

# تحلیل جریان ایده آل تراکم پذیر در صفحه نصف النهاری یک کمپرسور محوری

احمد رضا عظیمیان\*

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۱۲/۱۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۳/۱۶)

چکیده - در این مقاله سعی شده است که رفتار جریان سیال غیر لزج را در صفحه نصف النهاری یک کمپرسور محوری مطالعه کنیم. برای این منظور معادلات اویلر سه بعدی غیر دائم در مختصات استوانه‌ای را برای سیال ایده‌آل نوشته و سپس این معادلات را در جهت مماسی (جهت دوران) متوسط گیری می‌کنیم که در نتیجه معادلات از حالت سه بعدی به حالت دوبعدی ساده می‌شوند. این معادلات دوبعدی را با در نظر گرفتن اثر نیروی پره‌ها که از متوسط گیری معادله ممتموم در جهت شعاعی به دست می‌آید حل کرده و مشخصات کامل میدان جریان سیال را در صفحه نصف النهاری (I-Z) به دست می‌آوریم. برای حل معادلات اویلر ساده شده از روش زمان پیمایی با استفاده از شیوه رانگ کوتاه مرتبه چهارم استفاده کرده و پیشروی در زمان را تا رسیدن به حالت دائم که جواب نهایی است ادامه می‌دهیم. نتایج مفیدی از این مطالعه به دست آمده که توان بالای برنامه را در حل جریان سیال در صفحه نصف النهاری با حداقل زمان ممکن نشان می‌دهد.

## Inviscid Compressible Flow in Meridional Plane of an Axial Flow Compressor

A. R. Azlmian

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** In this paper it is attempted to investigate the behavior of an inviscid flow in the meridional plane of an axial flow compressor. For this purpose the 3-D unsteady Euler equations in cylindrical coordinate are averaged in tangential direction. Therefore, the equations are reduced to a 2-D system. By averaging the tangential component of momentum equation, a blade force will result. Axial and radial components of the calculated blade force are added to the right hand side of the axial and radial momentum equations. By application of a 4th order Runge-Kutta time marching technique to the resulting 2-D Euler equations, the flow field is solved. Some interesting results are obtained which show the program capability in solving flow in the meridional plane of a compressor at the shortest possible time.

\* استادیار

فهرست علائم

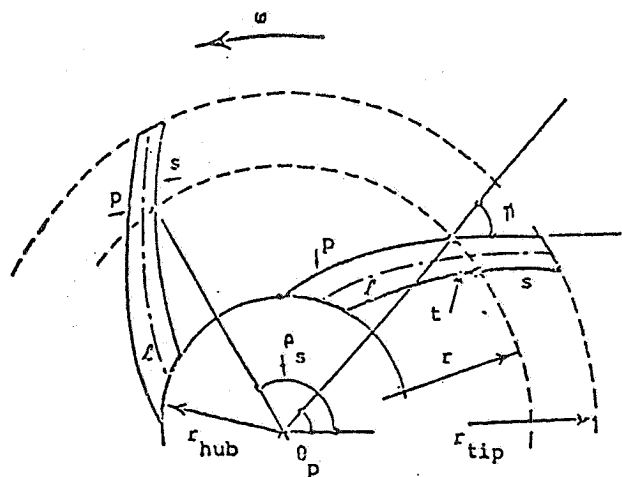
$a$	سرعت صوت (معادله ۳۸)	Fbr	مؤلفه شعاعی نیروی پره (معادله ۲۰)	$V_r$	مؤلفه شعاعی سرعت (معادله ۱۹)
$a$	پارامتر ثابت (معادله ۲۹)	Fbz	مؤلفه محوری نیروی پره (معادله ۲۱)	$V_z$	مؤلفه محوری سرعت (معادله ۱۹)
A	سطح مقطع (معادله ۳۳)	G	پارامتر کلی (معادله ۳۰)	$V_\theta$	مؤلفه مماسی سرعت (معادله ۲۰)
b	پارامتر ضخامت (معادله ۳)	J	ژاکوبین (معادله ۳۱)	Z	جهت محوری (معادله ۱۰)
C	شماره جملات جابجائی (معادله ۳۵)	P	فشار (معادله ۲۰)	$\beta$	زاویه داخلی پره‌ها (معادله ۲۸)
CFL	ضریب کورانیت (معادله ۳۷)	Q	پارامتر کلی (معادله ۳۰)	$\Delta t$	گام زمانی (معادله ۳۴)
DA	شماره جملات استهلاک مصنوعی (معادله ۳۵)	r	شعاع - جهت شعاعی (معادله ۱۹)	$\theta$	جهت مماسی (معادله ۱)
dA	دifferansiyel سطح (معادله ۳۳)	S	چشمه - منبع (معادله ۳۰)	$\eta$	زاویه پره‌ها در جهت شعاعی (معادله ۲۶)
dt	دifferansiyel زمان (معادله ۳۳)	t	زمان (معادله ۱۹)	$\phi$	زاویه پره‌ها در جهت محوری (معادله ۲۶)
dV	دifferansiyel حجم (معادله ۳۳)	u	مؤلفه X سرعت (معادله ۳۱)	$\Omega$	سرعت دوران (معادله ۱۴)
e	انسوزی مخصوص (معادله ۲۳)	U	مؤلفه سرعت در مختصات عمومی (معادله ۳۲)	$\gamma$	حجم (معادله ۳۳)
$f_r, f_z, f_\theta$	مؤلفه‌های شعاعی محوری و مماسی افت (معادله ۱۴)	v	مؤلفه Y سرعت (معادله ۳۱)		
F	پارامتر کلی (معادله ۳۰)	V	مؤلفه سرعت در مختصات عمومی (معادله ۳۲)		
$F_{b\theta}$	نیروی پره (معادله ۲۲)				

کلیه پارامترهای به کار رفته در معادلات فوق به طریق مناسبی بدون بعد شده‌اند.

