

## تحلیل استاتیکی صفحات مثلثی

محمد مهدی سعادت پور\* و داود مخالفی\*\*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۵/۶/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۱/۲۶)

چکیده - مقاله حاضر به عنوان یک روش عددی جدید برای تحلیل استاتیکی صفحات مثلثی نازک در دستگاه طبیعی مساحتی تلقی می شود. اطلاعات منتشر شده قبلی در مورد حل صفحات مثلثی با شرایط مرزی مختلف حاکی از حل ریلی - ریتز چنین صفحاتی در دستگاه مختصات کارتزین است که نتیجتاً ارائه معادلات مرزها و انتگرالگیری تابع انرژی را بسیار پر حجم می سازد. در این مقاله از دستگاه مختصات مساحتی استفاده شده است. که در آن هندسه شکل با نگاهت یک مثلث پایه بسیار ساده ارائه و انتخاب چند جمله ایهای بسط تابع جابه جایی مجاز برای کاربرد روش ریتز به سهولت انجام می شود. انتگرالها به طور دقیق محاسبه می شوند و همگرایی حل به خاطر استفاده از چند جمله ایهای کامل در این روش حتمی است. براساس راه حل موجود مثالهای متعددی حل شده است و جوابها با تعداد محدود جوابهای صفحات مثلثی مقایسه شده است.

## Static Analysis of Triangular Plates

M. M. Saadatpour and D. Mokhalefi

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** This paper may be regarded as a new numerical method for the analysis of triangular thin plates using the natural area coordinates. Previous studies on the solution of triangular plates with different boundary conditions are mostly based on the Rayleigh-Ritz principle which is performed in the Cartesian

\* دانشیار      \*\* دانشجوی کارشناس ارشد

|                |  |                     |                               |           |  |
|----------------|--|---------------------|-------------------------------|-----------|--|
| $\alpha$       | ضریب جابه‌جایی در معادله $w = \alpha \frac{pa}{D}$ | $L_i$               | مختصات مثلثی                  | A         | مساحت  |
| $\beta$        | ضریب لنگر خمشی در معادله $M = \beta pa^2$          | $M_x, M_y, M_{xy}$  | مؤلفه‌های لنگر خمشی           | $A_i$     | مساحت قسمتی از                                   |
| $\{\Delta\}$   | بردار ضرایب مجهول                                  | $\langle N \rangle$ | بردار توابع درونیایی          |           | مثلث محدود به ضلع مقابل                          |
| $\{K\}$        | بردار انحنا در دستگاه مختصات کارتزین               | M                   | تعداد جملات درونیایی          |           | گوشه i و نقطه p داخل مثلث                        |
| $\bar{\kappa}$ | بردار انحنا در دستگاه مختصات مساحتی                | p                   | بارگسترده                     | a,b,c     | اعداد صحیح بین صفر و ۲ بیان                      |
| $\nu$          | ضریب پواسون  | $P_i$               | نیروی متمرکز در نقطه i        |           | کننده شرایط مرزی به ترتیب در مرزهای ۱ و ۲ و ۳    |
| $\xi, \eta$    | مختصات طبیعی                                       | $\{q\}$             | بردار نیرو                    | $a_{ijk}$ | ضرایب مجهول تابع جابه‌جایی یا مختصات تعمیم یافته |
| $\Pi$          | انرژی پتانسیل کل                                   | [S]                 | ماتریس سختی                   | [B]       | ماتریس تبدیل جابه‌جایی به انحنا                  |
| $\Phi$         | تابع مرزی جابه‌جایی                                | t                   | ضخامت                         | D         | سختی خمشی صفحه                                   |
|                |  | U                   | تابع تابع انرژی ارتجاعی       | [D]       | ماتریس خواص ماده                                 |
|                |  | V                   | تابع تابع انرژی پتانسیل       | $\bar{D}$ | ماتریس معادل خواص ماده در دستگاه مختصات مثلثی    |
|                |  | w                   | تابع جابه‌جایی یا تغییر مکان  |           |  |
|                |  | w                   | تابع میدان جابه‌جایی          |           |  |
|                |  | $x_i, y_i$          | مختصات گوشه i ام مثلث         |           |  |
|                |  | $\{Y\}, \{X\}$      | بردارهای مختصات گوشه‌های مثلث |           |  |

