاهش قیود تکیه‌گاهی سبب انتقال منحنی تشدید به عرض‌های پایین‌تر شده و تشدید در ورق در سرعت‌های کمتر جسم متحرک روی دهد.

عرض‌های پایین‌تر انتقال می‌یابد. بر این اساس افزایش اندیس توان کسر حجمی سبب تضعیف پایداری دینامیکی ورق شده و مقدار سرعت جسم متحرک که سبب بروز تشدید در ورق می‌شود کاهش می‌یابد.

۳-۵- اثر پارامتر نسبت ضخامت به طول ورق مدرج تابعی روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی

برای ورق مدرج تابعی با مشخصات SSSS، $\eta = 1$ و $p = 10$ ، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و اولین منحنی تشدید برای هر یک از مقادیر نسبت ضخامت به طول ورق $\delta = 0/05, 0/1, 0/2$ به ترتیب در شکل (۵-الف) و (۵-ب) رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. در این بررسی، ورق با نسبت ضخامت به طول $\delta = 0/1$ به‌عنوان ورق مرجع در نظر گرفته شده است.

شکل‌های (۵-الف) و (۵-ب) نشان می‌دهند که کاهش نسبت ضخامت به طول ورق (δ) سبب گسترش ناحیه ناپایدار و تضعیف پایداری سیستم و انتقال منحنی تشدید به عرض‌های پایین‌تر شده و در نتیجه برای جرم مشخصی از جسم متحرک، تشدید در ورق برای سرعت‌های کمتر روی می‌دهد.



شکل ۶- تاثیر شرایط مرزی ورق روی الف) مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و ب) اولین منحنی تشدید؛ $\delta = 0.15$ و $\eta = 2$

$$p = 1$$

قرار گرفته‌اند.

منحنی به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی در شکل (۳) با منحنی متناظر به‌دست آمده از روش تئوری فلاکه در شکل (۸) مقایسه شده است. مقایسه انجام شده نزدیکی نتیجه حاصل از هر دو روش را نشان داده و دقت نتیجه به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی را تایید می‌کند. لازم به ذکر است که در روش تئوری فلاکه به‌دلیل کنار گذاشته شدن بخش تحریک اجباری، شرایط بروز تشدید خارجی قابل تشخیص نیست.