۱- مقدمه

در طراحی دقیق توربو ماشینها معمولاً حل معادلات سه بعدی ناویر-استوکس<sup>۲</sup> ضروری است که البته برای چنین حلهایی نیازه کامپیوترهای بزرگ و زمان محاسباتی بالاست تا بتوان یک جواب نهایی قابل قبول برای میدان جریان سیال به دست آورد. به عنوان مثال می توان به کار انجام شده توسط آرنونه [۱] و یادگیر کارهای مشابه که در مقالات مختلف وجود دارد، اشاره کرد. خلاصه کردن معادلات جریان از سه بعدی به دو بعدی به میزان قابل توجهی باعث ساده تر شدن محاسبات و کمتر شدن زمان محاسبه و هزینه های مربوطه می شود. البته در ساده سازی یک مسئله سه بعدی به دو بعدی معمولاً از فرضهایی استفاده می شود که باعث دور شدن از فیزیک مسئله می شود. یکی از روشهایی که می توان مسئله را ساده کرد و در عین حال، فیزیک مسئله نیز تا حد ممکن حفظ شود، روش متوسط گیری در جهت مماسی است که توسط هرش [۲] معرفی شده است. در این روش با متوسط گیری معادلات سه بعدی غیر داینامیک در امتداد مماسی معادلاتی که باید حل شوند به دو بعد کاهش یافته و اثر بعد سوم به صورت نیروی پره ظاهر می شود. محققان بسیاری از این روش استفاده کرده و نتایج جالبی نیز ارائه داده اند که می توان به نتایج یائو [۳] برای یک کمپرسور محوری، نتایج بشور [۴] برای یک

کمپرسور محوری، نتایج مارتلی و میکلاسی [۵] برای یک پمپ گریزمرکز، نتایج بالداساره و میکلاسی [۶] برای یک پمپ گریزمرکز و همچنین نتایج پترویک [۷] و کام [۸] اشاره کرد. البته در روشهای پترویک [۷] و کام [۸] از روش انحنا خطی خطوط جریان و توابع جریان استفاده شده است که به مقدار زیادی باروش مورد نظر در این مقاله تفاوت دارد. در روش به کار رفته توسط یائو [۳] از یک برنامه سه بعدی برای حل مسئله استفاده شده و ضمن فرض تقارن محوری، از نتایج حل یکی از بعدها صرف نظر می شود. در روش مارتلی و میکلاسی [۵] از دو برنامه جداگانه استفاده شده که در یکی از برنامه ها برای پیدا کردن نیروی پره ها، جریان سیال بین دو ردیف پره در صفحه  $(z-\theta)$  حل شده و سپس از نتایج این حل در صفحه نصف النهاری  $(I-Z)$  استفاده می شود. این روش حل بسیار طولانی و خسته کننده است ولی در مقایسه با یک حل سه بعدی باز هم زمان کمتری می برد. در روشهای به کار رفته توسط بالداساره و میکلاسی [۶] و بشور [۴] روش محاسبه نیروی پره ها به صورت ساده تری بوده و با اندک تفاوتی مشابه روش استفاده شده در این مقاله است. این تفاوتها به صورت خیلی خلاصه بدین صورت می توان بیان کرد. در محاسبات بالداساره، چون بررسی وی بر روی یک پمپ متمرکز شده، بنابراین سیال مورد مطالعه در مقاله وی تراکم ناپذیر



شکل ۱ - مقطع یک توربوماشین

موجودباشند روش متوسط گیری به صورت زیراست

$$\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A'} \cdot \overline{B'} \quad (5)$$

همچنین می توان نشان داد [۲] که

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial R} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial R} (b \overline{A}) - \frac{1}{\gamma \pi b N} \left[ A_{ss} \frac{\partial \theta_{ss}}{\partial R} - A_{ps} \frac{\partial \theta_{ps}}{\partial R} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial \theta} = \frac{1}{\gamma \pi b N} [A_{ss} - A_{ps}] \quad (7)$$

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \overline{A}) - \frac{1}{\gamma \pi b N} \left[ A_{ss} \frac{\partial \theta_{ss}}{\partial z} - A_{ps} \frac{\partial \theta_{ps}}{\partial z} \right] \quad (8)$$

به علت تقارن محوری

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

### ۳- معادلات حاکم

دستگاه معادلاتی را که در یک توربوماشین حل می کنیم شامل

ولنج است، درحالی که درمقاله حاضر سیال تراکم پذیر و ایده آل است. درمقاله بشور [۴]، بررسی برروی کمپرسور مسحوری است و بنابراین سیال تراکم پذیر و ایده آل است، در فرمول بندی وی، محاسبه نیروی مربوط به افت دردل نیروی پره گنجانده شده است که در فرمول بندی این نویسنده، این دورا از هم جدا می کنیم.

### ۲- متوسط گیری مماسی

روشهای متوسط گیری مختلفی برای ساده کردن معادلات اوپلر وجود دارد. به عنوان مثال متوسط گیری رینولدز، متوسط گیری زمانی و... در این مقاله از روش متوسط گیری دیگری به نام روش متوسط گیری نسبت به جهت مماسی استفاده می شود که این روش منسوب به هرش [۲] است و آن رابه صورت زیر نشان می دهیم

$$\overline{A} = \frac{1}{\theta_{ss} - \theta_{ps}} \int_{ps}^{ss} A d\theta \quad (1)$$

که در آن  $\overline{A}$  مقدار متوسط کمیت عمومی A است و  $ps$  و  $ss$  به ترتیب سطوح مکش و فشار پره اند.