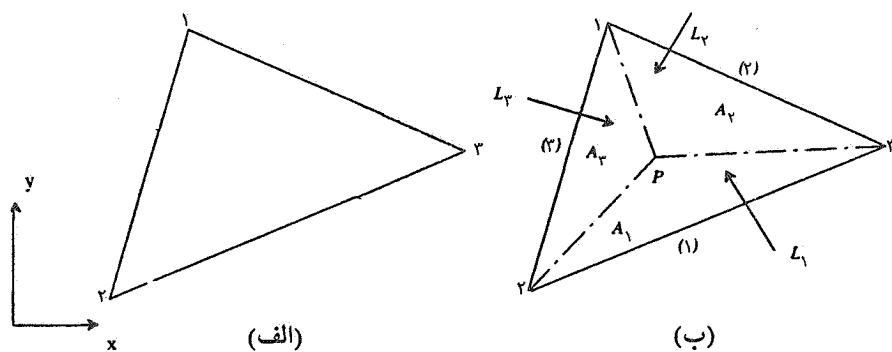
coordinates. Consequently, manipulation of the geometry and numerical calculation of the integrals are time consuming and tedious. In this paper a new approach is developed to analyze triangular plates by the Ritz method, using interpolation functions in the area coordinates. The geometry is presented in a natural way by mapping a parent triangle and the integrals are evaluated analytically. In this approach, the convergence is always assured due to the completeness of interpolating polynomials. Several examples are presented and the results are compared with other available data.

## ۱- مقدمه

مراجعه به طور گسترده تری در مورد روش انرژی برای حل صفحات و کاربرد راه حل ریلی - ریتز بحث شده‌است. مرجع [۲] به طور عملی کاربرد روش اخیر را در حل صفحات مثلثی مختلف نشان داده است، لیکن احتمالاً به دلیل محدودیت ماشینهای حسابگر در حل مسائل عددی از تعداد حداکثر سه جمله برای بسط تابع جابه‌جایی استفاده کرده‌است که به طور طبیعی نباید انتظار جوابهای دقیق داشت.

گسترش تحقیقات فضایی در دهه‌های ۱۹۶۰ و بعد از آن و نیاز به تحلیل ارتعاشی صفحات به منظور تعیین فرکانسها و شکل مودها باعث شد تا به طور فزاینده‌ای برای حل ارتعاشی صفحات مثلثی نیز اقدام شود. لیسا [۵] بحث مختصر و مفیدی را در مورد تحلیل ارتعاشی صفحات خصوصاً صفحات مثلثی با لبه‌های آزاد ارائه می‌دهد. کیم و دیکینسون [۷و۶] به طور مبسوط در مقاله اول خود تحلیل فرکانسی صفحات قائم الزاویه و سپس در مقاله دوم خود

به نظر می‌رسد اطلاعات مربوط به حل استاتیکی صفحات مثلثی ایزوتروپیک با ضخامت یکنواخت، محدود به اطلاعاتی است که کلاً در کتابهای معروف تحلیل صفحات [۱ تا ۴] جمع آوری شده‌است. به جز تحلیل مسئله صفحه مثلث متساوی الاضلاع با مرزهای لولایی تحت دو حالت بارگذاری گسترده یکنواخت و یا لنگر خمشی گسترده یکنواخت در مرزها که در مرجع [۱] گزارش شده و توسط مؤلف دوم همین کتاب حل شده‌است، هیچ حل دقیقی برای صفحات مثلثی وجود ندارد. تیموشنکو [۱] در بحث مربوط به صفحات مثلثی در مورد راه حل آینه ای و روش تفاضل محدود صحبت می‌کند که اولی صرفاً برای حل صفحات مثلث قائم الزاویه با وتر لولایی کاربرد دارد و راه حل دوم گزینه ای برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل تلقی می‌شود. مراجع [۲ تا ۴] حاوی اطلاعاتی بیش از اطلاعات مرجع [۱] نیستند، لیکن در این



شکل ۱- یک صفحه مثلثی در دستگاه کارترین  $xy$  و دستگاه مثلثی  $L_1L_2L_3$

مزیت دارد. اول اینکه به طور طبیعی تعریف هندسه صفحه مثلثی با هر وضعیت ظاهری انجام می‌گیرد و دوم اینکه انتگرالگیری مسأله به طور بسته میسر است.