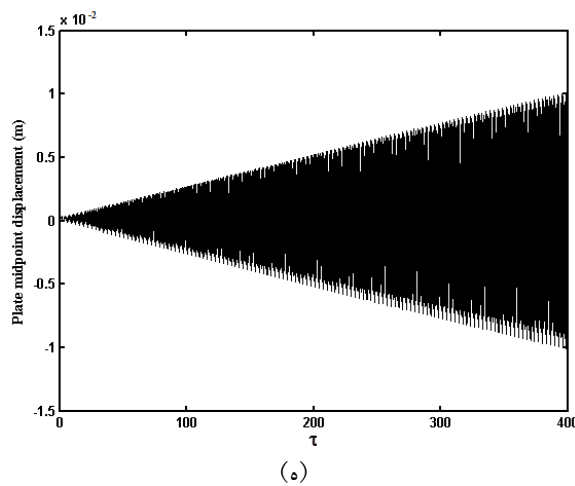
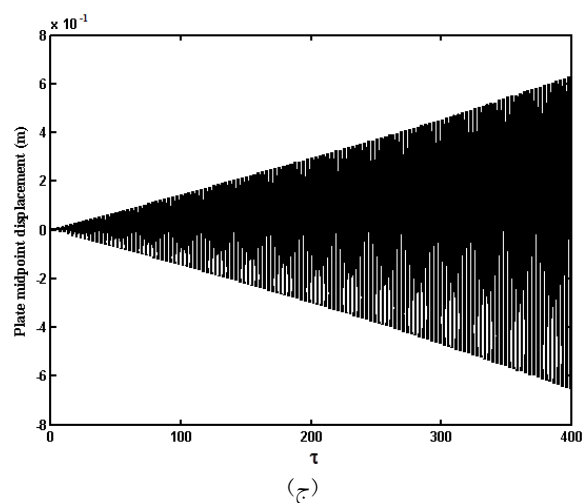
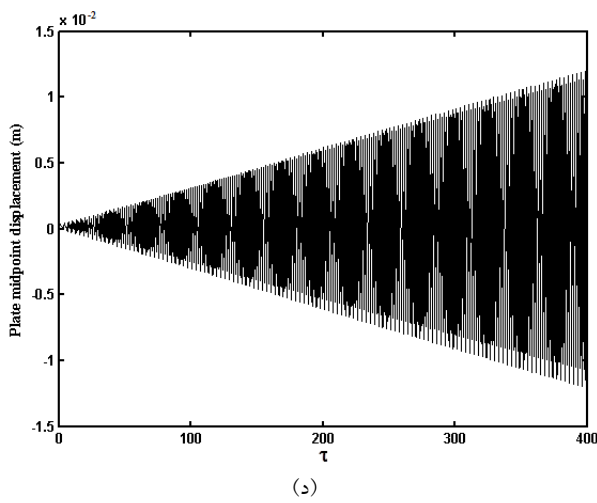
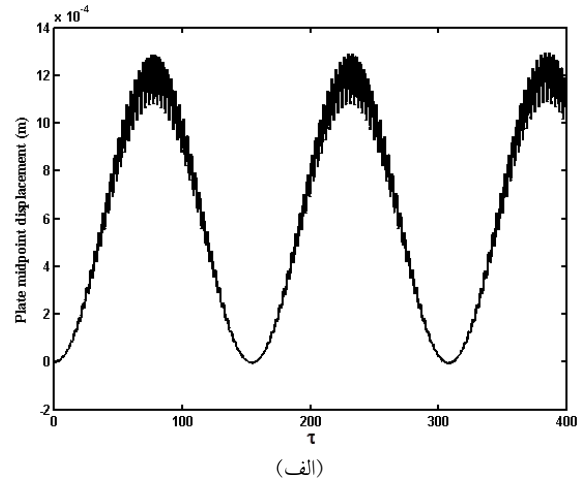
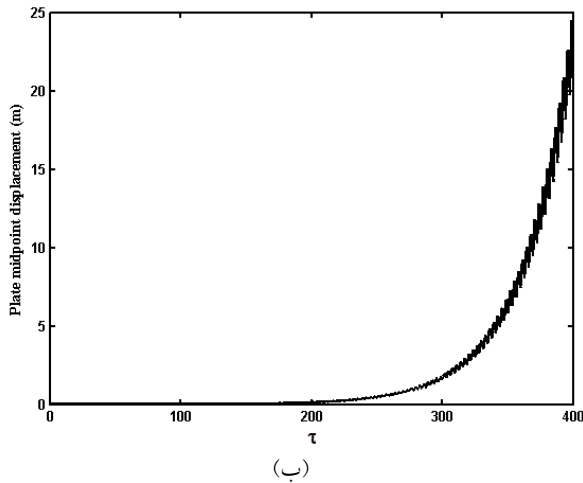
به‌منظور بررسی دقت نتایج از طریق مقایسه با نتایج به‌دست آمده در سایر مطالعات، نتایج مطالعه حاضر با نتایج گزارش شده توسط ترکان و همکاران [۲۱] مقایسه می‌شود. در این مطالعه آنها شرایط پایداری ورق همگن نازک تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک را مطالعه کردند. وقتی $\delta \leq 0.02$ باشد، به‌دلیل این که توابع φ_1, φ_2 به سمت شیب‌های ناشی از جابجایی عرضی میل می‌کنند، نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به نتایج متناظر از تئوری کلاسیک ورق میل خواهد کرد. بر این اساس نتایج به‌دست آمده از آنالیز پایداری دینامیکی ورق همگن ($p \rightarrow \infty$) با نسبت ضخامت کلاسیک $\delta = 0.02$ با نتایج مرجع [۲۱] که با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک ورق حاصل شده‌اند، مقایسه می‌شود. با در نظر گرفتن

۶- صحت سنجی نتایج

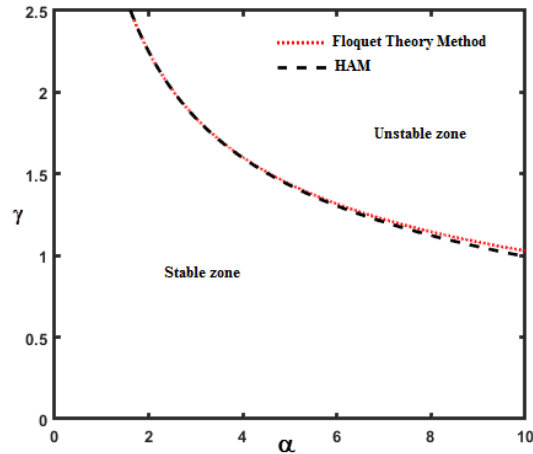
در این بخش، با استفاده از چهار روش شبیه‌سازی عددی، مقایسه‌ی نتایج با نتایج حاصل از تئوری فلاکه، مقایسه نتایج با نتایج به‌دست آمده در مرجع [۲۱] و در نهایت از طریق مقایسه‌ی پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق مدرج تابعی حاصل از روش آنالیز هموتوپی با نتیجه حاصل از روش عددی رانج - کوتای مرتبه چهارم^{۲۵}، صحت نتایج به‌دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