$$\theta_{ss} - \theta_{ps} = \frac{\gamma \pi}{Nb} \quad (2)$$

که N تعداد پره هاست و b پارامتری است که به صورت زیر بیان می شود

$$b = 1 - s/g \quad (3)$$

که در آن s ضخامت پره ها و g گام پره هاست، زاویه  $\theta$  هم موقعیت سطوح فشار و مکش پره ها را در صفحه  $(r-\theta)$  مشخص می کند (به شکل (۱) مراجعه شود). حرکت پره های متحرک، یک میدان جریان نوسانی ایجاد می کند و در نتیجه کمیت عمومی A شامل مقدار متوسط  $\overline{A}$  و مقدار نوسانی  $A'$  است یعنی که

$$A = \overline{A} + A' \quad (4)$$

در صورتی که حاصل ضرب دو کمیت مختلف A و B

با اعمال معادلات (۵) تا (۹) برای معادله بقای جرم، معادله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial r} (b r \bar{\rho} \cdot \bar{V}_r) + \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial r} (b r \rho' \overline{V'_r}) \\ & + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \bar{\rho} \cdot \bar{V}_z) + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \rho' \cdot \overline{V'_z}) \\ & - \frac{1}{\frac{r z}{N} b} \left\{ (\rho V_r)_{ss} \frac{\partial \theta_{ss}}{\partial r} - (\rho V_r)_{ps} \frac{\partial \theta_{ps}}{\partial r} \right. \\ & - \left[ \frac{(\rho V_\theta)_{ss}}{r} - \frac{(\rho V_\theta)_{ps}}{r} \right] + (\rho V_z)_{ss} \frac{\partial \theta_{ss}}{\partial z} \\ & \left. - (\rho V_z)_{ps} \frac{\partial \theta_{ps}}{\partial z} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

در جریان لزج مقدار عبارت داخل کروشه به علت صفر بودن سرعتها بر روی سطوح پره‌ها، صفر است. اسمیت [۹] نشان داد که این مقدار در جریان ایده‌آل نیز صفر است. بنابراین معادله فوق به صورت زیر می شود

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial r} (b r \bar{\rho} \cdot \bar{V}_r) + \frac{1}{b r} \frac{\partial}{\partial r} (b r \rho' \overline{V'_r}) \\ & + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \bar{\rho} \cdot \bar{V}_z) + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} (b \rho' \cdot \overline{V'_z}) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

در این معادله عبارتهای  $\bar{\rho} \cdot \bar{V}_r$  و  $\bar{\rho} \cdot \bar{V}_z$  مقادیر متوسط بوده و  $\rho' \overline{V'_r}$  و  $\rho' \overline{V'_z}$  مقادیر نوسانی هستند که از آنها در مقابل مقادیر متوسط می توان صرف نظر کرد و بنابراین حذف آنها تقریب خوبی است، پس نتیجه می شود

$$\frac{\partial}{\partial r} (b r \bar{\rho} \cdot \bar{V}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (b \bar{\rho} \cdot \bar{V}_z) = 0 \quad (17)$$

و نهایتاً برای ساده کردن معادلات از علامت متوسط گیری (-) در بالای متغیرها نیز صرف نظر کرده و به صورت ساده زیر می نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial r} (b r \rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (b \rho V_z) = 0 \quad (18)$$

پس از متوسط گیری و ساده کردن کل معادلات در حالت غیردائیم،

معادلات بقای جرم، بقای ممتوم و بقای انرژی، در مختصات استوانه‌ای و به صورت غیردائیم و سه بعدی است که چون در این بررسی جریان ایده‌آل فرض می شود معادلات به صورت زیر خلاصه می شوند (معادلات اوپلر):

۱- بقای جرم

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

۲- ممتوم شعاعی

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & (\rho V_\theta V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_r V_z) - \frac{\rho V_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = F_r \end{aligned} \quad (11)$$

۳- ممتوم محوری

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r V_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & (\rho V_\theta V_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z^2) + \frac{\partial P}{\partial z} = F_z \end{aligned} \quad (12)$$

۴- ممتوم مماسی

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r V_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & (\rho V_\theta^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_\theta V_z) + \frac{\rho V_r V_\theta}{r} + \rho \Omega V_r \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = F_\theta \end{aligned} \quad (13)$$

۵- انرژی

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) - \frac{1}{r s} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho e V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho e V_\theta) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\rho e V_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (P V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} \\ & (P V_z) = \rho r_i V_r + \rho f_z V_z + \rho f_\theta V_\theta + \Omega F_b + \text{source} \end{aligned} \quad (14)$$

دستگاه زیر به دست می‌آید:

۱- بقای جرم:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho b r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho b r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho b r V_z) = 0 \quad (19)$$

۲- ممنتوم شعاعی:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho b r V_r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho b r V_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho b r V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial r} (b r P) = \rho b V_\theta^2 + \rho b r f_r + P \frac{\partial}{\partial r} (b r) + F_{b_r} \quad (20)$$

۳- ممنتوم محوری:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho b r V_z) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho b r V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho b r V_z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (b r P) = \rho b r f_z + P \frac{\partial}{\partial z} (b r) + F_{b_z} \quad (21)$$

۴- ممنتوم مماسی:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho b r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho b r V_r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho b r V_z V_\theta) = -\rho b V_r V_\theta + \rho b r f_\theta + F_{b_\theta} \quad (22)$$

۵- معادله انرژی:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho b r e) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho b r V_r \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho b r V_z \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \right) = r \Omega (\rho b r f_\theta - F_{b_\theta}) \quad (23)$$

در این بررسی از اثرات ضخامت پره‌ها صرف نظر شده و بنابراین پارامتر  $(b=1)$  است. نیروی  $f$  که در معادلات ممنتوم و انرژی ظاهر می‌شود مربوط به افت‌هاست و از طریق نتایج مربوط به مدل‌های افت موجود، ارزیابی و تعیین می‌شود.

