

مروری بر تئوری پدیدانامیک و کاربردهای آن؛ بخش اول: مدل‌های مبتنی بر پدیدانامیک

پوریا شیخ‌بهائی و فرشید مسیبی*

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۶/۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۶/۲۷)

چکیده - پدیدانامیک نسخه غیرمحل مکانیک محیط‌های پیوسته است که در آن از معادلات انتگرالی به جای معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. به دلیل عدم استفاده از مشتقات مکانی متغیرها در روابط این تئوری، استفاده از آن برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی امکان‌پذیر است. در اولین پژوهش‌های منتشر شده، از پدیدانامیک برای تحلیل رشد ترک در مواد ترد استفاده شده است. با اثبات قابلیت‌های این تئوری، ایده استفاده از آن برای بررسی رفتار مواد شبه‌ترد و تحلیل رفتار پلاستیک نیز به تدریج مطرح شده است. بدین منظور، فرمول‌بندی‌ها و مدل‌های جدید مبتنی بر پدیدانامیک توسعه یافته‌اند. در کنار این موارد، هزینه محاسباتی زیاد روش‌های مبتنی بر پدیدانامیک همواره به‌عنوان نقطه ضعف اصلی این تئوری عنوان شده است. با توسعه روش‌های پدیدانامیک و نیز معرفی روش‌های ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک و تئوری‌های محلی، مشکل هزینه محاسباتی روش‌های پدیدانامیک تا حد زیادی رفع شده است. مقاله حاضر به معرفی پدیدانامیک و مدل‌های مبتنی بر آن می‌پردازد. بدین منظور، ابتدا تئوری پدیدانامیک، فرمول‌بندی‌ها و روش‌های مبتنی بر آن مرور شده است. سپس در مورد نحوه مدل‌سازی مواد شبه‌ترد، تعریف رفتار پلاستیک و نیز استفاده از عملگرهای دیفرانسیلی در این تئوری بحث شده است.

واژه‌های کلیدی: پدیدانامیک، مکانیک شکست، مدل غیرمحل، رشد ترک، آسیب.

A Review of Peridynamics and its Applications; Part1: The Models based on Peridynamics

P. Sheikhbahaei and F. Mossaiby*

Department of Civil Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Abstract: Peridynamics is a nonlocal version of the continuum mechanics, in which partial differential equations are replaced by integro-differential ones. Due to not using spatial derivatives of the field variables, it can be applied to problems with discontinuities. In the primary studies, peridynamics has been used to simulate crack propagation in brittle materials. With

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mossaiby@eng.ui.ac.ir

proving the capabilities of peridynamics, the idea of using this theory to simulate crack propagation in quasi-brittle materials and plastic behavior has been proposed. To this end, formulations and models based on peridynamics have been developed. Meanwhile, the high computational cost of peridynamic methods is the main disadvantage of this theory. With the development of peridynamic methods and introduction of hybrid methods based on peridynamics and local theories, the computational cost of peridynamic methods has been reduced to a large extent. This paper introduces peridynamics and the models based on it. To this end, we first review peridynamics, its formulations, and the methods based on it. Then we discuss the modeling of quasi-brittle materials, simulation of plastic behavior and employing the differential operators in this theory.

Keywords: Peridynamics, Fracture mechanics, Nonlocal model, Crack growth, Damage.

فهرست علائم

گام زمانی n ام	t_n	سطح میله در فضای یک‌بعدی	A
حالت بردار نیرو	\underline{T}	چگالی نیروی بدنه	\mathbf{b}
میدان جابه‌جایی	\mathbf{u}	ثابت میکرومدول	c
میدان شتاب	$\ddot{\mathbf{u}}$	سرعت انتشار موج فشاری	C_k
حجم متناظر نقطه \mathbf{x}_i	V_i	حجم ناحیه همسایگی متناظر با ذره \mathbf{x}	$dV_{\mathbf{x}}$
تابع میکروپتانسیل اسکالر	w	مدول الاستیسیته	E
حالت طول پیوند	\underline{x}	کشیدگی پیوند	\underline{e}
بردار مختصات هر ذره در موقعیت تغییرشکل یافته	\mathbf{y}	حالت انحرافی	\underline{e}^d
حالت بردار تغییر شکل	$\underline{\mathbf{Y}}$	تابع اسکالر نیروی پیوند	f
مؤلفه دوم حالت مدول	α	تابع نیروی دوگانه	\mathbf{f}
ضریب اصلاح حجم	β	نرخ آزادشدگی انرژی بحرانی	G_0
افق	δ	ناحیه همسایگی ذره \mathbf{x}	$H_{\mathbf{x}}$
اندازه گام زمانی	Δt	زیرنویس شماره نقطه	i
اندازه گام زمانی بحرانی	Δt_c	زیرنویس شماره نقطه	j
فاصله قرارگیری نقاط در یک دامنه	Δx	مؤلفه اول حالت مدول	k'
بردار جابه‌جایی نسبی دو ذره	$\underline{\eta}$	بردار واصل میان دو ذره در موقعیت تغییرشکل یافته	$\underline{\mathbf{M}}$
همتای اتساع حجمی پری‌دینامیک	θ	بالانویس مربوط به گام زمانی n ام	n
تابع اسکالر وضعیت پیوند	μ	حجم وزنی	q
ضریب پواسون	ν	ناحیه محاسباتی	\mathcal{R}
بردار فاصله نسبی دو ذره در موقعیت مرجع	$\underline{\xi}$	تغییر شکل نسبی پیوند	s
چگالی ماده	ρ	تغییر شکل نسبی بحرانی پیوند	s_0
شاخص آسیب	ϕ	گام زمانی	t
حالت تابع تأثیر	$\underline{\omega}$	ضخامت ورق در فضای دوبعدی	\bar{t}

۱- مقدمه

اهمیت موضوع، تاکنون از انواع مدل‌های محاسباتی، نظری و آزمایشگاهی برای بررسی چنین مسائلی استفاده شده است [۱]. در اغلب پژوهش‌های منتشر شده در این زمینه، بحث

ایجاد ترک و گسترش آن در سازه‌های طبیعی و مهندسی خسارت‌های جانی و مالی جبران‌ناپذیری را به دنبال دارد. به دلیل

با استفاده از این تئوری بدون فرضیات خاصی امکان‌پذیر است. در پریداینامیک، هر دامنه از قرار گرفتن تعداد زیادی از ذرات ماده در کنار یکدیگر ایجاد می‌شود. هر ذره با سایر ذرات واقع در یک ناحیه همسایگی در ارتباط است. ناحیه همسایگی هر نقطه در پریداینامیک به صورت یک پاره‌خط در فضای یک‌بعدی، یک دایره در فضای دوبعدی و یک کره در فضای سه‌بعدی به شعاع δ پیرامون هر ذره تعریف می‌شود که اندرکنش‌های غیرمحلّی در داخل آن اتفاق می‌افتد. δ با عنوان افق^۲ شناخته می‌شود که احتمالاً بیانگر طول مشخصه^۳ ماده است [۲۱-۲۳].

در پریداینامیک، مانند دینامیک مولکولی، از قانون دوم نیوتن برای محاسبه نیروی حاکم میان ذرات ماده استفاده می‌شود. با این تفاوت که طول مشخصه در پریداینامیک بسته به شرایط مسئله مقیاس‌های نانو، میکروسکوپی و ماکروسکوپی را شامل می‌شود [۲۴ و ۲۵]. به دلیل کاهش تعداد ذرات ماده و نیز کاهش تعداد اندرکنش‌های غیرمحلّی در پریداینامیک، در مقایسه با دینامیک مولکولی، استفاده از آن برای تحلیل سازه‌های در ابعاد واقعی نیز امکان‌پذیر است. بنابراین پریداینامیک مشکل هزینه محاسباتی استفاده از دینامیک مولکولی را رفع کرده است. با کاهش افق و محدود کردن ناحیه وقوع اندرکنش‌های غیرمحلّی، پریداینامیک به فرم محلّی^۴ میل می‌کند. بنابراین پریداینامیک نسخه اصلاح‌شده مکانیک محیط‌های پیوسته نیز به حساب می‌آید [۲۰، ۲۱، ۲۶ و ۲۷]. می‌توان گفت که پریداینامیک مشکل هزینه محاسباتی دینامیک مولکولی و محدودیت استفاده از تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک در برخورد با ناپیوستگی‌ها را تا حد زیادی رفع کرده است.

تاکنون سه فرمول‌بندی پریداینامیک شامل انواع پیوند-مبنا^۵، حالت-مبنای معمول^۶ و حالت-مبنای غیرمعمول^۷ معرفی شده‌اند. نسخه پیوند-مبنا ساده‌ترین و کم‌هزینه‌ترین فرمول‌بندی پریداینامیک است، که در آن از فنرهای محوری (احتمالاً غیرخطی) برای مدل کردن اندرکنش میان ذرات ماده استفاده می‌شود. فنر

محدودیت استفاده از تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی مطرح شده است، چراکه مشتقات مکانی موجود در روابط این تئوری در سطح ترک و نوک آن قابل‌تعریف نیستند [۲]. به‌منظور رفع چنین محدودیتی، شاخه‌ای از علوم تحلیل سازه با عنوان مکانیک شکست معرفی شده است. در مطالعات انجام شده در این حوزه، انواع مدل‌های مکانیک شکست خطی [۳-۶] و غیرخطی [۷-۱۱] برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی معرفی شده‌اند، هرچند که استفاده از این مدل‌ها برای تحلیل مسائل ایجاد و رشد ترک نیازمند در نظر گرفتن فرضیات و یا اقدامات اضافی است. به‌عنوان مثال، می‌توان به لزوم شبکه‌بندی مجدد در صورت عدم اطلاع از مسیر رشد ترک [۱۲] و محدودیت تحلیل مسائل رشد ترک با الگوی پیچیده (مانند ترک‌های شاخه‌ای) [۱۳] اشاره کرد. برای رفع چنین محدودیت‌هایی، ایده استفاده از دینامیک مولکولی برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی در تعدادی از پژوهش‌ها مطرح شده است. دینامیک مولکولی یک مدل گسسته غیرمحلّی^۱ است، که در آن ذرات ماده در مقیاس نانو در نظر گرفته می‌شوند. از قانون دوم نیوتن برای محاسبه نیروی حاکم میان این ذرات استفاده می‌شود [۱۴]. با وجود قابلیت‌های منحصربه‌فرد دینامیک مولکولی برای حل مسائل دارای ناپیوستگی، هزینه محاسباتی زیاد آن به‌عنوان یک محدودیت جدی مطرح شده است؛ به‌طوری که با وجود قوی‌ترین ابررایانه‌های جهان، استفاده از دینامیک مولکولی برای تحلیل سازه‌های واقعی تقریباً غیرممکن است [۱۵ و ۱۶]. برای برطرف کردن موانع عنوان شده، تئوری پریداینامیک توسط سیلینگ در سال ۲۰۰۰ معرفی شده است [۱۷].

پریداینامیک از ترکیب دو واژه یونانی پری (به معنای همسایگی) و داینامیک (نیرو) برگرفته شده است [۱۸]. این تئوری به‌نوعی نسخه غیرمحلّی مکانیک محیط‌های پیوسته است، که در آن معادلات انتگرالی جایگزین معادلات دیفرانسیل شده‌اند [۱۹ و ۲۰]. به دلیل استفاده نکردن از مشتقات مکانی متغیرها در روابط پریداینامیک، تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی

موجود میان هر دو ذره یک پیوند^۸ نام دارد [۲ و ۱۷]. در این نسخه، از اثر تغییر شکل یک پیوند بر نیروی سایر پیوندها صرف نظر می شود. چنین فرضی موجب محدودیت در انتخاب ضریب پواسون در نسخه پیوند-مبنا شده است. علاوه بر این، لحاظ نشدن مؤلفه تغییر شکل انحرافی^۹ در این فرمول بندی موجب محدودیت در تحلیل رفتار پلاستیک شده است. این محدودیت ها در نسخه های حالت-مبنا رفع شده اند [۲۸ و ۲۹]. هرچند که به دلیل سادگی و هزینه محاسباتی کمتر نسخه پیوند-مبنا، همچنان از آن برای تحلیل مسائل مختلف استفاده می شود [۲۱].

برای حل مسائل مختلف با استفاده از پدیدانامیک باید معادله حرکت آن در مکان و زمان گسسته سازی شود. بدین منظور، در اغلب پژوهش های انجام شده تاکنون، از یک روش بدون شبکه استفاده شده است. این روش، که به روش گسسته سازی استاندارد معروف است، برای اولین بار توسط سیلینگ و عسکری در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است [۲]. در پژوهش های منتشر شده تاکنون، از روش استاندارد برای تحلیل مسائل رشد ترک با انواع الگوهای ساده و پیچیده، از جمله ترک شاخه ای، در فضای دوبعدی [۱۸ و ۳۰] و سه بعدی [۳۱] استفاده شده است. در این مطالعات، مسائل رشد ترک دینامیکی و (شبه) استاتیکی در مواد ترد و شبه ترد تحت اثر بارگذاری های مکانیکی و حرارتی مدنظر بوده است. تحلیل مسائل ضربه، انتشار^{۱۰}، خوردگی^{۱۱}، الکتریسیته، مسائل تماسی، چندفیزیکی، پزشکی و گسترش آسیب در مواد مرکب با استفاده از این روش نیز در سال های اخیر به شدت رواج یافته است. با وجود این، هزینه محاسباتی زیاد روش استاندارد در مقایسه با روش های مبتنی بر تئوری های محلی منجر به محدودیت هایی شده است [۲۲]. به منظور رفع چنین محدودیت هایی، در سال های اخیر راهکارهای مختلفی برای کاهش هزینه محاسباتی روش استاندارد پیشنهاد شده است. در بخش های بعد با جزئیات بیشتر به بررسی این مباحث پرداخته شده است.

هدف از نگارش این مقاله، آشنایی کلی با تئوری پدیدانامیک، فرمول بندی ها، روش های مبتنی بر آن و موارد

استفاده از این تئوری در پژوهش های مختلف است. بدین منظور، ابتدا روابط حاکم بر فرمول بندی های پیوند-مبنا و حالت-مبنا پدیدانامیک در بخش ۲ مرور شده اند. در بخش ۳ روش های گسسته سازی مبتنی بر تئوری پدیدانامیک معرفی شده اند. در بخش ۴ در مورد عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک صحبت شده است. بخش ۵ نیز به راهکارهای تعریف تنش در پدیدانامیک اختصاص یافته است. مدل های ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک در بخش ۶ معرفی شده اند. مطالبی پیرامون استفاده از پدیدانامیک برای بررسی رفتار پلاستیک و نیز تحلیل رفتار مواد شبه ترد با استفاده از این تئوری به ترتیب در بخش های ۷ و ۸ بیان شده است. یک جمع بندی از مطالب عنوان شده در مقاله نیز در بخش ۹ ارائه شده است.

۲- تئوری پدیدانامیک

در این بخش، با مدنظر داشتن مسائل مکانیکی، روابط حاکم بر فرمول بندی های پیوند-مبنا و حالت-مبنا پدیدانامیک مرور شده است. برای جزئیات بیشتر پیرامون این موضوع به [۲، ۱۷، ۲۸ و ۳۲] مراجعه شود.

۲-۱- نسخه پیوند-مبنا

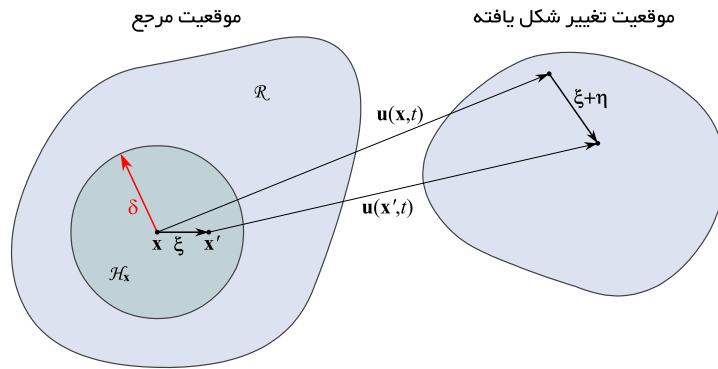
مطابق شکل (۱)، فرض کنید که یک جسم در پیکربندی مرجع در ناحیه \mathcal{R} واقع شده است. هر ذره \mathbf{x} موجود در این ناحیه بیانگر جزئی از ماده با حجم متناظر $dV_{\mathbf{x}}$ است. به دلیل غیرمحل بودن این تئوری، \mathbf{x} با سایر ذرات ماده (مانند \mathbf{x}') واقع در ناحیه همسایگی $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ به شعاع δ در ارتباط است، به طوری که:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{x}' \in \mathcal{R} : \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \delta\} \quad (1)$$

برای توصیف نیروی حاکم میان دو ذره در فرمول بندی پیوند-مبنا در لحظه t ، از تابع نیروی دوگانه^{۱۲} \mathbf{f} به فرم زیر استفاده می شود:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}), \mathbf{x}' \in \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \quad (2)$$

در رابطه فوق، \mathbf{u} میدان جابه جایی و \mathbf{f} نیرو در واحد مربع حجم ذره است که از \mathbf{x}' به \mathbf{x} اعمال می شود. در این حالت، معادله حرکت متناظر با ذره \mathbf{x} برحسب \mathbf{f} به صورت زیر بیان می شود



شکل ۱- تعریف افق و بردارهای فاصله نسبی دو ذره در موقعیت مرجع و تغییرشکل یافته در فضای دوبعدی

ذره به فاصله میان آنها در لحظه t وابسته است، \mathbf{f} برحسب تابع میکروپتانسیل $w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (۸)$$

که در آن:

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{cs^{\frac{1}{\nu}} \|\boldsymbol{\xi}\|}{\nu} \quad (۹)$$

در رابطه فوق s معرف تغییر شکل نسبی پیوند است، به طوری که:

$$s = \frac{\|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}\| - \|\boldsymbol{\xi}\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \quad (۱۰)$$

بر مبنای تعریف‌های ارائه شده، تابع اسکالر نیروی پیوند از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = cs \quad (۱۱)$$

که ثابت میکرومدول c بیانگر سختی پیوند است. در پژوهش‌های انجام شده تاکنون، از انواع مدل‌های ثابت، مخروطی و پیوسته برای ثابت میکرومدول استفاده شده است. در مدل ثابت، که استفاده از آن در مقایسه با مدل‌های دیگر بسیار متداول است، میکرومدول طبق رابطه زیر بیان می‌شود [۲ و ۳۳]:

$$c = \begin{cases} \frac{12E}{\pi\delta^2} & 1D \\ \frac{4E}{\pi t\delta^3} & 2D \text{ plane stress} \\ \frac{48E}{5\pi t\delta^3} & 2D \text{ plane strain} \\ \frac{2E}{A\delta^2} & 1D \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (۳)$$

که در آن چگالی ماده، $\ddot{\mathbf{u}}$ میدان شتاب ذره و \mathbf{b} چگالی نیروی بدنه^{۱۳} است. در فرمول‌بندی پیوند-مبنا، بردارهای فاصله نسبی دو ذره در مختصات مرجع $\boldsymbol{\xi}$ (که در برخی مراجع به‌عنوان پیوند میان دو ذره نیز شناخته می‌شود) و جابه‌جایی نسبی میان آن‌ها ($\boldsymbol{\eta}$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (۴)$$

$$\boldsymbol{\eta} := \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

بنا بر این تعریف، شرط پایداری تکانه زاویه‌ای به صورت زیر قابل بیان است:

$$(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (۵)$$

که در آن بردار فاصله نسبی دو ذره در موقعیت تغییرشکل یافته است. علاوه بر این، شرط لازم برای برقراری قانون سوم نیوتن (پایستگی تکانه‌ی خطی) به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (۶)$$

با استناد به روابط (۵) و (۶)، نیروی حاکم میان هر دو ذره در لحظه t به صورت مساوی، مختلف‌الجهت و در راستای خط واصل آنها در آن لحظه منتقل می‌شود. بنابراین \mathbf{f} برحسب تابع اسکالر^{۱۴} f به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}\|} \quad (۷)$$

با فرض یک ماده میکروالاستیک که در آن نیروی حاکم میان دو

$$s_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta G_0}{6E\delta}} & 3D \\ \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}} & 2D \text{ plane stress} \\ \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}} & 2D \text{ plane strain} \\ \sqrt{\frac{3G_0}{E\delta}} & 1D \end{cases} \quad (17)$$

مدل شکست الاستیک خطی لحاظ شده در روابط (۱۵) و (۱۶) در شکل (۲) ترسیم شده است. مطابق شکل، $\mu(t, \xi) = 1$ نماینده یک پیوند سالم و $\mu(t, \xi) = 0$ بیانگر یک پیوند شکسته شده است. با مدنظر داشتن این تعریف، شاخص آسیب هر ذره در هر لحظه به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\phi(x, t) = 1 - \frac{\int_{\mathcal{H}_x} \mu(t, \xi) dV_x}{\int_{\mathcal{H}_x} dV_x} \quad (18)$$

با توجه به رابطه فوق، شاخص آسیب هر ذره در هر لحظه مقادیر ۰ تا ۱ را اختیار می‌کند. مقدار ۰ بیانگر یک ذره کاملاً سالم بوده و مقدار ۱ نماینده ذره‌ای است که از سایر ذرات پیرامونش جدا شده است.