با استفاده از حل عددی معادله (۴۶)، شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق برای دو مشخصه $(\alpha = 5, \gamma = 1/44)$ و $(\alpha = 5, \gamma = 1/435)$ که به ترتیب در ناحیه پایدار و ناپایدار و در مجاورت مرز بین این دو ناحیه در شکل (۳) هستند و برای سه مشخصه $(\alpha = 3, \gamma = 0/4303)$ و $(\alpha = 3, \gamma = 0/2197)$ و $(\alpha = 3, \gamma = 0/1470)$ که به ترتیب روی منحنی مکان هندسی شرایط بروز تشدید $n = 1$ ، $n = 2$ و $n = 3$ در شکل (۳) هستند، در شکل (۷) نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود پاسخ در شکل (۷- الف) پایدار و در شکل (۷- ب) ناپایدار بوده و در شکل‌های (۷- ج)، (۷- د) و (۷- ر) تشدید روی داده است و به این ترتیب نتایج به‌دست آمده از روش آنالیز هموتوپی مورد تایید

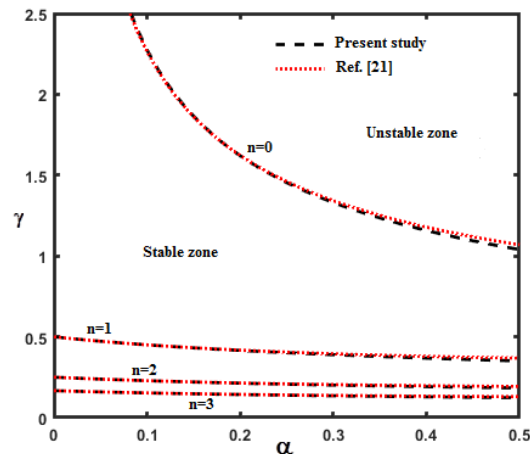
روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱



شکل ۷- پاسخ زمانی نقطه میانی ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک با مشخصه الف) ($\alpha=5, \gamma=1/435$) متعلق به ناحیه پایدار، ب) ($\alpha=5, \gamma=1/44$) متعلق به ناحیه ناپایدار، ج) ($\alpha=3, \gamma=0/4303$) متعلق به اولین منحنی تشدید ($n=1$)، د) ($\alpha=3, \gamma=0/2197$) متعلق به دومین منحنی تشدید ($n=2$) و ه) ($\alpha=3, \gamma=0/1470$) متعلق به سومین منحنی تشدید ($n=3$)؛ SSSS، $\delta=0/1$ و $p=1$



شکل ۸- مقایسه بین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در یک ورق مدرج تابعی تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک حاصل از روش آنالیز هموتوپی و روش تئوری فلاکه؛ SSSS، $\eta=1$ ، $\delta=0/1$ و $p=1$



شکل ۹- مقایسه بین نتایج آنالیز پایداری حاصل از مطالعه حاضر و مرجع [۲۱]؛ SSSS، $\eta=1$ ، $\delta=0/0.2$ و $p \rightarrow \infty$

در آخرین گام ارزیابی نتایج، با استفاده از توابع زمانی به دست آمده در (۵۶)، حل نیمه تحلیلی معادله (۴۶) به روش آنالیز هموتوپی برای نقطه میانی ورق مدرج تابعی تا رتبه r^1 و r^2 به ترتیب به صورت:

