

یک سطح تسلیم پنج پارامتری

محمد رضایی پزند* و هادی اصغری**

گروه عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۹/۲۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۵/۱/۲۰)

چکیده - درباره رفتار کشسان^۱ - مومسان^۲ سازه‌های تنش مستوی^۳ سخن به میان می‌آید. در این راستا، یک سطح تسلیم^۴ پنج پارامتری^۵ ارائه خواهد شد. معیار مزبور با قانون جریان^۶ وابسته کار می‌کند. قانون سخت شوندهگی ترکیبی^۷ که از ترکیب قوانین سخت شوندهگی همگن^۸ و پویا^۹ تشکیل می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. رابطه‌های سطح تسلیم پیشنهادی نوشته شده و بر آن اساس، برنامه رایانه‌ای^{۱۰} برای تحلیل غیر خطی^{۱۱} مواد مهیا شده است. در پایان کار، تجربه‌های عددی حاصل از رابطه‌های پیشنهادی نیز به نظر خوانندگان می‌رسد.

A Five - Parameter Yield Surface

M. Rezaiee - Pajand and H. Asghari

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

ABSTRACT- *This paper is on the elasto-plastic analysis of plane stress problems. A five-parameter yield surface is presented. This yield criterion uses associate flow along with mixed hardening rule. The analytical formulations are written and related computer program for non-linear analysis is prepared. Finally, based on the formulations, numerical examples are solved.*

۱- مقدمه

توسط بسیاری از دانشمندان انجام شده و زمینه‌های فراوان دیگری با سرعت زیادی در حال پیشرفت است. باید افزود که سطح تسلیم مزبور مستقل از فشار آب ایستا^{۱۳} (ثابت) بوده است و در فضای تنش‌های اصلی، بایک منشور شش ضلعی منتظم نامحدود مشخص می‌شود [۱]. به دنبال آن، معیار تنش کششی بیشینه رانکین در سال ۱۸۷۶ ارائه شد. باید دانست که امروزه این معیار برای تحلیل بتن به این دلیل که نوع شکست آن به‌طور معمول کششی و یا فشاری است، به کار گرفته می‌شود [۲]. یکی از ساده‌ترین سطوح تسلیم را

در تاریخ علم، نظریه^{۱۲} مومسانی از سال ۱۸۶۴ آغاز می‌شود که ترسکا نتایج تحقیقات و کارهای خودش را درباره سنبه زنی و حدیده کاری منتشر کرد. وی در آن زمان با آزمایش‌های فراوانی که انجام داد، مبنای تسلیم را به صورت رابطه‌ای ارائه ساخت که بیانگر بسیاری از حقایق بود. از آن تاریخ تاکنون، کوشش‌های گسترده‌ای

* دانشیار ** دانشجوی کارشناسی ارشد

استقلال، سال ۱۵، شماره ۲، اسفند ۱۳۷۵

فهرست علائم

- مومسان		m	عامل سخت شونده	بار	P
ماتریس کرنش	[B]		ترکیبی	بار نهایی	Pu
ماتریس کشسان	[D] _e	κ	عامل سخت شونده	تابع تسلیم	F
ماتریس کشسان - مومسان	[D] _{ep}		همگن	تنش	{ σ }
نسبت پواسان	ν	a_1 تا a_5	عواملهای معیار	شیب نمودار تنش	H'
			ترسکاگونه	و کرنش یک محوری	σ_1 و σ_2
		E	عامل کشسانی	تنشهای اصلی	α
		{ ϵ }	کرنش	عامل سخت شونده	
		[S] _{ep}	ماتریس سختی کشسان	پویا	

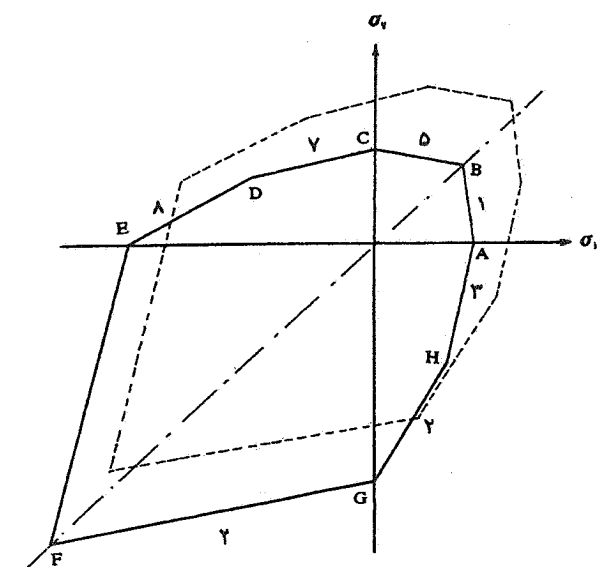
تشکیل شده که یکی از آنها برای ناحیه فشاری و دیگری برای دو ناحیه کششی و کششی - فشاری تعریف شده است [۱۱]. در همان سال، لید و دانکن سطح تسلیمی یک پارامتری برای خاکهای غیر چسبنده پیشنهاد کردند. معیار تسلیم ۱۵ مزبور ساده و صاف بوده و فقط برای خاکهای غیر چسبنده اعتبار دارد [۳]. آتوسن معیار تسلیم چهار پارامتری برای بتن را در سال ۱۹۷۷ ارائه کرد. سطح تسلیم مزبور در برش طولی به صورت منحنی بوده و مقاطع عرضی غیره دایره‌ای را در بردارد [۱۲]. در این راستا، در همان سال، بایوکزترک از نظریه تعمیم یافته مور - کولمب برای پیش‌بینی تسلیم و شکست بتن هنگامی که زیر ترکیب تنشها قرار می‌گیرد استفاده کرد [۷].

همگام با این پژوهشگران، اناند و وایزگریر در سال ۱۹۷۷ مشتق رابطه‌های تنش - کرنش مومسان را برای مصالح با سخت شونده کرنشی گزارش کردند. آنها از سطح تسلیم ترسکا استفاده کرده و رابطه‌های خود را برای مسائل تنش در صفحه نوشتند [۱۳ و ۱۴]. در سال ۱۹۷۸، اناند برای تحلیل کشسان - مومسان از شبکه بندی جزء مثلثی با کرنش خطی (LST) به چهار زیر جزء، استفاده کرد [۵]. گسترش معیار تسلیم ترسکا، سطح تسلیم ترسکاگونه نوع اول، در سال ۱۹۷۹ توسط رضایی پزند انجام گرفت. با معیار مزبور می‌توان افزون بر مواد با مقاومت فشاری ۱۶ و کششی یکسان، مواد با مقاومت فشاری و کششی متفاوت مانند بتن را نیز تحلیل کرد [۱۵]. همچنین، از معیار تسلیم مزبور در تحلیل کشسان - مومسان با قانون سخت شونده پویا نیز استفاده شده که مناسب بارهای چرخه‌ای است [۱۶ و ۱۷]. باید دانست که الگوی سخت شونده پویای این معیار، نخستین بار در سال ۱۹۸۲ ارائه شده است [۱۸]. در سال ۱۹۸۱، وایزگریر با تغییراتی که انجام داد، سطح تسلیم

فون میسز در سال ۱۹۱۳ ارائه کرد که در آن تنش برشی هشت وجهی مسبب اصلی تسلیم مواد است. این معیار، افزون بر اینکه ساده است، دارای منحنی هموار نیز هست. در پژوهشی دیگر، یک معیار تقریبی صاف برای سطح تسلیم مور - کولمب در سال ۱۹۵۱ توسط دراگر و پراگر پیشنهاد شده است [۳].

برای اولین بار در سال ۱۹۶۸ میلادی، اناند با به‌کارگیری روش اجزای محدود به همراه جزء مثلثی کرنش ثابت (CST) از معیار ترسکا استفاده کرد [۴ و ۵]. او مسئله تنش در صفحه را با به‌کارگیری نظریه مومسان نموی، تجزیه و تحلیل کرد. روش حل مزبور، فقط توانایی تحلیل مواد با رفتار کشسان خطی و مومسان کامل را دارا بود. در سال ۱۹۶۹، زینکویچ ماتریسهای کشسان - مومسان ۱۴ را برای وضعیت تسلیم فون میسز ارائه داد [۶]. در سال ۱۹۷۰، آرمن تحلیل مسائل کشسان - مومسان دو بعدی زیر بار چرخه‌ای را با استفاده از سطح تسلیم فون میسز بررسی و مطالعه کرد. وی از قانون سخت شونده پویای پراگر که توسط زیگلر تعمیم یافته بود، استفاده کرد [۷].

در سال ۱۹۷۰، لوی کاری مشابه اناند را به انجام رسانید. در پژوهش مزبور، نمو کرنش مومسان در گوشه‌های سطح تسلیم تعریف نشده بود و مشکل می‌آفرید [۸]. برای حل این مشکل، گوشه‌های سطح تسلیم به وسیله نایاک و زینکویچ، در سال ۱۹۷۲، گرد شد و تحلیل تقریبی را ارائه کردند [۹]. همگام با دیگر پژوهشگران، ویلام و وارنک در سال ۱۹۷۵ یک سطح شکست سه پارامتری برای بتن در کشش و زیر فشار کم پیشنهاد کردند [۱۰]. همزمان با آن، چن و چن سطح تسلیمی با یک محور تقارن را در سال ۱۹۷۵ ارائه کردند. باید دانست، سطح تسلیم مزبور از دو تابع



شکل ۱- سطح تسلیم ترسکاگونه نوع چهارم با قانون سخت شونددگی ترکیبی

ترسکاگونه نوع چهارم و مختصات گوشه‌هایش را در حالت دو بعدی نشان می‌دهد. سطح تسلیم نامبرده در زیر فضای تنشهای اصلی ($\sigma_1 - \sigma_2$) تعریف شده است. اگر $\sigma(k)$ که خود تابعی از عامل سخت شونددگی همگن k است، تنش تسلیم مواد در آزمایش کششی محوری باشد و عامل a_2 نسبت تنش تسلیم در فشار به تنش تسلیم در کشش تعریف شود، تابعهای هشت‌گانه سطح تسلیم به صورت زیر خواهند بود:

گوشه	σ_1	σ_2
A	$\sigma(k)$	o
B	$a_1\sigma(k)$	$a_1\sigma(k)$
C	o	$\sigma(k)$
D	$-a_1\sigma(k)$	$a_2\sigma(k)$
E	$-a_2\sigma(k)$	o
F	$-a_2a_1\sigma(k)$	$-a_2a_1\sigma(k)$
G	o	$-a_2\sigma(k)$
H	$a_2\sigma(k)$	$-a_2\sigma(k)$

ترسکاگونه نوع اول را برای مواد با مقاومت کششی کم به کار گرفت [۱۹]. در تحلیل مزبور از جزء مثلثی با کرنش ثابت و نیز قانون سخت شونددگی همگن استفاده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده از تحلیل، ویزگربر یک سطح تسلیم ساده‌ای ارائه کرد، سطح تسلیم ترسکاگونه نوع دوم، که می‌توانست مورد استفاده تحلیل غیر خطی بتن قرار گیرد [۲۰]. الصافی سطح تسلیم ترسکاگونه نوع اول را در سال ۱۹۸۴ به سطح تسلیم ترسکاگونه نوع سوم تغییر داده و آن را مناسب تحلیل مسائل تنش و کرنش مستوی ساخت [۲۱ و ۲۲]. از سوی دیگر، السانوسی سطح تسلیم ترسکاگونه نوع دوم را همراه با قانون سخت شونددگی ترکیبی (همگن و پویا) در سال ۱۹۸۷ به کار گرفت [۲۳ و ۲۴].

در سال ۱۹۸۶، چرن سطح تسلیمی برای خاک پیشنهاد کرد. این پژوهشگر الگوی خود را از سطح شکست پنج پارامتری ویلام - وارنک نتیجه گرفت. وی فرض کرد که این معیار بر سطح شکست در مقاومت بیشینه مصالح منطبق شود [۲۵]. در سال ۱۹۸۹، هو و اسکنوبریچ بتن را با استفاده از جریان مومسانی ۱۷ ناپیوسته الگو سازی کردند [۲۶]. در ادامه بحث یک سطح تسلیم جدید همراه با رابطه‌های مربوطه ارائه خواهد شد.