## ۲- فرمولبندی

### ۲-۱ تبدیل مختصات

صفحه مثلثی ایزوتروپیک شکل (۱- الف) را در حالت کلی در سطح  $xy$  در نظر می‌گیریم. این مثلث از سه سمت خود محدود به سه مرز با معادلات مشخص در دستگاه  $xy$  است. حال، نظیر آنچه که در روش اجزای محدود رایج است [۱۰] مختصات مساحتی  $L_i$  را مطابق شکل به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad (1)$$

به طوری که  $A$  مساحت مثلث و  $A_i$  مساحت مثلث محدود بین نقطه  $P$  در داخل مثلث به مختصات  $L_1L_2L_3$  و ضلع  $i$  است. با توجه به تعریف معادله (۱) رابطه تبدیل بین مختصات کارترین و مختصات مساحتی مطابق زیر ارائه می‌شود:

$$x = \langle L \rangle \{X\}$$

$$y = \langle L \rangle \{Y\} \quad (2-الف)$$

که در آن  $\{X\}$  و  $\{Y\}$  به ترتیب بردارهای ستونی مختصات طولی و

صفحات مثلثی با شکل کلی و شرایط مرزی مختلف را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در هر دو این مقالات صحبت از تعیین تابع انرژی سیستم بر مبنای توابع فرضی بسط جابه‌جایی صفحه می‌شود و در هر دو از چند جمله‌ای کامل در دستگاه  $xy$  استفاده شده است. سینک و چاکراورتی [۸] نیز به حل مسئله ارتعاش صفحات مثلثی پرداخته‌اند و با بسط تابع جابه‌جایی حقیقی صفحه بر حسب توابع مشخصه مجاز متعامد و محاسبه تابع انرژی و حداقل کردن آن نسبت به هر یک از مختصات تعمیم یافته به استخراج نتایج پرداخته‌اند. تمام مراجع فوق و دیگر مراجعی که توسط مراجع مزبور به آنها آدرس داده شده است مسئله ارتعاش صفحه مثلثی را به روش ریلی - ریتز مورد مطالعه قرار می‌دهند. مزیتی که راه حل مرجع [۸] بر دیگر مراجع دارد، نگاشت صفحه مثلثی کلی از دستگاه کارترین  $xy$  به دستگاه متعامد طبیعی  $\xi\eta$  و نیز استفاده از توابع مجاز متعامد در دستگاه  $\xi\eta$  برای بسط میدان جابه‌جایی است. این فرآیند تا حدود زیادی از حجم محاسبات می‌کاهد و ماتریس سختی را بر مبنای مختصات تعمیم یافته از حالت مرزی خارج می‌کند.

در مقاله حاضر اگرچه از همان روش معروف ریلی - ریتز [۹] که در حل مسائل جامدات با شکل هندسی پیچیده و شرایط مرزی مختلف و بارگذاری متنوع بسیار مؤثر است، استفاده می‌شود، لیکن برای تعیین تابع انرژی و ارائه توابع مجاز برای عددی کردن آن از دستگاه مختصات مساحتی بهره برده می‌شود. این دستگاه که به طور گسترده‌ای در روش اجزای محدود برای تعیین ماتریس سختی اجزای مثلثی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۰]، تاکنون در حل صفحات به طور یکجا استفاده نشده است. استفاده از این دستگاه دو

عرضی رئوس مثلث و  $\langle L \rangle$  بردار سطری مختصات  $L_i$  است، به طوری که

$$\langle L \rangle = \langle L_1 \quad L_2 \quad L_3 \rangle$$

همچنین از آنجا که مختصات  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) بیش از مختصات لازم برای تعریف نقطه در فضای دوبعدی است، لذا لازم است وابستگی بین این مختصات صریحاً به صورت زیر بیان شود:

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 = \langle L \rangle \{1\} \quad (2-ب)$$

از حل توأم معادلات (2) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{A}} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad (3)$$

به طوری که

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-الف)$$

$$\alpha_i = x_j y_k - y_j x_k, \quad \beta_i = y_j - y_k = y_{jk}, \quad \gamma_i = x_k - x_j = -x_{jk} \quad (3-ب)$$

و به این ترتیب روابط مختصات مثلثی  $L_i$  برحسب مختصات کارترین  $x, y$  صریحاً به دست می‌آید.