۲-۱-۱- رفع محدودیت ضریب پواسون در فرمول‌بندی پیوند-مینا

به دلیل محدودیت ضریب پواسون در نسخه پیوند-مینا، استفاده از این فرمول‌بندی برای تحلیل رفتار مواد مختلف با محدودیت همراه است. به منظور رفع این محدودیت، یک مدل پدیدانامیک میکروپلار^{۱۶} در سال ۲۰۰۷ توسط گرسل و همکاران معرفی شده است. در این مدل، فنر فرضی میان دو ذره با یک تیر اوپلر-برنولی^{۱۷} جایگزین شده است. با این فرض، علاوه بر نیروی محوری، مؤلفه‌های اندرکنشی نیروی برشی و لنگر خمشی نیز میان دو ذره لحاظ می‌شوند. این در حالی است که تنها از معیار تغییر شکل محوری برای شکست پیوند استفاده شده است. با به‌کارگیری این مدل، استفاده از ضریب پواسون کوچک‌تر از $\frac{1}{4}$ برای مسائل سه‌بعدی و دو‌بعدی کرنش مسطح

که در آن، E مدول الاستیسیته، \bar{t} ضخامت ورق در فضای دو‌بعدی و A سطح میله در فضای یک‌بعدی است. فرم مخروطی میکرومدول نیز برای مسائل دو‌بعدی تنش مسطح و یک‌بعدی به شکل زیر ارائه شده است [۱۸ و ۳۳]:

$$c = \begin{cases} \frac{36E}{\pi \bar{t} \delta^3} \left(1 - \frac{\|\xi\|}{\delta} \right) & 2D \text{ plane stress} \\ \frac{6E}{A \delta^2} \left(1 - \frac{\|\xi\|}{\delta} \right) & 1D \end{cases} \quad (13)$$

در [۳۴] نیز یک تابع میکرومدول پیوسته برای مسائل دو‌بعدی تنش مسطح به فرم زیر معرفی شده است:

$$c = \frac{315E}{8\pi \bar{t} \delta^3} \left(1 - \left(\frac{\|\xi\|}{\delta} \right)^2 \right)^2 \quad (14)$$

طبق رابطه (۱۱)، اندرکنش حاکم میان دو ذره در فرمول‌بندی پیوند-مینا از موقعیت نسبی سایر ذرات ماده مستقل است، که این موضوع منجر به محدودیت در انتخاب مقادیر ضریب پواسون شده است. مقدار ثابت ضریب پواسون معادل در این فرمول‌بندی برای مسائل دو‌بعدی کرنش مسطح و سه‌بعدی برابر $\frac{1}{4}$ و در حالت تنش مسطح معادل $\frac{1}{3}$ است.

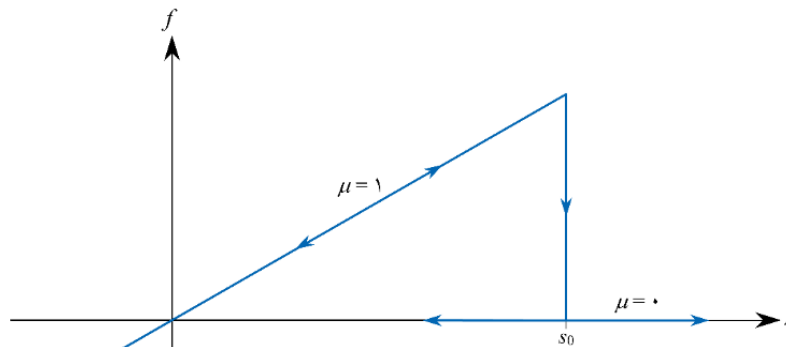
پدیدانامیک در اصل برای تحلیل مسائل ایجاد و رشد ترک معرفی شده است. بدین منظور، در مرجع [۲] یک روش نسبتاً ساده برای لحاظ کردن آسیب در پدیدانامیک معرفی شده است. در این روش، با فرض ماده ترد میکروالاستیک، رابطه (۷) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \mu(t, \xi) c s \frac{\boldsymbol{\eta} + \xi}{\|\boldsymbol{\eta} + \xi\|} \quad (15)$$

در این رابطه، $\mu(t, \xi)$ تابع اسکالر وضعیت پیوند است، که با فرض غیرقابل بازگشت بودن شکست پیوند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1 & s(t', \xi) < s_0, \forall t', 0 \leq t' \leq t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

s_0 مؤلفه تغییر شکل نسبی بحرانی پیوند بوده، که برحسب نرخ آزادشدگی انرژی بحرانی G_0 به صورت زیر قابل محاسبه است.



شکل ۲- مدل شکست الاستیک خطی پیوند در فرمول‌بندی پیوند-مبنای پدیدانامیک

ضرایب پواسون متفاوت، محدودیت تحلیل گسیختگی برشی با استفاده از فرمول‌بندی پیوند-مبنا نیز تا حد زیادی برطرف شده است [۴۱].

با وجود تلاش‌های انجام شده در حوزه ارائه مدل‌های میکروپلار، با استفاده از این مدل‌ها محدودیت ضریب پواسون در فرمول‌بندی پیوند-مبنا به‌طور کامل برطرف نشده است. از این‌رو، در پژوهش‌های مختلف راهکارهای دیگری برای رفع محدودیت ضریب پواسون پیشنهاد شده است. به‌عنوان مثال، لیو و هانگ در سال ۲۰۱۲ یک مدل پدیدانامیک مبتنی بر نیروهای اضافی را برای رفع محدودیت ضریب پواسون در نسخه پیوند-مبنا معرفی کرده‌اند [۴۲]. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۵ نیز یک مدل پیوند-مبنای الاستیک خطی دومؤلفه‌ای برای این منظور توسعه داده شده است. در این مدل، اندرکنش میان هر دو ذره با استفاده از فنرهای محوری و مماسی توصیف شده است. لازم به ذکر است که با استفاده از ضرایب پواسون یکسان، نتایج مدل معرفی شده با نسخه اصلی فرمول‌بندی پیوند-مبنا متفاوت بوده است [۴۳]، که این موضوع جای تامل دارد. در تعداد دیگری از پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، مدل‌های پدیدانامیک مزدوج^{۱۹} توسط ونگ و همکاران [۴۴]-[۴۶]، جیو و همکاران [۴۷] و نیز ژو و یو [۴۸] توسعه داده شده‌اند. به‌منظور رفع محدودیت ضریب پواسون در این مدل‌ها، اندرکنش حاکم میان ذرات ماده برحسب تغییر شکل محوری و

و ضریب کوچکتر از $\frac{1}{3}$ برای مسائل تنش مسطح در فرمول‌بندی پیوند-مبنا امکان‌پذیر شده است. گرسل و همکاران از این مدل برای تحلیل الگوی رشد ترک در نمونه‌های بتنی استفاده کرده‌اند [۳۵ و ۳۶]. در مطالعات دیگری نیز از مدل میکروپلار برای تحلیل تیرهای بتنی مسلح به الیاف فولادی [۳۷]، بررسی مسائل الکترومکانیکی [۳۸] و شبیه‌سازی شکست مواد سنگی [۳۹] استفاده شده است. با استناد به چنین پژوهش‌هایی، مدل میکروپلار تا حد قابل‌قبولی محدودیت استفاده از ضریب پواسون ثابت در فرمول‌بندی پیوند-مبنا را رفع کرده است. در مقاله‌ای در سال ۲۰۲۱ نیز ین و همکاران یک مدل پدیدانامیک میکروپلار اصلاح شده مبتنی بر تیر تیموشنکو^{۱۸} را معرفی کرده‌اند. در این مدل، برخلاف مدل میکروپلار معمولی، اثر هندسه ذرات نیز در نظر گرفته شده است. طبق نظر نویسندگان مقاله، لحاظ کردن اثر هندسه ذرات در مدل میکروپلار منجر به افزایش دقت نتایج شده است [۴۰]. در پژوهش‌های عنوان شده، از معیار تغییر شکل نسبی محوری پیوند برای شکست آن استفاده شده است، که این موضوع موجب محدودیت در تحلیل گسیختگی برشی می‌شود. به‌منظور رفع این محدودیت، دایانا و کازولو در سال ۲۰۱۸ یک نسخه میکروپلار اصلاح شده را معرفی کرده‌اند، که در آن معیار شکست پیوند بر اساس نیروی برشی حاکم بر آن لحاظ شده است. با استفاده از این راهکار، علاوه بر امکان استفاده از

چرخش پیوند میان ذرات تفسیر شده است. در مرجع [۴۹] از یک مدل پدیدانامیک مزدوج برای تحلیل گسیختگی مواد سنگی تحت بارگذاری فشاری استفاده شده است. در مرجع [۵۰] نیز یک مدل پیوند-مبنای متکی بر تغییر شکل‌های برشی برای رفع محدودیت ضریب پواسون معرفی شده است. از دیگر مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به استفاده از یک مدل مزدوج الاستیک خطی برای تحلیل مسائل شکست دینامیکی اشاره کرد [۵۱]. در مقاله‌ای دیگر، چن و همکاران در سال ۲۰۱۹ دو مدل کزرات^{۲۰} پدیدانامیک مبتنی بر تیر تیموشنکو و مدل تماس ذرات را معرفی کرده‌اند. به‌منظور رفع محدودیت ضریب پواسون، اثر چرخش ذرات نیز در این مدل‌ها لحاظ شده است [۵۲]. در پژوهشی در سال ۲۰۲۲ نیز از یک مدل کزرات پدیدانامیک برای تحلیل نمونه‌های بتن الیافی استفاده شده است [۵۳].

تمام پژوهش‌های عنوان شده در این بخش با هدف رفع محدودیت ضریب پواسون در فرمول‌بندی پیوند-مبنا انجام شده است. با وجود دستاوردهای حاصل شده، ایرادهایی نیز بر این مطالعات وارد است. در مرجع [۵۴] به ذکر برخی از این موارد پرداخته شده است. به‌عنوان اولین مورد، بحث عدم انطباق مدل‌های معرفی شده در [۳۵، ۴۳ و ۴۴] با مدل اصلی پیوند-مبنا در صورت استفاده از مقادیر ضریب پواسون روش پیوند-مبنای استاندارد مطرح شده است. در کنار آن، موضوع امکان عدم پایستگی تکانه زاویه‌ای به‌عنوان نقطه‌ی ضعف مدل‌های معرفی شده در [۳۵، ۴۳ و ۵۰] ذکر شده است. لزوم تعیین مقدار اولیه برای مؤلفه‌های موجود در مدل دایانا و کازولو [۴۱] نیز به‌عنوان نقطه ضعف کار آنها عنوان شده است. با مدنظر قرار دادن این نکات، ژنگ و همکاران [۵۴] یک مدل مبتنی بر فرمول‌بندی پیوند-مبنا را معرفی کرده‌اند، که در آن از مؤلفه‌های محوری و مماسی به‌طور هم‌زمان برای تفسیر اندرکنش حاکم میان ذرات ماده استفاده شده است. برای حفظ پایستگی تکانه زاویه‌ای در این مدل، اثر چرخش ذرات نیز در آن لحاظ شده است. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۲۱ معدنچی و همکاران

[۵۵] یک نسخه اصلاح شده از مدل معرفی شده در مرجع [۵۰] را معرفی کرده‌اند. هدف از این امر، جلوگیری از چرخش صلب بدنه در روش ارائه شده توسط ژو و نی بوده است. در مقاله‌ای دیگر در سال ۲۰۲۱ نیز چن و همکاران یک مدل مزدوج پدیدانامیک را معرفی کردند، که تانسورهای تنش و کرنش مزدوج پدیدانامیک نیز در آن توصیف شده است. از این مدل، برای تحلیل رفتار پلاستیک در مواد شبه‌ترد تحت اثر بارهای دینامیکی استفاده شده است [۵۶]. به‌عنوان یکی دیگر از دستاوردهای حاصل شده در این زمینه، یک مدل پیوسته-سینماتیک اصلاح شده مبتنی بر فرمول‌بندی پیوند-مبنا در سال ۲۰۲۱ توسط ژو و تیان معرفی شده است. در این مدل نیروی حاکم میان ذرات به‌صورت نامساوی و غیر هم‌راستا در نظر گرفته شده است. بنابراین مدل معرفی شده به‌عنوان جایگزین نسخه حالت-مبنای غیرمعمول نیز شناخته می‌شود. با استفاده از این راهکار، محدودیت ضریب پواسون در نسخه پیوند-مبنا، نوسانات عددی در فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول و نیز محدودیت در تحلیل جامدات تحت اثر میدان‌های تغییر شکل ناهمگون رفع شده است [۵۷]. تیان و ژو از این مدل برای تحلیل مسائل گسترش آسیب و شکست الاستیک استفاده کرده‌اند [۵۸]. به‌عنوان راهکاری دیگر برای رفع محدودیت ضریب پواسون در [۵۹] اثر چرخش ذرات ماده در فرمول‌بندی پیوند-مبنا لحاظ شده است. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۲۲ نیز معصومی و همکاران یک مدل اصلاح‌شده پدیدانامیک را با هدف رفع محدودیت ضریب پواسون ثابت در نسخه پیوند-مبنا معرفی کرده‌اند. برخلاف مطالعات پیشین، کرنش‌های واقعی در این مدل لحاظ شده است. هدف از این امر، افزایش دقت نتایج عنوان شده است [۶۰].

به‌منظور محاسبه مؤلفه‌های موجود در فرمول‌بندی پیوند-مبنا، انرژی پدیدانامیک با انرژی متناظر در مکانیک محیط‌های پیوسته معادل‌سازی می‌شود. هرچند که استفاده از مؤلفه‌های مربوط به یک مدل محلی برای استخراج مؤلفه‌های یک مدل غیرمحلی تاحدی گمراه‌کننده است. در مرجع [۶۱] برای اولین

در این حالت، اطلاعات اندرکنش مربوط به تمام پیوندها در بردارهای حالت^{۲۱} ذخیره می‌شود. بر این مبنا، معادله حرکت حاکم بر هر ذره در فرمول‌بندی پیوند-مبنا به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} (\mathbf{T}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \mathbf{T}[\mathbf{x}', t]\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}' \in \mathcal{H}_x \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{T}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$ حالت بردار نیرو^{۲۲} بوده و بیانگر بردار نیرو در واحد مربع حجم ذره است که از \mathbf{x}' به \mathbf{x} اعمال می‌شود. فرض کنید که $\mathbf{M}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$ بردار واصل میان \mathbf{x} و \mathbf{x}' در مختصات تغییرشکل یافته در لحظه t است. اگر در یک ماده، در هر زمان دلخواه، حالت بردار نیرو برحسب حالت مدول^{۲۳} $\mathbf{T}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \mathbf{t}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \mathbf{M}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$ به فرم قابل بیان باشد، فرمول‌بندی حالت-مبنای معمول بر این ماده حاکم است. در غیر این صورت، فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول مطرح می‌شود.

فرض کنید که مختصات ذره \mathbf{x} در لحظه t به شکل زیر تعریف شود:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (20)$$

با این فرض، حالت بردار تغییر شکل^{۲۴} به فرم زیر قابل بیان است.

$$\mathbf{Y}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad (21)$$

در فرمول‌بندی حالت-مبنای معمول، حالت بردار نیروی $\mathbf{T}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$ و $\mathbf{T}[\mathbf{x}', t]\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$ حاکم میان ذرات \mathbf{x} و \mathbf{x}' به صورت نامساوی در راستای خط واصل میان دو ذره در مختصات تغییرشکل یافته منتقل می‌شوند. بر این مبنا، برای یک ماده الاستیک همگن، حالت بردار نیرو به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{T}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \mathbf{t}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \frac{\mathbf{Y}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{Y}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle\|} \quad (22)$$

که $\mathbf{t}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$ برحسب قوانین بنیادین حاکم بر ماده قابل محاسبه است. لازم به ذکر است که با وجود تفاوت در اندازه بردارهای نیروی حاکم میان دو ذره در فرمول‌بندی

بار یک تفسیر هندسی محض از ضریب پواسون در فرمول‌بندی پیوند-مبنای پدیداینامیک لحاظ شده است. برخلاف پژوهش‌های پیشین، در این مطالعه از روش حداقل شدن چگالی انرژی داخلی برای برآورد ضریب پواسون استفاده شده است. با استفاده از این راهکار، از مؤلفه‌های الاستیسیته خطی کوشی مانند تنش و کرنش در فرایند محاسبه ضریب پواسون استفاده نشده است. این موضوع از نظر نویسندگان حائز اهمیت بوده است. با به کارگیری این روش برای حل مسائل تغییر شکل بزرگ، بحث ضریب پواسون غیرثابت غیرخطی پدیداینامیک برای اولین بار با استفاده از این مدل مطرح شده است. طبق بررسی انجام شده، ضریب پواسون غیرخطی در مختصات مرجع برای مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی به ترتیب معادل $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ گزارش شده است.

در تمام پژوهش‌های عنوان شده، راهکارهایی برای رفع محدودیت ضریب پواسون و استخراج آن در فرمول‌بندی پیوند-مبنا ارائه شده است. در مرجع [۶۲] نیز برخی از این روش‌ها مرور شده‌اند. با وجود این، استفاده از چنین روش‌هایی با محدودیت‌ها و پیچیدگی‌هایی همراه است. بنابراین لزوم ارائه راهکارهای بهتر در این زمینه همچنان احساس می‌شود. به عنوان یکی از دیگر راهکارهای ارائه شده در این حوزه، می‌توان به استفاده از فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا اشاره کرد. در ادامه نسخه‌های حالت-مبنای پدیداینامیک مرور شده‌اند.

۲-۲- نسخه‌های حالت-مبنا

نسخه‌های حالت-مبنای پدیداینامیک در اصل برای رفع محدودیت ضریب پواسون در فرمول‌بندی پیوند-مبنا معرفی شده‌اند. علاوه بر این، تحلیل رفتار پلاستیک و نیز در نظر گرفتن مؤلفه‌های تغییر شکل حجمی و انحرافی با استفاده از این فرمول‌بندی‌ها ممکن شده است. در فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا، برخلاف نسخه پیوند-مبنا، اندرکنش میان هر دو ذره به موقعیت سایر ذرات موجود در ناحیه همسایگی آن ذرات وابسته است.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

۳- گسسته‌سازی معادله حرکت پدیدانامیک

در این بخش، با مدنظر داشتن فرمول‌بندی پیوند-مبنا، روش‌های متداول گسسته‌سازی تئوری پدیدانامیک مرور شده‌اند. هرچند که با اعمال تغییراتی در این روش‌ها، استفاده از آنها برای فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا نیز امکان‌پذیر است.

۳-۱- روش گسسته‌سازی استاندارد

روش استاندارد [۲] اولین و ساده‌ترین روش گسسته‌سازی پدیدانامیک است که در اغلب پژوهش‌ها از آن استفاده شده است. در این روش، با فرض یک افق ثابت، دامنه حل به مجموعه‌ی نقاط منظم با فواصل ثابت Δx افزاز می‌شود. در این حالت، هر نقطه‌ی \mathbf{x}_i نماینده جزئی از ماده با حجم متناظر V_i است. حجم متناظر هر نقطه در فضای یک‌بعدی، دویبعدی و سه‌بعدی به ترتیب برابر $A\Delta x$ ، $\bar{A}\Delta x^2$ و Δx^3 در نظر گرفته می‌شود. گسسته‌سازی مکانی یک زیرناحیه در روش استاندارد پیرامون نقطه‌ی \mathbf{x}_i در شکل (۳) نمایش داده شده است. به‌منظور گسسته‌سازی زمانی نیز، زمان به گام‌های t_1, t_2, \dots, t_n تقسیم می‌شود. معادله حرکت گسسته‌سازی شده پدیدانامیک برای نقطه \mathbf{x}_i در گام زمانی t_n به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\rho(\mathbf{x}_i) \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \beta_j V_j + \mathbf{b}_i^n \quad (27)$$

در این رابطه، زیرنویس‌ها نماد شماره نقطه بوده و i نماینده تمام نقاط موجود در همسایگی نقطه i است. بالانویس n نیز بیانگر گام زمانی t_n است. همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، در مورد برخی از نقاط، تنها سهم محدودی از حجم نقطه در ناحیه همسایگی \mathbf{x}_i واقع شده است. برای اصلاح حجم متناظر چنین نقاطی، ضریب β_j در معادله حرکت پدیدانامیک لحاظ شده است. به‌عنوان یک روش ساده، معمولاً از رابطه زیر برای اصلاح حجم نقاط موجود در همسایگی هر نقطه استفاده می‌شود [۷۱]:

$$\beta_j = \begin{cases} 1 & \|\xi_j\| \leq \delta - \alpha \Delta x \\ \frac{\delta + \alpha \Delta x - \|\xi_j\|}{\Delta x} & \|\xi_j\| \leq \delta + \alpha \Delta x \\ 0 & \|\xi_j\| > \delta + \alpha \Delta x \end{cases} \quad (28)$$

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

حالت-مبنای معمولی، رابطه (۲۲) همچنان شرط ارضای تکانه خطی و زاویه‌ای را به‌همراه دارد. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۶۳] رجوع شود. برای مسائل دویبعدی تنش‌مسطح از رابطه زیر برای محاسبه حالت مدول استفاده می‌شود.

$$\mathbf{T}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-1} \left(k'\theta + \frac{\alpha}{\nu} (\omega \mathbf{e}^d) \cdot \mathbf{x} \right) \frac{\omega \mathbf{x}}{q} + \alpha \omega \mathbf{e}^d \quad (23)$$

که مؤلفه‌های k' و α برحسب مشخصه‌های ماده مانند ضریب پواسون و مدول الاستیسیته محاسبه می‌شوند. \mathbf{e}^d حالت انحرافی \mathbf{e}^d است، که برحسب میزان کشیدگی پیوند^{۲۶} $\|\xi_j\| = \|\mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)\|$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{e}^d = \mathbf{e} - \frac{\theta \mathbf{x}}{\nu} \quad (24)$$

در این رابطه، \mathbf{x} حالت طول پیوند^{۲۷} $q = \omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ حجم وزنی^{۲۸} متعلق به $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ و θ همتای اتساع حجمی پدیدانامیک^{۲۹} است و به‌فرم زیر بیان می‌شود.