معادله (۲۲) را از دستگاه معادلات فوق خارج می‌کنیم و از آنجا که نیروی پره در حالت دائم محاسبه می‌شود معادله (۲۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r V_z V_\theta) = -\rho V_r V_\theta + F_{b_\theta} \quad (\text{الف} - 22)$$

حال با معلوم بودن شرایط اولیه یعنی مقادیر  $V_r$  و  $V_\theta$  و  $V_z$  و  $\rho$  مقدار  $F_{b_\theta}$  قابل محاسبه خواهد بود. پس از محاسبه  $F_{b_r}$  و  $F_{b_z}$  از معادلات (۲۴) و (۲۵) و قراردادن مقادیر  $F_{b_r}$  و  $F_{b_z}$  و  $F_{b_\theta}$  در معادلات (۲۰)، (۲۱)، (۲۳) و (۲۴)، دستگاه معادلات (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) را حل می‌کنیم و مقادیر جدید  $V_r$  و  $V_z$  و  $\rho$  و  $e$  و  $V_\theta$  را مجدداً حساب کرده و این مقادیر جدید را در معادله (۲۲ - الف) قرار داده و  $F_{b_\theta}$  را دوباره محاسبه می‌کنیم. این کار را تا همگرا شدن حل ادامه می‌دهیم. برای تکمیل دستگاه معادلات برای محاسبه  $P$  و  $T$  از معادلات  $P = \rho RT$  معادله گاز کامل و  $e = C_v T$  معادله انرژی داخلی نیز استفاده می‌شود که  $C_v$  گرمای ویژه دردمای ثابت است. نیروی  $F_{b_\theta}$  که از معادله (۲۲ - الف) به صورت جداگانه حساب می‌شود، در فضای بین پره‌ها مقدار داشته و در خارج پره‌ها مقدار آن صفر است. مؤلفه‌های این نیرو در دو امتداد شعاعی و محوری به صورت زیر در معادلات ممنتوم شعاعی و ممنتوم محوری ظاهر می‌شوند

$$F_{b_r} = \begin{cases} \circ \\ F_{b_\theta} \cdot \tan \eta \end{cases} \quad (24)$$

$$F_{b_z} = \begin{cases} \circ \\ F_{b_\theta} \cdot \tan \eta \end{cases} \quad (25)$$

$\eta$  و  $\phi$  زوایای مربوط به هندسه پره‌ها هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند (شکل ۱)

$$\tan \eta = -r \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (26)$$

$$\tan \phi = +r \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

همان طوری که گفته شد معادله (۲۲ - الف) نیروی  $F_{b_\theta}$  را در فضای داخلی پره‌ها حساب می‌کند که در آن  $V_\theta$  باید معلوم باشد. در بالا دست اولین ردیف پره‌ها مقدار  $V_\theta$  صفر بوده و در پایین دست پره‌ها  $V_\theta$  از رابطه چرخش آزاد محاسبه می‌شود.

$$G = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u V + \eta_x P \\ \rho v V + \eta_y P \\ (\rho e + P) V \end{pmatrix},$$

$$S = \frac{-1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\rho v}{r} \\ \frac{\rho v u}{r} + F_{bx} \\ \frac{\rho v^2}{r} + \frac{\rho v \theta}{r} + F_{by} \\ \frac{\rho e v}{r} + \frac{\rho v}{r} - r \Omega F_{b\theta} \end{pmatrix} \quad (31)$$

که در آن

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \\ J &= \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \end{aligned} \quad (32)$$

که در آنها  $\xi_x$  و  $\xi_y$  و  $\eta_x$  و  $\eta_y$  متریکهای انتقال‌اند و به صورت عددی محاسبه می‌شوند و  $J$  ژاکوبین است. باتوجه به اینکه از روش حجم معیار برای حل معادلات استفاده شده است از معادلات فوق بر روی یک حجم معیار دیفرانسیلی انتگرال گیری کرده و پس از اعمال فرضیه گرین<sup>۳</sup> برای تبدیل انتگرالهای حجمی به انتگرالهای سطحی معادله کلی زیر را خواهیم داشت

$$\int_V \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) dV + \int_A (F, G) n \cdot dA = \int_V S dV \quad (33)$$

که  $V$  و  $A$  به ترتیب نشان دهنده حجم و سطح یک حجم معیارند. پس از انتگرال گیری بین دو مرحله زمانی  $n$  و  $n+1$  خواهیم داشت

$$Q^{n+1} = Q^n - \frac{\Delta T}{\Delta V} \cdot \sum \text{Fluxes} + S \cdot \Delta T \quad (34)$$

که در آن  $\sum \text{Fluxes}$  مربوط به شار جملات جابه‌جایی از مرزهای کلیه حجم معیارهای موجود در شبکه است و یاد در حالت کلی

$$\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n = -R_k \cdot \Delta T (C - D_A - S) \quad (35)$$

که در آن  $\Delta T$  مربوط به گام زمانی است،  $R_k$  ثابتی است که به حجم

$$r \cdot V_\theta = \text{Const} \quad (27)$$

مؤلفه چرخشی سرعت  $V_\theta$  در بین پره‌ها نیز از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$V_\theta = V_z \tan \beta(z) \quad (28)$$

که در آن  $\beta(z)$  نیز از معادله زیر به دست می‌آید [۳]:

$$\beta(z) = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^a \quad (29)$$

که  $\beta_1$  و  $\beta_2$  به ترتیب زوایای ورودی به و خروجی از پره‌ها هستند و  $z$  مشخص کننده موقعیت نقطه مورد نظر از لبه جلویی پره است.  $a$  ضریبی است بین  $0/73$  تا  $0/93$  که در این بررسی  $a = 0/9$  انتخاب شده است. اگر مقدار  $a = 1$  باشد توزیع زاویه به صورت خطی خواهد بود.

#### ۴- مدل کامپیوتری معادلات

همان طور که گفته شد دستگاه معادلات (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) باید با هم حل شوند تا سرعتهای  $V_r$  و  $V_z$  محاسبه شوند. در این مرحله برای ساده تر شدن دستگاه معادلات، مشتقهای نسبت به  $r$  را اعمال کرده و با جابه‌جا کردن بعضی از جملات به سمت راست و همچنین تغییر نام  $V_r$  به  $v$  و  $V_z$  به  $u$  دستگاه معادلات شبیه به یک دستگاه معادلات دو بعدی  $(X-Y)$  می‌شوند که شامل جملات منبع اضافی در سمت راست معادلات‌اند. حال این دستگاه دو بعدی را بی‌بعد کرده و سپس از دستگاه دکارتی  $(X-Y)$  به دستگاه کلی  $(\xi-\eta)$  منتقل می‌کنیم. پس از مرتب کردن جملات دستگاه کلی معادلات در شکل بقای آن به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = S \quad (30)$$

که در آن

$$Q = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x P \\ \rho v U + \xi_y P \\ (\rho e + P) U \end{pmatrix}$$

وضرایب چهارگانه روش رانگ - کو تا مربوط می شود.