۲-۲ تبدیل اپراتورهای مشتقگیری

مشتقات اول و دوم هر تابع عددی به سادگی با توجه به معادلات (2) و (3) و مشتق‌گیری زنجیره‌ای به دست می‌آیند، پس

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial L_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum \gamma_i \frac{\partial}{\partial L_i} \quad (4)$$

و نیز

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{A}^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_i \beta_j \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial}{\partial L_j}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{A}^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_i \gamma_j \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial}{\partial L_j}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{A}^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_i \gamma_j \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial}{\partial L_j} \quad (5)$$

معادله (5) را به شکل معادله (6) می‌نویسیم (پایین صفحه):

یا

$$\{\kappa\} = \{Q\} [\bar{\kappa}] \quad (7)$$

به طوری که تعاریف بردارهای  $\{\kappa\}$  و  $[\bar{\kappa}]$  که به ترتیب تحت عنوان بردار انحنا در دستگاه کارترین و بردار انحنا در دستگاه مثلثی (مساختی) معرفی می‌شوند از مقایسه معادله (7) با معادله (6) مشخص می‌شود. ماتریس تبدیل  $[Q]$  تبدیل بین بردارهای  $\{\kappa\}$  و  $[\bar{\kappa}]$  را تسهیل می‌کند.

۲-۳ معادله انرژی پتانسیل کل

انرژی کشسانی: انرژی کشسانی یک صفحه نازک تحت خمش به سادگی با استفاده از معادله زیر به دست می‌آید [9]:

$$U = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \iint_A \kappa_i D_{ij} \kappa_j dA$$

یا

$$U = \iint_A \frac{1}{2} \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A}^2} \begin{bmatrix} \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_1 \beta_2 & \beta_1 \beta_3 & \beta_2 \beta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 \\ \sqrt{2} \beta_1 \gamma_1 & \sqrt{2} \beta_2 \gamma_2 & \sqrt{2} \beta_3 \gamma_3 & (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) & (\beta_1 \gamma_3 + \gamma_1 \beta_3) & (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) \end{bmatrix} \quad (6)$$

به طوری که {D} ماتریس سختی ساده برای صفحه است [۱۰]. برای تسهیل در انتگرالگیری معادله (۸)، این معادله را در دستگاه مثلثی می‌نویسیم. برای این منظور از معادله (۷) در معادله (۸) قرار می‌دهیم.

$$U = \iint_A \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{f}}^T [\tilde{D}] \tilde{\mathbf{f}} dA \quad (9)$$

که در آن [D] ماتریس سختی ساده اصلاح شده برای استفاده در دستگاه مثلثی است. این ماتریس که به صورت زیر داده می‌شود به طور صریح قابل محاسبه است.

$$[\tilde{D}] = [Q]^T [D] [Q] \quad (10)$$

انرژی پتانسیل نیروهای خارجی: انرژی پتانسیل بارگسترده خارجی  $P(x, y)$  و نیز بارهای متمرکز  $P_i(x, y)$  به سهولت با توجه به تابع تغییر مکان صفحه  $w(x, y)$  محاسبه می‌شود:

$$V = - \iint_A P(x, y) w(x, y) dA - \sum P_i w_i \quad (11)$$

که در آن  $w_i = w(x_i, y_i)$  تغییر مکان زیر بار  $P_i$  است. معادله فوق در دستگاه مثلثی چنین نوشته می‌شود:

$$V = - \iint_A P_{(L_1, L_2, L_3)} w_{(L_1, L_2, L_3)} dA \quad (12)$$

از آنجا که بیان جمله دوم سمت راست معادله (۱۱) در قالب همان جمله اول نیز امکان پذیر است، لذا برای سهولت در محاسبات به حذف آن در معادله (۱۲) اقدام شده است.

انرژی پتانسیل کل صفحه به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\Pi = U + V = \iint_A \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{f}}^T [\tilde{D}] \tilde{\mathbf{f}} dA - \iint_A p w dA \quad (13)$$

#### ۴-۲ بسط میدان جابه‌جایی

برای بیان میدان جابه‌جایی در دستگاه مثلثی  $L_1, L_2, L_3$  از تابعی که در قالب حاصلضرب دو تابع انرژی و تابع میدانی چند جمله‌ای

تشکیل شده باشد، مطابق زیر استفاده می‌کنیم.

$$w = \Phi \cdot \tilde{w} \quad (14)$$

به طوری که  $\Phi$  تابع مرزی به صورت

$$\Phi = L_1^a \cdot L_2^b \cdot L_3^c \quad (الف-۱۴)$$

ارائه می‌شود. از آنجا که تابع  $w$  برای کاربرد در روش ریلی ریتز باید شرایط مرزی هندسی را ارضا کند، لذا تابع مرزی  $\Phi$  به صورت حاصلضرب سه مختصات  $L_1, L_2, L_3$  با نمادهای اعداد صحیح غیر منفی  $a, b$  و  $c$  طوری انتخاب می‌شود که چنین پیش شرطی برآورده شود. این کمیات نمایی در جدول (۱) برای شرایط مرزی مختلف داده شده‌اند. تابع  $\tilde{w}$  شامل جملاتی با ضرایب نامعلوم به شکل زیر است:

$$\tilde{w} = a_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad (ب-۱۴)$$

که در آن  $i + j + k = m$  حداکثر درجه چند جمله‌ای به کار رفته در این تابع میدانی است.