۲- سطح تسلیم پیشنهادی

نظر به این که شواهد تجربی نشان دهنده گرایش سطح تسلیم به سوی ترکیبی از قسمتهای خطی است، بنابراین یک سطح تسلیم خطی مناسب می‌تواند به واقعیت نزدیک باشد. لازم است برای دستیابی به پاسخ دقیقتر، از سطح تسلیم با شمار قطعات خطی بیشتر استفاده کرد. از سوی دیگر، سطحهای تسلیم ترسکا، بر خلاف سطحهای تسلیمی مانند فون میسز و چن و پاره‌ای از معیارهای دیگر، در جهت اطمینان رفتار می‌کند. سطح تسلیم پیشنهادی، که سطح تسلیم ترسکاگونه نوع چهارم نامیده خواهد شد در ارتباط با نتایج تجربی دارای برآزش بسیار خوبی بوده و در جهت اطمینان نیز عمل می‌کند. خاطر نشان می‌شود که با معیار پیشنهادی می‌توان افزون بر مواد با مقاومت فشاری و کششی یکسان، موادی که دارای مقاومت فشاری و کششی متفاوت مانند بتن هستند را نیز تحلیل کرد. این معیار ترسکاگونه پنج پارامتری است و با یک مجموعه تابعهای هشت گانه تعریف شده است. شکل (۱) سطح تسلیم

به دست آوردن ماتریس سختی کشسان - مومسان [S]ep نیاز به ماتریس کشسان - مومسان [D]ep و ماتریس تغییر مکان - کرنش [B] خواهد بود:

$$[S]_{ep} = \int_V [B]^T [D]_{ep} [B] dv \quad (2)$$

بنابراین، در اینجا کوشش خواهد شد که به صورت چکیده، چگونگی به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان با قانون سخت شوندهگی ترکیبی (همگن و پویا) ارائه شود. سپس، ماتریسهای کشسان - مومسان مبتنی بر تابع تسلیم ترسکاگونه نوع چهارم بر پا می شوند.

۴- ماتریس عمومی کشسان - مومسان برای پهلوها

رابطه عمومی سطح تسلیم برای قانون سخت شوندهگی ترکیبی می تواند مانند رابطه (۳) نوشته شود. همچنین، جزء کرنش کل قابل تجزیه به کرنشهای کشسان و مومسان است. رابطه (۴) تجزیه مزبور را نشان می دهد. در نظریه کشسانی، رابطه (۵) نمو کرنشهای کشسان را با نمو تنشها مرتبط می سازد. باید دانست که در رابطه یاد شده، ماتریس [D]e شامل مشخصات کشسانی مواد است و به نام ماتریس کشسان معروف است. از سوی دیگر، قانون جریان وابسته، نمو کرنش مومسانی را به مشتق تابع تسلیم^{۱۸} به صورت رابطه (۶) ارتباط می دهد:

$$F = F[(\sigma - \alpha), \sigma(\kappa)] = 0 \quad (3)$$

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (4)$$

$$\{d\sigma\} = [D]_e \{d\varepsilon^e\} \quad (5)$$

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (6)$$

عامل λ یک ضریب ثابت است که در ادامه تعیین می شود. باید دانست که اندازه و موقعیت تابع تسلیم در دوران بارگذاری تغییر می کند. میزان انتقال سطح تسلیم با قانون سخت شوندهگی پویا در

$$F^I = a_1 \sigma_1 + (1 - a_1) \sigma_2 - a_1 \sigma(k) = 0$$

$$F^{II} = (a_5 - 1) \sigma_1 - a_5 \sigma_2 - a_5 a_3 \sigma(k) = 0$$

$$F^{III} = a_2 \sigma_1 + (a_2 - 1) \sigma_2 - a_2 \sigma(k) = 0$$

$$F^{IV} = (a_3 - a_2) \sigma_1 - a_2 \sigma_2 - a_3 a_2 \sigma(k) = 0$$

$$F^V = (1 - a_1) \sigma_1 + a_1 \sigma_2 - a_1 \sigma(k) = 0$$

$$F^VI = -a_5 \sigma_1 + (a_5 - 1) \sigma_2 - a_5 a_3 \sigma(k) = 0$$

$$F^VII = (a_2 - 1) \sigma_1 + a_2 \sigma_2 - a_2 \sigma(k) = 0$$

$$F^VIII = -a_2 \sigma_1 + (a_3 - a_2) \sigma_2 - a_3 a_2 \sigma(k) = 0 \quad (1)$$

معیار تسلیم ارائه شده به پنج پارامتر a_1 تا a_5 نیاز دارد که با آزمایشهای تجربی تعیین می شوند. آزمایشهای مورد نظر، کشش یک محوری، فشار یک محوری، کشش دو محوری، فشار دو محوری و کشش و فشار دو محوری هستند. بنابراین، معیار مزبور را می توان معیار تسلیم خطی پنج پارامتری با یک محور تقارن خواند. باید دانست، سطحهای تسلیم ترسکا، ترسکاگونه نوع اول، و ترسکاگونه نوع دوم حالتی ویژه سطح تسلیم پیشنهادی اند. چنانچه $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ باشد، معیار پیشنهادی به معیار ترسکا تبدیل می شود و اگر $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ و $a_5 = 0$ باشد، معیار مزبور به معیار ترسکاگونه نوع اول تغییر می یابد. همچنین، با در نظر گرفتن $a_4 = 1$ ، $a_5 = 0$ معیار یاد شده به معیار ترسکاگونه نوع دوم تبدیل می شود. از سطح تسلیم پیشنهادی به همراه قانون سخت شوندهگی ترکیبی برای تحلیل مسائل تنش مستوی استفاده شده و نتایج بسیار خوبی نیز در پی داشته است. در ادامه ماتریسهای کشسان - مومسان پهلوها و گوشه های سطح تسلیم پیشنهادی برای استفاده در تحلیلهای اجزای محدود بر پا می شوند.

۳- ماتریس کشسان - مومسان برای پهلوها

مشکل بودن ماهیت تحلیل غیر خطی سازه ها، پژوهشگران را بر آن داشته تا از روش اجزای محدود که از قویترین روشهای عددی است استفاده کنند [۲۷]. در این روش، ماتریس سختی کشسان - مومسان مورد نیاز است. همچنان که در رابطه (۲) آمده است، برای

اکنون ثابت محاسباتی $d\eta$ باید تعیین شود. با استفاده از رابطه‌های (۸) و (۱۲) و همچنین با پیش ضرب رابطه (۱۱) در $\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T$ ، رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma - H(1-m)d\varepsilon^P\} = 0 \quad (13)$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{(\sigma - \alpha)\}d\eta \quad (14)$$

با گرفتن مشتق کلی از تابع سطح η ، رابطه (۳)، و انجام عملیات ریاضی و سپس با جانشینی $\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\}$ از رابطه (۱۵) در رابطه (۱۴) مقدار $d\eta$ در دسترس قرار می‌گیرد. عامل مزبور بر حسب η_1 و η_2 داده شده است. در ادامه رابطه‌های یاد شده با توجه به جمله $(\sigma - \alpha)$ در تابع F و $\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right\}$ و به کارگیری مشتق زنجیری به صورت زیر پیدا می‌شوند:

$$dF = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} - \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (15)$$

$$d\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

$$\eta_1 = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$\eta_2 = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{\sigma - \alpha\} \quad (16)$$

هدف به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}$ است. با پیش ضرب رابطه (۴) در $[D]_e$ و استفاده از رابطه (۵) و سرانجام با پیش ضرب رابطه (۱۷) در $\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T$ رابطه‌های زیر برقرارند:

$$[D]_e \{d\varepsilon\} = \{d\sigma\} + \lambda [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (17)$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \{d\varepsilon\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} \quad (18)$$

$$+\lambda \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}$$

فضای تنش به وسیله پراگر به صورت رابطه (۷) فرض شده است. در رابطه مزبور، H یک ثابت است. در حالت سخت شونده ترکیبی (همگن و پویا)، انتقال سطح تسلیم باید در نظریه منظور شود. بنابراین، رابطه (۷) برای حالت سخت شونده ترکیبی به رابطه (۸) تبدیل می‌شود:

$$d\alpha = H d\varepsilon^{P(\kappa)} \quad (7)$$

$$d\alpha = H(1-m)d\varepsilon^P \quad (8)$$

دانستنی است که برای سخت شونده همگن $m=1$ و برای سخت شونده پویا $m=0$ است. ضریب سخت شونده ترکیبی بایستی در محدوده $(0 \leq m \leq 1)$ قرار گیرد. اگر i و k نشان دهنده سخت شونده همگن و پویا باشند، آن‌گاه، نمو کرنش مومسان به نمو کرنش همگن و نمو کرنش پویا به صورت زیر وابسته می‌شود:

$$d\varepsilon^P = d\varepsilon^{P(i)} + d\varepsilon^{P(\kappa)} \quad (9)$$

$$d\varepsilon^{P(i)} = m d\varepsilon^P$$

$$d\varepsilon^{P(\kappa)} = (1-m)d\varepsilon^P \quad (10)$$

بر طبق تغییرات زیگلر^{۱۹}، قانون سخت شونده پویا دو شرط دیگر، در باره قانون پراگر ارائه می‌دهد. یادآوری می‌شود که قانون سخت شونده پراگر نمو انتقال سطح تسلیم را متناسب با کرنش مومسان می‌داند. در صورتی که فرضیه زیگلر، نمو انتقال سطح مزبور را متناسب با تنش کل می‌پندارد. دو شرط مزبور با رابطه‌های زیر ارائه می‌شوند. اگر H عامل سخت شونده مصالح و $d\eta$ یک ثابت محاسباتی باشد، می‌توان نوشت:

$$d\alpha = (\sigma - \alpha)d\eta \quad (11)$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma - d\alpha\} = 0 \quad (12)$$

رابطه (۱۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep}\{d\varepsilon\} \quad (28)$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (19)$$

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} [M]^{-1}$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \quad (29)$$

با جانشینی رابطه اخیر در رابطه (۱۸)، مقدار $\lambda[M]$ پیدا می‌شود. مقدار مورد بحث، پس از فشرده سازی به صورت رابطه (۲۲) نوشته می‌شود. به دنبال حذف λ ، مقدار $[M]$ به دست می‌آید. در رابطه‌های ارائه شده زیر، منظور از بالانویس c ، i و κ به ترتیب: سخت شونده‌گی ترکیبی، سخت شونده‌گی همگن و سخت شونده‌گی پویاست. رابطه‌های یاد شده به قرار زیرند:

همان گونه که در رابطه (۲۹) دیده می‌شود، ماتریس کشسان - مومسان برابر است با ماتریس کشسان منهای مقداری که مربوط به اثر مومسانی است. عامل سخت شونده‌گی، در رابطه (۳)، به شکل ساده و برداری زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa = \int \sigma \, d\varepsilon^{P(i)} \quad (30)$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \{d\varepsilon\} = \lambda[M] \quad (20)$$

$$\kappa = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^{P(i)}\} \quad (31)$$

$$\lambda[M] = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$+ \lambda \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (21)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶) و (۱۰) و جاگذاری آنها در رابطه (۳۱) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d\kappa = \lambda m \{\sigma\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (32)$$

$$\lambda[M] = \lambda A^{(c)} + \lambda \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (22)$$

$$[M] = A^{(c)} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (23)$$

مقدار $\frac{\partial F}{\partial \kappa}$ به صورت رابطه (۳۳) فرض می‌شود. با توجه به رابطه مزبور، γ برای سطحهای تسلیم خطی مختلف می‌تواند محاسبه شود. به عنوان نمونه، برای سطح تسلیم ترسکا $\gamma = 1$ است. برای به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان، بایستی مقادیر $A^{(c)}$ ، $[M]$ ، λ ، $d\kappa$ ، $d\eta$ و ثابت H معین شوند. محاسبه $A^{(c)}$ نیاز به محاسبه $A^{(i)}$ و $A^{(k)}$ دارد. با توجه به رابطه (۲۴) و جانشینی رابطه (۳۲) در رابطه (۲۵) رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$A^{(c)} = A^{(i)} - A^{(k)} \quad (24)$$

$$A^{(i)} = - \frac{1}{\lambda} \left\{\frac{\partial F}{\partial \kappa}\right\} d\kappa \quad (25)$$

$$A^{(k)} = - \frac{1}{\lambda} \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\alpha\} \quad (26)$$

همچنین از رابطه (۱۷) مقدار $\{d\sigma\}$ حساب می‌شود. از سوی دیگر، با محاسبه λ از رابطه (۲۰) و جاگذاری در رابطه (۲۷)، می‌توان نتیجه را پس از فشرده سازی با رابطه (۲۸) نمایش داد. باید دانست ماتریس $[D]_{ep}$ همان ماتریس کشسان - مومسان است:

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -\gamma \frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} \quad (33)$$

$$A^{(i)} = - m \{\sigma\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \left\{\frac{\partial F}{\partial \kappa}\right\} \quad (34)$$

$$A^{(i)} = - m\gamma \{\sigma\}^T \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} \quad (35)$$

$$\{d\sigma\} = [D]_e \{d\varepsilon\} - \lambda [D]_e \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \quad (27)$$

$$\lambda = [M]^{-1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] e \{d\varepsilon\} \quad (42)$$

{dε} را از رابطه (۲۸) می‌توان یافت. هنگامی که λ محاسبه شد، dκ از رابطه (۳۲) به دست خواهد آمد. معادله های مشخصه چهار پهلو و پنج گوشه سطح تسلیم خطی پیشنهادی و ثابت H که مورد نیاز تحلیل کشسان - مومسان است، در ادامه ارائه خواهد شد.