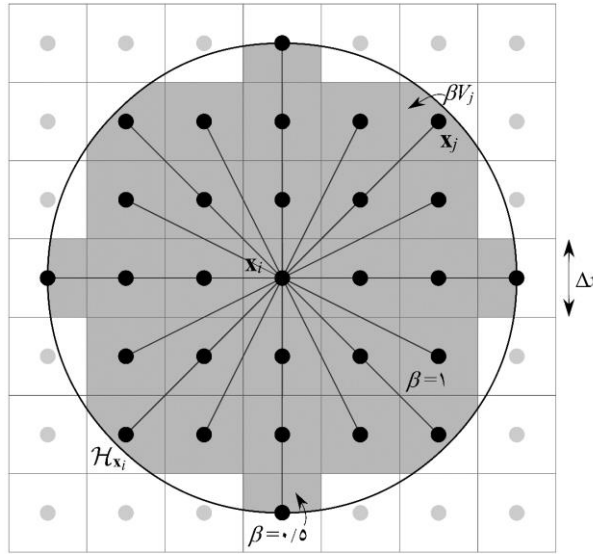
$$\theta = \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-1} \frac{\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{q} \quad (25)$$

ω نیز حالت عملگر تأثیر^{۳۰} در پدیدانامیک بوده و بیانگر وزن اختصاص یافته به هر پیوند است.

در فرمول‌بندی پیوند-مبنای غیرمعمول، بردار حالت نیروی حاکم میان دو ذره به‌صورت ترکیب دو بردار غیر هم‌راستا با اندازه‌های غیر یکسان بیان می‌شوند. در این حالت، برای ارضای شرط پایستگی تکانه زاویه‌ای، از رابطه زیر در کنار معادله حرکت پدیدانامیک استفاده می‌شود.

$$\int_{\mathcal{H}_{\mathbf{x}}} ((\mathbf{y}' - \mathbf{y}) \times \mathbf{T}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle) dV_{\mathbf{x}'} = 0 \quad (26)$$

که جزئیات بیشتر آن در مرجع [۲۸] ارائه شده است. نسخه حالت-مبنای غیرمعمول در مقایسه با دو فرمول‌بندی دیگر از عمومیت بیشتری برخوردار است. در عین حال که محدودیت‌هایی را به‌همراه دارد. به‌عنوان مهم‌ترین نقطه ضعف این نسخه، می‌توان به احتمال ایجاد پاسخ‌های غیرفیزیکی مانند پدیده نفوذ درون ماده و موده‌های انرژی صفر اشاره کرد [۲۴]. در مراجع [۶۴-۷۰]، راهکارهایی برای کنترل موده‌های انرژی صفر در فرمول‌بندی پیوند-مبنا ارائه شده است.



شکل ۳- گسسته‌سازی یک زیردامنه در روش استاندارد

در [۲] ارائه شده است. به‌طور کلی، استفاده از الگوریتم‌های حل صریح، در مقایسه با انواع ضمنی^{۳۴}، برای حل مسائل دینامیکی از نظر محاسباتی معمولاً به‌صرفه‌تر است. در عین حال، کنترل نشدن همگرایی در حلگرهای صریح گاهی منجر به جواب غیرفیزیکی و حتی فروپاشی ناگهانی در فرایند حل مسئله می‌شود. به‌منظور جلوگیری از چنین وقایعی، از معیار زیر به‌همراه یک ضریب اطمینان برای محدود کردن Δt در روش حل استاندارد پدیدانامیک استفاده می‌شود.

$$\Delta t_c = \frac{\Delta x}{C_k} \quad (30)$$

که در آن، C_k سرعت انتشار موج فشاری در ماده است.

۳-۱-۱- استفاده از روش گسسته‌سازی استاندارد برای حل

مسائل شبه‌استاتیکی

در بررسی و ارائه مدل‌های مبتنی بر پدیدانامیک، حل مسائل استاتیکی و شبه‌استاتیکی با استفاده از این تئوری نیز به‌تدریج موردتوجه قرار گرفته است. به‌عنوان اولین پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، مسئله رشد ترک در تیرهای بتنی تحت بارگذاری استاتیکی توسط گرسل و سو [۳۵ و ۷۲] بررسی شده است. در این دو مطالعه، از بیان جزئیات به‌کارگیری

قابل توجه است که در این رابطه از یک درونیابی خطی استفاده شده است. بنابراین استفاده از آن برای مسائل در فضای دوبعدی و سه‌بعدی با خطا همراه است [۲۲].

در بسیاری از پژوهش‌های منتشر شده در حوزه‌ی استفاده از پدیدانامیک، حل مسائل رشد ترک دینامیکی مدنظر بوده است. بدین منظور، از روش گسسته‌سازی استاندارد در قالب الگوریتم‌های حل صریح^{۳۱} استفاده شده است. از متداول‌ترین الگوریتم‌های حل صریح به‌کاررفته در این پژوهش‌ها می‌توان به تفاضل مرکزی^{۳۲} و سرعت ورت^{۳۳} اشاره کرد. در الگوریتم سرعت ورت، از رابطه زیر برای محاسبه جابه‌جایی و سرعت ذره در گام زمانی t_n استفاده می‌شود، که در آن $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ است.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t}{\gamma} \ddot{\mathbf{u}}^n \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\gamma} \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \end{aligned} \quad (29)$$

در این روش، انرژی سیستم پایسته می‌ماند. با استخراج جابه‌جایی ذرات و جای‌گذاری آنها در رابطه (۲۷)، نیروی حاکم میان ذرات ماده محاسبه می‌شود. در الگوریتم تفاضل مرکزی نیز روندی مشابه طی می‌شود، که جزئیات استفاده از آن

$$\mathbf{0} = \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j'' - \mathbf{u}_j', \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \beta_j \mathbf{V}_j + \mathbf{b}_i^n \quad (31)$$

به منظور حل این معادله، پیوندها به صورت المان‌های خرابی در نظر گرفته می‌شوند. ماتریس سختی هر المان در مختصات محلی پیوند به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{K} = \frac{c}{\|\xi\|^3} \beta \mathbf{V}_i \mathbf{V}_j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

با سرهم کردن ماتریس سختی پیوندها، معادله تعادل استاتیکی حاکم بر سازه حل می‌شود. هرچند که به دلیل احتمال شکست پیوندها در فرایند رشد ترک، امکان حل مستقیم این معادله وجود ندارد. برای حل این معادله به صورت سعی و خطا، در [۸۰] و [۸۱] از الگوریتم معروف نیوتن-رافسون استفاده شده است. زکریوتو و همکاران از این روش برای تحلیل رشد ترک در نمونه‌های بتنی تحت بارگذاری استاتیکی استفاده کرده‌اند [۸۱]. طبق نتایج به دست آمده، منحنی‌های نیرو-جاب‌جایی و الگوی رشد ترک بر داده‌های عددی و آزمایشگاهی منطبق بوده است. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۹ نیز یک حلگر ضمنی منطبق بر الگوریتم نیوتن-رافسون برای حل معادله تعادل استاتیکی فرمول‌بندی حالت-مبنا توسعه داده شده است [۸۲]. با استفاده از این روش، رفتار پلاستیک با در نظر گرفتن سخت‌شوندگی در نمونه تحت بارگذاری شبه‌استاتیکی بررسی شده است. با وجود چنین نتایجی، استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون در [۷۶، ۸۰ و ۸۱] موجب محدودیت در حل مسائل دارای پس‌زدگی^{۳۶} می‌شود. در عین حال که پس‌زدگی در مسائل غیرخطی هندسی و مادی یک پدیده کاملاً مرسوم است. برای جزئیات بیشتر در مورد پدیده پس‌زدگی به [۸۳] رجوع شود. به منظور رفع چنین محدودیتی در [۸۴] از یک روش تحلیل خطی ترتیبی^{۳۷} برای حل مسائل استاتیکی با وجود پس‌زدگی استفاده شده است. در این روش اندازه گام زمانی به نحوی محدود می‌شود که در هر گام تنها یک پیوند از سازه شکسته شود. کارایی این روش نیز از نظر دقت و هزینه محاسباتی مورد تردید است. به عنوان راهکاری دیگر برای رفع محدودیت تحلیل مسائل شبه‌استاتیکی با وجود پدیده پس‌زدگی، استفاده از

پدیدانامیک برای حل مسائل استاتیکی صرف نظر شده است، اما جواب‌های به دست آمده قابل قبول بوده است. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۰۶ سینماتیک انتقال فاز در جامدات با استفاده از پدیدانامیک برای مسائل دینامیکی و شبه‌استاتیکی یک بعدی بررسی شده است [۷۳]. نویسندگان این مقاله معتقد بودند که نتایج به دست آمده برای مسئله‌ی شبه‌استاتیکی به اندازه گام بارگذاری وابسته است. در حالی که این مشکل در مورد مسائل دینامیکی صادق نیست. حل عددی پری‌استاتیک برای یک میله بی‌نهایت و نیز حل پری‌استاتیک یک میله حرارتی از یک سازه تصادفی نیز به ترتیب در مراجع [۷۴] و [۷۵] بررسی شده است. با وجود انتشار چنین مقالاتی، حل مسائل استاتیکی با استفاده از پدیدانامیک تا سال ۲۰۱۰ همچنان محدود بوده است. از علل این موضوع، می‌توان به محدود بودن اندازه گام زمانی در الگوریتم‌های حل صریح اشاره کرد. چراکه استفاده از رابطه (۳۰) برای تعیین حداکثر گام زمانی در مسائل استاتیکی و شبه‌استاتیکی از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه و گاهی غیرممکن است. به منظور رفع این محدودیت، یک روش آرام‌سازی تطبیقی^{۳۵} برای تحلیل رفتار ورق‌های دارای حفره تحت اثر بارگذاری شبه‌استاتیکی توسط کلیک و معدنچی معرفی شده است [۷۶]. در این روش، با اضافه شدن مؤلفه میرایی به معادله حرکت پدیدانامیک، حل دینامیکی معادله حرکت به حل استاتیکی میل می‌کند. در پژوهش‌های مشابه دیگری نیز، برای حل مسائل شبه‌استاتیکی، از مؤلفه‌های میرایی ثابت [۳۴ و ۷۷] و مؤلفه مقیاس جرم [۷۸] در معادله حرکت پدیدانامیک استفاده شده است. به عنوان نقطه ضعف مشترک تمام این پژوهش‌ها، می‌توان گفت که احتمال ایجاد پاسخ غیرفیزیکی در چنین روش‌هایی دور از انتظار نیست [۳۴ و ۷۹]. یک راهکار منطقی‌تر برای حل چنین مسائلی، استفاده از حلگرهای ضمنی به جای حلگر صریح پدیدانامیک است. ایده‌ی این موضوع در سال ۲۰۱۵ توسط لیتلود [۸۰] و نیز زکریوتو و همکاران [۸۱] مطرح شده است. در این حالت، معادله تعادل استاتیکی برای نقطه \mathbf{x}_i به فرم رابطه (۳۱) بیان می‌شود.

ملاحظه‌ای از هزینه محاسباتی روش گسسته‌سازی استاندارد کاسته شده است. در مقابل، لزوم پیش‌بینی مسیر رشد ترک موجب محدودیت در استفاده از این مدل‌ها می‌شود. به‌عنوان راهکاری برای رفع این محدودیت، پیشنهاد استفاده از الگوریتم‌های جایگزینی تطبیقی^{۴۰} در [۸۵، ۸۷ و ۹۱] مطرح شده است. با استفاده از این الگوریتم‌ها، بدون نیاز به پیش‌بینی مسیر رشد ترک، نواحی بحرانی در فرایند حل مسئله شناسایی می‌شوند. در نواحی شناسایی شده، فاصله بین نقاط به‌صورت خودکار کاهش داده می‌شود. در این حالت، دقت پدیدانامیک برای حل مسائل دارای ناپیوستگی حفظ شده است. در عین حال، از هزینه محاسباتی روش استاندارد نیز تا حد ممکن کاسته می‌شود.

با وجود ارائه راهکارهای تغییر افق در یک دامنه، هزینه‌بر بودن روش‌های پدیدانامیک در مقایسه با روش‌های مبتنی بر تئوری‌های محلی واقعی انکارناپذیر است. بر این مبنا، در تعدادی از پژوهش‌ها [۲۱، ۳۰، ۳۸ و ۹۴-۱۴۴] استفاده هم‌زمان از روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته و پدیدانامیک در یک دامنه پیشنهاد شده است. با این راهکار، دقت بالای پدیدانامیک و هزینه محاسباتی کمتر روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته به‌طور هم‌زمان در یک مسئله حفظ می‌شود. چالش پیش روی محققان در پژوهش‌های ارائه شده در این حوزه، امکان ایجاد نیروهای اضافه ناشی از تفاوت در ویژگی‌های موج پدیدانامیک و مکانیک محیط‌های پیوسته است. در اغلب این مطالعات، ارائه راهکارهایی برای کاهش بازگشت موج غیرواقعی و جلوگیری از ایجاد نیروهای اضافی مدنظر بوده است. در مدل‌های معرفی شده در این مطالعات، در نواحی دارای ناپیوستگی و بخش‌های محتمل برای رشد ترک از روش مبتنی بر پدیدانامیک استفاده شده است. در سایر نواحی، روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته، مانند روش اجزای محدود^{۴۱} یا روش اجزای محدود توسعه‌یافته^{۴۲}، به‌کار گرفته می‌شوند. به‌منظور افزایش عملکرد این روش‌ها از نظر محاسباتی در مراجع [۲۱، ۱۰۳ و ۱۴۴] از الگوریتم جایگزینی

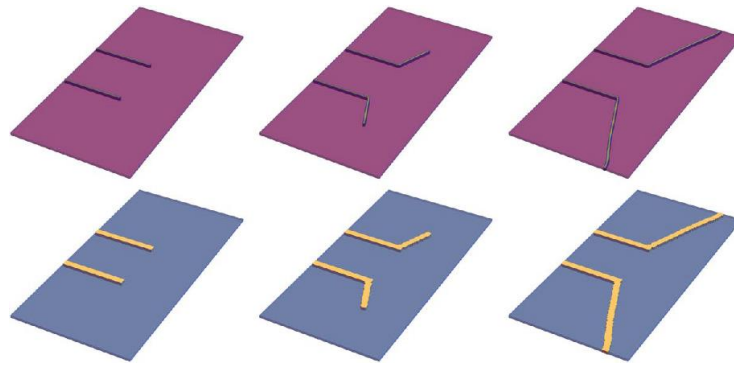
روش طول کمان^{۳۸} محلی برای حل معادله تعادل استاتیکی در [۱۹] پیشنهاد شده است. با استفاده از این روش به‌جای الگوریتم نیوتن-رافسون، حل مسائل دارای پس‌زدگی با استفاده از حلگرهای ضمنی نیز امکان‌پذیر شده است. در این پژوهش، تنها بررسی مسائل رشد ترک در مواد شبه‌ترد (مانند نمونه‌های بتنی) مدنظر بوده است. بنابراین امکان استفاده از آن برای تحلیل مسئله رشد ترک در مواد ترد در هاله‌ای از ابهام است. با توجه به مطالب عنوان شده، محدودیت‌های استفاده از پدیدانامیک برای بررسی مسائل استاتیکی تا حد زیادی رفع شده است. هرچند که این موضوع همچنان نیازمند مطالعات بیشتر است.

۳-۱-۲- بهینه‌سازی روش گسسته‌سازی استاندارد

به علت غیرمحلی بودن تئوری پدیدانامیک، هر ذره با تعداد زیادی از ذرات واقع در یک ناحیه همسایگی در ارتباط است؛ هرچند که دو ذره در تماس مستقیم با یکدیگر نباشند. در نتیجه این موضوع، هزینه محاسباتی روش‌های پدیدانامیک به‌مراتب از هزینه محاسباتی روش‌های مبتنی بر تئوری‌های محلی بیشتر است. روش گسسته‌سازی استاندارد نیز از این موضوع مستثنا نیست. از نگاهی دیگر، به منظور جلوگیری از اثر سطح^{۳۹} (کاهش سختی ماده) و یا از دست رفتن قسمتی از حجم ماده در روش گسسته‌سازی استاندارد، معمولاً از افق ثابت و فواصل یکسان برای جای‌گذاری نقاط در یک دامنه استفاده می‌شود. این در حالی است که جای‌گذاری نقاط با فواصل کم از یکدیگر در نواحی دور از ترک از نظر محاسباتی غیربهینه است [۲۲].

به‌عنوان راهکاری برای کاهش هزینه محاسباتی روش استاندارد، بحث تغییر افق و نیز فواصل میان نقاط در یک دامنه در پژوهش‌های مختلف [۸۵-۹۳] مطرح شده است. در مدل‌های معرفی شده در این مقالات، از نقاط با فواصل کم در نواحی بحرانی و بخش‌های دارای ناپیوستگی استفاده شده است. در سایر قسمت‌های دامنه، نقاط با فواصل بیشتری از یکدیگر قرار گرفته‌اند. با استفاده از چنین مدل‌هایی، به‌طور قابل

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱



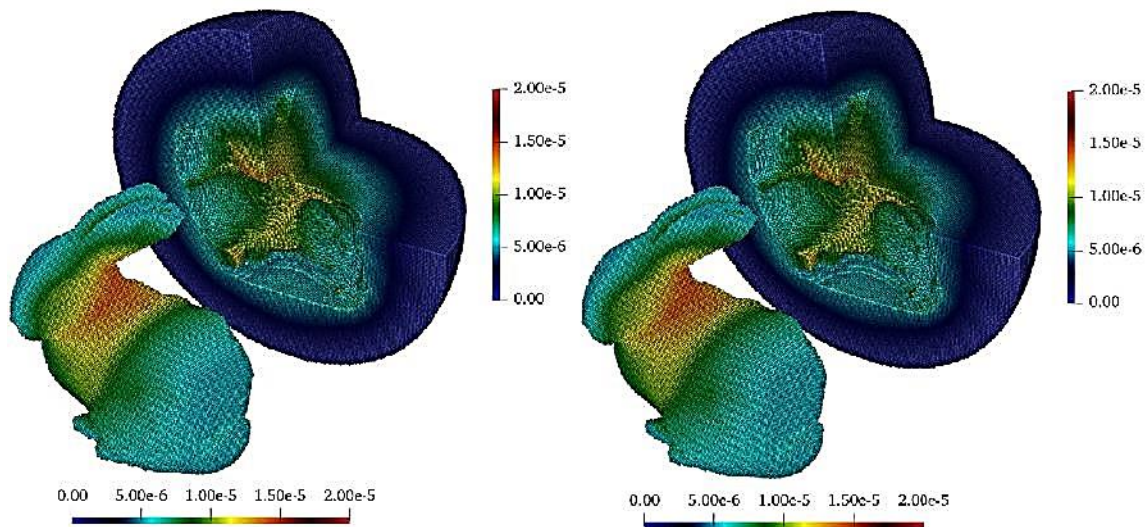
شکل ۴- حل مسئله کانتروف-وینکلر براساس ترکیب روش پدیدانامیک و اجزای محدود در زمان‌های مختلف [۲۱]:
بالا: الگوی رشد ترک؛ پایین: به کارگیری روش پدیدانامیک در نواحی پیرامون ترک و روش اجزای محدود در سایر نواحی
با استفاده از الگوریتم جایگزینی تطبیقی

روش بهینه برای هر نقطه نیازمند کامل بودن ناحیه همسایگی آن نقطه است. این موضوع موجب محدودیت در استفاده از روش بهینه در مرزها و نواحی پیرامون ترک می‌شود. به منظور رفع این محدودیت، یک روش گسسته‌سازی ترکیبی با الگوریتم جایگزینی تطبیقی در [۲۲] معرفی شده است. در این حالت، از روش استاندارد در نواحی بحرانی و پیرامون مرزها استفاده می‌شود. سایر قسمت‌های دامنه با استفاده از روش بهینه گسسته‌سازی شده است. به منظور بررسی دقت و عملکرد این روش، از آن برای حل مسائل الاستیسیته و خوردگی تحت بارگذاری دینامیکی در فضای دوبعدی و سه‌بعدی استفاده شده است. الگوی خوردگی در یکی از مثال‌های حل شده در این پژوهش در شکل (۵) نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، تطابق خوبی میان نتایج حاصل از روش استاندارد و ترکیبی وجود دارد. در حالی که هزینه محاسباتی استفاده از روش ترکیبی در حدود ۲۶ درصد روش استاندارد گزارش شده است. به عنوان نتیجه‌گیری روش ترکیبی یک جایگزین مناسب برای روش استاندارد به حساب می‌آید.