C - شار جملات جابه جایی است.

DA - شار جملات استهلاک مصنوعی است که در ادامه تشریح خواهد شد.

S - جمله منبع است.

### ۵- استهلاک مصنوعی

در محاسبات سیال لزج معمولاً به علت وجود جملات مربوط به انتشار، خاصیت استهلاک طبیعی مخصوصاً در نواحی لزج وجود دارد که باعث جلوگیری از نوسانها می شود. در محاسبات سیال غیر لزج این خاصیت وجود ندارد و برای جلوگیری از آثار نوسانها در نزدیکی امواج ضربه ای و نقاط سکون و همچنین جلوگیری از نوسانهای ناشی از عدم تداخل فشار<sup>۴</sup> و سرعت، از استهلاک مصنوعی استفاده می شود. در این مقاله از مدل پیشنهادی پولیام [۱۰] استفاده شده است. در این مدل از جملات رسته دوم برای امواج ضربه ای و جملات مرتبه چهارم برای افزایش تداخل فشار<sup>۵</sup> و سرعت، استفاده می شود که در شکل کلی به صورت زیر است:

$$D_A(Q) = (D_{\xi}^2 - D_{\xi}^4 + D_{\eta}^2 - D_{\eta}^4) Q \quad (36)$$

که  $D_{\xi}$  و  $D_{\eta}$  معرف مشتقهای دوم و چهارم متغیر  $Q$  در جهات  $\xi$ ،  $\eta$  هستند و از مرجع [۱۰] اقتباس شده است. برای جزئیات بیشتر خواننده به مقاله پولیام [۱۰] و یاسوانسون-ترکل [۱۱] ارجاع داده می شود.

### ۶- گام زمانی

دستگاه معادلات حاصل را با استفاده از روش زمان پیمایشی<sup>۶</sup> حل می کنیم و پیشروی در زمان را تا رسیدن به حالت دائم که جواب نهایی است ادامه می دهیم که در این حالت  $\Delta Q$  باید به صفر یا مقدار بسیار کمی برسد. در محاسبات جریان دائم با استفاده از یک روش زمان پیمایشی، در صورتی که از یک قدم زمانی موضعی (به جای قدم زمانی کلی) استفاده شود، سرعت همگرایی بالا خواهد رفت. با توجه به این نکته، با ثابت نگاه داشتن ضریب CFL در واقع بیشترین مقدار  $\Delta T$  را محاسبه کرده و در محاسبات اعمال

می کنیم.

$$\Delta t = \frac{CFL}{dt_{\xi} + dt_{\eta}} \quad (37)$$

که در آن

$$dt_{\xi} = |\xi_x u + \xi_y v| + \frac{a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{\Omega}$$

$$dt_{\eta} = |\eta_x u + \eta_y v| + \frac{a \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}{\Omega} \quad (38)$$

که در آن  $a$  سرعت صوت و  $\Omega$  حجم هرامان است.

### ۷- برنامه کامپیوتری و آزمون آن

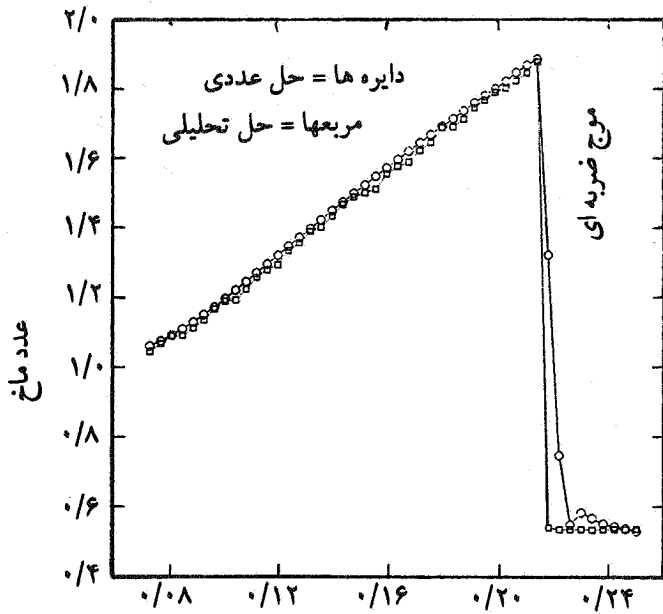
همان طور که قبلاً اشاره شده، با توجه به دستگاه معادلات و روش زمان پیمایشی که برای دستگاههای صریح به کار برده می شود، برنامه کامپیوتری به صورت برداری<sup>۷</sup> تهیه شد که از روش رانگ-کو تا مرتبه چهارمی استفاده کرده و چهار معادله کوپله شده را حل می کند. ضرایب مربوط به چهار مرحله رانگ-کو تا عبارت اند از:

$$(1/0, 0/50, 0/33, 0/25)$$

برای آزمون برنامه فوق، ابتدا جریان را در داخل یک مجرای واگرا حل کرده و به ازای فشارهای خروجی مختلف جریانهای ایجاد شده را ارزیابی کردیم که با حلای تحلیلی مطابقت دارد. به عنوان نمونه به ازای فشار خروجی  $P_{exit} = 0/65$  کانتورهای عدد ماخ در شکل (۲) نشان داده شده است و محل موج ضربه ای ایجاد شده نیز به روشنی مشخص است. همچنین تغییرات عدد ماخ از ورودی تا خروجی که به کمک این روش عددی پیش بینی شده، با تغییرات به دست آمده در حل تحلیلی [۱۲] مقایسه شده اند که تطابق خوبی را نشان می دهند، شکل (۳) را ببینید.