۵- ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۳

در اینجا، برای نمونه، ماتریس کشسان - مومسان دو پهلو با جزئیات نوشته می‌شود. سایر ماتریسهای مورد نیاز تحلیل، در پیوست درج خواهند شد. اگر زاویه بین محورهای اصلی و محورهای کلی فرض شود، نخست، تابع تسلیم پهلوی AH بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی (σ_x ، σ_y و σ_{xy}) بر حسب کسینوس و سینوس زاویه θ (C و S) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$F^{(r)} = [a_r C^2 + (a_r - 1) S^2] \sigma_x + [a_r S^2 + (a_r - 1) \quad (43)$$

$$C^2] \sigma_y + 2(1 + a_r - a_r) CS \sigma_{xy} - a_r \sigma(\kappa) = 0 \quad (43)$$

برای دستیابی به ماتریس کشسان - مومسان، مقدار $M^{(r)}$ مورد نیاز است. باید افزود، با استفاده از رابطه (۴۱) به مقدار $M^{(r)}$ می‌توان رسید:

$$[M^{(r)}] = H_r (1 - m) [2C^2 S^2 (a_r - a_r - 1)^2 + a_r + (a_r - 1)^2] + \frac{E}{(1 - \nu^2)} [a_r^2 + 2\nu a_r (a_r - 1) + (a_r - 1)^2] + \bar{H} m a_r^2 \quad (44)$$

ماتریس کشسان - مومسان با قرار دادن $M^{(r)}$ در رابطه (۲۹) به دست می‌آید. در ادامه، ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۳ همراه با ضریبها و درایه‌های آن درج می‌شود:

در اجرا، نسبت تجربی تنش و کرنش از منحنی آزمایش یک محوری کششی که حالت خاصی از رابطه (۳) است، برای محاسبات کار مومسان معادل استفاده می‌شود. در این حالت و در نبودن نمو کشسانی، $d\kappa = \sigma(\kappa) d\varepsilon^P$ به صورت $\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa}$ در ضمن ارائه می‌شود. توسط رابطه (۳۶) حساب می‌شود. در رابطه به دست آمده $\bar{H} = \frac{d\sigma(\kappa)}{d\varepsilon^P(I)}$ همان شیب منحنی تنش - کرنش یک محوری کششی است. با قرار دادن رابطه (۳۷) در رابطه (۳۵) مقدار $A^{(i)}$ ، و با گذاشتن رابطه (۸) در رابطه (۲۶)، $A^{(\kappa)}$ پیدا می‌شود:

$$\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\sigma(\kappa)} \frac{d\sigma(\kappa)}{d\varepsilon^P(I)} \quad (36)$$

$$\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)} \quad (37)$$

$$A^{(i)} = -m\gamma \frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (38)$$

$$A^{(\kappa)} = -H(1-m) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (39)$$

رابطه (۲۴)، مقدار $A^{(c)}$ را به صورت رابطه (۴۰) در اختیار می‌گذارد که با جاننشینی آن در رابطه (۲۳) مقدار $[M]$ به دست می‌آید. باید دانست که برای $m=1$ یا $m=0$ ، $[M]$ به ترتیب برای حالات سخت شوندگی همگن یا سخت شوندگی پویا ارائه می‌شود. نسبت تناسب λ، از رابطه (۲۰)، و $d\eta$ از رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$A^{(c)} = H(1-m) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} + m\gamma \frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (40)$$

$$[M] = H(1-m) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} + m\gamma \frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] e \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (41)$$

$$\eta_r^{(r)} = \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T \{\sigma - \alpha\} \quad (49)$$

پس از محاسبه مقادیر سمت راست رابطه‌های (48) و (49)، و جاگذاری آنها، نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(r)} = & [a_r C^r + (a_r - 1) S^r] d\sigma_x + [a_r S^r \\ & + (a_r - 1) C^r] d\sigma_y + [\nu(1 + a_r - a_r) CS] d\sigma_{xy} \\ & - \bar{H} m a_r \nu \lambda^{(r)} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \eta_r^{(r)} = & [a_r C^r + (a_r - 1) S^r] (\sigma_x - \alpha_x) + [a_r S^r \\ & + (a_r - 1) C^r] (\sigma_y - \alpha_y) + [\nu(1 + a_r \\ & - a_r) CS] (\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \end{aligned} \quad (51)$$

از سوی دیگر، $\lambda^{(r)}$ رامی توان از رابطه (42) محاسبه کرد. برای سادگی کار، حاصل ضرب $\left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T [D] e$ به صورت ماتریس $\frac{E}{(1-\nu^2)} [S^{(r)}]$ نمایش داده شده که در ادامه می‌آید:

$$\lambda^{(r)} = [M^{(r)}]^{-1} \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T [D] e \{d\varepsilon\} \quad (52)$$

$$\lambda^{(r)} = \frac{E}{(1-\nu^2) M^{(r)}} [S^{(r)}] \{d\varepsilon\} \quad (53)$$

درایه‌های ماتریس $[S^{(r)}]$ به صورت زیرند:

$$[S^{(r)}] = [S_1 \quad S_r \quad S_r]$$

$$S_1 = [a_r + \nu(a_r - 1)] C^r + [(a_r - 1) + \nu a_r] S^r \quad (54)$$

$$S_r = [\nu a_r + (a_r - 1)] C^r + [\nu(a_r - 1) + a_r] S^r \quad (55)$$

$$S_r = (1 - \nu)(1 + a_r - a_r) CS \quad (56)$$

$$[D]_{ep}^{(r)} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} - G_r \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1r} & d_{1r} \\ & d_{rr} & d_{rr} \\ \text{sym.} & & d_{rr} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$G_r = \frac{E}{M^{(r)}(1-\nu^2)}$$

$$d_{11} = \{[a_r C^r + (a_r - 1) S^r] + \nu[a_r S^r + (a_r - 1) C^r]\}^r$$

$$d_{1r} = \nu[a_r C^r + (a_r - 1) S^r]^r + \nu[a_r S^r$$

$$+ (a_r - 1) C^r]^r + (1 + \nu^2) [a_r C^r + (a_r - 1) S^r] [a_r S^r + (a_r - 1) C^r]^r + (a_r - 1) C^r]$$

$$d_{1r} = (1 - \nu)[(1 + a_r - a_r) CS] \{[a_r C^r + (a_r - 1) S^r] + \nu[a_r S^r + (a_r - 1) C^r]\}^r$$

$$d_{rr} = \{ \nu[a_r C^r + (a_r - 1) S^r] + [a_r S^r + (a_r - 1) C^r] \}^r$$

$$d_{rr} = (1 - \nu)[(1 + a_r - a_r) CS] \{ \nu[a_r C^r + (a_r - 1) S^r] + [a_r S^r + (a_r - 1) C^r] \}^r$$

$$d_{rr} = [(1-\nu)(1 + a_r - a_r) CS]^r \quad (46)$$

ثابت $d\eta$ برای پهلوی 3 به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$d\eta = \frac{\eta_1^{(r)}}{\eta_r^{(r)}} \quad (47)$$

$$\eta_1^{(r)} = \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \kappa} d\kappa \quad (48)$$

می‌شود:

$$F^{(\tau)} = [(a_3 - a_2)C^T - a_2 S^T] \sigma_x + [(a_3 - a_2)S^T - a_2 C^T] \sigma_y + [\nu(a_3 - a_2 + a_2)CS] \sigma_{xy} - a_2 a_2 \sigma(\kappa) = 0 \quad (61)$$

اکنون برای محاسبه $[M^{(\tau)}]$ می‌توان از رابطه‌های (۴۰) و (۴۱) سود جست:

$$[M^{(\tau)}] = H_2(1 - m)[\nu C^T S^T(a_3 - a_2 - a_2)^T + a_2^T + (a_3 - a_2)^T] + \frac{E}{(1 - \nu^2)} [(a_3 - a_2)(a_3 - a_2 - \nu a_2) + a_2^T] + \bar{H} m a_2^T a_2^T \quad (62)$$

با در دست داشتن $[M^{(\tau)}]$ ، ثابت $\lambda^{(\tau)}$ به کمک رابطه (۴۲) به دست می‌آید:

$$\lambda^{(\tau)} = \frac{E}{(1 - \nu^2)M^{(\tau)}} [S^{(\tau)}] \{d\epsilon\} \quad (63)$$

اینک ماتریس $[S^{(\tau)}]$ بر حسب پارامترهای معلوم نوشته خواهد شد:

$$[S^{(\tau)}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3]$$

$$S_1 = [(a_3 - a_2) - \nu a_2] C^T + [\nu(a_3 - a_2) - a_2] S^T$$

$$S_2 = [\nu(a_3 - a_2) - a_2] C^T + [(a_3 - a_2) - \nu a_2] S^T$$

$$S_3 = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_2)CS \quad (64)$$

مقادیر $\eta_1^{(\tau)}$ و $\eta_2^{(\tau)}$ به صورت زیرند:

ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}$ بستگی به پارامتر سخت شونده H دارد. از این رو، باید مقدار ثابت H محاسبه شود. با به کارگیری همزمان سه جزء تنش σ_x ، σ_y و σ_{xy} ، H تعیین می‌شود. برای هر جزء تنش، یک پارامتر سخت شونده تعریف می‌شود. به سخن دیگر، $\bar{H} = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p}$ و $H_{xy} = \frac{d\sigma_{xy}}{d\epsilon_{xy}^p}$ ، $H_y = \frac{d\sigma_y}{d\epsilon_y^p}$ ، $H_x = \frac{d\sigma_x}{d\epsilon_x^p}$ فرض شده و با توجه به حالت تنش یک محوری شرایط زیر به دست می‌آیند:

$$1- \text{در حالت } H_x = A_1 \bar{H}_x, \quad d\sigma_y = d\sigma_{xy} = 0 \text{ می‌شود.}$$

$$2- \text{در حالت } H_y = A_2 \bar{H}_y, \quad d\sigma_x = d\sigma_{xy} = 0 \text{ می‌شود.}$$

$$3- \text{در حالت } H_{xy} = A_3 \bar{H}_{xy}, \quad d\sigma_x = d\sigma_y = 0 \text{ می‌شود.}$$

در رابطه‌های درج شده، A_i یک ثابت است. با فرض یک مقدار میانگین برای H ، می‌توان آن را به صورت زیر حساب کرد:

$$H = \frac{H_x + H_y + H_{xy}}{3} \quad (57)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_x = \bar{H}_y = \bar{H}_{xy} \quad (58)$$

بنابراین پارامتر سخت شونده برای پهلوی ۳ به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$H_3 = \frac{(A_1 + A_2 + A_3) \bar{H}}{3} \quad (59)$$

از سوی دیگر، محاسبه A_i برای پهلوی ۳ مقدار H_3 را به دست می‌دهد:

$$H_3 = \frac{\bar{H}}{3} \quad (60)$$

و به صورت همانندی $H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \frac{\bar{H}}{3}$ حساب می‌شوند.