در تعدادی دیگر از مطالعات انجام شده، راهکارهای استفاده بهینه از ظرفیت پردازشی رایانه برای کاهش هزینه محاسباتی روش استاندارد ارائه شده است. به عنوان مثال، می‌توان به استفاده از بسترهای OpenMP [۲۱، ۸۷ و ۱۴۸-۱۵۰]، OpenCL [۳۱، ۱۵۱ و ۱۵۲] و CUDA [۱۵۳ و ۱۵۴] اشاره

تطبیقی برای شناسایی نواحی بحرانی در فرایند حل مسئله استفاده شده است. در این حالت، در نواحی محتمل برای رشد ترک، روش پدیدانامیک جایگزین روش مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته می‌شود. در یکی از جدیدترین پژوهش‌های منتشر شده در این حوزه از یک روش ترکیبی پدیدانامیک و اجزای محدود با الگوریتم جایگزینی تطبیقی برای تحلیل مسائل رشد ترک دینامیکی در فضای سه‌بعدی استفاده شده است [۲۱]. الگوی رشد ترک و عملکرد الگوریتم جایگزینی تطبیقی برای یکی از مثال‌های حل شده در این پژوهش در شکل (۴) نمایش داده شده است.

به‌عنوان راهکاری دیگر برای کاهش هزینه محاسباتی روش استاندارد، یک روش گسسته‌سازی بهینه مبتنی بر تخمین حداقل مربعات وزنی^{۴۳} در [۲۲] معرفی شده است. برای جزئیات بیشتر پیرامون روش تخمین حداقل مربعات وزنی به [۱۴۵-۱۴۷] رجوع شود. در روش گسسته‌سازی بهینه، تعداد معینی از نقاط موجود در همسایگی هر نقطه به‌عنوان نقاط کمکی^{۴۴} انتخاب می‌شوند. میدان جابه‌جایی در ناحیه همسایگی نقطه برحسب جابه‌جایی نقاط کمکی تخمین زده می‌شود. علاوه بر کاهش هزینه محاسباتی، در این روش انتگرال موجود در معادله حرکت پدیدانامیک به فرم تحلیلی^{۴۵} برآورد می‌شود. بنابراین خطای مربوط به ضریب اصلاح حجم در روش استاندارد در روش بهینه رفع شده است. با وجود چنین مزایایی، به کارگیری



شکل ۵- الگوی خوردگی در یک محیط سه‌بعدی [۲۲]: راست: روش ترکیبی؛ چپ: روش گسسته‌سازی استاندارد

این روش، از آن برای حل معادلات دیفرانسیل و نیز بررسی مسئله فشرده‌سازی تصاویر بدون نیاز به فرضیات اضافی استفاده شده است. طبق نظر نویسندگان مقاله، با استفاده از عملگرهای دیفرانسیل، توصیف غیرمحلّی تنش و کرنش با استفاده از پدیدانامیک نیز امکان‌پذیر است [۱۵۵]. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۷ معدنچی و همکاران از عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی، غیرخطی و ترکیبی تحت شرایط مرزی از نوع طبیعی^{۴۷} و ضروری^{۴۸} استفاده کرده‌اند. در این روش، از یک مؤلفه داخلی برای تبدیل فرم محلی معادلات دیفرانسیل به فرم غیرمحلّی استفاده شده است. به‌منظور کنترل کردن کارایی مدل پیشنهادی نیز از هر دو الگوریتم ضمنی و صریح برای حل مسائل عددی استفاده شده است. با وجود عدم استفاده از فرضیات اضافی برای مواجهه با تکینگی^{۴۹}، جواب‌های به‌دست‌آمده با نتایج تحلیلی منطبق بوده است. بنابراین می‌توان گفت که استفاده از مدل پدیدانامیک مبتنی بر عملگرهای دیفرانسیلی یک راهکار کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل است [۱۵۶]. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۸ نیز از پدیدانامیک برای حل روابط دیفرانسیلی حاکم بر انتشار نوترون‌ها استفاده شده است. با توجه به عملکرد خوب این روش، نویسندگان مقاله ادعا کردند

کرد. با توجه به افزایش روزافزون توان محاسباتی رایانه‌ها، راهکارهای ارائه شده در این پژوهش‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به‌عنوان جمع‌بندی، می‌توان گفت که مشکل هزینه محاسباتی زیاد برای استفاده از پدیدانامیک تا حد زیادی رفع شده است؛ هرچند که ارائه راهکارهای جدیدتر همچنان حائز اهمیت است.

۴- عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک

پدیدانامیک یک تئوری کارآمد برای بررسی مسائل دارای ناپویستگی است که در آن از روابط انتگرالی استفاده شده است. با وجود قابلیت‌های منحصربه‌فرد این تئوری برای حل مسائل مختلف، استفاده از روابط انتگرالی در آن منجر به محدودیت‌هایی شده است. چرا که بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در قالب معادلات دیفرانسیل فرمول‌بندی شده‌اند. با توجه به این موضوع، ایده استفاده از عملگرهای دیفرانسیلی در پدیدانامیک در سال ۲۰۱۶ توسط معدنچی و همکاران مطرح شده است. در این مطالعه، یک رویکرد جدید برای بازنویسی مشتقات پاره‌ای یک متغیر به فرم غیرمحلّی ارائه شده است. با جای‌گذاری این معادلات در معادله نویر^{۴۶}، معادلات حرکت مکانیکی پدیدانامیک بازتولید می‌شوند. به‌منظور اثبات کارایی

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

که استفاده از عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای حل معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی بالاتر نیز بدون محدودیت خاصی امکان‌پذیر است [۱۵۷].

تاکنون در پژوهش‌های متعدد از عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای حل مسائل مختلف استفاده شده است. به‌عنوان مثال می‌توان به تحلیل اندرکنش حاکم میان سیال و سازه [۱۵۸] و [۱۵۹]، بررسی حرکت سیالات با عدد رینولدز کم [۱۶۰]، مدل‌سازی ترکیبی جریان سیال و انتقال حرارت [۱۶۱] و تحلیل مسائل جریان سیال [۱۶۲-۱۶۴] اشاره کرد. در مرجع [۱۶۵] نیز از یک روش تفاضل محدود^{۵۰} مبتنی بر عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای تحلیل مسائل در محیط‌های محدود و نامحدود استفاده شده است. برای جزئیات بیشتر پیرامون استفاده از عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای حل مسائل مختلف به مراجع [۱۶۰، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۶-۱۷۷] رجوع شود.

۵- تعریف تنش در پدیدانامیک

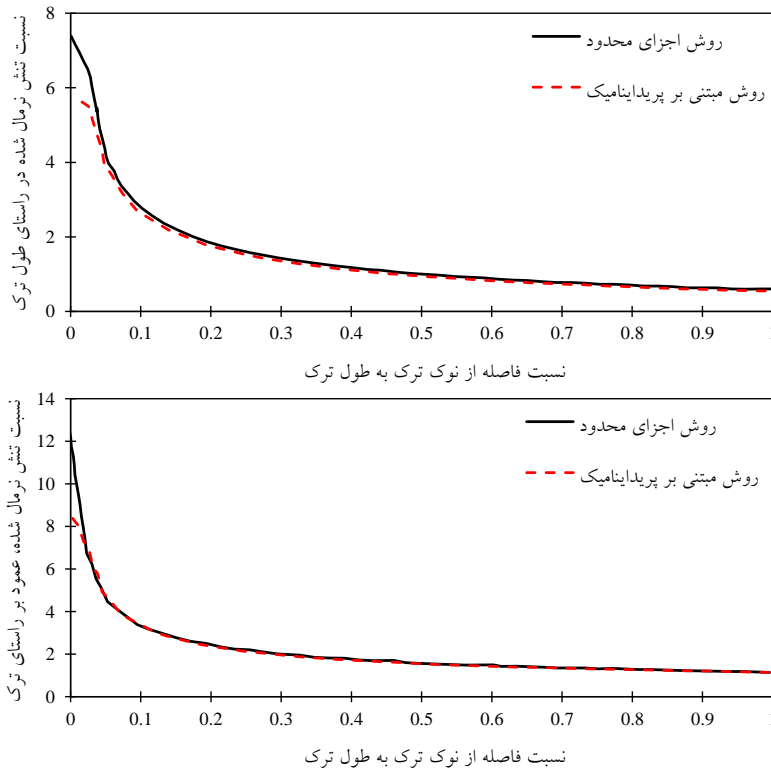
در پدیدانامیک، برخلاف تئوری‌های کلاسیک، از روابط انتگرالی به‌جای روابط دیفرانسیلی استفاده شده است. به‌تبع آن، تنش به‌طور مستقیم در معادلات پدیدانامیک تعریف نشده است. در نتیجه این امر، استفاده از مدل‌های بنیادین تئوری‌های کلاسیک برای مواد مختلف در پدیدانامیک چالش‌برانگیز است. از طرفی، ایده استخراج تنش غیرمحلی با استفاده از پدیدانامیک نیز همواره مورد توجه محققان بوده است. لازمه دستیابی به این مهم، ایجاد ارتباط میان مؤلفه‌های پدیدانامیک و الاستیسیته کلاسیک برای استخراج تانسور تنش پدیدانامیک است.

به‌عنوان اولین تلاش انجام شده برای ارتباط مؤلفه‌های پدیدانامیک و الاستیسیته کلاسیک، فرمول‌بندی‌های حالت-مبنای پدیدانامیک در سال ۲۰۰۷ توسط سیلینگ و همکاران معرفی شده است. طبق نظر سیلینگ و همکاران، امکان استفاده از روابط بنیادین الاستیسیته کلاسیک برای ارتباط حالت تغییر شکل و حالت نیرو در این فرمول‌بندی امکان‌پذیر است. با

توجه به این موضوع، فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا، در مقایسه با نسخه پیوند-مبنا، بازه وسیع‌تری از مدل‌های ماده را پوشش می‌دهند [۲۸]. در مرجع [۱۷۸] نیز یک مدل منطبق بر فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول معرفی شده است، که در آن از روابط بنیادین تنش-کرنش کلاسیک برای توصیف رفتار ماده استفاده می‌شود. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۰۸ ارتباط میان فرمول‌بندی حالت مبنا، پدیدانامیک و الاستیسیته کلاسیک توسط سیلینگ و لهوک مطالعه شده است. هدف اصلی آنها در این پژوهش بررسی همگرایی پدیدانامیک به الاستیسیته کلاسیک بوده است. طبق نتایج به‌دست‌آمده، هنگامی که افق در پدیدانامیک به صفر میل می‌کند، تانسور تنش پدیدانامیک به تانسور تنش پیولا-کیرشهف^{۵۱} نوع اول همگرا می‌شود. در عین حال، در صورت تعریف مقدار صفر برای افق، تانسور تنش پدیدانامیک غیرقابل تعریف است [۱۷۹].

در مطالعات عنوان شده، به نوعی استفاده از فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا برای ارتباط مؤلفه‌های پدیدانامیک و الاستیسیته کلاسیک و استخراج تانسور تنش پدیدانامیک مدنظر بوده است. در عین حال، بررسی این موارد برای فرمول‌بندی پیوند-مبنا در تعداد دیگری از پژوهش‌ها مطرح شده است. با مدنظر داشتن این فرمول‌بندی، لهوک و سیلینگ در سال ۲۰۰۸ امکان ایجاد ارتباط میان مؤلفه‌های فرمول‌بندی پیوند-مبنا و الاستیسیته کلاسیک را بررسی کرده‌اند. با تلاش‌های انجام شده در این پژوهش، تانسور تنش پدیدانامیک برحسب نیروهای اندرکنش غیرمحلی تعریف شده است. به‌منظور اطمینان یافتن از صحت این روش، معادله حرکت پدیدانامیک برحسب تانسور تنش بازنویسی شده است. معادله حرکت به‌دست‌آمده هم‌ارز معادله حرکت کوشی^{۵۲} در مدل کلاسیک بوده است [۱۸۰]. در پژوهشی در سال ۲۰۱۲ نیز، لیو و همکاران تانسور تنش معادل پدیدانامیک را برحسب نیروهای گذرنده از یک نقطه محاسبه کرده‌اند. در این مطالعه، از تانسور تنش برای محاسبه ثابت میکرومدول در فرمول‌بندی پیوند-مبنا استفاده شده است [۴۲].

با وجود تلاش‌های انجام شده برای استخراج تانسور تنش



شکل ۶- مقایسه مؤلفه‌های تنش در نوک ترک مربوط به روش‌های اجزای محدود و پدیدانامیک در [۱۸۲]

۶- توسعه مدل‌های ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک

در بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در سال‌های اخیر، از مدل‌های پدیدانامیک در کنار سایر روش‌های عددی استفاده شده است. در این مطالعات، توسعه گستره مسائل قابل بررسی با استفاده از پدیدانامیک و نیز کاهش هزینه محاسباتی روش‌های پدیدانامیک مدنظر بوده است. به‌عنوان پیش‌زمینه‌ای برای این موضوع، امکان به‌کارگیری پدیدانامیک در قالب روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS در سال ۲۰۰۷ توسط مکک و سیلینگ بررسی شده است [۱۸۳]. بدین منظور، پیوند میان ذرات در پدیدانامیک به‌صورت المان‌های خربایی فرض شده است. مؤلفه‌های سختی و سطح مقطع المان‌ها نیز برحسب مقادیر میکرومدول و فواصل نقاط در پدیدانامیک تعیین شده است. از آن زمان تاکنون در مطالعات مختلف از نرم‌افزارهای اجزای محدود ABAQUS [۱۸۴-۱۸۶]، ANSYS [۱۲۳، ۱۲۵ و ۱۸۷-۱۸۹]، OpenSees [۱۹۰] و LS-DYNA [۱۹۱] برای به‌کارگیری تئوری پدیدانامیک استفاده شده است.

پدیدانامیک، پیاده‌سازی مدل‌های معرفی شده در این مقالات در محاسبات عددی کار ساده‌ای نیست [۱۸۱]. به‌عنوان راهکاری برای این موضوع، یک مدل ساده‌تر توسط معدنچی و همکاران در سال ۲۰۱۶ معرفی شده است. با استفاده از عملگرهای دیفرانسیلی در این پژوهش، فرم غیرمحلّی مؤلفه‌های تنش و کرنش استخراج شده است [۱۵۵]. فلاح و همکاران نیز در پژوهشی در سال ۲۰۲۰ تانسور تنش غیرمحلّی را بر حسب اندرکنش حاکم میان ذرات ماده در فرمول‌بندی پیوند-مینا استخراج کرده‌اند. طبق گفته نویسندگان، با استفاده از این مدل، تعریف تنش در مسائل دارای تکینگی و ناپیوستگی و نیز مسائل تمرکز تنش نیز امکان‌پذیر است. به‌منظور اثبات این ادعا، مسئله تمرکز تنش پیرامون یک حفره در یک ورق تحت کشش بررسی شده است. در یکی دیگر از مسائل حل شده در این پژوهش نیز میدان تنش در نوک ترک استخراج شده است [۱۸۲]. منحنی‌های مربوط به مقایسه تنش پدیدانامیک و اجزای محدود در نوک ترک در شکل (۶) نمایش داده شده است.

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

به‌کارگیری چنین نرم‌افزارهایی موجب سهولت استفاده از پدیدانامیک برای حل مسائل مختلف شده است. به‌عنوان یکی دیگر از مدل‌های ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک، مدل‌های پدیدانامیک- مکانیک محیط‌های پیوسته در پژوهش‌های مختلف توسعه داده شده است. در مورد برخی از این مدل‌ها پیشتر در بخش ۳-۱-۲ صحبت شده است. در این بخش با جزئیات بیشتر به این موضوع پرداخته می‌شود. ایده استفاده از مدل‌های پدیدانامیک- مکانیک محیط‌های پیوسته برای اولین بار در سال ۲۰۱۰ توسط کلیک و معدنچی مطرح شده است. در این پژوهش، کلیک و معدنچی یک مدل ترکیبی نسبتاً ساده مبتنی بر پدیدانامیک و اجزای محدود را معرفی کرده‌اند [۱۹۲]. در این مدل، در نواحی بحرانی از روش پدیدانامیک و در سایر قسمت‌ها از روش اجزای محدود استفاده شده است. به‌منظور ایجاد ارتباط میان دو ناحیه، از هر دو روش به‌طور هم‌زمان در نواحی انتقالی استفاده شده است. به‌منظور انجام صحت‌سنجی نیز دو مسئله شامل میله یک‌بعدی و ورق دارای حفره تحت بار کششی بررسی شده‌اند. نتایج هر دو مسئله نسبتاً قابل قبول بوده است. هرچند که پرش‌های جزئی میدان جابه‌جایی در ناحیه انتقالی مشاهده شده است. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۲ نیز از یک مدل ترکیبی پدیدانامیک و اجزای محدود برای تحلیل گسترش آسیب در پنل‌های خمیده متشکل از مواد مرکب با حفره مرکزی استفاده شده است [۱۹۳]. نتایج این مطالعه نیز نسبتاً قابل قبول بوده است. در تعداد زیادی از مقالات منتشر شده از آن زمان تاکنون، از مدل‌های ترکیبی پدیدانامیک و اجزای محدود [۹۴-۱۲۷ و ۱۴۲] و نیز پدیدانامیک و اجزای محدود توسعه‌یافته [۳۰ و ۱۲۸-۱۳۰] برای حل مسائل مختلف استفاده شده است. در تعدادی از پژوهش‌ها نیز راهکارهایی برای ترکیب مستقیم تئوری پدیدانامیک با تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته [۱۳۶-۱۳۹ و ۱۴۳] و الاستیسیته کلاسیک [۱۳۲، ۱۳۴-۱۳۶، ۱۴۰ و ۱۴۱] ارائه شده است. به‌عنوان یکی از جدیدترین مقالات منتشر شده در این حیطه، یک روش ترکیبی مبتنی بر اجزای محدود و

فرمول‌بندی پیوند-مبنای پدیدانامیک برای تحلیل مسائل رشد ترک دینامیکی در فضای سه‌بعدی معرفی شده است. از شاخصه‌های این روش می‌توان به عدم استفاده از مقادیر اختیاری و نیز به‌کارگیری یک الگوریتم تطبیقی برای شناسایی نواحی بحرانی در فرایند حل مسئله اشاره کرد [۲۱]. تحلیل شکست هیدرولیکی^{۵۳} در محیط متخلخل [۱۹۴] و بررسی گسترش آسیب در مواد چسبنده [۱۴۴] نیز از جدیدترین نتایج استفاده از مدل‌های ترکیبی پدیدانامیک و اجزای محدود است. از دیگر دستاوردهای حاصل شده در این حوزه، می‌توان به ترکیب پدیدانامیک با روش‌های هیدرودینامیک هموار شده ذرات^{۵۴} [۱۴۹ و ۱۹۵-۱۹۸]، دینامیک مولکولی [۱۹۹]، نقاط محدود^{۵۵} [۱۳۳]، نوار محدود^{۵۶} [۲۰۰]، المان مرزی^{۵۷} [۲۰۱] و [۲۰۲] و مکانیک آسیب^{۵۸} [۲۰۳] اشاره کرد. در مرجع [۲۰۴] نیز از ترکیب یک روش محلی پایه‌نمایی بدون شبکه با روش پدیدانامیک با الگوریتم جایگزینی تطبیقی یک روش بهینه توسعه داده شده است. علاوه بر موارد فوق، استفاده از پدیدانامیک در قالب مدل الکتریکی-مکانیکی نیز در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۳۸ و ۲۰۵]. در پژوهش‌های منتشر شده، از چنین مدل‌هایی برای توصیف پدیده شکست دی‌الکتریک در جامدات [۲۰۶]، تحلیل پاسخ پیزومقاومتی لوله‌های نانو [۲۰۷ و ۲۰۸]، توصیف رفتار پیزوالکتریسیته خطی [۲۰۹] و بررسی مسائل الکتریکی-حرارتی [۲۱۰ و ۲۱۱] استفاده شده است. در [۲۱۲ و ۲۱۳] نیز مدل‌های ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک برای تحلیل جریان سیال معرفی شده‌اند.