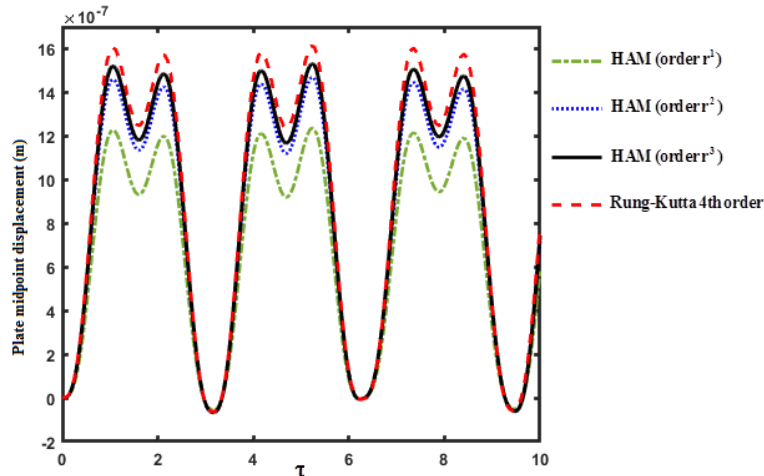
$$\varphi_r(t) = a\tilde{\varphi}_{r1}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)(A_0(t) + A_1(t))$$

$$\varphi_r(t) = a\tilde{\varphi}_{r1}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)(A_0(t) + A_1(t) + A_2(t))$$

$$\varphi_r(t) = a\tilde{\varphi}_{r1}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)(A_0(t) + A_1(t) + A_2(t) + A_3(t))$$

به دست آمده و با پاسخ نقطه میانی ورق به دست آمده از حل عددی معادله (۴۶) به روش رانج - کوتای مرتبه چهارم مقایسه

شرایط مرزی تکیه گاه ساده برای تمام لبه‌های ورق و $\eta=1$ ، ضریب K_1 در رابطه (۴۲) برابر با $1/9866$ به دست آمده و با توجه به یکسان بودن ورق در این مقایسه، ضریب K_2 برابر یک در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب از رابطه (۶۴)، به ازای $n=0$ منحنی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و برای $n=1, 2, 3$ منحنی‌های شرایط بروز تشدید به دست آمده و مجموعه‌ای این منحنی‌ها در شکل (۹) با نتایج متناظر گزارش شده در مرجع [۲۱] مقایسه شده‌اند. مقایسه انجام شده نزدیکی نتایج مطالعه حاضر و نتایج مرجع [۲۱] را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰- مقایسه حل عددی رانگ - کوتای مرتبه چهار با حل رتبه r^1 ، r^2 و r^3 حاصل از روش آنالیز هموتوبی برای پاسخ دینامیکی نقطه میانی ورق مدرج تابعی با مشخصه SSSS، $\eta=1$ ، $\delta=0/05$ ، $p=10$ ، $a=3m$ تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با مشخصه $\alpha=0/3$ ، $\gamma=0/2$

ساده و گیردار در نظر گرفته شده است. در این بررسی، اثرات اندیس توان کسر حجمی، نسبت ضخامت به طول ورق و شرایط مرزی ورق بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و شرایط بروز تشدید مطالعه شده است. آنالیز پایداری انجام شده به جمع‌بندی زیر منجر می‌شود.

- عبور متناوب جرم متحرک از روی ورق مدرج تابعی می‌تواند سبب شکل‌گیری ناپایداری ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی می‌شود.
- در روش آنالیز هموتوبی از طریق تعیین ضابطه ریاضی برای ضابطه‌ی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار و مکان هندسی شرایط بروز تشدید، شرایط ناپایداری در صفحه پارامترها تشخیص داده می‌شود.
- ناحیه ناپایدار در صفحه پارامترهای سیستم تحت تأثیر هر یک از عوامل افزایش اندیس توان کسر حجمی، کاهش قیود تکیه‌گاهی و کاهش نسبت ضخامت به طول ورق گسترش یافته و پایداری سیستم تضعیف می‌شود.
- با افزایش اندیس توان کسر حجمی، کاهش قیود تکیه‌گاهی و یا کاهش نسبت ضخامت به طول ورق، منحنی مکان هندسی شرایط بروز تشدید در صفحه پارامترهای سیستم به