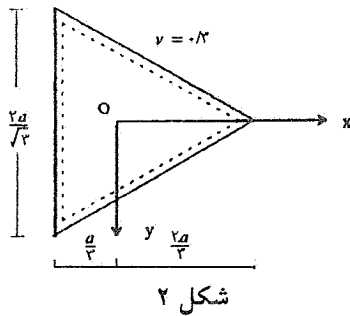
معادله (۱۴-ب) را برای سهولت محاسبات ماتریسی چنین می‌نویسیم:

$$\tilde{w} = \Delta_I \Psi_I (L_1, L_2, L_3) \quad (الف-۱۵)$$

جدول ۱- مقادیر  $a, b$  و  $c$  در تابع مرزی  $\Phi$

| شرایط مرزی | مرز | $L_1=0$ | $L_2=0$ | $L_3=0$ |
|------------|-----|---------|---------|---------|
|            |     | (a)     | (b)     | (c)     |
| آزاد       |     | ۰       | ۰       | ۰       |
| ساده       |     | ۱       | ۱       | ۱       |
| ثابت       |     | ۲       | ۲       | ۲       |

به طوری که اندیس  $I$  و ضریب  $\Delta_I$  و تابع چند جمله‌ای  $\Psi_I$  به ترتیب عبارت‌انداز:



$$I = \frac{1}{6}(m-i)(m-i+3) - j + 1$$

$$\Delta_I = a_{ijk}$$

$$\Psi_I = L_1^i L_2^j L_3^k \quad (15-b)$$

بنابراین

$$w = \sum_{I=1}^M \Delta_I L_1^a L_2^b L_3^c \Psi_I(L_1, L_2, L_3) = \langle N \rangle \{\Delta\} \quad (16)$$

به طوری که  $M = \frac{1}{6}m(m+1)$  تعداد جملات بسط است. حال چنانچه از تابع  $w$  ارائه شده در معادله (۱۶) برای تعیین بردار انحنای  $\{K\}$  استفاده کنیم خواهیم داشت:

و بردار نیرو به دست می‌آیند.

$$S_{IJ} = \iint_A \{B\}_I^T [D] \{B\}_J dA \quad (19)$$

$$q_I = \iint_A \{N\}_I^T p dA \quad (20)$$

و بالاخره

$$[S] \{\Delta\} = \{q\} \quad (21)$$

با حل معادله (۲۱) بردار ضرایب  $\{A\}$  به دست می‌آید.

لازم به توضیح است که فرمولبندی فوق نظیر فرمولبندی روش اجزای محدود در دستگاه مختصات تعمیم یافته است [۱۰]. تنها تفاوتی که در اینجا لازم به تأکید است همانا حل مسئله به شکل کامل در تمام میدان شکل هندسی و به صورت مجموعه‌ای از اجزاست. انتگرالهای معادلات (۱۹) و (۲۰) به صورت بسته و با توجه به فرمول موجود زیر انجام می‌شود:

$$\iint_A L_1^r L_2^s L_3^t dA = \frac{r!s!t!}{(r+s+t+2)} 2A \quad (22)$$

### ۳- مثالها

۱-۳ صفحه مثلث متساوی اضلاع با لبه‌های لولایی در دو حالت تحت بار گسترده یکنواخت و بار لنگر خمشی یکنواخت در لبه‌ها. صفحه مثلثی ایزوتروپیک شکل (۲) تحت بار عمودی گسترده یکنواخت اعمالی حل شده‌است. حل دقیق جابه‌جایی مرکز این صفحه به صورت  $w = \alpha pa^2/D$  موجود است [۵]. حل عددی با استفاده از تابع جابه‌جایی میدان  $w$  با درجه چند جمله‌ای صفر، خطی، مربعی و مکعبی در جدول (۲) داده شده‌است. همچنین

$$\begin{aligned} \{k\}^T &= \sum \langle (i+a-1)(i+a-2)L_1^{a-2}, \\ & (j+b-1)(j+b-2)L_2^{b-2}, \\ & (k+c-1)(k+c-2)L_3^{c-2} \\ & 2(i+a-1)(i+b-1)L_1^{a-1}L_2^{b-1}, \\ & (j+b-1)(k+c-1)L_2^{b-1}L_3^{c-1}, (k+c-1), \\ & (i+a-1)L_3^{c-1}L_1^{a-1} \rangle N_I A_I \end{aligned}$$