۶- ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۴

اینک به ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۴ از سطح تسلیم جدید پرداخته می‌شود. برای این کار، تابع تسلیم پهلوی GH بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر ارائه

$$- a_f S^T] + [(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] \}$$

$$d_{rr} = [(1-\nu)(a_r - a_f + a_f) CS]^T \quad (67)$$

باید دانست، نمو تنش تسلیم که عامل گسترش همگن سطح تسلیم است را نیز می توان به صورت زیر پیدا کرد:

$$d\sigma(\kappa) = \bar{H}m \left\{ \frac{\partial F^{(f)}}{\partial \sigma} \right\} \{ \lambda^{(f)} \} \quad (68)$$

۷- ماتریس عمومی کشسان - مومسان برای گوشه ها در مورد گوشه ها نیز از روشی مشابه پهلوها استفاده می شود. تابع تسلیم برای گوشه شامل تابعهای تسلیم پهلوهای مجاور m و n است. این تابعها و مشتقهای کلی آنها به صورت زیر ارائه می شوند:

$$F^n [(\sigma - \alpha), \sigma(\kappa)] = 0 \quad (69)$$

$$F^m [(\sigma - \alpha), \sigma(\kappa)] = 0 \quad (70)$$

$$\left\{ \frac{\partial F^n}{\partial \sigma} \right\}^T \{ d\sigma \} - \left\{ \frac{\partial F^n}{\partial \alpha} \right\}^T \{ d\alpha \} + \left\{ \frac{\partial F^n}{\partial \kappa} \right\} d\kappa = 0 \quad (71)$$

$$\left\{ \frac{\partial F^m}{\partial \sigma} \right\}^T \{ d\sigma \} - \left\{ \frac{\partial F^m}{\partial \alpha} \right\}^T \{ d\alpha \} + \left\{ \frac{\partial F^m}{\partial \kappa} \right\} d\kappa = 0 \quad (72)$$

اگر رابطه های (69) و (70) در یک بردار ترکیب شوند، می توان آن را به صورت رابطه (73) ارائه کرد. همچنین، با فرض اینکه مشتقهای $\{F^j\}$ نسبت به تنشها و پارامتر سخت شوندگی به ترتیب با رابطه های (74) و (75) نوشته شوند، می توان رابطه های (71) و (72) را به صورت رابطه (76) یا (77) نمایش داد.

$$\{F^j\} = \{ F^n \quad F^m \} \quad (73)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] = \left[\left\{ \frac{\partial F^n}{\partial \sigma} \right\} \quad \left\{ \frac{\partial F^m}{\partial \sigma} \right\} \right] \quad (74)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa} \right] = \left[\frac{\partial F^n}{\partial \kappa} \quad \frac{\partial F^m}{\partial \kappa} \right] \quad (75)$$

$$\eta_1^{(f)} = [(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] d\sigma_x + [(a_r$$

$$- a_f) S^T - a_f C^T] d\sigma_y + [\nu(a_r - a_f + a_f) CS] d\sigma_{xy}$$

$$- \bar{H}m a_r^T a_f^T \lambda^{(f)} \quad (65)$$

$$\eta_2^{(f)} = [(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] (\sigma_x - \alpha_x) + [(a_r - a_f) S^T$$

$$- a_f C^T] (\sigma_y - \alpha_y) + \nu(a_r - a_f + a_f)$$

$$CS(\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \quad (66)$$

سرانجام، درایه های ماتریس سختی کشسان - مومسان را می توان به صورت زیر یافت:

$$G_f = \frac{E}{M^{(f)}(1 - \nu^2)}$$

$$d_{11} = \{ [(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] + \nu[(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] \}^T$$

$$d_{12} = d_{21} = \{ [(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] + \nu[(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] \} \{ \nu[(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] + [(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] \}$$

$$d_{13} = d_{31} = (1-\nu)(a_r - a_f + a_f) CS \{ [(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] + \nu[(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] \}$$

$$d_{22} = \{ [(a_r - a_f) S^T - a_f C^T] + \nu[(a_r - a_f) C^T - a_f S^T] \}^T$$

$$d_{33} = d_{33} = (1-\nu)(a_r - a_f + a_f) CS \{ \nu[(a_r - a_f) C^T$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma\} - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \alpha}\right]^T \{d\alpha\} + \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa = 0 \quad (76)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma\} = \left[\frac{\partial F^j}{\partial \alpha}\right]^T \{d\alpha\} - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa \quad (77)$$

با استفاده از قانون جریان کوپتر، قانون جریان برای گوشه J به صورت رابطه (78) ارائه می‌شود. عاملهای $\{\lambda^j\}$ ، که در رابطه (79) نوشته شده‌اند، ضریبهای ثابت‌اند که در ادامه تعیین می‌شوند. با قرار دادن رابطه‌های (5) و (77) در رابطه (4) و پیش ضرب نتیجه در $[D]_e$ ، رابطه (80) به دست می‌آید:

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda^n \left\{\frac{\partial F^n}{\partial \sigma}\right\} + \lambda^m \left\{\frac{\partial F^m}{\partial \sigma}\right\} = \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \{\lambda^j\} \quad (78)$$

$$\{\lambda^j\}^T = \{\lambda^n \quad \lambda^m\} \quad (79)$$

$$[D]_e \{d\varepsilon\} = \{d\sigma\} + [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \{\lambda^j\} \quad (80)$$

با پیش ضرب رابطه (80) در $\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T$ ، رابطه (81) نتیجه می‌شود که با جاگذاری رابطه (77) در آن، رابطه (82) پیدا می‌شود. سپس برای ساده سازی، رابطه‌های (83) و (84) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \{d\varepsilon\} &= \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma\} \\ &+ \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \{\lambda^j\} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \{d\varepsilon\} &= \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\alpha\} - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa \\ &+ \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \{\lambda^j\} \end{aligned} \quad (82)$$

$$[A]^{(c)} \{\lambda^j\} = \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\alpha\} - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa \quad (83)$$

$$[M]^j = [A]^{(c)} + \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \quad (84)$$

با توجه به رابطه‌های (84) و (82) می‌توان رابطه (85) را

نوشت و با جاگذاری آن در رابطه (80)، رابطه (86) نتیجه خواهد شد. باید دانست که رابطه (86) رابطه تنش - کرنش را در حالت کشسان - مومسان برای گوشه کلی J مشخص می‌سازد. به این ترتیب ماتریس کشسان - مومسان به صورت رابطه (87) ارائه می‌شود:

$$\{\lambda^j\} = [M]^j \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \{d\varepsilon\} \quad (85)$$

$$\{d\sigma\} = ([D]_e - [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] [M]^j)^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \{d\varepsilon\} \quad (86)$$

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] [M]^j \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T [D]_e \quad (87)$$

از سوی دیگر، قانون سخت شوندهگی پویا به صورت رابطه‌های (88) و (89) نوشته می‌شوند. با پیش ضرب رابطه (88) در $\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T$ و سپس جاگذاری مقدار $\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\alpha\}$ از رابطه (77)، رابطه (90) را در اختیار قرار می‌دهد.

$$\{d\alpha\} = \{\sigma - \alpha\} d\eta \quad (88)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma - d\alpha\} = \{0\} \quad (89)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma\} + \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa = \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{\sigma - \alpha\} d\eta \quad (90)$$

با پیش ضرب رابطه به دست آمده در $\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T$ و حل آن برای $d\eta$ نتیجه زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$d\eta = \frac{\eta_1^j}{\eta_2^j} \quad (91)$$

$$\eta_1^j = \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right]^T \{d\sigma\}$$

$$+ \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}\right] \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}\right]^T d\kappa \quad (92)$$

$$\eta_r^j = \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \{\sigma - \alpha\} \quad (93)$$

برای به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان، نیاز به محاسبه $[A]^{(c)}$ و سپس $[M]^j$ است. از سوی دیگر، برای محاسبه $[A]^{(c)}$ باید λ^j تعیین شود. از رابطه (۸) می‌توان رابطه (۹۴) را نتیجه گرفت که با توجه به رابطه (۷۸) می‌تواند به صورت رابطه (۹۵) نوشته شود. همچنین، رابطه (۹۶) از رابطه (۸۹) نتیجه می‌شود. اکنون با قرار دادن رابطه (۹۵) در سمت راست رابطه (۹۶) و حل آن، $\{\lambda^j\}$ به دست می‌آید. رابطه (۹۷)، مقدار $\{\lambda^j\}$ را در اختیار قرار می‌دهد:

$$\{d\alpha\} = H\{d\varepsilon\}^{P(\kappa)} = H(1-m)\{d\varepsilon^P\} \quad (94)$$

$$\{d\alpha\} = H(1-m) \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \{\lambda^j\} \quad (95)$$

$$\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \{d\sigma\} = \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \{d\alpha\} \quad (96)$$

$$\{\lambda^j\} = \frac{1}{H(1-m)} \left[\left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \right]^{-1} \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \{d\sigma\} \quad (97)$$

رابطه (۹۷) برای حالت سخت شونده‌گی همگن معتبر نیست، زیرا که تنها از وضعیت سخت شونده‌گی پویا نتیجه شده است. در رابطه (۸۳)، فرض بر برقراری رابطه‌های زیر است:

$$[A]^{(c)} = [A]^{(i)} - [A]^{(\kappa)} \quad (98)$$

$$[A]^{(i)} \{\lambda^j\} = - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa} \right]^T d\kappa \quad (99)$$

$$[A]^{(\kappa)} \{\lambda^j\} = - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \{d\alpha\} \quad (100)$$

اگر رابطه (۹۵)، در سمت راست رابطه (۱۰۰) جاگذاری شود و $\{\lambda^j\}$ از دو طرف رابطه حذف شود، نتیجه به صورت رابطه (۱۰۱) خواهد بود. برای محاسبه $[A]^{(i)}$ ، اگر از تعریف رابطه (۳۳) استفاده کرده و در رابطه (۹۹) به کار برده شود، نتیجه به شکل رابطه (۱۰۲) به دست می‌آید. از سوی دیگر، رابطه (۳۱) مقدار κ را به صورت

رابطه (۱۰۳) ارائه می‌دهد.

$$[A]^{(\kappa)} = -H(1-m) \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \quad (101)$$

$$[A]^{(i)} \{\lambda^j\} = - \left[\frac{\partial F^j}{\partial \kappa} \right]^T d\kappa = [\gamma^j]^T \frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} d\kappa \quad (102)$$

$$\kappa = m \int \{\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \{\lambda^j\} \quad (103)$$

$$d\kappa = m \{\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \{\lambda^j\} \quad (104)$$

اینک با جاگذاری رابطه‌های (۱۰۳) و (۱۰۴) در رابطه (۱۰۲) و حذف کردن $\{\lambda^j\}$ از دو طرف رابطه، مقدار $[A]^{(i)}$ به صورت رابطه (۱۰۵) تعیین می‌شود. همچنین، با قرار دادن رابطه‌های (۱۰۱) و (۱۰۵) در رابطه (۹۸)، مقدار $[A]^{(c)}$ به دست می‌آید و با رابطه (۱۰۶) ارائه می‌شود. سرانجام، با گذاشتن رابطه (۱۰۶) در رابطه (۸۴)، ماتریس $[M]^j$ به دست می‌آید. به این ترتیب همه عوامل تعیین شدند. اکنون می‌توان ماتریس کشسان - مومسان را برای گوشه‌های مختلف سطح تسلیم به دست آورد.

$$[A]^{(i)} = \frac{\bar{H}m}{\sigma(\kappa)} [\gamma^j]^T \{\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \quad (105)$$

$$[A]^{(c)} = H(1-m) \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] + \frac{\bar{H}m}{\sigma(\kappa)} [\gamma^j]^T \{\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \quad (106)$$

$$[M]^j = H(1-m) \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]$$

$$+ \frac{\bar{H}m}{\sigma(\kappa)} [\gamma^j]^T \{\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma} \right] \quad (107)$$

۸- ماتریس کشسان - مومسان گوشه H تنها جزئیات محاسباتی ماتریس کشسان - مومسان گوشه H در متن ارائه می‌شود. به دلیل طولانی بودن رابطه‌ها، برای سایر گوشه‌های سطح تسلیم نتایج محاسبات در پیوست درج می‌شوند. قانون جریان گوشه H را می‌توان به دو صورت زیر نشان داد:

$$W_{11}^H = \gamma C^T S^T (a_r - a_r + a_r)^T + (a_r - a_r)^T + a_r^T \quad (113)$$

$$\{d\varepsilon^P\} = \lambda^r \left\{ \frac{\partial F^r}{\partial \sigma} \right\} + \lambda^r \left\{ \frac{\partial F^r}{\partial \sigma} \right\} \quad (108)$$

$$\{d\varepsilon^P\} = \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \{\lambda^H\} \quad (109)$$

با داشتن $A^{(c)}$ ، می‌توان از رابطه (114) مقدار $[M^H]$ را محاسبه کرد. برای تعیین ماتریس $[M^H]$ در رابطه به دست آمده، نیازمند ضرب سه ماتریس است. ضرب این سه ماتریس، ماتریس جدیدی به نام ماتریس $[J]^H$ می‌سازند. ماتریس $[J]^H$ و درایه‌های آن در ادامه آمده‌اند:

عوامل زیر برای رابطه‌های درج شده مورد نیاز است:

$$\{\lambda^H\}^T = \{ \lambda^{(r)} \quad \lambda^{(r)} \} \quad (110)$$

$$[M^H] = [A]^{(c)} + \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \quad (114)$$