می‌شوند. در این مقایسه، ورق مدرج تابعی با مشخصات $a=3$ ، $\eta=1$ ، $\delta=0/05$ ، $p=10$ و شرایط مرزی SSSS تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک با مشخصه $\alpha=0/3$ ، $\gamma=0/2$ در نظر گرفته شده است. در شکل (۱۰) این مقایسه نشان داده شده است. مقایسه انجام شده نشان می‌دهد که با افزایش رتبه حل، حل نیمه‌تحلیلی آنالیز هموتوبی به حل عددی رانج - کوتا همگرا شده و حل به‌دست آمده تا رتبه r^3 از دقت خوبی برخوردار بوده و به حل عددی بسیار نزدیک است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از روش آنالیز هموتوبی ناپایداری دینامیکی ناشی از تشدید پارامتریک و تشدید خارجی ورق مستطیلی مدرج تابعی نسبتاً ضخیم تحت اثر عبور متناوب جرم‌های متحرک مورد مطالعه قرار گرفته است. ورق به‌صورت مخلوطی از فلز آلومینیوم و سرامیک آلومینا در نظر گرفته شده است به نحوی که چگالی و مدول یانگ ورق مطابق تابع توانی از یک کسر حجمی به‌صورت پیوسته در جهت ضخامت ورق تغییر می‌کنند. برای دو لبه موازی ورق شرایط تکیه‌گاهی ساده و برای دو لبه دیگر همه ترکیب‌های ممکن از نوع آزاد، تکیه‌گاه

شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده برای پاسخ زمانی نقطه میانی ورق و نتایج به دست آمده از تئوری فلاکه، مؤید نتایج به دست آمده از روش آنالیز هموتوبی هستند.

عرض‌های پایین‌تر منتقل شده و به عبارت دیگر مقدار سرعت جسم متحرک که به ازای آن در ورق تشدید ایجاد می‌شود کاهش می‌یابد.

واژه‌نامه

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|---|
| 1. parametric resonance | 10. Hamilton principle | 19. Navier |
| 2. external resonance | 11. classical plate theory | 20. partial differential equation |
| 3. functionally graded | 12. refined Rayleigh-Ritz method | 21. ordinary differential equation |
| 4. volume fraction | 13. homotopy perturbation method | 22. alumina |
| 5. Galerkin method | 14. improved modal analysis | 23. Dirac delta function |
| 6. homotopy analysis method | 15. dynamic amplification factor | 24. secular terms |
| 7. power Index | 16. isotropic | 25. Runge – Kutta 4 th Order |
| 8. Floquet theory | 17. Poisson coefficient | |
| 9. first-order shear deformation | 18. shear correction factor | |

مراجع

- Malekzadeh, P., Lee, Y. Y., and Liew, K. M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using the Element-Free-KP-Ritz method", *Journal Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 918-939, 2009.
- Malekzadeh, P., and Darai, M., "Dynamic Analysis of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to Asymmetric Moving Loads", *Thin-Wall Structures*, Vol. 84, pp. 1-13, 2014.
- Song, Q., Shi, J., and Liu, Z., "Vibration Analysis of a Functionally Graded Plate with a Moving Mass", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 46, pp. 141-160, 2017.
- Yousezadeh, S., Akbari, A., and Najafi, M., "Dynamic Response of FG Rectangular Plate in Contact with Stationary Fluid under Moving Load", *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 6, pp. 213-224, 2019 (In Persian).
- Nelson, H. D., and Conover, R. A., "Dynamic Stability of a Beam Carrying Moving Masses", *Applied Mechanics*, Vol. 38, No. 4, pp.1003-1006, 1971.
- Mackertich, S., "Dynamic Stability of a Beam Excited by a Sequence of Moving Mass Particles", *Acoustical Society of America*, Vol. 115, No. 4, pp. 1416-1419, 2004.
- Aldraihem, O. J., and Baz, A., "Dynamic Stability of Stepped Beams under Moving Loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 5, pp. 835-848, 2002.
- Rao, G. V., "Linear Dynamics of an Elastic Beam under Moving Loads", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, pp. 281-289, 2000.
- Pirmoradian, M., and Karimpour, H., "Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 284-292, 2017 (In Persian).
- Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Stability Analysis of Transverse Vibrations of Rectangular Plate under Periodic Passage of Moving Masses", *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 8, No. 3, pp. 18-26, 2017 (In Persian).
- Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Instability Inspection of Parametric Vibrating Rectangular Mindlin Plates Lying on Winkler Foundations under Periodic Loading of Moving Masses", *Acta Mechanica Sinica*, Vol.35, pp. 242-263, 2019.
- Torkan, E., Pirmoradian, M., and Hashemian, M., "Dynamic Instability Analysis of Moderately Thick Rectangular Plates Influenced by an Orbiting Mass Based on the First-Order Shear Deformation Theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 9, pp. 2203-2213, 2019 (In Persian).
- Ghomeshi Bozorg, M., and Keshmiri, M., "Stability Analysis of a Beam under the Effect of Moving Masses Using Homotopy Perturbation Method", *Journal of Computational Methods in Engineering*, Vol. 34, No. 1, pp. 79-95, 2015 (In Persian).
- Hassanabadi, M. E., Attari, N. K. A., Nikkhoo, A., and Mariani, S., "Resonance of a Rectangular Plate Influenced by Sequential Moving Mass", *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 5, pp.87-100, 2016.
- Liao, S. J., "Comparison Between the Homotopy Analysis Method and Homotopy Perturbation Method", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, pp. 1186-1194, 2005.
- Yousefzadeh, Sh., Akbari, A., and Najafi, M., "Hydro-Elastic Vibration Analysis of Functionally