### ۹- شرایط مرزی

- در ورودی، فشار و دمای سکون و همچنین زاویه ورودی جریان داده می شود و مؤلفه های سرعت را نیز با درونیابی به دست می آوریم.
- در خروجی، مقدار فشار استاتیک در پای پره ها را مشخص کرده

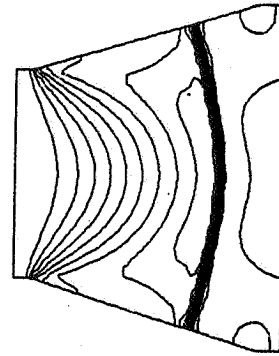


شکل ۳ - تغییرات عدد ماخ در یک دیفیوزر

جرم کاسته می‌شود و درصد خطا از حوالی  $50 \times 30$  به بالا، ناچیز می‌شود. لازم به تذکر است که مطالعه شبکه بر روی شبکه دیفیوزر انجام شده و بررسی بعدی نشان داد که در مورد شبکه کمپرسور نیز صادق است.

#### ۱۱- نتایج

برنامه فوق‌الذکر که به زبان فورتن ۷۷ نوشته شده است برای کمپرسوری مطابق شکل (۴) اجرا شد که در آن پره‌های متحرک و پره‌های ساکن به ترتیب مشخص شده‌اند. نکته‌ای که در این جالازم به تذکر است، مربوط به پروفیل پره‌های مورد استفاده در این محاسبات می‌شود. از آنجا که اطلاعات مربوط به یک سری پره‌های خاص، به عنوان مثال پره‌های (۶۷ - Rotor - NASA) مورد اشاره در مرجع [۴] و پروفیل‌های دیگر در اختیار نبود، از اطلاعات مربوط به کمپرسور محوری که توسط این نویسنده طراحی شده و نمونه‌ای از پره‌های آن نیز ساخته شده (شکل ۵) استفاده شده است. در این کمپرسور زوایای ورودی و خروجی پره‌های متحرک در ناحیه پاور پره‌ها که در شکل (۶) نشان داده شده همگی از طرح فوق استخراج شده‌اند، تغییرات شعاعی زوایای پره‌های ثابت نیز در شکل (۶) ملاحظه می‌شود. تغییرات زوایای داخلی پره‌ها همان‌طور که قبلاً ذکر شد از معادله (۲۹) تبعیت می‌کند.



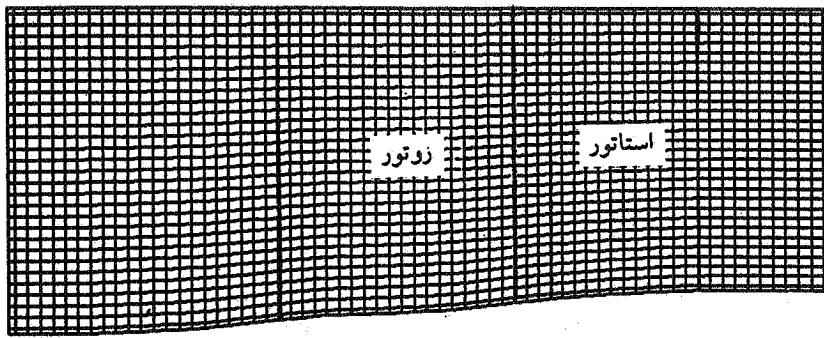
شکل ۲ - کاتوره‌های عدد ماخ در یک دیفیوزر

و مقدار فشار در شعاع‌های دیگر از طریق تعادل شعاعی به دست خواهد آمد. مؤلفه‌های سرعت جریان و همچنین دماهای استاتیک و سکون سیال با درونیابی به دست می‌آیند. - درمرزهای بالایی و پایینی، از شرط آدیاباتیک بودن سطح، صفر بودن گرادیان فشار و درونیابی مؤلفه‌های سرعت استفاده می‌شود.

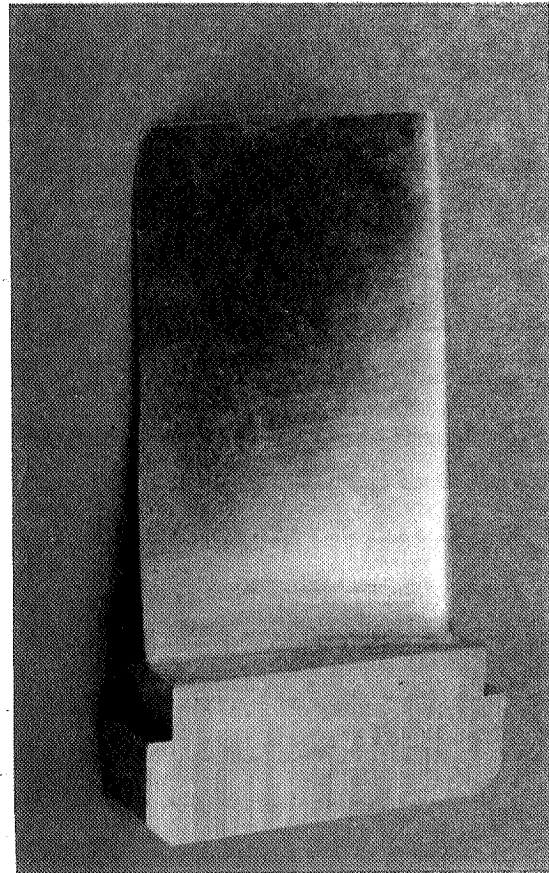
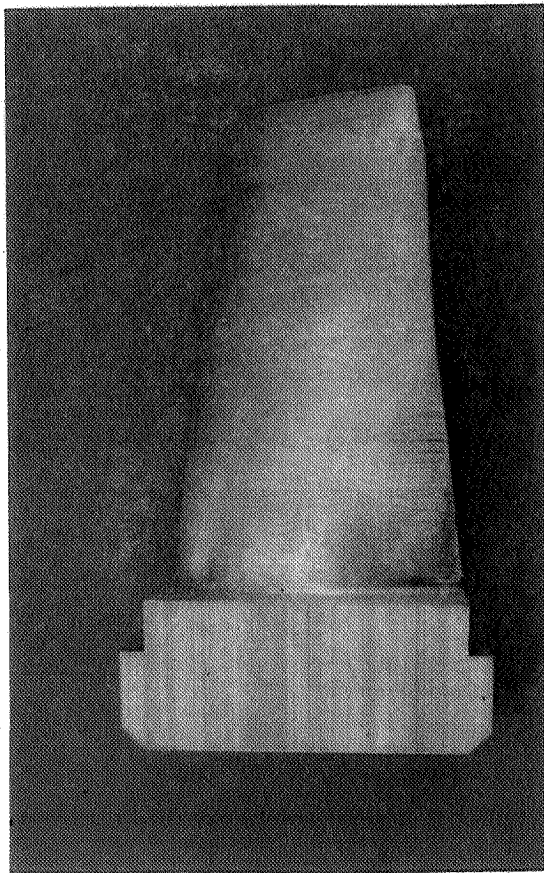
#### ۱۰- تولید شبکه