یا

$$\{k\} = \sum_{I=1}^M \{B\}_I \Delta_I = [B] \{\Delta\} \quad (17)$$

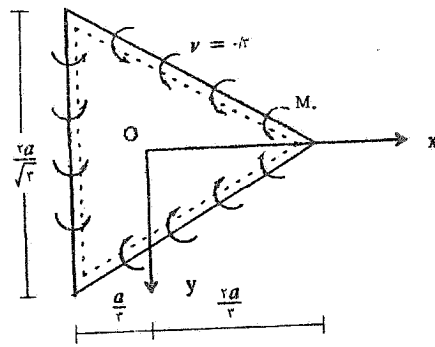
که در آن بردار  $\{B\}_I$  از مقایسه معادله (۱۷) با معادله قبلی خودشان مشخص می‌شود.

### ۵-۲ تعیین ماتریس سختی و بردار نیرو

با کاربرد معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادله مزبور به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{6} \{\Delta\}^T \left( \iint_A \{B\}^T [D] \{B\} dA \right) \{\Delta\} \quad (18) \\ & - \{\Delta\}^T \iint_A \{N\}^T p dA \end{aligned}$$

با اعمال اصل مینیم انرژی پتانسیل کل درایه‌های ماتریس سختی



شکل ۳

جدول ۲- ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برای کمیات  $w = \alpha \frac{pa^2}{D}$  و  $M_x = M_y = \beta pa^2$  در مرکز صفحه شکل (۲) تحت بار گسترده یکنواخت

| ضریب     | درجه تابع | (۰)      | (۱)      | (۲)      | (۳)      | حل دقیق  |
|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|          | $w$       |          |          |          |          | [۱]      |
| $\alpha$ |           | ۰/۰۰۰۶۱۷ | ۰/۰۰۰۶۱۷ | ۰/۰۰۱۰۲۹ | ۰/۱۰۲۹   | ۰/۰۰۱۰۲۹ |
| $\beta$  |           | ۰/۱۰۱۸۳  | ۰/۰۱۰۸۳  | ۰/۰۲۴۰۷۴ | ۰/۰۲۴۰۷۴ | ۰/۰۲۴۰۷۴ |

جدول ۳- ضریب  $\alpha$  برای کمیت  $w = \alpha \frac{pa^2}{D}$  در مرکز صفحه شکل (۲) تحت بار متمرکز در مرکز

| ضریب     | درجه تابع | (۰)    | (۱)    | (۲)     | (۳)     | (۱۳)    | [۱]     |
|----------|-----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $\alpha$ | $w$       | ۰/۰۰۲۴ | ۰/۰۰۲۴ | ۰/۰۰۴۸۴ | ۰/۰۰۴۸۴ | ۰/۰۰۵۶۴ | ۰/۰۰۵۷۵ |

راست به ترتیب عبارت اند از:

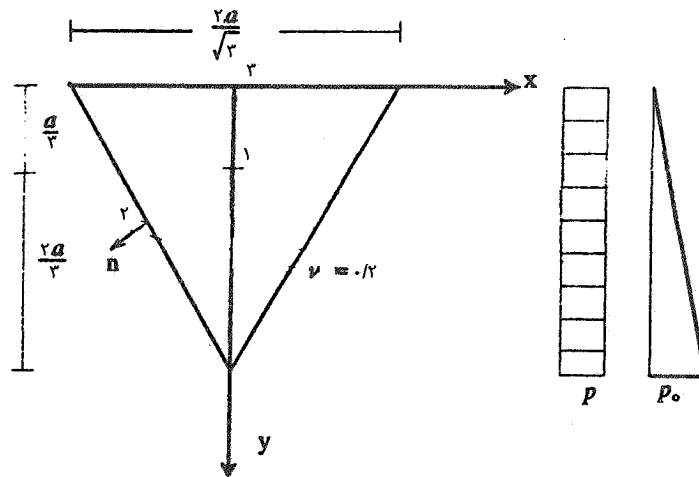
$$w = \alpha \frac{M_0 a^2}{D} \quad \alpha = \frac{1}{27}$$