باید دانست، λ^H واقعی به صورت رابطه ساده فوق نیست. اما تأثیر متقابل موجود بین $\lambda^{(r)}$ و $\lambda^{(r)}$ باید به صورتی در نظر گرفته شود. این حقیقت برای گوشه H و دیگر گوشه‌ها وجود دارد. رابطه‌های (76) و (77) به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] = \frac{E}{(1-\nu^2)} [J]^H$$

$$[J]^H = \begin{bmatrix} J_{11}^H & J_{12}^H \\ J_{21}^H & J_{22}^H \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$[A]^{(c)} = H^H (1-m) \begin{bmatrix} W_{11}^H & W_{12}^H \\ W_{21}^H & W_{22}^H \end{bmatrix} + \bar{H}m \begin{bmatrix} a_r^T & a_r^T \\ a_r^T a_r^T & a_r^T a_r^T \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$J_{11}^H = (a_r - a_r)^T + \gamma a_r (a_r - 1) + \gamma \nu a_r (a_r - 1) + 1$$

$$W_{11}^H = \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}$$

$$J_{12}^H = J_{21}^H = (a_r - a_r)(a_r + \nu a_r) + (\nu a_r + a_r)$$

$$W_{12}^H = W_{21}^H = \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}$$

$$(1 - a_r) - \nu a_r$$

$$W_{22}^H = \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F^{(r)}}{\partial \sigma} \right\} \quad (112)$$

$$J_{22}^H = (a_r - a_r)^T + a_r^T + \gamma \nu a_r (a_r - a_r) \quad (116)$$

با جاگذاری مشتقات تنش پهلوهای ۳ و ۴، درایه‌های ماتریس $[W]^H$ به دست می‌آید:

اکنون با داشتن ماتریس $[M^H]$ ، می‌توان مقدار λ^H را از رابطه (117) به دست آورد. وارون ماتریس $[M^H]$ را می‌توان به صورت $[Y]^H$ نمایش داد:

$$W_{11}^H = \gamma C^T S^T (a_r - a_r + 1)^T + (a_r - 1)^T + a_r^T$$

$$\{\lambda^H\} = [M^H]^{-1} \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \{d\varepsilon\} \quad (117)$$

$$W_{12}^H = W_{21}^H = \gamma C^T S^T [a_r(1 + a_r) + a_r(1 - a_r)$$

$$\{\lambda^H\}^T = \{ \lambda_1^H \quad \lambda_2^H \}$$

$$- a_r(1 + a_r) - (a_r + a_r)^T] + a_r(a_r$$

$$- a_r) - a_r(a_r - 1)$$

$$\eta_{\nu}^H = \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T \{d\sigma\} \quad [Y]^H = [M^H]^{-1} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$+ \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^H}{\partial \kappa} \right]^T d\kappa \quad (125)$$

$$\eta_{\nu}^H = \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T \{\sigma - \alpha\} \quad (126)$$

قسمت دوم رابطه (125) نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^H}{\partial \kappa} \right]^T d\kappa = & - \bar{H} m a_{\nu}^{\nu} \lambda^{(\nu)} \{ [a_{\nu} C^{\nu} \\ & - (a_{\nu} - 1) S^{\nu}] d\sigma_x + [a_{\nu} S^{\nu} + (a_{\nu} - 1) C^{\nu}] d\sigma_y \\ & + [\nu(1 + a_{\nu} - a_{\nu}) CS] d\sigma_{xy} - \bar{H} m a_{\nu}^{\nu} a_{\nu}^{\nu} \lambda^{(\nu)} \{ [(a_{\nu} \\ & - a_{\nu}) C^{\nu} - a_{\nu} S^{\nu}] d\sigma_x + [(a_{\nu} - a_{\nu}) S^{\nu} - a_{\nu} C^{\nu}] d\sigma_y \\ & + [\nu(a_{\nu} - a_{\nu} + a_{\nu}) CS] d\sigma_{xy} \} \quad (127) \end{aligned}$$

همچنین، قسمت اول رابطه (125) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \{d\sigma\}^T \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T \{d\sigma\} = & L_1 d\sigma_x \\ & + L_{\nu} d\sigma_y + L_{\nu} d\sigma_{xy} \quad (128) \end{aligned}$$

$$L_1 = Z_{11} d\sigma_x + Z_{\nu 1} d\sigma_y + Z_{\nu 1} d\sigma_{xy}$$

$$L_{\nu} = Z_{1\nu} d\sigma_x + Z_{\nu\nu} d\sigma_y + Z_{\nu\nu} d\sigma_{xy}$$

$$L_{\nu} = Z_{1\nu} d\sigma_x + Z_{\nu\nu} d\sigma_y + Z_{\nu\nu} d\sigma_{xy} \quad (129)$$

$$Z_{11} = [a_{\nu} C^{\nu} + (a_{\nu} - 1) S^{\nu}]^{\nu} + [(a_{\nu} - a_{\nu}) C^{\nu} - a_{\nu} S^{\nu}]^{\nu}$$

$$Z_{1\nu} = Z_{\nu 1} = [a_{\nu} C^{\nu} + (a_{\nu} - 1) S^{\nu}] [a_{\nu} S^{\nu}]$$

اگر $Q = \frac{E}{(1-\nu^{\nu})}$ باشد، حاصل ضرب $\left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right]^T [D] e \{d\varepsilon^P\}$ برابر بردار دیگری به نام $\{X^{(H)}\}$ است. درایه‌های بردار $\{X^{(H)}\}$ و λ^H در ادامه آمده‌اند:

$$\{X^{(H)}\}^T = \{x_1 \quad x_{\nu}\}, \quad Q = \frac{E}{(1-\nu^{\nu})} \quad (119)$$

$$\{\lambda^H\} = \frac{E}{(1-\nu^{\nu})} [Y^H] \{X^H\} \quad (120)$$

$$\lambda_1^H = \frac{E}{(1-\nu^{\nu})} (y_{11} x_1 + y_{1\nu} x_{\nu}) \quad (121)$$

$$\lambda_{\nu}^H = \frac{E}{(1-\nu^{\nu})} (y_{\nu 1} x_1 + y_{\nu\nu} x_{\nu}) \quad (122)$$

$$x_1 = \{a_{\nu} C^{\nu} + (a_{\nu} - 1) S^{\nu} + \nu [a_{\nu} S^{\nu}$$

$$+ (a_{\nu} - 1) C^{\nu}]\} d\varepsilon_x + \{\nu [a_{\nu} C^{\nu} + (a_{\nu} - 1) S^{\nu}]$$

$$+ a_{\nu} S^{\nu} + (a_{\nu} - 1) C^{\nu}\} d\varepsilon_y + [(1 - \nu)$$

$$(1 + a_{\nu} - a_{\nu}) CS] d\varepsilon_{xy}$$

$$x_{\nu} = \{(a_{\nu} - a_{\nu}) C^{\nu} - a_{\nu} S^{\nu} + \nu [(a_{\nu} - a_{\nu}) S^{\nu}$$

$$- a_{\nu} C^{\nu}]\} d\varepsilon_x + \{\nu [(a_{\nu} - a_{\nu}) C^{\nu} - a_{\nu} S^{\nu}] + (a_{\nu}$$

$$- a_{\nu}) S^{\nu} - a_{\nu} C^{\nu}\} d\varepsilon_y + [(1 - \nu)(a_{\nu} - a_{\nu}$$

$$+ a_{\nu}) CS] d\varepsilon_{xy} \quad (123)$$

محاسبه $d\eta$ به قرار زیر است:

$$d\eta^H = \frac{\eta_1^H}{\eta_{\nu}^H} \quad (124)$$

$$\left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}\right]^T [D]e \quad (132)$$

از حاصل ضرب $[D]e$ در $\left[\frac{\partial F(r)}{\partial \sigma} \quad \frac{\partial F(r)}{\partial \sigma}\right]$ ، ماتریس $[g]^H$ به دست می‌آید که درایه‌های آن به قرار زیر است:

$$g_{11}^H = a_r C^r + (a_f - 1)S^r + \nu[a_r S^r + (a_f - 1)C^r]$$

$$g_{12}^H = (a_r - a_f)C^r - a_f S^r + \nu[(a_r - a_f)S^r - a_f C^r]$$

$$g_{21}^H = a_r S^r + (a_f - 1)C^r + \nu[a_r C^r + (a_f - 1)S^r]$$

$$g_{22}^H = (a_r - a_f)S^r - a_f C^r + \nu[(a_r - a_f)C^r - a_f S^r]$$

$$g_{r1}^H = (1 - \nu)(1 + a_r - a_f)CS$$

$$g_{r2}^H = (1 - \nu)(a_r - a_f + a_f)CS \quad (133)$$

حاصل ضرب $[D]e$ در $\left[\frac{\partial F(r)}{\partial \sigma} \quad \frac{\partial F(r)}{\partial \sigma}\right]$ در ماتریس $[h]^H$ رانتهیجه می‌دهد که درایه‌های آن عبارت‌اند از:

$$h_{11}^H = a_r C^r + (a_f - 1)S^r + \nu[a_r S^r + (a_f - 1)C^r]$$

$$h_{12}^H = a_r S^r + (a_f - 1)C^r + \nu[a_r C^r + (a_f - 1)S^r]$$

$$h_{1r}^H = (1 - \nu)(1 + a_r - a_f)CS$$

$$h_{21}^H = (a_r - a_f)C^r - a_f S^r + \nu[(a_r - a_f)S^r - a_f C^r]$$

$$h_{22}^H = (a_r - a_f)S^r - a_f C^r + \nu[(a_r - a_f)C^r - a_f S^r]$$

$$h_{2r}^H = (1 - \nu)(a_r - a_f + a_f)CS \quad (134)$$

اکنون با فرض $G = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$ ، ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}^H$ از رابطه (135) به دست می‌آید. باید دانست که نمو تنش

$$+ (a_f - 1)C^r + [(a_r - a_f)C^r - a_f S^r]$$

$$[(a_r - a_f)S^r - a_f C^r]$$

$$Z_{1r} = Z_{r1} = [\nu(1 + a_r - a_f)CS][a_r C^r]$$

$$+ (a_f - 1)S^r + [\nu(a_r - a_f + a_f)CS][(a_r$$

$$- a_f)C^r - a_f S^r]$$

$$Z_{2r} = [a_r S^r + (a_f - 1)C^r]^r + [(a_r$$

$$- a_f)S^r - a_f C^r]^r$$

$$Z_{r2} = Z_{r2} = [\nu(1 + a_r - a_f)CS][a_r S^r]$$

$$+ (a_f - 1)C^r + [\nu(a_r - a_f + a_f)CS][(a_r$$

$$- a_f)S^r - a_f C^r]$$

$$Z_{r3} = [\nu(1 + a_r - a_f)CS]^r + [\nu(a_r - a_f$$

$$+ a_f)CS]^r \quad (130)$$

رابطه (126) مقدار η_r^H را در اختیار قرار می‌دهد:

$$\eta_r^H = L_1 \{\sigma_x - \alpha_x\} + L_2 \{\sigma_y - \alpha_y\}$$

$$+ L_3 \{\sigma_{xy} - \alpha_{xy}\} \quad (131)$$

با داشتن λ^H می‌توان $[D]_{ep}^H$ را محاسبه کرد:

$$[D]_{ep}^H = [D]e - [D]e \left[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}\right] [M^H]^{-1}$$

تسلیم که عامل گسترش همگن سطح تسلیم است، به صورت رابطه‌های (۱۳۷) و (۱۳۸) در دسترس اند:

$$[D]_{ep}^H = [D]_e - G^T [g]^H [M^H]^{-1} [h]^H \quad (135)$$

$$d\sigma(\kappa) = \bar{H}m \, d\varepsilon^P = \bar{H}m \{ \lambda^H \} \left\{ \frac{\partial F^H}{\partial \sigma} \right\} \quad (136)$$

$$d\sigma(\kappa) = \frac{\bar{H}m}{\gamma} (H_x + H_y + H_{xy}) \quad (137)$$

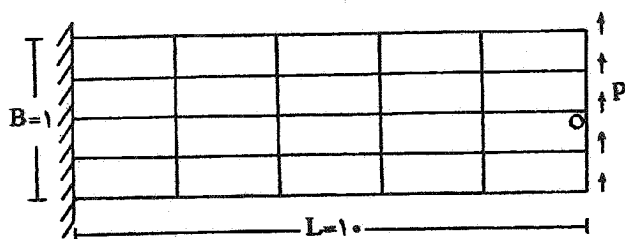
$$I_x = [a_3 C^T + (a_2 - 1) S^T] \lambda_1^H + [(a_3 - a_2) C^T - a_4 S^T] \lambda_2^H$$

$$I_y = [a_3 S^T + (a_2 - 1) C^T] \lambda_1^H + [(a_3 - a_2) S^T - a_4 C^T] \lambda_2^H$$

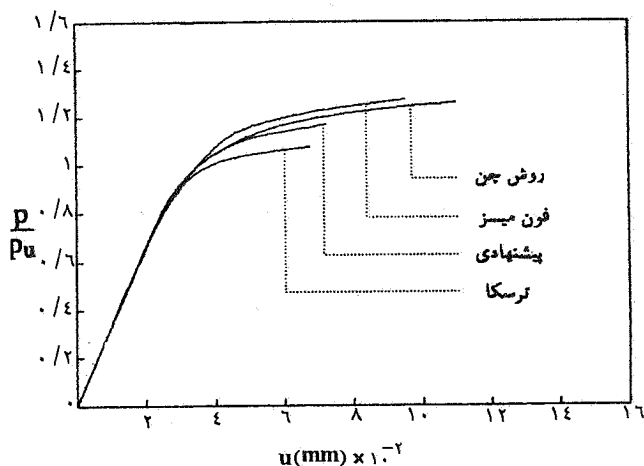
$$H_{xy} = [2(1 + a_2 - a_4) CS] \lambda_1^H + [2(a_3 - a_2 + a_4) CS] \lambda_2^H \quad (138)$$