در ایجاد شبکه می‌توان از روش‌های جبری و یا معادلات دیفرانسیل استفاده کرد که به علت سریع بودن روش جبری از این شیوه در ایجاد شبکه استفاده شده است. خطوط شبکه فیزیکی ایجاد شده در امتداد  $\eta$  دارای انحنا (منطبق بر بدنه کمپرسور) بوده و در امتداد  $\eta$  به صورت عمودی هستند تا بتوانند بر لبه‌های پره‌ها منطبق شوند. در هر حال از آنجا که برنامه کامپیوتری برای حل میدان جریان در مختصات کلی نوشته شده است در صورتی که از یک شبکه با خطوط  $\eta$  غیر قائم نیز استفاده شود، برنامه قابلیت اجرا دارد. نمونه‌ای از شبکه تولید شده در شکل (۴) نشان داده شده است که شامل  $67 \times 30$  گره بوده که این تعداد گره انتخابی در نزدیکی مرز ظرفیت حافظه کامپیوتر مورد استفاده است. در هر حال قبل از این انتخاب، مطالعه تعداد نقاط شبکه انجام شده که نتایج آن در جدول (۱) نشان داده شده است. همان‌طور که از اطلاعات جدول بالا مشاهده می‌شود باز یاد تر شدن تعداد نقاط شبکه از مقدار خطای دبی





شکل ۴ - شبکه ۶۷×۳۰ برای یک کمپرسور



شکل ۵ - نمونه یک پره متحرک

طسوزکه ملاحظه می شود با عبور جریان از داخل کمپرسور، فشار و چگالی افزایش یافته و عدد ماخ پس از پره ها کاهش می یابد که با فیزیک مسئله نیز تطابق دارد و نتایج مراجع [۳ و ۴] نیز روند مشابهی را با پره های با هندسه متفاوت نشان می دهند. نکته مهم و قابل توجه این

برای این محاسبات، فشار بدون بعد خروجی در قسمت پای پره ها ۰/۹ انتخاب شده تا عدد ماخ محوری همواره مادون صوت باشد. شکل های (۷)، (۸) و (۹) به ترتیب نشان دهنده کانتورهای مربوط به چگالی - فشار استاتیکی و عدد ماخ جریان است. همان

داشت و به سادگی بر روی اثرات افزایش سرعت دوران، تغییر فشار خروجی، شکل پروفیل پره‌ها و دیگر پارامترهای موثر بررسی‌های لازم را انجام داد. سرعت بالای انجام محاسبات و ارائه ارزیابی نسبتاً دقیقی از وضعیت جریان در هر نقطه ماشین، مشخصه بارز و قابل توجه این برنامه است و به راحتی می‌توان تعداد ردیف پره‌های متحرک و ثابت را زیاد یا کم کرد که در مقایسه با یک برنامه سه بعدی زمان و هزینه کمتر محاسبات قابل توجه است. نظری گذرا به جدول (۱) مرتبه زمان محاسبات را توسط این برنامه نشان می‌دهد که حدود یک ساعت با کامپیوتر ۴۸۶-DX۲ است. در صورتی که زمان محاسبه برای برنامه‌های سه بعدی با یک مینی کامپیوتر از مرتبه ۱۰ ساعت است [۱۳]. بنابراین در این برنامه سرعت کار بسیار بالاست و با توجه به در نظر گرفتن نیروی اعمال شده توسط پره‌ها دقت کار هم بالا خواهد بود.

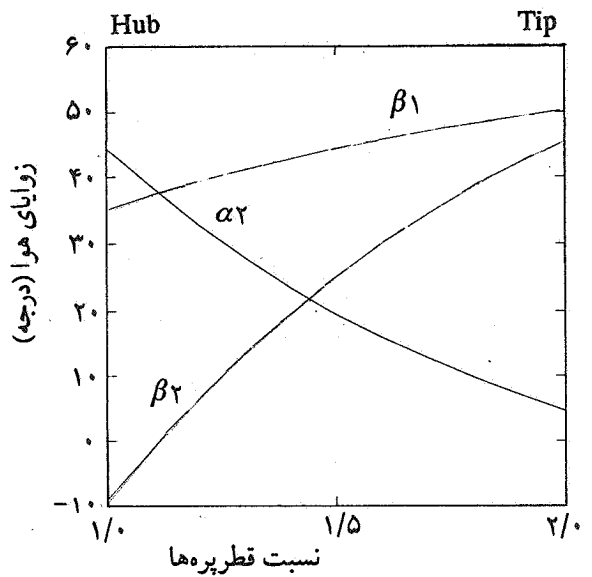
در این مطالعه از اثرات افتها صرف نظر شده که خود مقوله‌ای جداگانه است و در ادامه مطالعات بعدی منظور خواهد شد. همچنین تغییر رژیم جریان از ایده‌ال به لزج و وارد کردن مدل اغتشاش مناسب نیز از اهداف آتی است. به هر حال برای ارزیابی عملکرد برنامه حاصل نتایج پیش‌بینی شده دبی جرمی توسط این برنامه با نتایج مربوط به کمپرسور طراحی شده توسط این نویسنده با هم مقایسه شدند. که اختلاف حاصل حدود ۲/۸ درصد است که نشان دهنده دقت نسبتاً بالای محاسبات و پیش‌بینی انجام شده توسط برنامه است.