۷- تحلیل رفتار پلاستیک با استفاده از پدیدانامیک

در نسخه پیوند-مبنای پدیدانامیک از اثر تغییر شکل سایر پیوندها بر یک پیوند صرف‌نظر می‌شود. بر این مبنا، در این فرمول‌بندی تنها مؤلفه تغییر شکل حجمی لحاظ شده است. به‌دلیل تعریف نشدن بخش انحرافی تغییر شکل در این نسخه، استفاده از آن برای بررسی رفتار پلاستیک با محدودیت همراه است. با رفع این محدودیت در فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا،

پلاستیک کامل مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنای معمول را معرفی کرده‌اند [۲۸]. از قابلیت‌های این مدل، در مقایسه با انواع پیوند-مبنا، می‌توان به امکان تفکیک مؤلفه‌های تغییر شکل حجمی و انحرافی اشاره کرد. بر این مبنا، استفاده از این مدل بدون محدودیت خاصی برای تحلیل رفتار پلاستیک فلزات امکان‌پذیر است. یک روش حل صریح و یک معیار تسلیم بر پایه مدل معرفی شده در مرجع [۲۸] نیز توسط میشل [۲۲۰] ارائه شده است. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۴ از یک مدل پلاستیک دراکر-پراگر^{۶۲} مبتنی بر این روش برای تحلیل رفتار مواد شبه‌ترد استفاده شده است [۲۲۱]. وارن و همکاران در سال ۲۰۰۹ برای اولین بار از مدل فون مایسز^{۶۳} با سخت‌شوندگی خطی در فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول استفاده کرده‌اند [۱۷۸]. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۰ از این مدل برای تحلیل رفتار ویسکوپلاستیک نمونه‌های آلومینیومی استفاده شده است [۱۷۸]. لیتلود نیز در پژوهشی در سال ۲۰۱۰، برای مدل‌سازی آزمایش لوله در حال انبساط^{۶۴}، مدل جانسون-کوک^{۶۵} را در فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول تعریف کرده است [۲۲۲]. در پژوهشی در سال ۲۰۱۱ نیز یک مدل الاستوپلاستیک کریستال توسط او توسعه داده شده است [۲۲۳]. با استفاده از این مدل، رشد ترک در نمونه‌های آلومینیومی بررسی شده است. توپک و همکاران یک مدل آسیب مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول را در سال ۲۰۱۳ توسعه داده‌اند. از این مدل برای تحلیل رفتار ویسکوپلاستیک فلزات تحت اثر ضربه استفاده شده است [۲۲۴]. در مرجع [۲۲۵] نیز یک مدل تیر اوپلر-برنولی الاستوپلاستیک مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول معرفی شده است. از دیگر دستاوردهای حاصل شده در این زمینه می‌توان به ارائه یک مدل پلاستیسیته کریستالی مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول در سال ۲۰۱۴ اشاره کرد [۲۲۶]. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۵ از یک مدل بر پایه فرمول‌بندی حالت-مبنای غیرمعمول برای تحلیل رفتار الاستوپلاستیک خاک استفاده شده است [۲۲۷]. امکان استفاده از

استفاده از آنها برای تحلیل رفتار پلاستیک نیز امکان‌پذیر است [۲۸ و ۲۹].

با وجود محدودیت‌های عنوان شده برای فرمول‌بندی پیوند-مبنا، در پژوهشی در سال ۲۰۰۷ یک مدل میکروپلاستیک برای این فرمول‌بندی معرفی شده است. در این مدل، رفتار پیوند پس از نقطه تسلیم به صورت پلاستیک کامل در نظر گرفته می‌شود. به دلیل عدم تسلیم هم‌زمان پیوندها، با فرض چنین رفتاری، سخت‌شوندگی کرنشی در ورق‌های آلومینیومی مدل‌سازی شده است [۱۸۳]. در مرجع [۲۱۴] نیز، با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل برای پیوندها، از نسخه پیوند-مبنا برای محاسبه تنش تسلیم نانوسیم‌ها استفاده شده است. گاوان و زلینسکی نیز از این مدل برای تحلیل شکست در پنجره‌های الکترومغناطیسی استفاده کرده‌اند [۲۱۵]. از دیگر موارد استفاده از مدل میکروپلاستیک در سال‌های اخیر می‌توان به تحلیل گسیختگی گرافن‌های چندلایه تحت اثر نیروی کششی در مقیاس نانو [۲۱۶] و بررسی تورفتگی ورق‌های نازک مسی [۲۱۷] اشاره کرد. یولوم و همکاران نیز از یک مدل میکروپلاستیک برای تحلیل گسیختگی شکل‌پذیر در ورق‌های آلومینیومی ضخیم استفاده کرده‌اند [۲۱۸]. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۰۸ نیز از تابع پایه شعاعی^{۵۹} و نیز الگوریتم بازگشت به سطح^{۶۰} در فرمول‌بندی پیوند-مبنا برای تحلیل رفتار پلاستیک با سخت‌شوندگی همسانگرد^{۶۱} استفاده شده است [۲۱۹]. با وجود تلاش‌های انجام شده برای تحلیل رفتار پلاستیک با استفاده از فرمول‌بندی پیوند-مبنا، استفاده از این مدل‌ها به بررسی مسائل خاصی محدود شده است.

استفاده از نسخه حالت-مبنای غیرمعمول برای تحلیل رفتار پلاستیک، در مقایسه با نسخه پیوند-مبنا، ساده‌تر است؛ چراکه در این نسخه از روابط بنیادین تعریف شده در مدل‌های کلاسیک استفاده می‌شود. در عین حال، راهکارهایی برای تحلیل رفتار پلاستیک با استفاده از فرمول‌بندی حالت-مبنای معمول نیز در پژوهش‌های مختلف ارائه شده است. سیلینگ و همکاران برای اولین بار در سال ۲۰۰۷ یک مدل الاستیک-روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۱

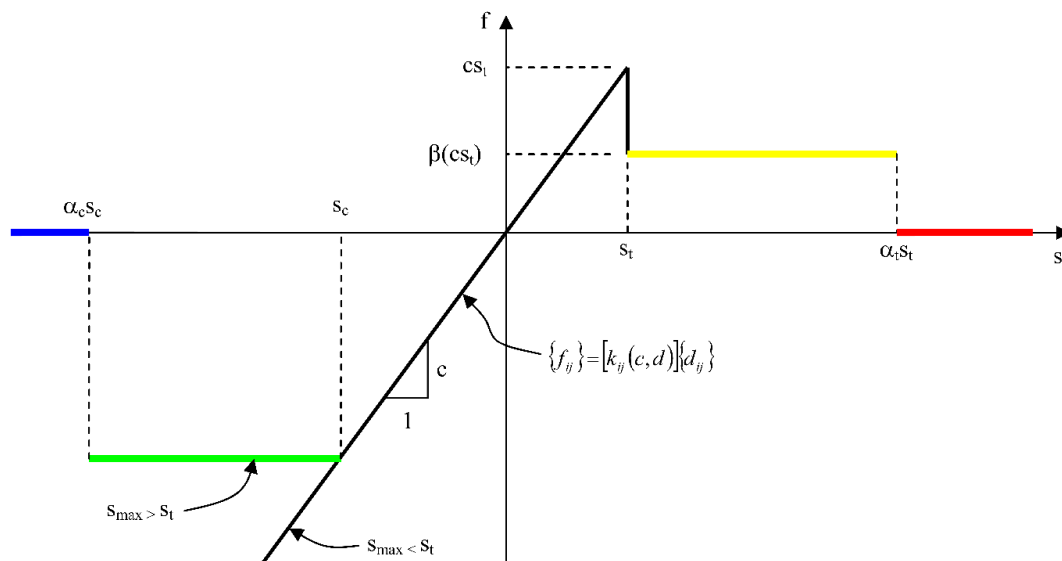
این فرمول‌بندی برای تحلیل شکست نرم در فرایند ماشین‌کاری فلزات نیز در سال ۲۰۱۵ توسط وو و رن بررسی شده است [۲۲۸]. در مقاله‌ای در سال ۲۰۱۶ نیز معدنچی و اوترکوس یک مدل پلاستیسیته فون مایسز بر پایه نسخه حالت-مبنای غیرمعمول را معرفی کردند [۲۲۹].

از دیگر مطالعات انجام شده در زمینه تحلیل رفتار پلاستیک با استفاده از پدیدانامیک می‌توان به ارائه مؤلفه تنش فون مایسز و کرنش پلاستیک در فرمول‌بندی حالت-مبنای معمول [۲۹]، معرفی مدل میکرومکانیکی پدیدانامیک برای تحلیل مواد دوفازی [۲۳۰]، تحلیل پلاستیسیته کریستال سه‌بعدی با استفاده از پدیدانامیک [۲۳۱] و معرفی مدل پلاستیسیته‌ی J2 منطبق بر نسخه حالت-مبنای معمول [۲۳۲] اشاره کرد. در مرجع [۲۳۳] نیز راهکاری برای پایدار کردن مودهای انرژی صفر در مدل‌های پلاستیسیته کریستال پدیدانامیک ارائه شده است. برای جزئیات بیشتر پیرامون استفاده از مدل‌های پدیدانامیک برای تحلیل رفتار پلاستیک به مراجع [۸۲] و [۲۳۴-۲۴۶] مراجعه شود. با وجود چنین پژوهش‌هایی، محدودیت استفاده از پدیدانامیک برای تحلیل رفتار پلاستیک تا حد زیادی رفع شده است. هرچند که ارائه مدل‌های جدیدتر، به‌خصوص با مدنظر داشتن فرمول‌بندی پیوند-مبنا، همچنان از اهمیت بالایی برخوردار است.

۸- تحلیل رفتار مواد شبه‌ترد با استفاده از پدیدانامیک

سازه‌های مختلفی را می‌توان نام برد که در آنها از مواد شبه‌ترد مانند بتن و سایر مواد پایه‌سیمانی استفاده شده است. تحلیل رشد ترک در چنین سازه‌هایی با استفاده از روش‌های کلاسیک همواره با محدودیت همراه بوده است. به‌منظور رفع چنین محدودیت‌هایی، ایده استفاده از پدیدانامیک برای تحلیل گسترش آسیب در مواد شبه‌ترد برای اولین‌بار در سال ۲۰۰۵ توسط گرسل و همکاران مطرح شده است [۷۲]. در این پژوهش، از مدل الاستیک خطی پدیدانامیک برای تحلیل نمونه‌های متشکل از بتن معمولی و بتن‌آرمه استفاده شده است. هرچند که انرژی تلف شده در نمونه در طی فرایند رشد ترک

به‌صورت دست‌پایین برآورد شده است [۲۴۷]. علت این موضوع، وجود یک ناحیه چسبنده در نوک ترک در مواد شبه‌ترد است که برای لحاظ کردن آن باید از یک مدل نرم‌شونده به‌جای مدل الاستیک خطی استفاده شود [۲۴۸]. امکان استفاده از چنین مدلی در فرمول‌بندی پیوند-مبنا برای اولین‌بار توسط گرسل و همکاران مطرح شده است [۲۴۷]. مدل چندخطی معرفی شده توسط گرسل و همکاران در شکل (۷) نمایش داده شده است. به‌منظور کنترل کردن کارایی این مدل، الگوی ایجاد ترک در نمونه‌های بتنی بررسی شده است. از آن زمان تاکنون، در پژوهش‌های مختلف از انواع مدل‌های نرم‌شونده دوخطی [۳۵، ۳۵، ۸۱، ۲۴۹]، چندخطی [۲۴۷] و [۲۵۰-۲۵۲] و نمایی [۱۹] و [۲۵۳-۲۵۵] برای رفتار پیوندها در پدیدانامیک استفاده شده است. با مدنظر داشتن گسترش آسیب در نمونه تحت اثر بارگذاری‌های کششی مستقیم و غیرمستقیم، در تمام این مطالعات رفتار پیوند در فشار به‌صورت الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. بنابراین گسترش آسیب در نمونه‌های بتنی تحت اثر بارگذاری فشاری همچنان نیازمند مطالعات بیشتر است. لازم به ذکر است که در دو پژوهش منتشر شده در دو سال اخیر از مدل‌های غیرخطی برای رفتار پیوندها در فشار استفاده شده است [۱۹۰ و ۲۵۶]. هرچند که به‌دلیل استفاده از ضرایب میرایی در معادله حرکت پدیدانامیک، کارایی این مدل‌ها مورد تردید است. از دیگر مطالعات انجام شده در این زمینه، می‌توان به تحلیل رشد ترک‌های برشی در سازه‌های بتن‌آرمه در فضای دوبعدی اشاره کرد [۲۴۹]. هرچند که در این پژوهش، تفاوت‌های آشکاری میان الگوی رشد ترک آزمایشگاهی و تحلیلی مشاهده شده است. از بررسی منحنی‌های نیرو-جابجایی نیز در این مقاله صرف‌نظر شده است. طبق نظر سو و همکاران، تحلیل مسئله در فضای دوبعدی در این پژوهش موجب تفاوت نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی شده است. با وجود این، به‌دلیل ساده‌سازی‌های انجام شده، قضاوت در این مورد ساده نیست. چرا که در این مدل، از اثر جدایش آرماتور و بتن و نیز رفتار غیرخطی آرماتور صرف‌نظر



شکل ۷- مدل چندخطی معرفی شده در [۲۴۷] برای رفتار پیوند در فرمول‌بندی پیوند-مبنا

دال‌های بتن‌آرمه را بررسی کرده‌اند [۲۶۴]. در مرجع [۲۶۵] نیز یک مدل دومقیاسی برای تحلیل جدایش پلیمرهای الیافی از تیرهای بتنی معرفی شده است. برای مطالعه سایر پژوهش‌های منتشر شده در این حوزه به مراجع [۳۷ و ۲۶۶-۲۷۳] رجوع شود.

گرسل برای اولین بار در سال ۲۰۱۵ ایده تحلیل رفتار سازه‌های بتنی با استفاده از فرمول‌بندی حالت-مبنا را مطرح کرده است [۴]. در این مطالعه، از یک مدل خرابایی استفاده شده است. در این مدل خرابایی، ناحیه همسایگی هر ذره به صورت یک فضای چندظلعی در نظر گرفته می‌شود. از مدل معرفی شده برای تحلیل آزمایش برزیلی و آزمایش خمش سه نقطه‌ای در نمونه‌های بتنی استفاده شده است. طبق نظر نویسنده، به دلیل صرف نظر کردن از پدیده قفل‌شدگی سنگ‌دانه‌ها، مقاومت نمونه کمتر از مقدار واقعی تخمین زده شده است. در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۵ نیز یعقوبی و کرزپا از فرمول‌بندی حالت-مبنا در مقیاس ماکروسکوپی برای تحلیل نمونه‌های بتن الیافی استفاده کرده‌اند [۲۷۴]. در مقاله‌ای در سال ۲۰۱۷ نیز یک مدل مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنا در مقیاس مزوسکوپی برای تحلیل نمونه‌های بتنی معرفی شده است. در این مدل از توابع تصادفی

شده است. مدل نرم‌شونده‌ی انتخابی برای بتن نیز بسیار ساده بوده و از مؤلفه‌های اختیاری در آن استفاده شده است. در پژوهشی مشابه، میراندا و همکاران [۲۵۷] برای اولین بار از فرمول‌بندی پیوند-مبنا برای تحلیل سازه‌های بتن‌آرمه در فضای سه‌بعدی استفاده کرده‌اند. در این مورد نیز الگوی رشد ترک با داده‌های آزمایشگاهی اختلاف داشته است. طبق نظر نویسندگان این مقاله، صرف نظر کردن از لغزش میان آرماتور و بتن موجب چنین خطایی شده است. هابز و همکاران در سال ۲۰۲۲ یک مدل پدیدانامیک را برای تحلیل رفتار سازه‌های بتن‌آرمه ارائه کرده‌اند [۲۵۸]. به دلیل استفاده از ضرایب میرایی ثابت در معادله حرکت پدیدانامیک، کارایی این مدل نیز مورد تردید است. در سایر مطالعات انجام شده در این سال‌ها از فرمول‌بندی پیوند-مبنا برای تحلیل مسئله اعمال فشار بر دیسک برزیلی [۲۵۹]، تحلیل سازه‌های بتنی مسلح به الیاف [۲۵۳]، بررسی اثر ضربه بر قطعات بتنی [۲۶۰ و ۲۶۱]، تحلیل نمونه‌های بتنی با استفاده از روش ترکیبی مبتنی بر پدیدانامیک و روش اجزای محدود توسعه یافته [۲۶۲] و تحلیل سه‌فازی نمونه‌های بتنی در مقیاس مزوسکوپی [۲۶۳] استفاده شده است. های و رن نیز با استفاده از فرمول‌بندی پیوند-مبنا اثر انفجار زیر آب بر

برای توزیع سنگدانه، سیمان، ناحیه انتقالی میان آنها و خلل و فرج بتن استفاده شده است [۲۷۵]. از دیگر مطالعات انجام شده در این حوزه می‌توان به استفاده از یک مدل دوفرنی برای تحلیل نمونه‌های بتنی تحت فشار اشاره کرد. بر مبنای نظر نویسندگان، با استفاده از این مدل، وابستگی نتایج به راستای قرارگیری نقاط تا حد زیادی کاهش یافته است [۲۷۶]. یانگ و همکاران نیز در سال ۲۰۱۹ از مدل‌های نرم‌شونده دوخطی، چندخطی و نمایی به‌طور هم‌زمان برای تحلیل سازه‌های بتنی استفاده کرده‌اند. طبق بررسی‌های صورت گرفته، با استفاده از مدل نمایی نتایج به داده‌های آزمایشگاهی نزدیک‌تر بوده است [۲۷۷].

به‌دلیل ضعف بتن در کشش، معمولاً از ترکیب آرماتور و بتن در کنار یکدیگر در سازه‌های مهندسی استفاده می‌شود. بحث جدایش آرماتور از بتن در چنین سازه‌هایی همواره مسئله‌ساز بوده است؛ چرا که وقوع این پدیده منجر به توسعه ترک در بتن و حتی فروپاشی سازه می‌شود. در [۲۷۸] برای اولین بار از یک مدل مبتنی بر فرمول‌بندی پیوند-مبنا برای تحلیل پدیده بیرون کشیدگی آرماتور از درون بتن استفاده شده است. در این مطالعه، تنها الگوی رشد ترک بررسی شده است. در پژوهشی مشابه در سال ۲۰۱۹ نیز لو و همکاران از یک مدل مبتنی بر فرمول‌بندی حالت-مبنا استفاده کرده‌اند. در این مطالعه، از مدل دراگر-پراگر برای تحلیل رفتار غیرخطی یک نمونه بتن‌آرمه استفاده شده است [۲]. به‌منظور ساده‌سازی بیشتر، به‌جای مدل کردن آرماتور، جابه‌جایی ناشی از بیرون‌کشیدگی آن بر بتن اعمال شده است. نتایج الگوی رشد ترک مورد انتظار بوده است. در حالی که منحنی نیرو-جابه‌جایی تفاوت فاحشی با مقادیر آزمایشگاهی داشته است. احتمالاً مدل نشدن آرماتورها و نیز چشم‌پوشی کردن از لغزش حاکم میان بتن و آرماتور در این پژوهش منجر به تحریف نتایج شده است. از دیگر مطالعات مشابه انجام شده، می‌توان به تحلیل خوردگی فولاد در قطعات بتن‌آرمه با استفاده از فرمول‌بندی پیوند-مبنا اشاره کرد [۲۷۹]. در این مطالعه نیز آرماتور به‌طور صریح مدل نشده است، بلکه

جابه‌جایی ناشی از افزایش حجم آرماتور در اثر خوردگی به بتن اعمال شده است. به‌منظور افزایش دقت نتایج، در این پژوهش بتن در مقیاس مزوسکوپیک در نظر گرفته شده است. با استفاده از یک مدل همگن‌سازی متوسط، مشخصه‌های ماکروسکوپیک پیوندها برحسب نسبت حجمی مصالح و نیز مشخصه‌های آنها استخراج شده است. الگوی رشد ترک آزمایشگاهی و مدل پدیدانامیک نیز منطبق بوده است. با وجود چنین پژوهش‌هایی، می‌توان ادعا کرد که پتانسیل تحلیل رفتار مواد شبه‌ترد با استفاده از پدیدانامیک وجود دارد. هرچند که این موضوع همچنان نیازمند مطالعات بیشتر است..