۹- نمونه خمشی تیر یکسرگیردار

پژوهشگران برای ارزیابی معیارهای مختلف تسلیم و یا روشهای مختلف تحلیل غیر خطی، پاره‌ای از سازه‌های معروف را مورد تحلیل قرار می‌دهند. هدف از تحلیل این مسائل، یافتن اشتباهات فراوانی است که در کارهای عددی، به‌ویژه برنامه‌های رایانه‌ای، وارد می‌شود. از سوی دیگر، تحلیل این سازه‌ها اطمینان لازم برای روشهای پیشنهادی را به دست می‌دهد. اینک برای اطمینان از درستی کار برنامه، یکی از این سازه‌ها که تحلیل کشسان - مومسان آن در دسترس است ارائه می‌شود [۲۵]. این مسئله، تیر یکسرگیردار است و پاسخ آن را چن به دست آورده است. اندازه و مشخصات مواد تیر مورد نظر بدون بعد است. این تیر در شکل (۲) رسم شده است. تیر مزبور به ۲۰ جزء هشت‌گرمی هم عامل تقسیم شده و بار گسترده‌ای در سر آزاد، به‌طور قائم به آن وارد

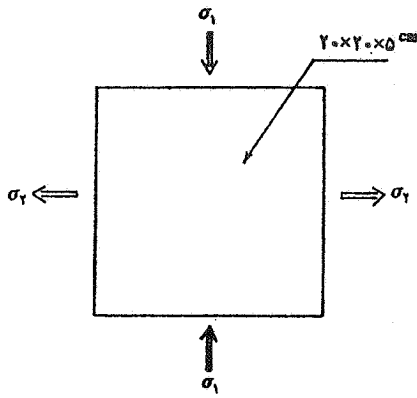


شکل ۲- نمونه خمشی تیر یکسرگیردار

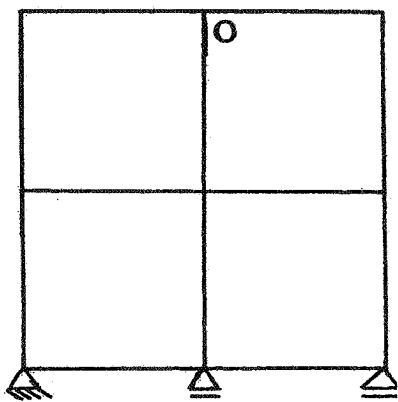


شکل ۳- نمودار بار تغییر مکان نمونه خمشی تیر یکسرگیردار

می‌شود. مشخصات مواد سازه از این قرار است: تنش تسلیم $\sigma_y = 60$ ، عامل کشسانی $E = 2000000$ ، نسبت پواسان $\nu = 0/3$ ، عامل سخت‌شوندگی $H^P = 0$ و ضخامت تیر برابر $t = 1$. شکل (۳) نمودار بار - تغییر مکان تیر مزبور را نشان می‌دهد. محور افقی در این نمودار، تغییر مکان قائم میان تار سر آزاد تیر یعنی نقطه O در شکل (۲) را مشخص می‌سازد. محور قائم نیز نسبت بار وارده به بار نهایی تیر (P/Pu) را نشان می‌دهد. منظور از بار نهایی باری است که اگر به تیر وارد شود، ناحیه فشاری و کششی مقطع سر گیردار تیر از نظر محاسباتی به‌طور کامل جاری شوند. بر این اساس، بار نهایی $Pu = 1/5$ خواهد شد. از نظر محاسباتی این مقطع توان تحمل لنگر خمشی بیشتری را ندارد، در صورتی که بررسی رفتار کشسان - مومسان در شکل (۳) نشان می‌دهد که سازه توانایی تحمل بار بیشتر را دارد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، سطح تسلیم پیشنهادی ضمن اینکه در جهت اطمینان رفتار می‌کند ولی نسبت به ترسکا از موقعیت بهتری برخوردار است. سطح تسلیم فون میسر نیز در خلاف جهت اطمینان رفتار می‌کند. به سخن دیگر،



شکل ۶- نمونه بتنی آزمایش کاپفر



شکل ۷- شبکه بندی و تکیه گاهها در نمونه بتنی

شبکه بندی چهار جزئی برای تحلیل استفاده شده است. چگونگی شبکه بندی و تکیه گاهها در شکل (۷) نشان داده شده است. تنش فشاری σ_1 به صورت عمودی و تنش کششی σ_2 به صورت افقی بر نمونه وارد شده اند. نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1}{0.052}$ فرض شده است. مشخصات مصالح عبارتند از: ضریب کشسانی مماسی اولیه $E_t = 294900$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع، ضریب کشسانی فرض شده $E = 272640$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع، نسبت پواسان برابر $\nu = 0.19$ ، مقاومت کششی بتن برابر $f_t = 29/4$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع و مقاومت فشاری بتن برابر $f_c = 326$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع.

این مسئله با استفاده از سطح تسلیم پیشنهادی و قانون سخت شونده همگن با سه پارامتر سخت شونده مختلف تحلیل شده است. نخست، پارامتر سخت شونده $H^p = 0.01 E = 2726$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع فرض شده است و پس از آن به ترتیب،

					$\frac{P}{P_u}$	G.P.
۱	۲	۳	۴	۵	۰	۰/۸
۳	۴					۰/۹
۴	۶					۱/۰
۴	۶					۱/۱
۳	۴					۱/۱۵
۱	۲	۳	۴	۵		۱/۱۹۸

شکل ۴- ترتیب نقاط گوس مومسان شده در نمونه خمشی تیر یکسرگیردار با استفاده از سطح تسلیم فون میسر

					$\frac{P}{P_u}$	G.P.
۱	۲	۴				۰/۷۶۷
۳	۵					۰/۹۰۵
۵						۰/۹۱۹
۶						۰/۹۸۲
۵						۰/۹۹۵
۳	۵					۱/۰۳۶
۱	۲	۴				

شکل ۵- ترتیب نقاط گوس مومسان شده در نمونه خمشی تیر یکسرگیردار با استفاده از سطح تسلیم پیشنهادی

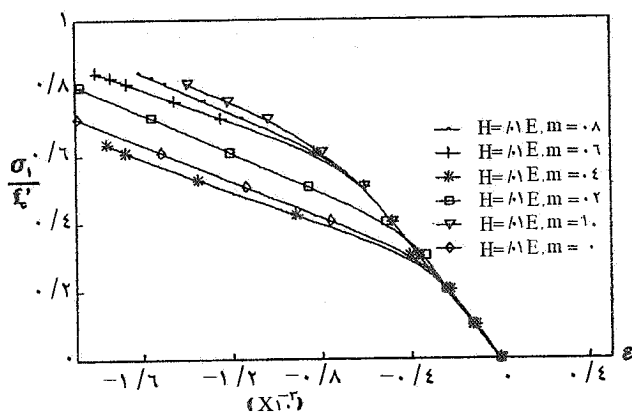
معیار فون میسر توانایی بارگیری تیر را بیشتر از مقدار واقعی نشان می دهد.

شکل (۴) ترتیب نقاط گوس مومسان شده در روند تحلیل را نشان می دهد. تعداد نقاط گوس در هر جزء 2×2 بوده و بارگذاری تا ۲۰ درصد بیش از بار نهایی محاسباتی به تیر وارد شده است. مقایسه شکل های (۴) و (۵) نشان می دهد که سطح تسلیم فون میسر، ظرفیت باربری تیر را بیشتر می پندارد و در بار بزرگتری نقاط مومسان می شوند.

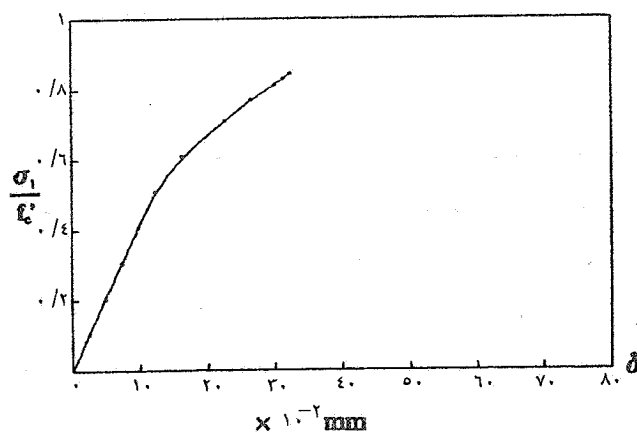
۱۰- نمونه بتنی کاپفر

نتایج آزمایشگاهی کاپفر که در سال ۱۹۶۹ انجام گرفت [۲۸]، یکی از نمونه های قابل توجه برای تأیید سطح تسلیم پیشنهادی است. نمونه های بتنی مزبور به شکل مکعب مستطیل بوده و ابعاد آن $20 \times 20 \times 5$ سانتی متر است. هو و اسکنوربرج این نمونه را به وسیله یک جزء نه گرهی و با استفاده از سطح تسلیم فون میسر و قانون سخت شونده همگن مورد تحلیل قرار دادند [۲۶]. شکل (۶) نمونه مزبور را نشان می دهد. اینک از جزء هم عامل هشت گرهی و

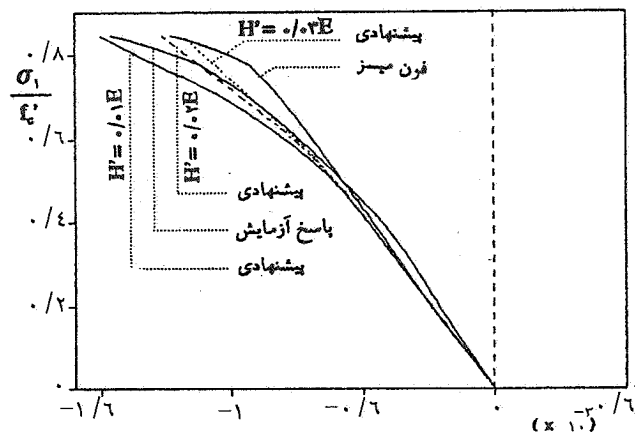
بارهای وارده بر آن به صورت نموی 21 وارد شده و در هر گام پاره‌ای کوچک از بار به سازه اثر داده می‌شود. در هر یک از این نموها، رابطه حاکم بر رفتار سازه خطی در نظر گرفته می‌شود. در تحلیلهای نموی - تکراری 22 بار وارده چند قسمت شده‌است و در هر گام یک قسمت به سازه اثر داده می‌شود. در این مقاله، سطح تسلیمی برای مواد با مقاومت فشاری و کششی یکسان و یا متفاوت همراه با رابطه‌هایی برای محاسبه ماتریسهای کشسان - مومسان مبتنی بر سطح تسلیم پیشنهادی ارائه شده‌است. در ادامه، بر پایه این رابطه‌ها یک برنامه رایانه‌ای تهیه و به عنوان تجربه کارایی سطح تسلیم جدید، نمونه‌های عددی متفاوت مورد تحلیل قرار گرفت که به دلیل حجم محدود مقاله نمی‌توان همه آنها را ارائه کرد. مقایسه نتایج به دست آمده از این تحلیل، با نتایج تحلیل دیگر پژوهشگران، کارایی سطح تسلیم پیشنهادی و برنامه رایانه‌ای را نمایان می‌سازد.