$$(M_y)_{\max} = \beta M_0 \quad \beta = \frac{3-\nu}{2}$$

این کمیات به روش موجود با درجات مختلف بسط تابع  $w$  محاسبه شده اند که مقادیر آنها در جدول (۴) موجودند. ۲-۳ صفحه مثلث متساوی اضلاع با دو بعد ثابت و یک لبه دیگر در دو حالت ثابت و ساده تحت بار گسترده یکنواخت و بار گسترده هیدرواستاتیک (شکل ۴). مؤلفه های لنگر خمشی در مرکز این صفحه (نقطه ۱) و نیز لنگر خمشی عمودی در وسط ضلع سمت چپ (نقطه ۲) و وسط ضلع فوقانی (نقطه ۳) به روش تفاضل محدود توسط تیموشنکو ارائه شده است [۱]. این کمیات برای دو سیستم بار گسترده یکنواخت و خطی مطابق شکل (۴) و شرایط مرزی ضلع فوقانی ساده و ثابت محاسبه شده اند. اگر لنگرها توسط

مؤلفه های لنگر خمشی  $M_x$  و  $M_y$  در مرکز این صفحه به صورت  $M_x = M_y = \beta pa^2$  ارائه می شود که مقدار  $\beta$  در همین جدول ثبت شده است. مقادیر دقیق  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب  $\frac{1}{972}$  و  $\frac{1+\nu}{54}$  هستند.

حل تغییر مکان صفحه شکل (۲) برای بار متمرکز اعمالی در مرکز  $O$  نیز در همان مرجع [۱] موجود است. در این مورد تغییر مکان در زیر نقطه اعمال بار  $p$  در مرکز با  $w = \alpha \frac{pa^2}{D}$  مشخص می شود، ضریب  $\alpha$  برای حل مرجع [۱] و حل موجود در جدول (۳) داده شده است. حل مرجع [۱] به روش آینه ای و به کمک سری فوریه انجام شده است. چنانچه حل دقیق مسئله به روش آینه ای انجام شود ضریب دقیق  $\alpha$  مساوی  $0/00571$  خواهد بود که این جواب در مرجع [۱۱] نیز ذکر شده است. اکنون همان صفحه مثلثی شکل (۲) را مطابق شکل (۳) تحت اثر بار یکنواخت  $M_0$  در لبه ها در نظر می گیریم. حل دقیق این صفحه موجود است [۱]، به طوری که جابه جایی در مرکز صفحه و لنگر خمشی  $M_y$  در گوشه سمت



شکل ۴

جدول ۴- ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  برای کمیات جابجایی در مرکز و لنگر خمشی  $M_y$  در گوشه سمت راست

صفحه شکل (۳) تحت لنگر مرزی یکنواخت

| ضریب     | درجه تابع | (۰)      | (۱)      | (۲)      | (۳)      | حل دقیق  |
|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha$ | $w$       | ۰/۰۳۷۰۳۷ | ۰/۰۳۷۰۳۷ | ۰/۰۳۷۰۳۷ | ۰/۰۳۷۰۳۷ | ۰/۰۳۷۰۳۷ |
| $\beta$  |           | ۱/۳۵     | ۱/۳۵     | ۱/۳۵     | ۱/۳۵     | ۱/۳۵     |

توضیح است که ضریب  $\alpha$  با تقریب دوم جابه جایی در مرجع [۲] برای نقطه ای به طول دوسوم ارتفاع از رأس  $O$  به روش انرژی محاسبه شده است که مقدار آن  $\alpha = 0/0068$  است. اگر همین ضریب با درونیابی ضرایب داده شده در مرجع [۱] که برای طولهای یک دوم و سه چهارم ارتفاع  $OH$  موجود است، محاسبه شود، مقدار آن  $\alpha = 0/0086$  خواهد بود. حل روش موجود  $0/0066$  است که با جواب دقیق مرجع [۴] که همین مقدار را به دست می دهد مطابقت دارد و احتمالاً دقت جواب مرجع [۱] مورد سؤال است. حل تغییر مکان مرکز صفحه شکل (۵) با مرزهای ثابت نیز تحت بار یکنواخت  $p$  و تقریب اول جابه جایی در مرجع [۶] موجود است. این حل به روش انرژی به دست آمده است و جواب آن به همراه حل به روش موجود در جدول (۹) ارائه شده است.