- Graded Rectangular Plate in Contact with Stationary Fluid”, *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 27, pp. 229-246, 2018.
17. Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., and Omidi, M., “Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates using First-Order Shear Deformation Plate Theory”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 1276-1291, 2010.
 18. Wang, C., Wu, Y. Y., and Wu, W., “Solving the Nonlinear Periodic Wave Problems with the Homotopy Analysis Method”, *Wave Motion*, Vol. 4, pp. 329-337, 2005.
 19. Qian, Y., and Chen, S., “Accurate Approximate Analytical Solutions for Multi-Degree-of-Freedom Coupled Vander Pol-Duffing Oscillators by Homotopy Analysis Method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, pp. 3113–3130, 2010.
 20. D’ Angelo, H., *Linear Time-Varying System: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
 21. Torkan, E., and Pirmoradian, M., and Hashemian, M., “On the Parametric and External Resonances of Rectangular Plates on an Elastic Foundation Traversed by Sequential Masses”, *Archive Applied Mechanics*, Vol. 88, pp. 1411-1428, 2018.

پیوست

ضرایب توابع زمانی $A_r(t), A_n(t), A_v(t)$ ، حاصل از حل معادلات آنالیز هموتویی تا رتبه Γ^r ، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$a_1 = -\frac{\gamma \lambda g \bar{\alpha}_R}{\pi K_a \omega^\gamma}$$

$$a_{\gamma n} = -\frac{\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma}{\pi(1 - \gamma n^\gamma)(\omega^\gamma - \gamma n^\gamma \bar{\omega}_{R1}^\gamma)}$$

$$a_\gamma = -\left(a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma n} \right)$$

$$b_1 = -\frac{\lambda \bar{\alpha}_R a_\gamma}{\lambda \bar{\omega}_{R1}} (\omega + \bar{\omega}_{R1})$$

$$b_\gamma = -\frac{\lambda \bar{\alpha}_R a_\gamma}{\lambda \bar{\omega}_{R1}} (\omega - \bar{\omega}_{R1})$$

$$b_{\gamma n} = a_{\gamma n} (1 + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R))$$

$$b_{\gamma n}^+ = \frac{\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma (\gamma n + 1)^\gamma a_{\gamma n}}{\gamma (\omega^\gamma - \gamma (n+1)^\gamma \bar{\omega}_{R1}^\gamma)}$$

$$b_{\gamma n}^- = \frac{\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma (\gamma n + 1)^\gamma a_{\gamma n}}{\gamma (\omega^\gamma - \gamma (n+1)^\gamma \bar{\omega}_{R1}^\gamma)}$$

$$b_{\gamma n}^0 = \frac{\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma (\gamma n - 1)^\gamma a_{\gamma n}}{\gamma (\omega^\gamma - \gamma (n-1)^\gamma \bar{\omega}_{R1}^\gamma)}$$

$$b_\varepsilon = a_1 (1 + \lambda(1 + \bar{\alpha}_R))$$

$$b_v = \frac{\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma a_1}{\omega^\gamma - \gamma \bar{\omega}_{R1}^\gamma}$$

$$b_\lambda = -\left(b_1 + b_\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{\gamma n}^+ + b_{\gamma n}^- + b_{\gamma n}^0) + b_\varepsilon + b_v \right)$$

$$c_1 = \frac{1}{\lambda \bar{\omega}_{R1} (\omega + \bar{\omega}_{R1})} \left[\gamma b_1 \left((\gamma + \bar{\alpha}_R)(\omega + \gamma \bar{\omega}_{R1})^\gamma - (1 + \lambda_1 + \lambda(\omega^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma)) \right) - \lambda b_\lambda \bar{\alpha}_R (\omega + \bar{\omega}_{R1})^\gamma \right]$$