۹- جمع‌بندی

پدیدانامیک یک تئوری غیرمحلّی جایگزین مکانیک محیط‌های پیوسته است که در آن از معادلات انتگرالی به‌جای معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. به‌دلیل عدم وجود مشتقات مکانی متغیرها در روابط این تئوری، استفاده از آن برای تحلیل مسائل دارای ناپیوستگی امکان‌پذیر است. سه فرمول‌بندی پدیدانامیک شامل پیوند-مبنا، حالت-مبنای معمول و حالت-مبنای غیرمعمول تاکنون معرفی شده‌اند. پیوند-مبنا اولین و ساده‌ترین فرمول‌بندی پدیدانامیک است. با وجود هزینه محاسباتی کم‌تر در عین سادگی این نسخه، محدودیت در انتخاب ضریب پواسون به‌عنوان نقطه ضعف آن عنوان شده است. در پژوهش‌های متعددی تاکنون از مدل‌های میکروپلار و مزدوج برای رفع محدودیت ضریب پواسون در این نسخه استفاده شده است. به‌عنوان راهکاری دیگر برای رفع این محدودیت، بحث استفاده از فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا به‌جای پیوند-مبنا مطرح شده است. در عین حال، پیچیدگی و امکان مشاهده پاسخ‌های غیرفیزیکی (در نسخه غیر معمول) به‌عنوان نقاط ضعف فرمول‌بندی‌های حالت-مبنا عنوان شده است. بر این اساس، استفاده از هریک از فرمول‌بندی‌های پدیدانامیک با محدودیت‌ها و مزایایی همراه است. بسته به شرایط مسئله، از فرمول‌بندی‌های مختلف پدیدانامیک در پژوهش‌های مختلف

امروز، امکان استفاده از پدیدانامیک برای تحلیل رفتار مواد ترد، شبه ترد و نیز بررسی رفتار الاستیک، پلاستیک، هایپرالاستیک و هایپرپلاستیک در پژوهش‌های مختلف مطرح شده است. در این پژوهش، ابتدا فرمول‌بندی‌های پدیدانامیک و مدل‌های مبتنی بر آن مرور شده‌اند. در حین مرور این مطالب، در مورد محدودیت‌های این فرمول‌بندی‌ها و نحوه رفع آنها نیز توضیح داده شده است. در بخش بعد، روش‌های مبتنی بر پدیدانامیک معرفی شده‌اند. سپس در مورد نحوه به‌کارگیری اپراتورهای دیفرانسیلی در مدل‌های پدیدانامیک صحبت شده است. در نهایت، مدل‌های ترکیبی پدیدانامیک و نیز مدل‌های معرفی شده برای بررسی رفتار مواد شبه ترد و تحلیل رفتار پلاستیک مرور شده‌اند. به عنوان نتیجه‌گیری، پدیدانامیک یک تئوری غیرمحلی است که می‌تواند در حل انواع مسائل مفید واقع شود.

استفاده می‌شود.

پدیدانامیک در اصل یک تئوری مستقل از مشتقات مکانی متغیرها، تنش و کرنش است. تعریف نشدن مؤلفه‌های دیفرانسیلی در پدیدانامیک محدودیت‌هایی را به همراه داشته است. با توجه به اهمیت موضوع، بحث تعریف تنش و کرنش در پدیدانامیک و استفاده از اپراتورهای دیفرانسیلی در آن به تدریج مطرح شده است. به عنوان اولین تلاش‌های صورت گرفته، تعریف روابط حاکم میان تنش و کرنش در فرمول‌بندی حالت-مبنای غیر معمول امکان‌پذیر شده است. در مطالعات دیگری نیز از عملگرهای دیفرانسیلی پدیدانامیک برای تعریف تنش در فرمول‌بندی پیوند-مبنا استفاده شده است. با ارائه چنین راهکارهایی، محدودیت‌های حاکم بر فرمول‌بندی‌های پدیدانامیک تا حد زیادی رفع شده است. علاوه بر این، تا به

واژه‌نامه

- | | | |
|---|--|-------------------------------------|
| 1. nonlocal | 23. modulus state | 45. analytically |
| 2. horizon | 24. deformation vector state | 46. Navier |
| 3. length-scale | 25. bond elongation | 47. Neumann |
| 4. local | 26. state of the bond length | 48. Dirichlet |
| 5. bond-based | 27. weighted-volume | 49. singularity |
| 6. ordinary state-based | 28. peridynamic counterpart of volume dilatation | 50. finite difference |
| 7. non-ordinary state-based | 29. state of the influence function | 51. Piola–Kirchhoff |
| 8. bond | 30. explicit | 52. Cauchy |
| 9. deviatoric | 31. central difference | 53. hydraulic fracturing |
| 10. diffusion | 32. Verlet velocity | 54. smoothed-particle hydrodynamics |
| 11. corrosion | 33. implicit | 55. finite point method |
| 12. pairwise force function | 34. adaptive relaxation | 56. finite strip method |
| 13. body force density | 35. snap-back | 57. finite strip method |
| 14. scalar-valued function | 36. sequential linear analysis | 58. damage mechanics |
| 15. micromodulus | 37. arc-length | 59. radial basis function |
| 16. micropolar | 38. surface effect | 60. return-mapping |
| 17. Euler–Bernoulli | 39. adaptive switching | 61. isotropic |
| 18. improved Timoshenko beam-based micropolar peridynamic | 40. finite element method | 62. Drucker–Prager |
| 19. conjugated | 41. extended finite element method | 63. von mises |
| 20. Cosserat | 42. weighted least squares | 64. expanding tube experiment |
| 21. State | 43. weighted least squares | 65. Johnson-Cook |
| 22. force vector state | 44. collocation | |

مراجع

- Diehl, P., Lipton, R., Wick, T., and Tyagi, M., "A Comparative Review of Peridynamics and Phase-Field Models for Engineering Fracture Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 69, pp. 1259–1293, 2022.
- Silling, S. A. and Askari, E., "A Meshfree Method Based on the Peridynamic Model of Solid Mechanics", *Computers & Structures*, Vol. 83, No.

- 17-18, pp. 1526-1535, 2005.
3. Inglis, C. E., "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", *Transactions of the Institution of Naval Architects*, Vol. 55, pp. 219-241, 1913.
 4. Gerstle, W. H., *Introduction to Practical Peridynamics: Computational Solid Mechanics without Stress and Strain*, World Scientific Publishing Company, 2015.
 5. Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 221, No. 582-593, pp. 163-198, 1921.
 6. Irwin, G. R., "Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 3, pp. 361-364, 1957.
 7. Clayton, J. D., *Nonlinear Fracture Mechanics in Encyclopedia of Continuum Mechanics*, Springer, pp. 1840-1846, 2020.
 8. Dugdale, D. S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, No. 2, pp. 100-104, 1960.
 9. Hutchinson, J., "Fundamentals of the Phenomenological Theory of Nonlinear Fracture Mechanics", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4, pp. 1042-1051, 1983.
 10. Saxena, A., *Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers*, CRC Press, 1998.
 11. Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, No. 6, pp. 773-781, 1976.
 12. Madenci, E. and Oterkus, E., *Introduction in Peridynamic Theory and Its Applications*, Springer, pp. 1-17, 2014.
 13. Li, S., Lu, H., Jin, Y., Sun, P., Huang, X., and Bie, Z., "An Improved Unibond Dual-Parameter Peridynamic Model for Fracture Analysis of Quasi-Brittle Materials", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 204, p. 106571, 2021.
 14. Krajcinovic, D., *Damage Mechanics*, Elsevier, 1996.
 15. O'Mara, W., Herring, R. B., and Hunt, L. P., *Handbook of Semiconductor Silicon Technology*, Crest Publishing House, 2007.
 16. Kadau, K., Germann, T. C., and Lomdahl, P. S., "Molecular Dynamics Comes of Age: 320 Billion Atom Simulation on BlueGene/L", *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 17, No. 12, pp. 1755-1761, 2006.
 17. Silling, S. A., "Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, No. 1, pp. 175-209, 2000.
 18. Ha, Y. D. and Bobaru, F., "Studies of Dynamic Crack Propagation and Crack Branching with Peridynamics", *International Journal of Fracture*, Vol. 162, No. 1, pp. 229-244, 2010.
 19. Yang, D., He, X., Zhu, J., and Bie, Z., "A Novel Damage Model in the Peridynamics-Based Cohesive Zone Method (PD-CZM) for Mixed Mode Fracture with Its Implicit Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 377, p. 113721, 2021.
 20. Diehl, P., Prudhomme, S., and Lévesque, M., "A Review of Benchmark Experiments for the Validation of Peridynamics Models", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 1, No. 1, pp. 14-35, 2019.
 21. Mossaiby, F., Sheikhabaei, P., and Shojaei, A., "Multi-Adaptive Coupling of Finite Element Meshes with Peridynamic Grids: Robust Implementation and Potential Applications", *Engineering with Computers*, 2022, <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01656-z>.
 22. Shojaei, A., Hermann, A., Cyron, C. J., Seleson, P., and Silling, S. A., "A Hybrid Meshfree Discretization to Improve the Numerical Performance of Peridynamic Models", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 391, p. 114544, 2022.
 23. Oterkus, E., "Peridynamics: Past, Present and Future", *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2384, No. 1, p. 020001, 2021.
 24. Javili, A., Morasata, R., Oterkus, E., and Oterkus, S., "Peridynamics Review", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 24, No. 11, pp. 3714-3739, 2019.
 25. Askari, E., Bobaru, F., Lehoucq, R., Parks, M., Silling, S., and Weckner, O., "Peridynamics for Multiscale Materials Modeling", *Journal of Physics: Conference Series*, Washington, USA, Vol. 125, No. 1, p. 012078, 2008.
 26. Liu, X., He, X., Wang, J., Sun, L., and Oterkus, E., "An Ordinary State-Based Peridynamic Model for the Fracture of Zigzag Graphene Sheets", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 474, No. 2217, p. 20180019, 2018.
 27. Jha, P. K. and Lipton, R., "Numerical Convergence of Nonlinear Nonlocal Continuum Models to Local Elastodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 114, No. 13, pp. 1389-1410, 2018.
 28. Silling, S. A., Epton, M., Weckner, O., Xu, J., and Askari, E., "Peridynamic States and Constitutive Modeling", *Journal of Elasticity*, Vol. 88, No. 2, pp. 151-184, 2007.
 29. Asgari, M. and Kouchakzadeh, M. A., "An Equivalent Von Mises Stress and Corresponding Equivalent Plastic Strain for Elastic-Plastic Ordinary Peridynamics", *Meccanica*, Vol. 54, No. 7, pp. 1001-1014, 2019.

30. Liu, S., Fang, G., Liang, J., and Lv, D., "A Coupling Model of XFEM/Peridynamics for 2D Dynamic Crack Propagation and Branching Problems", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 108, p. 102573, 2020.
31. Mossaiby, F., Shojaei, A., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "OpenCL Implementation of a High Performance 3D Peridynamic Model on Graphics Accelerators", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, No. 8, pp. 1856-1870, 2017.
32. Ladányi, G. and Gonda, V., "Review of Peridynamics: Theory, Applications, and Future Perspectives", *Strojniski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 67, No. 12, 2021.
33. Bobaru, F., Foster, J. T., Geubelle, P. H., and Silling, S. A., *Handbook of Peridynamic Modeling*, Taylor & Francis, 2015.
34. Huang, D., Lu, G., and Qiao, P., "An Improved Peridynamic Approach for Quasi-Static Elastic Deformation and Brittle Fracture Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 94, pp. 111-122, 2015.
35. Gerstle, W., Sau, N., and Silling, S., "Peridynamic Modeling of Concrete Structures", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 237, No. 12-13, pp. 1250-1258, 2007.
36. Gerstle, W., Sau, N., and Aguilera, E., "Micropolar Peridynamic Modeling of Concrete Structures", *Proceedings of the 6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Lviv, Ukraine, 2007.
37. Xu, C., Yuan, Y., Zhang, Y., and Xue, Y., "Peridynamic Modeling of Prefabricated Beams Post-Cast with Steel Fiber Reinforced High-Strength Concrete", *Structural Concrete*, Vol. 22, No. 1, pp. 445-456, 2021.
38. Diana, V. and Carvelli, V., "An Electromechanical Micropolar Peridynamic Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 365, p. 112998, 2020.
39. Diana, V., Labuz, J. F., and Biolzi, L., "Simulating Fracture in Rock Using a Micropolar Peridynamic Formulation", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 230, p. 106985, 2020.
40. Yan, X., Guo, L., and Li, W., "Improved Timoshenko Beam-Based Micropolar Peridynamic Method Incorporating Particle Geometry", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 254, p. 107909, 2021.
41. Diana, V. and Casolo, S., "A Bond-Based Micropolar Peridynamic Model with Shear Deformability: Elasticity, Failure Properties and Initial Yield Domains", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 160, pp. 201-231, 2019.
42. Liu, W. and Hong, J. W., "Discretized Peridynamics for Linear Elastic Solids", *Computational Mechanics*, Vol. 50, No. 5, pp. 579-590, 2012.
43. Prakash, N. and Seidel, G. D., "A Novel Two-Parameter Linear Elastic Constitutive Model for Bond Based Peridynamics", *56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Kissimmee, Florida, p. 0461, 2015.
44. Wang, Y., Zhou, X., Wang, Y., and Shou, Y., "A 3-D Conjugated Bond-Pair-Based Peridynamic Formulation for Initiation and Propagation of Cracks in Brittle Solids", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 134, pp. 89-115, 2018.
45. Wang, Y., Zhou, X., and Shou, Y., "The Modeling of Crack Propagation and Coalescence in Rocks under Uniaxial Compression Using the Novel Conjugated Bond-Based Peridynamics", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 128, pp. 614-643, 2017.
46. Wang, Y., Zhou, X., and Kou, M., "Three-Dimensional Numerical Study on the Failure Characteristics of Intermittent Fissures under Compressive-Shear Loads", *Acta Geotechnica*, Vol. 14, No. 4, pp. 1161-1193, 2019.
47. Gu, X. and Zhang, Q., "A Modified Conjugated Bond-Based Peridynamic Analysis for Impact Failure of Concrete Gravity Dam", *Meccanica*, Vol. 55, No. 3, pp. 547-566, 2020.
48. Zhou, X. and Yu, X., "A Vector Form Conjugated-Shear Bond-Based Peridynamic Model for Crack Initiation and Propagation in Linear Elastic Solids", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 256, p. 107944, 2021.
49. Zhou, X. and Shou, Y., "Numerical Simulation of Failure of Rock-Like Material Subjected to Compressive Loads Using Improved Peridynamic Method", *International Journal of Geomechanics*, Vol. 17, No. 3, p. 04016086, 2017.
50. Zhu, Q. and Ni, T., "Peridynamic Formulations Enriched with Bond Rotation Effects", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 121, pp. 118-129, 2017.
51. Zhou, X., Wang, Y., Shou, Y., and Kou, M., "A Novel Conjugated Bond Linear Elastic Model in Bond-Based Peridynamics for Fracture Problems under Dynamic Loads", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 188, pp. 151-183, 2018.
52. Chen, Z., Wan, J., Chu, X., and Liu, H., "Two Cosserat Peridynamic Models and Numerical Simulation of Crack Propagation", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 211, pp. 341-361, 2019.
53. Chen, Z. and Chu, X., "Numerical Fracture Analysis of Fiber-Reinforced Concrete by Using the Cosserat Peridynamic Model", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 4, No. 1, pp. 88-111, 2022.
54. Zheng, G., Shen, G., Xia, Y., and Hu, P., "A Bond-Based Peridynamic Model Considering Effects of Particle Rotation and Shear Influence Coefficient", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 121, No. 1, pp. 93-109,

- 2020.
55. Madenci, E., Barut, A., and Phan, N., "Bond-Based Peridynamics with Stretch and Rotation Kinematics for Opening and Shearing Modes of Fracture", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 3, No. 3, pp. 211-254, 2021.
 56. Chen, Z., Wan, J., Xiu, C., Chu, X., and Guo, X., "A Bond-Based Correspondence Model and Its Application in Dynamic Plastic Fracture Analysis for Quasi-Brittle Materials", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 113, p. 102941, 2021.
 57. Zhou, X. and Tian, D., "A Novel Linear Elastic Constitutive Model for Continuum-Kinematics-Inspired Peridynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 373, p. 113479, 2021.
 58. Tian, D. and Zhou, X., "A Continuum-Kinematics-Inspired Peridynamic Model of Anisotropic Continua: Elasticity, Damage, and Fracture", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 199, p. 106413, 2021.
 59. Zhou, X. and Ma, J., "A Novel Peridynamic Model Enriched with the Rotation Effects of Material Points", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 134, pp. 591-611, 2022.
 60. Masoumi, A., Ravandi, M., and Salehi, M., "A Modified Bond-Based Peridynamics Model Without Limitations on Elastic Properties", *arXiv*, 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.01266>
 61. Ekiz, E. and Javili, A., "The Variational Explanation of Poisson's Ratio in Bond-Based Peridynamics and Extension to Nonlinear Poisson's Ratio", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 2021, <https://doi.org/10.1007/s42102-021-00068-9>.
 62. Han, D., Zhang, Y., Wang, Q., Lu, W., and Jia, B., "The Review of the Bond-Based Peridynamics Modeling", *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*, Vol. 4, No. 01, p. 1830001, 2019.
 63. Silling, S. A. and Lehoucq, R. B., "Peridynamic Theory of Solid Mechanics", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 44, pp. 73-168, 2010.
 64. Fang, G., Liu, S., Liang, J., Fu, M., Wang, B., and Meng, S., "A Stable Non-Ordinary State-Based Peridynamic Model for Laminated Composite Materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 122, No. 2, pp. 403-430, 2021.
 65. Javaheri, I., Luo, J., Lakshmanan, A., and Sundararaghavan, V., "Higher-Order Approximations for Stabilizing Zero-Energy Modes in Non-Ordinary State-Based Peridynamics Models", *AIAA Journal*, Vol. 60, No. 8, pp. 4906-4922, 2022.
 66. Li, P., Hao, Z., and Zhen, W., "A Stabilized Non-Ordinary State-Based Peridynamic Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 339, pp. 262-280, 2018.
 67. Luo, J. and Sundararaghavan, V., "Stress-Point Method for Stabilizing Zero-Energy Modes in Non-Ordinary State-Based Peridynamics", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 150, pp. 197-207, 2018.
 68. Madenci, E. and Dördüncü, M., "Non-Ordinary State-Based Peridynamics Free of Zero Energy Modes", *15th U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM15)*, Texas, United States Of America, 2019.
 69. Yaghoobi, A. and Chorzepa, M. G., "Higher-Order Approximation to Suppress the Zero-Energy Mode in Non-Ordinary State-Based Peridynamics", *Computers & Structures*, Vol. 188, pp. 63-79, 2017.
 70. Wan, J., Chen, Z., Chu, X., and Liu, H., "Improved Method for Zero-Energy Mode Suppression in Peridynamic Correspondence Model", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 35, No. 5, pp. 1021-1032, 2019.
 71. Yu, K., Xin, X., and Lease, K. B., "A New Method of Adaptive Integration with Error Control for Bond-Based Peridynamics", *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, San Francisco, USA, Vol. 2, 2010.
 72. Gerstle, W., Sau, N., and Silling, S., "Peridynamic Modeling of Plain and Reinforced Concrete Structures", *18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 18)*, Beijing, China, 2005.
 73. Dayal, K. and Bhattacharya, K., "Kinetics of Phase Transformations in the Peridynamic Formulation of Continuum Mechanics", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 54, No. 9, pp. 1811-1842, 2006.
 74. Mikata, Y., "Analytical Solutions of Peristatic and Peridynamic Problems for a 1D Infinite Rod", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 21, pp. 2887-2897, 2012.
 75. Buryachenko, V. A., Wanji, C., and Shengqi, Y., "Effective Thermoelastic Properties of Heterogeneous Thermoperistatic Bar of Random Structure", *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 55-71, 2015.
 76. Kilic, B. and Madenci, E., "An Adaptive Dynamic Relaxation Method for Quasi-Static Simulations Using the Peridynamic Theory", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 53, No. 3, pp. 194-204, 2010.
 77. Rabczuk, T. and Ren, H., "A Peridynamics Formulation for Quasi-Static Fracture and Contact in Rock", *Engineering Geology*, Vol. 225, pp. 42-48, 2017.
 78. Rädcl, M., Willberg, C., and Krause, D., "Peridynamic Analysis of Fibre-Matrix Debond and Matrix Failure Mechanisms in Composites under Transverse Tensile Load by an Energy-Based Damage Criterion", *Composites Part B: Engineering*,

- Vol. 158, pp. 18-27, 2019.
79. Prakash, N. and Stewart, R. J., "A Multi-Threaded Method to Assemble a Sparse Stiffness Matrix for Quasi-Static Solutions of Linearized Bond-Based Peridynamics", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 3, No. 2, pp. 113-147, 2021.
 80. Littlewood, D. J., *Roadmap for Peridynamic Software Implementation*, Sandia National Lab., 2015.
 81. Zaccariotto, M., Luongo, F., and Galvanetto, U., "Examples of Applications of the Peridynamic Theory to the Solution of Static Equilibrium Problems", *The Aeronautical Journal*, Vol. 119, No. 1216, pp. 677-700, 2015.
 82. Pashazad, H. and Kharazi, M., "A Peridynamic Plastic Model Based on Von Mises Criteria with Isotropic, Kinematic and Mixed Hardenings under Cyclic Loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 156, pp. 182-204, 2019.
 83. Crisfield, M., "Snap-Through and Snap-Back Response in Concrete Structures and the Dangers of under-Integration", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, No. 3, pp. 751-767, 1986.
 84. Ni, T., Zaccariotto, M., Zhu, Q., and Galvanetto, U., "Static Solution of Crack Propagation Problems in Peridynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 346, pp. 126-151, 2019.
 85. Dipasquale, D., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "Crack Propagation with Adaptive Grid Refinement in 2D Peridynamics", *International Journal of Fracture*, Vol. 190, No. 1, pp. 1-22, 2014.
 86. Bobaru, F., Yang, M., Alves, L. F., Silling, S. A., Askari, E., and Xu, J., "Convergence, Adaptive Refinement, and Scaling in 1D Peridynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 77, No. 6, pp. 852-877, 2009.
 87. Shojaei, A., Mossaiby, F., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "An Adaptive Multi-Grid Peridynamic Method for Dynamic Fracture Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 144, pp. 600-617, 2018.
 88. Silling, S., Littlewood, D., and Seleson, P., "Variable Horizon in a Peridynamic Medium", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 10, No. 5, pp. 591-612, 2015.
 89. Zaccariotto, M., Shojaei, A., and Galvanetto, U., "Coupling of CCM and PD in a Meshless Way", in *Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications*, Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials, pp. 113-138, 2021.
 90. Hermann, A., Shojaei, A., Steglich, D., Höche, D., Zeller-Plumhoff, B., and Cyron, C. J., "Combining Peridynamic and Finite Element Simulations to Capture the Corrosion of Degradable Bone Implants and to Predict Their Residual Strength", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 220, p. 107143, 2022.
 91. Gu, X., Zhang, Q., and Xia, X., "Voronoi-Based Peridynamics and Cracking Analysis with Adaptive Refinement", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 112, No. 13, pp. 2087-2109, 2017.
 92. Ren, H., Zhuang, X., Cai, Y., and Rabczuk, T., "Dual-Horizon Peridynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 108, No. 12, pp. 1451-1476, 2016.
 93. Ren, H., Zhuang, X., and Rabczuk, T., "Dual-Horizon Peridynamics: A Stable Solution to Varying Horizons", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 318, pp. 762-782, 2017.
 94. Liu, W. and Hong, J. W., "A Coupling Approach of Discretized Peridynamics with Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 245, pp. 163-175, 2012.
 95. Madenci, E. and Oterkus, E., "Coupling of the Peridynamic Theory and Finite Element Method", in *Peridynamic Theory and Its Applications*, Springer, pp. 191-202, 2014.
 96. Lee, J., Oh, S. E., and Hong, J. W., "Parallel Programming of a Peridynamics Code Coupled with Finite Element Method", *International Journal of Fracture*, Vol. 203, No. 1, pp. 99-114, 2017.
 97. Galvanetto, U., Mudric, T., Shojaei, A., and Zaccariotto, M., "An Effective Way to Couple FEM Meshes and Peridynamics Grids for the Solution of Static Equilibrium Problems", *Mechanics Research Communications*, Vol. 76, pp. 41-47, 2016.
 98. Zaccariotto, M., Tomasi, D., and Galvanetto, U., "An Enhanced Coupling of PD Grids to FE Meshes", *Mechanics Research Communications*, Vol. 84, pp. 125-135, 2017.
 99. Wildman, R. A., O'Grady, J. T., and Gazonas, G. A., "A Hybrid Multiscale Finite Element/Peridynamics Method", *International Journal of Fracture*, Vol. 207, No. 1, pp. 41-53, 2017.
 100. Yaghoobi, A. and Chorzepa, M. G., "Formulation of Symmetry Boundary Modeling in Non-Ordinary State-Based Peridynamics and Coupling with Finite Element Analysis", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 23, No. 8, pp. 1156-1176, 2018.
 101. Madenci, E., Barut, A., Dorduncu, M., and Phan, N. D., "Coupling of Peridynamics with Finite Elements without an Overlap Zone", *AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Kissimmee, Florida, USA, p. 1462, 2018.
 102. Li, H., Zhang, H., Zheng, Y., Ye, H., and Lu, M., "An Implicit Coupling Finite Element and Peridynamic Method for Dynamic Problems of Solid Mechanics with Crack Propagation", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol.