#### ۱۲- نتیجه‌گیری

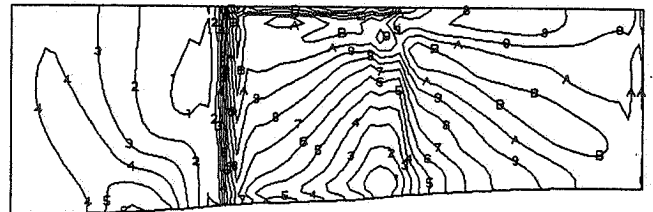
در این مقاله، جریان سیال غیرلزج در صفحه نصف‌النهاری یک کمپرسور جریان محوری مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور معادلات اوپلر سه بعدی در جهت مماسی متوسط گیری شده و با استفاده از روش زمان پیمایشی معادلات حاصل به روش عددی حل شد. نتایج به دست آمده عملکرد کمپرسور را به نحو خوبی با کمترین زمان لازم پیش‌بینی کرد. دقت عمل برنامه و سرعت بالای آن، برنامه را برای انجام مطالعات لازم برای جریان سیال در توربو ماشینها جذاب می‌کند.

#### قدردانی

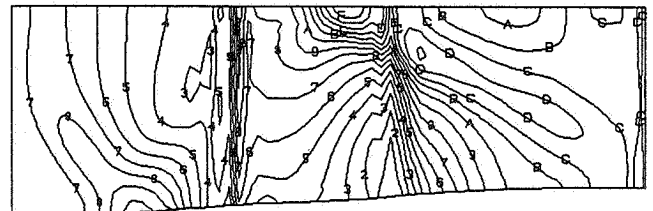
لازم است از مرکز فیزیک نظری تریست<sup>۸</sup> که برای مدتی این



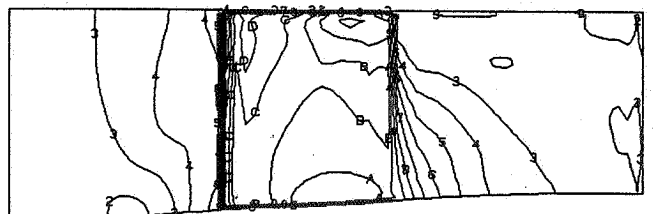
شکل ۶ - تغییرات زاویه هوا با ارتفاع



شکل ۷ - کانتورهای جرم مخصوص



شکل ۸ - کانتورهای فشار استاتیک



شکل ۹ - کانتورهای عدد ماخ

است که با داشتن توزیع پارامترهای مختلف جریان در هر مقطع و در طول ماشین می‌توان تجزیه و تحلیل کلی از وضعیت جریان

دردانشگاه فلورانس به خاطر راهنماییهای لازم ایشان و از مهندس میلیوینی در کمکهای برنامه نویسی قدر دانی و تشکر می کنم.

امکان را در دانشگاه فلورانس ایتالیا در اختیار این جانب قرار داد تا بخشی از این کار را در آنجا انجام دهم تشکر کنم، همچنین از پرفسور مارتلی

جدول (۱)

تعداد نقاط شبکه	تعداد تکرار	زمان محاسبات (دقیقه)	دبی محاسبه شده (بدون بعد)	درصد خطا
۱۴×۷	۱۰۰۰	۰/۸۳	۰/۱۳۷۶۰	٪۲۲/۲
۱۹×۱۰	۱۰۰۰	۱/۱۴	۰/۱۲۲۴۰	٪۸/۷۵
۳۱×۲۰	۱۰۰۰	۴/۵۲	۰/۱۱۷۰۰	٪۳/۹۲
۵۹×۳۰	۱۰۰۰	۱۲/۹۶	۰/۱۱۲۹۱	٪۰/۲۷
۵۹×۳۰	۴۰۰۰	۵۹/۸۴	۰/۱۱۲۶۰۵	٪۰

واژه نامه

1. Runge-Kutta
2. Navier-Stoke
3. Green's theorem

4. decoupling
5. coupling
6. time-marching

7. vectorized
8. Trieste

مراجع

1. Arnone, A., "Viscous Analysis of 3-D Rotor Flow Using a Multigrid Method," *Transactions of ASME, Journal of Turbomachinery*, Vol. 116, No. 3, pp. 435-445, 1994.
2. Hirsch, C., "Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines," *Finite Element Calculations of Turbomachine Flows*, Von Karman Institute LS, 1979 -7.
3. Yao, Z., and Hirsch, Ch., "Throughflow Model Using 3-D Euler or Navier-Stokes Solver," *VDI Berichte* NR. 1185, pp. 51-61, 1995.
4. Boure, G., and Gillant, Ph., (Plaisir/F), "Aerodynamic Modeling of a Transonic Radial Equilibrium of a Multistage Compressor," *VDI Berichte*, NR. 1185, pp. 143-155, 1995.
5. Martelli, F., and Michelassi, V., "Using Viscous Calculations in Pump Design," *Transactions of the ASME*, Vol. 112, pp. 272-280, Sept. 1990.
6. Baldassarre, L., and Michelassi, V., "Centrifugal Pump Design by Meridional Flow Simulation," *2nd. International Conference on Pumps and Fans*, Beijing, 1995.
7. Petrovic, M., and Ric B. W., "Through-Flow Calculation in Axial Flow Turbines at Part Load and Low Load," *VDI Berichte*, NR. 1185, pp. 309-317, 1995.
8. Came, P.M., "Streamline Curvature through Flow Analysis of Axial-Flow Turbines," *VDI Berichte*, NR. 1185, pp. 291-307, 1995.
9. Smith, L.H., "The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery," *Trans ASME, Ser. A, Journal of Engineering for Power*, Vol. 88, pp. 1-12, Jan. 1966.
10. Pulliam, T.H., "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," *AIAA Journal*, pp. 1931-1940, Sept. 1986.
11. Swanson, R.C.; and Turkel, Eli., "Artificial Dissipation and Central Difference Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations," *Proceedings of the AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference AIAA*, pp. 55-69, New

- York, 1987.
12. Shapiro, H. Ascher, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, John Wiley & Sons , New York, 1953.
13. Vu, T.C., and Shyy, W., "Performance Prediction by Viscous Flow Analysis for Francis Turbine Runner, " *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol. 116, pp. 116-120, March 1994.