$$c_\gamma = \frac{1}{\lambda \bar{\omega}_{R1} (\omega - \bar{\omega}_{R1})} \left[-\gamma b_1 \left((\gamma + \bar{\alpha}_R)(\omega - \gamma \bar{\omega}_{R1})^\gamma - (1 + \lambda_1 + \lambda(\omega^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R1}^\gamma)) \right) + \lambda b_\lambda \bar{\alpha}_R (\omega - \bar{\omega}_{R1})^\gamma \right]$$

$$\begin{aligned}
 c_{r_n} &= \frac{1}{\gamma n^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma - \omega^\gamma} \left[\lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1} \left(b_{r_n} \left(-\gamma \bar{\omega}_{R_1} (n+1)^\gamma + \gamma (n+1) - \frac{\bar{\omega}_{R_1}}{\gamma} \right) + b_{\Delta n} \left(-\gamma \bar{\omega}_{R_1} (n-1)^\gamma + \gamma (n-1) - \frac{\bar{\omega}_{R_1}}{\gamma} \right) \right) \right] \\
 c_{r_n} &= \frac{1}{\gamma (n+1)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma - \omega^\gamma} \left[-\gamma \lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma \left(n + \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma b_{r_n} + (\gamma (n+1)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma (\gamma + \bar{\alpha}_R) - (1 + \lambda_\gamma + \lambda (\omega_\gamma^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma))) b_{r_n} \right] \\
 c_{\Delta n} &= \frac{1}{\gamma (n-1)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma - \omega^\gamma} \left[-\gamma \lambda \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma \left(n - \frac{1}{\gamma} \right)^\gamma b_{r_n} + (\gamma (n-1)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma (\gamma + \bar{\alpha}_R) - (1 + \lambda_\gamma + \lambda (\omega_\gamma^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma))) b_{\Delta n} \right] \\
 c_\varepsilon &= \frac{1}{\omega^\gamma} \left[\lambda_\gamma a_\gamma + b_\varepsilon \left(1 + \lambda_\gamma + \lambda (\omega_\gamma^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma) \right) + \gamma \lambda b_\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma \left(1 - \frac{\gamma \bar{\alpha}_R}{\gamma} \right) \right] \\
 c_\gamma &= \frac{1}{\omega^\gamma - \gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma} \left[\lambda b_\varepsilon \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma + b_\gamma \left(-\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma (\gamma + \bar{\alpha}_R) + (1 + \lambda_\gamma + \lambda (\omega_\gamma^\gamma - \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma)) \right) \right] \\
 c_\lambda &= -\frac{\lambda b_\gamma \bar{\alpha}_R}{\gamma \omega + \lambda \bar{\omega}_{R_1}} \left(\frac{\omega^\gamma}{\gamma \bar{\omega}_{R_1}} + \frac{\gamma \omega}{\gamma} + \frac{\gamma \bar{\omega}_{R_1}}{\gamma} \right) \\
 c_{\lambda_\gamma} &= \frac{\lambda b_\gamma \bar{\alpha}_R}{\gamma \omega - \lambda \bar{\omega}_{R_1}} \left(\frac{\omega^\gamma}{\gamma \bar{\omega}_{R_1}} - \frac{\gamma \omega}{\gamma} + \frac{\gamma \bar{\omega}_{R_1}}{\gamma} \right) \\
 c_{\lambda_{\Delta n}} &= \frac{-\gamma \lambda b_{r_n} \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma}{\gamma (n+\gamma)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma - \omega^\gamma} \left[(n+1)^\gamma + (n + \frac{\Delta}{\gamma}) \right] \\
 c_{\lambda_{\Delta n}} &= \frac{-\gamma \lambda b_{\Delta n} \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma}{\gamma (n-\gamma)^\gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma - \omega^\gamma} \left[(n-1)^\gamma - (n - \frac{\Delta}{\gamma}) \right] \\
 c_{\lambda_\gamma} &= \frac{\gamma \lambda b_\gamma \bar{\alpha}_R \bar{\omega}_{R_1}^\gamma}{\gamma \omega^\gamma - \gamma \gamma \bar{\omega}_{R_1}^\gamma}
 \end{aligned}$$