- 10, No. 04, p. 1850037, 2018.
103. Zaccariotto, M., Mudric, T., Tomasi, D., Shojaei, A., and Galvanetto, U., "Coupling of FEM Meshes with Peridynamic Grids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 330, pp. 471-497, 2018.
104. Bie, Y., Cui, X., and Li, Z., "A Coupling Approach of State-Based Peridynamics with Node-Based Smoothed Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 331, pp. 675-700, 2018.
105. Giannakeas, I. N., Papanthasiou, T. K., and Bahai, H., "Wave Reflection and Cut-Off Frequencies in Coupled FE-Peridynamic Grids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 120, No. 1, pp. 29-55, 2019.
106. Ni, T., Zaccariotto, M., Zhu, Q., and Galvanetto, U., "Coupling of FEM and Ordinary State-Based Peridynamics for Brittle Failure Analysis in 3D", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 28, No. 9, pp. 875-890, 2021.
107. Kulkarni, S. S., Tabarraei, A., and Wang, X., "Study of Spurious Wave Reflection at the Interface of Peridynamics and Finite Element Regions", *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Vol. 52149, p. V009T12A054, 2018.
108. Sun, W. and Fish, J., "Superposition-Based Coupling of Peridynamics and Finite Element Method", *Computational Mechanics*, Vol. 64, No. 1, pp. 231-248, 2019.
109. Zhang, H., Li, H., Ye, H., Zheng, Y., and Zhang, Y., "A Coupling Extended Multiscale Finite Element and Peridynamic Method for Modeling of Crack Propagation in Solids", *Acta Mechanica*, Vol. 230, No. 10, pp. 3667-3692, 2019.
110. Fang, G., Liu, S., Fu, M., Wang, B., Wu, Z., and Liang, J., "A Method to Couple State-Based Peridynamics and Finite Element Method for Crack Propagation Problem", *Mechanics Research Communications*, Vol. 95, pp. 89-95, 2019.
111. Wang, X., Kulkarni, S. S., and Tabarraei, A., "Seamless Coupling of Peridynamics and Finite Element Method in Commercial Software of Finite Element to Solve Elasto-Dynamics Problems", *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Salt Lake City, Utah, USA, vol. 59469, p. V009T11A043, 2019.
112. Pagani, A. and Carrera, E., "Coupling Three-Dimensional Peridynamics and High-Order One-Dimensional Finite Elements Based on Local Elasticity for the Linear Static Analysis of Solid Beams and Thin-Walled Reinforced Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 121, No. 22, pp. 5066-5081, 2020.
113. Sun, W., Fish, J., and Zhang, G., "Superposition of Non-Ordinary State-Based Peridynamics and Finite Element Method for Material Failure Simulations", *Meccanica*, Vol. 55, No. 4, pp. 681-699, 2020.
114. Yang, D., He, X., Yi, S., Deng, Y., and Liu, X., "Coupling of Peridynamics with Finite Elements for Brittle Crack Propagation Problems", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 107, p. 102505, 2020.
115. Dong, Y., Su, C., and Qiao, P., "A Stability-Enhanced Peridynamic Element to Couple Non-Ordinary State-Based Peridynamics with Finite Element Method for Fracture Analysis", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 181, p. 103480, 2020.
116. Liu, Q., Xin, X., and Ma, J., "Coupled Peridynamics Least Square Minimization with Finite Element Method in 3D and Implicit Solutions with Message Passing Interface", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 2021, <https://doi.org/10.1007/s42102-021-00060-3>.
117. Liu, Q. and Xin, X., "Revised Non-Ordinary State-Based Peridynamics and a New Framework for Coupling with Finite Element Method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 242, p. 107483, 2021.
118. D'Elia, M., Littlewood, D., Trageser, J., Perego, M., and Bochev, P., *An Optimization-Based Strategy for Peridynamic-FEM Coupling and for the Prescription of Nonlocal Boundary Conditions*, Sandia National Lab, 2021.
119. Liu, S., Fang, G., Liang, J., and Fu, M., "A Coupling Method of Non-Ordinary State-Based Peridynamics and Finite Element Method", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 85, p. 104075, 2021.
120. Pagani, A., Enea, M., and Carrera, E., "Quasi-Static Fracture Analysis by Coupled Three-Dimensional Peridynamics and High Order One-Dimensional Finite Elements Based on Local Elasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 123, No. 4, pp. 1098-1113, 2022.
121. Jin, S., Hwang, Y. K., and Hong, J. W., "Coupling of Non-Ordinary State-Based Peridynamics and Finite Element Method with Reduced Boundary Effect", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 122, No. 16, pp. 4033-4054, 2021.
122. Kefal, A., Diyaroglu, C., Yildiz, M., and Oterkus, E., "Coupling of Peridynamics and Inverse Finite Element Method for Shape Sensing and Crack Propagation Monitoring of Plate Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 391, p. 114520, 2022.
123. Zhang, Y., Madenci, E., and Zhang, Q., "ANSYS Implementation of a Coupled 3D Peridynamic and Finite Element Analysis for Crack Propagation under Quasi-Static Loading", *Engineering Fracture*

- Mechanics*, Vol. 260, p. 108179, 2022.
124. Sun, B., Sun, T., Shen, W., Wang, L., Zhang, F., and Ou, J., "An Efficient Coupling of Peridynamics with the Finite Element Method for Simulating Elastic Cracking", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 269, p. 108538, 2022.
 125. Madenci, E., Roy, P., and Behera, D., "Coupling of Bond-Based Peridynamics with Finite Elements in ANSYS", in *Advances in Peridynamics*, Springer, pp. 351-398, 2022.
 126. Shen, F., Yu, Y., Zhang, Q., and Gu, X., "Hybrid Model of Peridynamics and Finite Element Method for Static Elastic Deformation and Brittle Fracture Analysis", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 113, pp. 17-25, 2020.
 127. Ha, Y. D., Lee, J., and Hong, J., "Fracturing Patterns of Rock-Like Materials in Compression Captured with Peridynamics", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 144, pp. 176-193, 2015.
 128. Giannakeas, I. N., Papathanasiou, T. K., Fallah, A. S., and Bahai, H., "Coupling XFEM and Peridynamics for Brittle Fracture Simulation—Part I: Feasibility and Effectiveness", *Computational Mechanics*, Vol. 66, No. 1, pp. 103-122, 2020.
 129. Giannakeas, I. N., Papathanasiou, T. K., Fallah, A. S., and Bahai, H., "Coupling XFEM and Peridynamics for Brittle Fracture Simulation: Part II—Adaptive Relocation Strategy", *Computational Mechanics*, Vol. 66, No. 3, pp. 683-705, 2020.
 130. Chen, B., Yu, T., Natarajan, S., Zhang, Q., and Bui, T. Q., "Three-Dimensional Dynamic and Quasi-Static Crack Growth by a Hybrid XFEM-Peridynamics Approach", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 261, p. 108205, 2022.
 131. Lubineau, G., Azdoud, Y., Han, F., Rey, C., and Askari, A., "A Morphing Strategy to Couple Non-Local to Local Continuum Mechanics", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 60, No. 6, pp. 1088-1102, 2012.
 132. Seleson, P., Beneddine, S., and Prudhomme, S., "A Force-Based Coupling Scheme for Peridynamics and Classical Elasticity", *Computational Materials Science*, Vol. 66, pp. 34-49, 2013.
 133. Shojaei, A., Mudric, T., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "A Coupled Meshless Finite Point/Peridynamic Method for 2D Dynamic Fracture Analysis", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 119, pp. 419-431, 2016.
 134. Wang, X., Kulkarni, S. S., and Tabarraei, A., "Concurrent Coupling of Peridynamics and Classical Elasticity for Elastodynamic Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 344, pp. 251-275, 2019.
 135. Yu, Y., Bargas, F. F., You, H., Parks, M. L., Bittencourt, M. L., and Karniadakis, G. E., "A Partitioned Coupling Framework for Peridynamics and Classical Theory: Analysis and Simulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 340, pp. 905-931, 2018.
 136. Han, F., Lubineau, G., Azdoud, Y., and Askari, A., "A Morphing Approach to Couple State-Based Peridynamics with Classical Continuum Mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 301, pp. 336-358, 2016.
 137. Bie, Y., Li, S., Hu, X., and Cui, X., "An Implicit Dual-Based Approach to Couple Peridynamics with Classical Continuum Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 120, No. 12, pp. 1349-1379, 2019.
 138. Ongaro, G., Seleson, P., Galvanetto, U., Ni, T., and Zaccariotto, M., "Overall Equilibrium in the Coupling of Peridynamics and Classical Continuum Mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 381, p. 113515, 2021.
 139. Jiang, F. and Shen, Y., "A Quasi-Nonlocal Coupling Method for Bond-Based Peridynamics with Classical Continuum Mechanics", *Engineering Computations*, Vol. 39, No. 2, pp. 554-573, 2021.
 140. Seleson, P., Ha, Y. D., and Beneddine, S., "Concurrent Coupling of Bond-Based Peridynamics and the Navier Equation of Classical Elasticity by Blending", *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 91-113, 2015.
 141. Diehl, P. and Prudhomme, S., "Coupling Approaches for Classical Linear Elasticity and Bond-Based Peridynamic Models", *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 4, pp. 336-366, 2022.
 142. Ni, T., Pesavento, F., Zaccariotto, M., Galvanetto, U., and Schrefler, B. A., "Numerical Simulation of Forerunning Fracture in Saturated Porous Solids with Hybrid FEM/Peridynamic Model", *Computers and Geotechnics*, Vol. 133, p. 104024, 2021.
 143. Jiang, F., Shen, Y., and Cheng, J., "An Energy-Based Ghost-Force-Free Multivariate Coupling Scheme for Bond-Based Peridynamics and Classical Continuum Mechanics", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 240, p. 107316, 2020.
 144. Tong, Y., Shen, W., and Shao, J., "An Adaptive Coupling Method of State-Based Peridynamics Theory and Finite Element Method for Modeling Progressive Failure Process in Cohesive Materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 370, p. 113248, 2020.
 145. Oñate, E., Perazzo, F., and Miquel, J., "A Finite Point Method for Elasticity Problems", *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 22-25, pp. 2151-2163, 2001.
 146. Liu, G., *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2009.
 147. Mossaiby, F., Shojaei, A., Boroomand, B.,

- Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "Local Dirichlet-Type Absorbing Boundary Conditions for Transient Elastic Wave Propagation Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 362, p. 112856, 2020.
148. Lee, S. and Ha, Y. D., "MPI-OpenMP Hybrid Parallelization for Multibody Peridynamic Simulations", *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 33, No. 3, pp. 171-178, 2020.
149. Fan, H. and Li, S., "Parallel Peridynamics-SPH Simulation of Explosion Induced Soil Fragmentation by Using OpenMP", *Computational Particle Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 199-211, 2017.
150. Ha, Y. D., "An Extended Ghost Interlayer Model in Peridynamic Theory for High-Velocity Impact Fracture of Laminated Glass Structures", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 80, No. 5, pp. 744-761, 2020.
151. Boys, B., Dodwell, T. J., Hobbs, M., and Girolami, M., "PeriPy - a High Performance OpenCL Peridynamics Package", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 386, p. 114085, 2021.
152. Trevett, N., *OpenCL Introduction*, Khronos Group, 2013.
153. Li, J., Zhao, J., Xu, F., and Liu, Y., "Accelerating Peridynamics Program Using GPU with CUDA and OpenACC", *The 8th International Conference on Computational Methods (ICCM2017)*, Guangxi, China, 2017.
154. Wang, X., Wang, Q., An, B., He, Q., Wang, P., and Wu, J., "A GPU Parallel Scheme for Accelerating 2D and 3D Peridynamics Models", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 121, p. 103458, 2022.
155. Madenci, E., Barut, A., and Futch, M., "Peridynamic Differential Operator and Its Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 304, pp. 408-451, 2016.
156. Madenci, E., Dorduncu, M., Barut, A., and Futch, M., "Numerical Solution of Linear and Nonlinear Partial Differential Equations Using the Peridynamic Differential Operator", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 33, No. 5, pp. 1726-1753, 2017.
157. Behera, D., Ganapol, B., and Madenci, E., "Solution of the Neutron Diffusion Equation with the Peridynamic Differential Operator", *International Conference on Physics of Reactors: Reactor Physics Paving the Way Towards More Efficient Systems*, PHYSOR Cancun, Mexico, pp. 1585-1595, 2018.
158. Gao, Y. and Oterkus, S., "Fluid-Elastic Structure Interaction Simulation by Using Ordinary State-Based Peridynamics and Peridynamic Differential Operator", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 121, pp. 126-142, 2020.
159. Bazazzadeh, S., Shojaei, A., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., "Application of the Peridynamic Differential Operator to the Solution of Sloshing Problems in Tanks", *Engineering Computations*, Vol. 36, No. 1, pp. 45-83, 2018.
160. Gao, Y. and Oterkus, S., "Nonlocal Numerical Simulation of Low Reynolds Number Laminar Fluid Motion by Using Peridynamic Differential Operator", *Ocean Engineering*, Vol. 179, pp. 135-158, 2019.
161. Gao, Y. and Oterkus, S., "Non-Local Modeling for Fluid Flow Coupled with Heat Transfer by Using Peridynamic Differential Operator", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 105, pp. 104-121, 2019.
162. Chang, H., Chen, A., Kareem, A., Hu, L., and Ma, R., "Peridynamic Differential Operator-Based Eulerian Particle Method for 2D Internal Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 392, p. 114568, 2022.
163. Nguyen, C. T., Oterkus, S., Oterkus, E., Amin, I., Ozdemir, M., El-Aassar, A., and Shawky, H., "Modelling of Eulerian Incompressible Fluid Flows by Using Peridynamic Differential Operator", *Ocean Engineering*, Vol. 239, p. 109815, 2021.
164. Gao, Y. and Oterkus, S., "Multi-Phase Fluid Flow Simulation by Using Peridynamic Differential Operator", *Ocean Engineering*, Vol. 216, p. 108081, 2020.
165. Shojaei, A., Galvanetto, U., Rabczuk, T., Jenabi, A., and Zaccariotto, M., "A Generalized Finite Difference Method Based on the Peridynamic Differential Operator for the Solution of Problems in Bounded and Unbounded Domains", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 343, pp. 100-126, 2019.
166. Li, Z., Huang, D., Xu, Y., and Yan, K., "Nonlocal Steady-State Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Materials by Using Peridynamic Differential Operator", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 93, pp. 294-313, 2021.
167. Dorduncu, M. and Apalak, M. K., "Elastic Flexural Analysis of Adhesively Bonded Similar and Dissimilar Beams Using Refined Zigzag Theory and Peridynamic Differential Operator", *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 101, p. 102631, 2020.
168. Li, Z., Huang, D., Yan, K., and Xu, Y., "Large Deformation Analysis of Functionally Graded Beam with Variable Cross-Section by Using Peridynamic Differential Operator", *Composite Structures*, Vol. 279, p. 114788, 2022.
169. Wan, J., Yang, D., Chu, X., and Qu, W., "A Micropolar Peridynamic Differential Operator and

- Simulation of Crack Propagation”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 269, p. 108532, 2022.
170. Dorduncu, M., Kutlu, A., Madenci, E., and Rabczuk, T., “Nonlocal Modeling of Bi-Material and Modulus Graded Plates Using Peridynamic Differential Operator”, *Engineering with Computers*, 2022, <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01699-2>.
 171. Haghghat, E., Bekar, A. C., Madenci, E., and Juanes, R., “A Nonlocal Physics-Informed Deep Learning Framework Using the Peridynamic Differential Operator”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 385, p. 114012, 2021.
 172. Bekar, A. C., Madenci, E., and Haghghat, E., “On the Solution of Hyperbolic Equations Using the Peridynamic Differential Operator”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 391, p. 114574, 2022.
 173. Madenci, E., Barut, A., and Dorduncu, M., *Peridynamic Differential Operator for Numerical Analysis*, Springer, 2019.
 174. Hosseini, V. R. and Zou, W., “The Peridynamic Differential Operator for Solving Time-Fractional Partial Differential Equations”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 109, pp. 1823–1850, 2022.
 175. Dorduncu, M., “Stress Analysis of Laminated Composite Beams Using Refined Zigzag Theory and Peridynamic Differential Operator”, *Composite Structures*, Vol. 218, pp. 193-203, 2019.
 176. Dorduncu, M., “Stress Analysis of Sandwich Plates with Functionally Graded Cores Using Peridynamic Differential Operator and Refined Zigzag Theory”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 146, p. 106468, 2020.
 177. Liu, F., Hu, Y. m., Feng, G. q., Zhao, W. d., and Ren, H. l., “Study on Elastoplastic Analysis of Metal Plate Based on Peridynamic Differential Operator”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 180, p. 109836, 2022.
 178. Warren, T. L., Silling, S. A., Askari, A., Weckner, O., Epton, M. A., and Xu, J., “A Non-Ordinary State-Based Peridynamic Method to Model Solid Material Deformation and Fracture”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 5, pp. 1186-1195, 2009.
 179. Silling, S. A. and Lehoucq, R. B., “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory”, *Journal of Elasticity*, Vol. 93, No. 1, pp. 13-37, 2008.
 180. Lehoucq, R. B. and Silling, S. A., “Force Flux and the Peridynamic Stress Tensor”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 4, pp. 1566-1577, 2008.
 181. Li, J., Li, S., Lai, X., and Liu, L., “Peridynamic Stress Is the Static First Piola–Kirchhoff Virial Stress”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 241, p. 111478, 2022.
 182. Fallah, A. S., Giannakeas, I. N., Mella, R., Wenman, M. R., Safa, Y., and Bahai, H., “On the Computational Derivation of Bond-Based Peridynamic Stress Tensor”, *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 2, No. 4, pp. 352-378, 2020.
 183. Macek, R. W. and Silling, S. A., “Peridynamics Via Finite Element Analysis”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 43, No. 15, pp. 1169-1178, 2007.
 184. Bie, Y., Liu, Z., Yang, H., and Cui, X., “Abaqus Implementation of Dual Peridynamics for Brittle Fracture”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 372, p. 113398, 2020.
 185. Huang, X., Bie, Z., Wang, L., Jin, Y., Liu, X., Su, G., and He, X., “Finite Element Method of Bond-Based Peridynamics and Its Abaqus Implementation”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 206, pp. 408-426, 2019.
 186. Beckmann, R., Mella, R., and Wenman, M., “Mesh and Timestep Sensitivity of Fracture from Thermal Strains Using Peridynamics Implemented in Abaqus”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 263, pp. 71-80, 2013.
 187. Zhang, Y. and Madenci, E., “A Coupled Peridynamic and Finite Element Approach in ANSYS Framework for Fatigue Life Prediction Based on the Kinetic Theory of Fracture”, *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, Vol. 4, No. 1, pp. 51-87, 2022.
 188. Han, S., Diyaroglu, C., Oterkus, S., Madenci, E., Oterkus, E., Hwang, Y., and Seol, H., “Peridynamic Direct Concentration Approach by Using ANSYS”, *IEEE 66th Electronic Components and Technology Conference (ECTC)*, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 544-549, 2016.
 189. Anicode, S. V. K. and Madenci, E., “Bond-and State-Based Peridynamic Analysis in a Commercial Finite Element Framework with Native Elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 398, p. 115208, 2022.
 190. Zhang, N., Gu, Q., Huang, S., Xue, X., and Li, S., “A Practical Bond-Based Peridynamic Modeling of Reinforced Concrete Structures”, *Engineering Structures*, Vol. 244, p. 112748, 2021.
 191. Kahraman, T., Yolum, U., and Guler, M. A., “Implementation of Peridynamic Theory to LS-DYNA for Prediction of Crack Propagation in a Composite Lamina”, *10th European LS-DYNA Conference*, Würzburg, Germany, 2015.
 192. Kilic, B. and Madenci, E., “Coupling of Peridynamic Theory and the Finite Element Method”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 5, No. 5, pp. 707-733, 2010.
 193. Oterkus, E., Madenci, E., Weckner, O., Silling, S., Bogert, P., and Tessler, A., “Combined Finite Element and Peridynamic Analyses for Predicting