شکل ۹- مقایسه نتایج تحلیل ترکیبهای مختلف سخت شوندهای نموی بتنی کاپفر



شکل ۱۰- نمودار بار - تغییر مکان نمونه بتنی کاپفر



شکل ۸- مقایسه نتایج تحلیل کشسان - مومسان نمونه بتنی کاپفر

شکل ۸- مقایسه نتایج تحلیل کشسان - مومسان نمونه بتنی کاپفر
 $H' = 0.03E = 8178$ و $H' = 0.02E = 5452$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع مورد نظر قرار گرفته است. شکل (۸) نتایج حاصل از این تحلیل را نشان می‌دهد. محور افقی این نمودار کرنش و محور قائم نسبت تنش σ_1 به مقاومت فشاری بتن F_c ، را نمایش می‌دهد. نمودار مزبور استفاده از سطح تسلیم پیشنهادی و هر یک از پارامترهای سخت شوندگی را نسبت به معیار فون میسر ایمنتر نشان داده‌است ولی در حالت $H' = 0.01E$ مناسبتر عمل کرده است. به سخن دیگر، در این حالت پاسخ معیار پیشنهادی در جهت اطمینان بوده و از سوی دیگر به حد مطلوبی به پاسخ واقعی نزدیک است. باید خاطر نشان کرد که رابطه‌های ارائه شده و برنامه وابسته قادر است که رفتارهای مختلف سخت شوندگی را در برگیرد. از این رو، این مسئله با حالت سخت شوندگی ترکیبی نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. اگر نسبت ترکیب دو حالت سخت شوندگی همگن و پویا باشد ($0 \leq m \leq 1$) به گونه‌ای که $m=0$ نشانگر سخت شوندگی پویا و $m=1$ بیانگر سخت شوندگی همگن است، نتایج تحلیل ترکیبهای مختلف سخت شوندگی در شکل (۹) ارائه شده است. محور قائم در این نمودار نسبت $\frac{\sigma_1}{F_c}$ و محور افقی کرنش را نشان می‌دهد. نمودار بار تغییر مکان نمونه بتنی کاپفر، در حالت سخت شوندگی همگن و عامل سخت شوندگی $H' = 0.01E = 2726$ کیلوگرم بر سانتی متر مربع، در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

۱۱- نتیجه گیری

در نظریه مومسان نموی برای تحلیل غیرخطی یک سازه،

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1. elastic | 9. kinematic hardening | 17. plastic flow |
| 2. plastic | 10. computer | 18. yield function |
| 3. plane stress | 11. non - linear analysis | 19. Ziegler's modifications |
| 4. yield surface | 12. theory | 20. Poisson's ratio |
| 5. parameter | 13. hydrostatic pressure | 21. incremental load |
| 6. flow rule | 14. elasto - plastic matrix | 22. incremental - iterative methods |
| 7. mixed hardening | 15. yield criterion | |
| 8. isotropic hardening | 16. strength | |

مراجع

1. Chakrabarty, J., *Theory of Plasticity*, McGraw - Hill, New York, 1987.
2. Chen, W. F., *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw - Hill, New York, 1982.
3. Chen, W. F., and Baladi, G. Y., *Soil Plasticity Theory and Implementation*, Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam, The Netherlands, 1985.
4. Anand, S. C., "Finite Element Analysis of Elasto - Plastic Plane Stress Problems Based Upon Tresca Yield Criterion," Ph.D. Dissertation, Northwestern, University, 1968.
5. Anand, S. C., "Constitutive Relations and Solution Schemes in Plastic Analysis," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM1, pp. 21-35, February 1980.
6. Anand, S. C., and Weisgerber, F. E., "Usage of the Tresca Yield Condition in Finite Element Plane Strain Analysis," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No.8, pp. 625-637, 1978.
7. Torkamani, M. A. M., "A Linear Yield Surface in Plastic Cyclic Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 3, pp. 499-516, 1986.
8. Levy, N., "Finite Element Formulation of Stress - Strain Matrix for an Elastically- Perfectly- Plastic-Tresca Yield Material," Technical Report NG1 40-002-08012, Brown University, 1970.
9. Owen & Hinton, "Finite Elements in Plasticity," Department of Civil Engineering, University College of Swansea, U. K., 1986.
10. Willam, K. J., and Warnke, E. P., "Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete," *Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc.* Vol. 19, pp. 1-30, 1975.
11. Chen, C. T., and Chen, W. F., "Constitutive Relations for Concrete," *Journal of The Engineering Mechanics Division*, Vol. 101, No. EM4, pp. 465-481, August 1975.
12. Ottosen, N. S., "Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 105, No. EM1, pp. 127-141, February 1979.
13. Anand, S. C., and Weisgerber, F. E., "Inelastic Finite Element Analysis Using Tresca Yield Condition," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, No. EM1, pp. 1-16, February 1977.
14. Weisgerber, F. E., "Tresca Yield Condition in Elastic - Plastic Finite Element Analysis," Ph. D. Dissertation, Clemson University, May 1976.
15. Rezaiee - Pajand, M., "Uniaxial Symmetrical Tresca Yield Condition in Elastic - Plastic Finite Element Analysis," Master's Thesis, University of Pittsburg, 1979.
16. Torkamani, M. A. M., and Rezaiee - Pajand, M., "Elastic - Plastic Analysis for Cyclic Loading and Tresca Yield Condition," Research Report SETEC-CE-82-009, University of Pittsburg, Department of Civil Engineering, Pittsburg,

- Pennsylvania, July 1982.
17. Torkamani, M. A. M. and Rezaiee - Pajand, M., "Plastic Cyclic Analysis Using Linear Yield Surface," *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 110, No. 5, pp. 776-793, May 1984.
 18. Rezaiee - Pajand, M., "Elasto - Plastic Analysis of Plane Stress Problems Using Uniaxial Symmetric Tresca Yield Surface and Kinematic Hardening," Ph.D. Dissertation , University of Pittsburg, Pennsylvania, 1982.
 19. Weisgerber, F. E., "Elastic - Plastic Analysis for Tension - Weak Materials Using a Linearized Yield Surface," Research Report Performed While Occupying a Junior Morrow Research Chair, Summer / Autumn Quarters, 1981.
 20. Weisgerber, F. E., "A Linearized Yield Surface for Tension - Weak Materials," *Recent Advances in Engineering Mechanics*, Vol. 2, pp. 964-967, 1983.
 21. Elsafi, O. Y. H., "Analysis of Plane Elasto-Plastic Problems Using a Modified Tresca Yield Condition with Kinematic Hardening," Master's Thesis, University of Pittsburg, 1984.
 22. Torkamani, M. A. M., and Elsafi, O. Y. H., "A Unified Approach to the Solution of Plane Elasto - Plastic Problems: Criteria of Yielding," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 5, pp. 1167-1181, 1989.
 23. Alsanusi, S. K., "Elasto - Plastic Analysis of Plane Stress Problems Using Linearized Yield Surface and Mixed Hardening," Ph.D. Dissertation, University of Pittsburg, 1987.
 24. Torkamani, M. A. M., and Alsanusi, S. K., "Elasto-Plastic Analysis of Plane Stress Problem Using Linearized Yield Surface and Mixed Hardening Rule," *Computers & Structures* , Vol. 31, No. 6, pp. 935-956, 1989.
 25. Chern, J. C., Lin, F. B., and Marchertas, A. H., "A Two-Surface Plastic Model for Concrete and Geomaterials," pp. 267-272, *In International Conference on Computational Mechanics* (1986: Tokyo, Japan), (ED. Yagawa, G., and Atluri, S. N.), NewYork : Springer - Verlag, 1986.
 26. Hu, Hsuan - Teh, and Schnobrich, William C., "Constitutive Modeling of Concrete By Using Nonassociated Plasticity," *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 1, No. 4, pp. 199-215, November 1989.
 27. Owen, D. R. J., Hinton, E., and Onate, E., *Computational Plasticity*, Pineridge press , 1987.
 28. Kupfer, H. B., and Gerstle, K. H., "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 99, No. EM4, pp. 853-866, August 1973.

$$- a_1 \sigma(\kappa) = 0 \quad (139)$$

برای دستیابی به ماتریس کشسان - مومسان مقدار $M^{(1)}$ مورد نیاز است. با استفاده از رابطه (۴۱) به مقدار $M^{(1)}$ می توان رسید. ماتریس کشسان - مومسان با قرار دادن $M^{(1)}$ در رابطه (۲۹) به دست می آید. در ادامه ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۱ همراه با ضریبها و درایه های آن درج می شود:

پیوست

ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۱

تابع تسلیم پهلوی AB بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی $(\sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_x)$ به صورت زیر ارائه می شود:

$$F^{(1)} = [a_1 C^2 + (1-a_1) S^2] \sigma_x + [a_1 S^2 + (1-a_1) C^2] \sigma_y + 2(a_1 - 1) CS \sigma_{xy}$$

$$+ \nu[a_1(1 - a_1)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$+ \nu^2[a_1^2 + (1 - \nu a_1)(\nu a_1 C^r + S^r)S^r]$$

$$d_{rr} = d_{rr} = \frac{(1 - \nu)}{\nu} [-\nu a_1(1 - \nu a_1)C^r S^r$$

$$- (\nu a_1^2 - \nu a_1 + \nu)C^r S^r] + \frac{\nu(1 - \nu)}{\nu}$$

$$[-\nu a_1(1 - \nu a_1)C^r S^r - (\nu a_1^2 - \nu a_1 + \nu)C^r S^r]$$

$$d_{rr} = (1 - \nu)^2 [C^r S^r - \nu a_1 C^r S^r (1 - a_1)] \quad (142)$$

ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۲

تابع تسلیم پهلوی FG بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر ارائه می شود:

$$F^{(r)} = [(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]\sigma_x + [(a_\delta$$

$$- 1)S^r - a_\delta C^r]\sigma_y + \nu(\nu a_\delta - 1)CS\sigma_{xy}$$

$$- a_\nu a_\delta \sigma(\kappa) = 0 \quad (143)$$

در ادامه ماتریس کشسان-مومسان پهلوی ۱ همراه با ضریبها و درایه‌های آن درج می شود:

$$[M^{(r)}] = H_r(1 - m)[1 + \nu C^r S^r$$

$$- \nu a_\delta(1 - a_\delta)(1 + \nu C^r S^r)] + \frac{E}{(1 - \nu^2)}[1$$

$$- \nu a_\delta(1 - \nu)(1 - a_\delta) + \bar{H}ma_r^2 a_\delta^2 \quad (144)$$

$$G_r = \frac{E}{M^{(r)}(1 - \nu^2)}$$

$$d_{11} = a_\delta^2 + (1 - \nu a_\delta)(C^r + \nu a_\delta S^r)C^r$$

$$M^{(1)} = H_1(1 - m)[\lambda a_1(a_1 - 1)C^r S^r + \nu C^r S^r + a_1^2$$

$$+ (1 - a_1)^2] + \frac{E}{(1 - \nu^2)}[1 - \nu a_1(1 - \nu)$$

$$(1 - a_1)] + m \bar{H}a_1^2 \quad (140)$$

$$[D]_{ep}^{(1)} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/\nu \end{bmatrix}$$

$$- G_1 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{Sym.} & & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$(141)$$

$$G_1 = \frac{E}{M^{(1)}(1 - \nu^2)}$$

$$d_{11} = a_1^2 + (1 - \nu a_1)(\nu a_1 C^r + S^r)S^r$$

$$+ \nu[a_1(1 - a_1)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$+ \nu^2[a_1^2 + (1 - \nu a_1)(\nu a_1 S^r + C^r)C^r]$$

$$d_{12} = d_{21} = a_1(1 - a_1)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r +$$

$$\nu[C^r + S^r - \nu a_1(1 - a_1)(1 - \nu C^r S^r)]$$

$$+ \nu^2[a_1(1 - a_1)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$d_{22} = d_{22} = \frac{(1 - \nu)}{\nu} [-\nu a_1(1 - \nu a_1)C^r S^r$$

$$- (\nu a_1^2 - \nu a_1 + \nu)C^r S^r] + \frac{\nu(1 - \nu)}{\nu} [-\nu a_1$$

$$(1 - \nu a_1)C^r S^r - (\nu a_1^2 - \nu a_1 + \nu)C^r S^r]$$

$$d_{23} = a_1^2 + (1 - \nu a_1)(\nu a_1 S^r + C^r)C^r$$

$$W_{11}^A = 1 + \nu C^r S^r - \nu a_1(1 - a_1)(1 + \nu C^r S^r)$$

$$W_{1r}^A = W_{r1}^A = \nu C^r S^r (\nu a_1 - 1)(a_r - a_f + 1)$$

$$+ a_1(1 + a_r) + a_f(1 - a_1) - 1$$

$$W_{rr}^A = [a_r^r + (a_f - 1)^r](\nu C^r S^r + 1)$$

$$+ \nu a_r(1 - a_f) C^r S^r \quad (147)$$

$$[M^A] = [A]^{(c)} + \left[\frac{\partial F^A}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^A}{\partial \sigma} \right]$$

$$= [A]^{(c)} + \frac{E}{(1-\nu^r)} [J]^A \quad (148)$$

$$[J]^A = \begin{bmatrix} J_{11}^A & J_{1r}^A \\ J_{r1}^A & J_{rr}^A \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$J_{11}^A = a_1^r + (1 - a_1)^r + \nu a_1(1 - a_1)$$

$$J_{1r}^A = J_{r1}^A = a_1 a_r + \nu a_1(a_f - 1)$$

$$+ (1 - a_1)(a_f - 1 + \nu a_r)$$

$$J_{rr}^A = (1 - a_f)^r + a_r^r + \nu a_r(a_f - 1) \quad (150)$$

بافرض $G = \frac{E}{(q_1 \nu - \nu)}$ ماتریس کشسان - مومسان برای گوشه A از رابطه زیر به دست می آید. درایه های ماتریسهای $[g]^A$ و $[h]^A$ نیز در ادامه آمده اند:

$$[D]_{ep}^A = [D]_e - G^r [g]^A [M^A]^{-1} [h]^A \quad (151)$$

$$g_{11}^A = a_1 C^r + (1 - a_1) S^r + \nu [a_1 S^r + (1 - a_1) C^r]$$

$$g_{1r}^A = a_r C^r + (a_f - 1) S^r + \nu [a_r S^r + (a_f - 1) C^r]$$

$$g_{r1}^A = \nu [a_1 C^r + (1 - a_1) S^r] + a_1 S^r + (1 - a_1) C^r$$

$$g_{rr}^A = \nu [a_r C^r + (a_f - 1) S^r] + a_r S^r + (a_f - 1) C^r$$

$$+ \nu [a_\delta(1 - a_\delta)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$+ \nu^r [a_\delta^r + (1 - \nu a_\delta)(S^r + \nu a_\delta C^r) S^r]$$

$$d_{1r} = d_{r1} = a_\delta(1 - a_\delta)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r +$$

$$\nu [C^r + S^r - \nu a_\delta(1 - a_\delta)(1 - \nu C^r S^r)]$$

$$+ \nu^r [a_\delta(1 - a_\delta)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$d_{1r} = d_{r1} = \frac{(1 - \nu)}{\nu} [\nu a_\delta(1 - \nu a_\delta) C^r S^r$$

$$+ (\nu a_\delta^r - \nu a_\delta + \nu) C^r S^r] + \frac{\nu(1 - \nu)}{\nu}$$

$$[\nu a_\delta(1 - \nu a_\delta) C^r S^r + (\nu a_\delta^r - \nu a_\delta + \nu) C^r S^r]$$

$$d_{rr} = a_\delta^r + (1 - \nu a_\delta)(S^r + \nu a_\delta C^r) S^r$$

$$+ \nu [a_\delta(1 - a_\delta)(1 - \nu C^r S^r) + C^r S^r]$$

$$+ \nu^r [a_\delta^r + (1 - \nu a_\delta)(C^r + \nu a_\delta S^r) C^r]$$

$$d_{rr} = d_{rr} = \frac{(1 - \nu)}{\nu} [\nu a_\delta(1 - \nu a_\delta) C^r S^r$$

$$+ (\nu a_\delta^r - \nu a_\delta + \nu) C^r S^r] + \frac{\nu(1 - \nu)}{\nu}$$

$$[\nu a_\delta(1 - \nu a_\delta) C^r S^r + (\nu a_\delta^r - \nu a_\delta + \nu) C^r S^r]$$

$$d_{rr} = (1 - \nu)^r [C^r S^r - \nu a_\delta C^r S^r (1 - a_\delta)] \quad (145)$$

ماتریس کشسان - مومسان گوشه A مقادیر $[A]^{(c)}$ ، $[M^A]$ و $[J]^A$ برای گوشه A به صورت زیر نوشته می شوند:

$$[A]^{(c)} = H^A (1 - m) \begin{bmatrix} W_{11}^A & W_{1r}^A \\ W_{r1}^A & W_{rr}^A \end{bmatrix}$$

$$+ \bar{H}m \begin{bmatrix} a_1^r & a_r^r \\ a_f^r & a_f^r \end{bmatrix} \quad (146)$$

$$[M^B] = [A]^{(c)} + \left[\frac{\partial F^B}{\partial \sigma} \right]^T [D]_e \left[\frac{\partial F^B}{\partial \sigma} \right]$$

$$= [A]^{(c)} + \frac{E}{(1-\nu^T)} [J]^B \quad (156)$$

$$J_{11}^B = a_1^T + (1 - a_1)^T + \nu a_1 (1 - a_1)$$

$$J_{12}^B = J_{21}^B = \nu a_1 (1 - a_1) + \nu [a_1^T + (1 - a_1)^T]$$

$$J_{22}^B = a_1^T + (1 - a_1)^T + \nu a_1 (1 - a_1) \quad (157)$$

ماتریس کشسان - مومسان برای گوشه B از رابطه زیر به دست می‌آید. درایه های ماتریسهای $[g]^B$ و $[h]^B$ نیز در ادامه آمده‌اند:

$$g_{11}^B = a_1 C^T + (1 - a_1) S^T + \nu [a_1 S^T + (1 - a_1) C^T]$$

$$g_{12}^B = \nu [a_1 C^T + (1 - a_1) S^T] + a_1 S^T + (1 - a_1) C^T$$

$$g_{21}^B = \nu [a_1 C^T + (1 - a_1) S^T] + a_1 S^T + (1 - a_1) C^T$$

$$g_{22}^B = a_1 C^T + (1 - a_1) S^T + \nu [a_1 S^T + (1 - a_1) C^T]$$

$$g_{r1}^B = (1 - \nu)(\nu a_1 - 1)CS$$

$$g_{r2}^B = (1 - \nu)(1 - \nu a_1)CS \quad (158)$$

$$h_{11}^B = a_1 C^T + (1 - a_1) S^T + \nu [a_1 S^T + (1 - a_1) C^T]$$

$$h_{12}^B = \nu [a_1 C^T + (1 - a_1) S^T] + a_1 S^T + (1 - a_1) C^T$$

$$h_{1r}^B = (1 - \nu)(\nu a_1 - 1)CS$$

$$h_{21}^B = \nu [a_1 C^T + (1 - a_1) S^T] + a_1 S^T + (1 - a_1) C^T$$

$$h_{22}^B = a_1 C^T + (1 - a_1) S^T + \nu [a_1 S^T + (1 - a_1) C^T]$$

$$g_{r1}^A = (1 - \nu)(\nu a_1 - 1)CS$$

$$g_{r2}^A = (1 - \nu)(1 + a_r - a_f)CS \quad (152)$$

$$h_{11}^A = a_1 C^T + (1 - a_1) S^T + \nu [a_1 S^T + (1 - a_1) C^T]$$

$$h_{12}^A = \nu [a_1 C^T + (1 - a_1) S^T] + a_1 S^T + (1 - a_1) C^T$$

$$h_{1r}^A = (1 - \nu)(\nu a_1 - 1)CS$$

$$h_{21}^A = a_r C^T + (a_f - 1) S^T + \nu [a_r S^T + (a_f - 1) C^T]$$

$$h_{22}^A = \nu [a_r C^T + (a_f - 1) S^T] + a_r S^T + (a_f - 1) C^T$$

$$h_{r2}^A = (1 - \nu)(1 + a_r - a_f)CS \quad (153)$$

ماتریس کشسان - مومسان گوشه B

مقادیر $[A]^{(c)}$ ، $[M^B]$ و $[J]^B$ برای گوشه B، مانند گوشه های دیگر به صورت زیر نوشته خواهند شد:

$$[A]^{(c)} = H^B (1 - m) \begin{bmatrix} W_{11}^B & W_{12}^B \\ W_{21}^B & W_{22}^B \end{bmatrix}$$

$$+ \bar{H}m \begin{bmatrix} a_1^T & a_1^T \\ a_1^T & a_1^T \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$W_{11}^B = \nu C^T S^T + a_1^T + (1 - a_1)^T - \nu a_1 C^T S^T (1 - a_1)$$

$$W_{12}^B = W_{21}^B = -\nu C^T S^T + \nu a_1 (1 - a_1)$$

$$+ \nu a_1 C^T S^T (1 - a_1)$$

$$W_{22}^B = \nu C^T S^T + a_1^T + (1 - a_1)^T$$

$$- \nu a_1 C^T S^T (1 - a_1) \quad (155)$$

$$g_{11}^F = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$h_{11}^B = (1 - \nu)(1 - \nu a_1)CS \quad (159)$$

$$g_{12}^F = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$g_{21}^F = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$g_{22}^F = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$g_{r1}^F = (1 - \nu)(\nu a_\delta - 1)CS$$

$$[A]^{(c)} = H^F(1 - m) \begin{bmatrix} W_{11}^F & W_{12}^F \\ W_{21}^F & W_{22}^F \end{bmatrix}$$

$$g_{r2}^F = (1 - \nu)(1 - \nu a_\delta)CS \quad (165)$$

$$+ \bar{H}ma_\nu a_\delta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$h_{11}^F = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$W_{11}^F = \nu C^r S^r + a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r - \nu a_\delta C^r S^r (1 - a_\delta)$$

$$h_{12}^F = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$W_{12}^F = W_{21}^F = -\nu C^r S^r + \nu a_\delta (1 - a_\delta)$$

$$h_{13}^F = (1 - \nu)(\nu a_\delta - 1)CS$$

$$+ \nu a_\delta C^r S^r (1 - a_\delta)$$

$$h_{21}^F = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$W_{22}^F = \nu C^r S^r + a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r$$

$$h_{22}^F = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$- \nu a_\delta C^r S^r (1 - a_\delta) \quad (161)$$

$$h_{r1}^F = (1 - \nu)(1 - \nu a_\delta)CS \quad (166)$$

$$[M^F] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} [J]^{(F)} + [A]^{(c)} \quad (162)$$

ماتریس کشسان - مومسان گوشه G

مقادیر $[A]^{(c)}$ ، $[M^G]$ و $[J]^G$ برای گوشه G به صورت زیر است:

$$[A]^{(c)} = H^G(1 - m) \begin{bmatrix} W_{11}^G & W_{12}^G \\ W_{21}^G & W_{22}^G \end{bmatrix} + \bar{H}ma_\nu \begin{bmatrix} a_\delta^r & a_\delta^r \\ a_\nu^r & a_\nu^r \end{bmatrix} \quad (167)$$

$$J_{11}^F = a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r + \nu a_\delta (1 - a_\delta)$$

$$J_{12}^F = J_{21}^F = \nu a_\delta (1 - a_\delta) + \nu [a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r]$$

$$J_{22}^F = a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r + \nu a_\delta (1 - a_\delta) \quad (163)$$

ماتریس کشسان - مومسان برای گوشه F از رابطه زیر به دست

می آید. درایه های ماتریسهای $[g]^F$ و $[h]^F$ نیز در ادامه آمده اند:

$$W_{11}^G = a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r + \nu C^r S^r [1$$

$$+ \nu a_\delta (1 - a_\delta) + \nu a_\nu (\nu a_\nu - 1)]$$

$$[D]_{ep}^F = [D]_e - G^r [g]^F [M^F]^{-1} [h]^F \quad (164)$$

$$g_{11}^G = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$g_{1r}^G = (a_r - a_r)C^r - a_r S^r + \nu[(a_r - a_r)S^r - a_r C^r]$$

$$g_{r1}^G = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$g_{rr}^G = (a_r - a_r)S^r - a_r C^r + \nu[(a_r - a_r)C^r - a_r S^r]$$

$$g_{r1}^G = (1 - \nu)(\nu a_\delta - 1)CS$$

$$g_{rr}^G = (1 - \nu)(a_r - a_r + a_r)CS \quad (172)$$

$$h_{11}^G = (a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r + \nu[(a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r]$$

$$h_{1r}^G = (a_\delta - 1)S^r - a_\delta C^r + \nu[(a_\delta - 1)C^r - a_\delta S^r]$$

$$h_{1r}^G = (1 - \nu)(\nu a_\delta - 1)CS$$

$$h_{r1}^G = (a_r - a_r)C^r - a_r S^r + \nu[(a_r - a_r)S^r - a_r C^r]$$

$$h_{rr}^G = (a_r - a_r)S^r - a_r C^r + \nu[(a_r - a_r)C^r - a_r S^r]$$

$$h_{rr}^G = (1 - \nu)(a_r - a_r + a_r)CS \quad (173)$$

$$W_{1r}^G = W_{r1}^G = (a_r - a_r)[a_\delta(1$$

$$- \nu C^r S^r) + 1] - \nu a_r C^r S^r$$

$$W_{rr}^G = a_r^r + (a_r - a_r)^r + \nu C^r S^r$$

$$(a_r - a_r + a_r)^r \quad (168)$$

$$[M^G] = \frac{E}{(1-\nu^r)} [J]^G + [A]^{(c)} \quad (169)$$

$$J_{11}^G = a_\delta^r + (1 - a_\delta)^r + \nu a_\delta(1 - a_\delta)$$

$$J_{1r}^G = J_{r1}^G = a_\delta(1 - \nu)(a_r - a_r + a_r)$$

$$+ a_r - a_r + \nu a_r$$

$$J_{rr}^G = (a_r - a_r)^r + a_r^r + \nu a_r$$

$$(a_r - a_r) \quad (170)$$

ماتریس کشسان-مومسان برای گوشه G از رابطه زیر به دست می آید. درایه های ماتریسهای $[g]^G$ و $[h]^G$ نیز در ادامه درج خواهند شد:

$$[D]_{ep}^G = [D]_e - G^r [g]^G [M^G]^{-1} [h]^G \quad (171)$$