- Failure in a Stiffened Composite Curved Panel with a Central Slot”, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 839-850, 2012.
194. Sun, Y., Chen, B., Edwards, M. G., and Li, C., “Investigation of Hydraulic Fracture Branching in Porous Media with a Hybrid Finite Element and Peridynamic Approach”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 116, p. 103133, 2021.
195. Ren, B., Fan, H., Bergel, G. L., Regueiro, R. A., Lai, X., and Li, S., “A Peridynamics–SPH Coupling Approach to Simulate Soil Fragmentation Induced by Shock Waves”, *Computational Mechanics*, Vol. 55, No. 2, pp. 287-302, 2015.
196. Fan, H., Bergel, G. L., and Li, S., “A Hybrid Peridynamics–SPH Simulation of Soil Fragmentation by Blast Loads of Buried Explosive”, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 87, pp. 14-27, 2016.
197. Fan, H. and Li, S., “A Peridynamics-SPH Modeling and Simulation of Blast Fragmentation of Soil under Buried Explosive Loads”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 318, pp. 349-381, 2017.
198. Rahimi, M. N., Kolukisa, D. C., Yildiz, M., Ozbulut, M., and Kefal, A., “A Generalized Hybrid Smoothed Particle Hydrodynamics–Peridynamics Algorithm with a Novel Lagrangian Mapping for Solution and Failure Analysis of Fluid–Structure Interaction Problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 389, p. 114370, 2022.
199. Tong, Q. and Li, S., “Multiscale Coupling of Molecular Dynamics and Peridynamics”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 95, pp. 169-187, 2016.
200. Shafiei, Z., Sarrami, S., Azhari, M., Galvanetto, U., and Zaccariotto, M., “A Coupled Peridynamic and Finite Strip Method for Analysis of in-Plane Behaviors of Plates with Discontinuities”, *Engineering with Computers*, 2022, <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01665-y>.
201. Yang, Y. and Liu, Y., “Modeling of Cracks in Two-Dimensional Elastic Bodies by Coupling the Boundary Element Method with Peridynamics”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 217, pp. 74-89, 2021.
202. Yang, Y. and Liu, Y., “Analysis of Dynamic Crack Propagation in Two-Dimensional Elastic Bodies by Coupling the Boundary Element Method and the Bond-Based Peridynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 399, p. 115339, 2022.
203. Han, F., Lubineau, G., and Azdoud, Y., “Adaptive Coupling between Damage Mechanics and Peridynamics: A Route for Objective Simulation of Material Degradation up to Complete Failure”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 94, pp. 453-472, 2016.
204. Shojaei, A., Zaccariotto, M., and Galvanetto, U., “Coupling of 2D Discretized Peridynamics with a Meshless Method Based on Classical Elasticity Using Switching of Nodal Behaviour”, *Engineering Computations*, Vol. 34, No. 5, pp. 1334-1366, 2017.
205. Diana, V. and Carvelli, V., “An Electromechanical Micropolar Peridynamic Model for Isotropic and Orthotropic Materials”, *14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) ECCOMAS Congress*, Paris, 2021.
206. Wildman, R. and Gazonas, G., “A Dynamic Electro-Thermo-Mechanical Model of Dielectric Breakdown in Solids Using Peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 10, No. 5, pp. 613-630, 2015.
207. Prakash, N. and Seidel, G. D., “Electromechanical Peridynamics Modeling of Piezoresistive Response of Carbon Nanotube Nanocomposites”, *Computational Materials Science*, Vol. 113, pp. 154-170, 2016.
208. Prakash, N. and Seidel, G. D., “Effects of Microscale Damage Evolution on Piezoresistive Sensing in Nanocomposite Bonded Explosives under Dynamic Loading Via Electromechanical Peridynamics”, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 26, No. 1, p. 015003, 2017.
209. Vieira, F. S. and Araújo, A. L., “Implicit Non-Ordinary State-Based Peridynamics Model for Linear Piezoelectricity”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1995798>.
210. Zeleke, M. A., Lai, X., and Liu, L., “A Peridynamic Computational Scheme for Thermoelectric Fields”, *Materials*, Vol. 13, No. 11, p. 2546, 2020.
211. Zeleke, M. A., Xin, L., and Liu, L. S., “Bond Based Peridynamic Formulation for Thermoelectric Materials”, *Materials Science Forum*, Vol. 883, pp. 51-59, 2017.
212. Ouchi, H., Katiyar, A., York, J., Foster, J. T., and Sharma, M. M., “A Fully Coupled Porous Flow and Geomechanics Model for Fluid Driven Cracks: A Peridynamics Approach”, *Computational Mechanics*, Vol. 55, No. 3, pp. 561-576, 2015.
213. Oterkus, S., Madenci, E., and Oterkus, E., “Fully Coupled Poroelastic Peridynamic Formulation for Fluid-Filled Fractures”, *Engineering Geology*, Vol. 225, pp. 19-28, 2017.
214. Celik, E., Guven, I., and Madenci, E., “Simulations of Nanowire Bend Tests for Extracting Mechanical Properties”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 3, pp. 185-191, 2011.
215. Guven, I. and Zelinski, B. J., “Peridynamic Modeling of Damage and Fracture in Em Windows and Domes”, *Window and Dome Technologies and Materials XIV*, San Diego, CA, vol. 9453, pp. 135-

- 144, 2015.
216. Oterkus, E., Diyaroglu, C., Zhu, N., Oterkus, S., and Madenci, E., "Utilization of Peridynamic Theory for Modeling at the Nano-Scale" in *Nanopackaging: From Nanomaterials to the Atomic Scale*, Springer, pp. 1-16, 2015.
217. Ahadi, A., Hansson, P., and Melin, S., "Indentation of Thin Copper Film Using Molecular Dynamics and Peridynamics", *Procedia Structural Integrity*, Vol. 2, pp. 1343-1350, 2016.
218. Yolum, U., Taştan, A., and Güler, M. A., "A Peridynamic Model for Ductile Fracture of Moderately Thick Plates", *Procedia Structural Integrity*, Vol. 2, pp. 3713-3720, 2016.
219. Ladányi, G. and Jenei, I., "Analysis of Plastic Peridynamic Material with Rbf Meshless Method", *Pollack Periodica*, Vol. 3, No. 3, pp. 65-77, 2008.
220. Mitchell, J. A., *A Nonlocal, Ordinary, State-Based Plasticity Model for Peridynamics*, Sandia National Laboratories (SNL), 2011.
221. Vogler, T. and Lammi, C. J., *A Nonlocal Peridynamic Plasticity Model for the Dynamic Flow and Fracture of Concrete*, Sandia National Lab., 2014.
222. Littlewood, D. J., "Simulation of Dynamic Fracture Using Peridynamics, Finite Element Modeling, and Contact", *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Vancouver, Canada, Vol. 44465, pp. 209-217, 2010.
223. Littlewood, D. J., "A Nonlocal Approach to Modeling Crack Nucleation in AA 7075-T651", *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Vol. 54945, pp. 567-576, 2011.
224. Tupek, M. R., Rimoli, J. J., and Radovitzky, R., "An Approach for Incorporating Classical Continuum Damage Models in State-Based Peridynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 263, pp. 20-26, 2013.
225. O'Grady, J. and Foster, J., "Peridynamic Beams: A Non-Ordinary, State-Based Model", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 18, pp. 3177-3183, 2014.
226. Sun, S. and Sundararaghavan, V., "A Peridynamic Implementation of Crystal Plasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 19-20, pp. 3350-3360, 2014.
227. Lai, X., Liu, L. S., Liu, Q. W., Cao, D. F., Wang, Z., and Zhai, P. C., "Slope Stability Analysis by Peridynamic Theory", *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 744, pp. 584-588, 2015.
228. Wu, C. and Ren, B., "A Stabilized Non-Ordinary State-Based Peridynamics for the Nonlocal Ductile Material Failure Analysis in Metal Machining Process", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 291, pp. 197-215, 2015.
229. Madenci, E. and Oterkus, S., "Ordinary State-Based Peridynamics for Plastic Deformation According to Von Mises Yield Criteria with Isotropic Hardening", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 86, pp. 192-219, 2016.
230. Ahmadi, M., Hosseini-Toudeshky, H., and Sadighi, M., "Peridynamic Micromechanical Modeling of Plastic Deformation and Progressive Damage Prediction in Dual-Phase Materials", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 235, p. 107179, 2020.
231. Lakshmanan, A., Luo, J., Javaheri, I., and Sundararaghavan, V., "Three-Dimensional Crystal Plasticity Simulations Using Peridynamics Theory and Experimental Comparison", *International Journal of Plasticity*, Vol. 142, p. 102991, 2021.
232. Mousavi, F., Jafarzadeh, S., and Bobaru, F., "An Ordinary State-Based Peridynamic Elastoplastic 2D Model Consistent with J2 Plasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 229, p. 111146, 2021.
233. Javaheri, I., Luo, J., Lakshmanan, A., and Sundararaghavan, V., *Higher-Order Approximations for Stabilizing Zero-Energy Modes in Peridynamics Crystal Plasticity Models with Large Horizon Interactions*, AIAA SciTech 2022 Forum, San Diego, CA, p. 0073, 2022.
234. Lai, X., Liu, L., Li, S., Zeleke, M., Liu, Q., and Wang, Z., "A Non-Ordinary State-Based Peridynamics Modeling of Fractures in Quasi-Brittle Materials", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 111, pp. 130-146, 2018.
235. Rahaman, M. M., Roy, P., Roy, D., and Reddy, J., "A Peridynamic Model for Plasticity: Micro-Inertia Based Flow Rule, Entropy Equivalence and Localization Residuals", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 327, pp. 369-391, 2017.
236. Zhou, X., Shou, Y., and Berto, F., "Analysis of the Plastic Zone near the Crack Tips under the Uniaxial Tension Using Ordinary State-Based Peridynamics", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 41, No. 5, pp. 1159-1170, 2018.
237. Chen, W., Zhu, F., Zhao, J., Li, S., and Wang, G., "Peridynamics-Based Fracture Animation for Elastoplastic Solids", *Computer Graphics Forum*, Vol. 37, No. 1, pp. 112-124, 2018.
238. Oterkus, S. and Madenci, E., "Modeling Inelasticity in Peridynamics" in *Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications*, Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials, pp. 205-221, 2021.
239. Javili, A., McBride, A., Mergheim, J., and Steinmann, P., "Towards Elasto-Plastic Continuum-Kinematics-Inspired Peridynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 380, p. 113809, 2021.
240. Madenci, E., Roy, P., and Behera, D., "Peridynamic

- Modeling of Elastoplastic Deformation”, in *Advances in Peridynamics*, Springer, pp. 185-199, 2022.
241. Li, W. J., You, T., Ni, T., Zhu, Q. Z., and Hien Poh, L., “The Extended Peridynamic Model for Elastoplastic and/or Fracture Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022, <https://doi.org/10.1002/nme.7060>.
242. Zhang, T. and Zhang, J., “Numerical Estimate of Critical Failure Surface of Slope by Ordinary State-Based Peridynamic Plastic Model”, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 140, p. 106556, 2022.
243. Zhou, X., Zhang, T., and Qian, H., “A Two-Dimensional Ordinary State-Based Peridynamic Model for Plastic Deformation Based on Drucker-Prager Criteria with Non-Associated Flow Rule”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 146, p. 104857, 2021.
244. Zhou, Z., Li, Z., Gao, C., Zhang, D., Wang, M., Wei, C., and Bai, S., “Peridynamic Micro-Elastoplastic Constitutive Model and Its Application in the Failure Analysis of Rock Masses”, *Computers and Geotechnics*, Vol. 132, p. 104037, 2021.
245. Zhang, T., Zhou, X., and Qian, Q., “The Peridynamic Drucker-Prager Plastic Model with Fractional Order Derivative for the Numerical Simulation of Tunnel Excavation”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 46, No. 9, pp. 1620-1659, 2022.
246. Cruz, A. L. and Donadon, M. V., “An Elastoplastic Constitutive Damage Model Based on Peridynamics Formulation”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 142, p. 103978, 2022.
247. Gerstle, W., Sau, N., and Aguilera, E., “Micropolar Peridynamic Constitutive Model for Concrete”, *19th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 19)*, Toronto, Canada, 2007.
248. Hordijk, D. A., “Tensile and Tensile Fatigue Behaviour of Concrete; Experiments, Modelling and Analyses”, *Heron*, Vol. 37, No. 1, pp. 1-79, 1992.
249. Sau, N., Medina-Mendoza, J., and Borbon-Almada, A. C., “Peridynamic Modelling of Reinforced Concrete Structures”, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 103, pp. 266-274, 2019.
250. Yang, D., Dong, W., Liu, X., Yi, S., and He, X., “Investigation on Mode-I Crack Propagation in Concrete Using Bond-Based Peridynamics with a New Damage Model”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 199, pp. 567-581, 2018.
251. Aydin, B. B., Tuncay, K., and Binici, B., “Overlapping Lattice Modeling for Concrete Fracture Simulations Using Sequentially Linear Analysis”, *Structural Concrete*, Vol. 19, No. 2, pp. 568-581, 2018.
252. Gerstle, W., Sau, N., and Sakhavand, N., “On Peridynamic Computational Simulation of Concrete Structures”, *Special Publication*, Vol. 265, pp. 245-264, 2009.
253. Yaghoobi, A. and Chorzepa, M. G., “Fracture Analysis of Fiber Reinforced Concrete Structures in the Micropolar Peridynamic Analysis Framework”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 169, pp. 238-250, 2017.
254. Tong, Y., Shen, W., Shao, J., and Chen, J., “A New Bond Model in Peridynamics Theory for Progressive Failure in Cohesive Brittle Materials”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 223, p. 106767, 2020.
255. Yang, D., He, X., Liu, X., Deng, Y., and Huang, X., “A Peridynamics-Based Cohesive Zone Model (PD-CZM) for Predicting Cohesive Crack Propagation”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 184, p. 105830, 2020.
256. Li, S., Lu, H., Huang, X., and Yang, J., “Improved Peridynamics Approach for the Progressive Fracture of Marine Concrete”, *Ocean Engineering*, Vol. 255, p. 111404, 2022.
257. Miranda, H. D., Orr, J., and Williams, C., “Fast Interaction Functions for Bond-Based Peridynamics”, *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 247-276, 2018.
258. Hobbs, M., Hattori, G., and Orr, J., “Predicting Shear Failure in Reinforced Concrete Members Using a Three-Dimensional Peridynamic Framework”, *Computers & Structures*, Vol. 258, p. 106682, 2022.
259. Gu, X., Zhang, Q., Huang, D., and Yv, Y., “Wave Dispersion Analysis and Simulation Method for Concrete SHPB Test in Peridynamics”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 160, pp. 124-137, 2016.
260. Demmie, P. and Silling, S., “An Approach to Modeling Extreme Loading of Structures Using Peridynamics”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 2, No. 10, pp. 1921-1945, 2007.
261. Oterkus, E., Guven, I., and Madenci, E., “Impact Damage Assessment by Using Peridynamic Theory”, *Central European Journal of Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 523-531, 2012.
262. Das, S., Hoffarth, C., Ren, B., Spencer, B., Sant, G., Rajan, S. D., and Neithalath, N., “Simulating the Fracture of Notched Mortar Beams through Extended Finite Element Method (XFEM) and Peridynamics”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 145, No. 7, p. 04019049, 2019.
263. Li, W. and Guo, L., “Meso-Fracture Simulation of Cracking Process in Concrete Incorporating Three-Phase Characteristics by Peridynamic Method”, *Construction and Building Materials*, Vol. 161, pp. 665-675, 2018.
264. Hai, L. and Ren, X., “Computational Investigation on Damage of Reinforced Concrete Slab Subjected

- to Underwater Explosion”, *Ocean Engineering*, Vol. 195, p. 106671, 2020.
265. Zhang, K., Ni, T., Sarego, G., Zaccariotto, M., Zhu, Q., and Galvanetto, U., “Experimental and Numerical Fracture Analysis of the Plain and Polyvinyl Alcohol Fiber-Reinforced Ultra-High-Performance Concrete Structures”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 108, p. 102566, 2020.
266. Niazi, S., “Peridynamic Models for Crack Nucleation in Brittle and Quasi-Brittle Materials”, *Ph.D. Thesis*, The University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, Nebraska, 2020.
267. Chen, W., Gu, X., Zhang, Q., and Xia, X., “A Refined Thermo-Mechanical Fully Coupled Peridynamics with Application to Concrete Cracking”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 242, p. 107463, 2021.
268. Zhang, Y. and Qiao, P., “A Fully-Discrete Peridynamic Modeling Approach for Tensile Fracture of Fiber-Reinforced Cementitious Composites”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 242, p. 107454, 2021.
269. Shi, C., Shi, Q., Tong, Q., and Li, S., “Peridynamics Modeling and Simulation of Meso-Scale Fracture in Recycled Coarse Aggregate (RCA) Concretes”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 114, p. 102949, 2021.
270. Hattori, G., Hobbs, M., and Orr, J., “A Review on the Developments of Peridynamics for Reinforced Concrete Structures”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 7, pp. 4655-4686, 2021.
271. Jin, Y., Li, L., Jia, Y., Shao, J., Rougelot, T., and Burlion, N., “Numerical Study of Shrinkage and Heating Induced Cracking in Concrete Materials and Influence of Inclusion Stiffness with Peridynamics Method”, *Computers and Geotechnics*, Vol. 133, p. 103998, 2021.
272. Zhang, N., Gu, Q., Xue, X., Huang, S., and Du, R., “Refined Simulation of Cracked Reinforced Concrete Beams Based on Enhanced Bond-Based Peridynamics”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, p. 2250169, 2022, <https://doi.org/10.1142/S0219455422501693>.
273. Cheng, Z., Wu, Y., Chu, L., Tang, J., Yuan, C., and Feng, H., “Dynamic Fracture Simulation of Functionally Graded Engineered Cementitious Composite Structures Based on Peridynamics”, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 35, No. 1, pp. 79-89, 2022.
274. Yaghoobi, A. and Chorzepa, M. G., “Meshless Modeling Framework for Fiber Reinforced Concrete Structures”, *Computers & Structures*, Vol. 161, pp. 43-54, 2015.
275. Yaghoobi, A., Chorzepa, M. G., Kim, S. S., and Durham, S. A., “Mesoscale Fracture Analysis of Multiphase Cementitious Composites Using Peridynamics”, *Materials*, Vol. 10, No. 2, p. 162, 2017.
276. Nikraves, S. and Gerstle, W., “Improved State-Based Peridynamic Lattice Model Including Elasticity, Plasticity and Damage”, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 116, No. 3, pp. 323-347, 2018.
277. Yang, D., He, X., Yi, S., and Liu, X., “An Improved Ordinary State-Based Peridynamic Model for Cohesive Crack Growth in Quasi-Brittle Materials”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 153, pp. 402-415, 2019.
278. Gerstle, W., Sakhavand, N., and Chapman, S., “Peridynamic and Continuum Models of Reinforced Concrete Lap Splice Compared”, *Proceedings of the 7th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, Korea Concrete Institute, Seoul, 2010.
279. Zhao, J., Chen, Z., Mehrmashhadi, J., and Bobaru, F., “A Stochastic Multiscale Peridynamic Model for Corrosion-Induced Fracture in Reinforced Concrete”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 229, p. 106969, 2020.