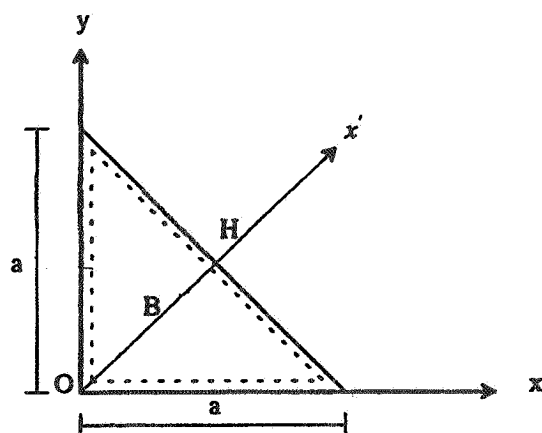
شایان ذکر است که مراجع [۱] و [۴] هر دو از مراجع اصیل تحلیل ورقها هستند و به نظر می رسد عدم دقت جواب مرجع [۱] در انتقال اعداد بوده است.

$M = \beta pa^2$  برای بار یکنواخت و  $M = \beta_0 p_0 a^2$  برای بار مثلثی نوشته شوند مقادیر  $\beta$  و  $\beta_0$  هم برای روش تفاضل محدود [۱] و هم برای روش موجود در جداول (۵) و (۶) ثبت شده اند.

در مرجع [۲] تغییر مکان ماکزیمم این صفحه تحت اثر بار گسترده یکنواخت که در مرکز آن اتفاق می افتد به روش انرژی با تقریب اول تابع جابه جایی محاسبه شده است. این مقدار و نیز مقداری که به روش موجود ارزیابی شده است در جدول (۷) مشاهده می شود.

۳-۳ صفحه مثلث قائم الزویه متساوی الساقین بالبه های لولایی تحت بار یکنواخت  $p$  (شکل ۵). حل این صفحه به روش آیسینه ای در مرجع [۱] موجود است. تغییر مکان  $w$ ، لنگر خمشی  $M_x$  (محور  $x'$  محور نیمساز زاویه قائمه است) و لنگر خمشی  $M_y$  روی محور  $x'$  با عبارات  $w = \alpha \frac{pa^4}{Et^3}$  و  $M_x = \beta_1 pa^2$  و  $M_y = \beta_2 pa^2$  مشخص می شوند. مقادیر  $\alpha$ ،  $\beta_1$  و  $\beta_2$  برای نقطه  $B$  در وسط ارتفاع  $OH$  در جدول (۸) فهرست شده اند. همین کمیات به روش موجود محاسبه شده و در جدول ارائه شده است. لازم به





شکل ۵

جدول ۵- ضرایب  $\beta_1$  و  $\beta_2$  برای کمیات  $M = \beta p a^2$  و  $M = \beta_1 p a^2$  صفحه شکل (۴) با مرز فوقانی ساده تحت دو سیستم بار گسترده یکنواخت و خطی

| روش تفاضل محدود [۱] | (۵)                   | (۴)                   | (۳)                   | (۲)                 | درجه تابع w | کمیت و ضریب |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-------------|-------------|
| ۰/۰۱۲۶              | ۰/۰۱۲۱                | ۰/۰۱۲۱                | ۰/۰۱۲۱                | ۰/۰۱۱۶              | $\beta$     | $(M_x)_1$   |
| ۰/۰۰۵۳              | ۰/۰۰۴۵                | ۰/۰۰۴۵                | ۰/۰۰۴۶                | ۰/۰۰۴۵              | $\beta_2$   |             |
| ۰/۰۱۴۷              | ۰/۰۱۴۲                | ۰/۰۱۴۲                | ۰/۰۱۴۳                | ۰/۰۱۴۳              | $\beta$     | $(M_y)_1$   |
| ۰/۰۰۳۵              | ۰/۰۰۳۸                | ۰/۰۰۳۸                | ۰/۰۰۳۸                | ۰/۰۰۳۸              | $\beta_2$   |             |
| -۰/۰۲۸۵             | -۰/۰۳۱۷               | -۰/۰۳۱۷               | -۰/۰۳۱۳               | -۰/۰۳۰۰             | $\beta$     | $(M_x)_2$   |
| -۰/۰۱۰۰             | -۰/۰۱۱۲               | -۰/۰۱۱۲               | -۰/۰۱۱۰               | -۰/۰۱۱۱             | $\beta_2$   |             |
| ۰/                  | $-4/5 \times 10^{-6}$ | $-1/7 \times 10^{-5}$ | $-2/8 \times 10^{-4}$ | $-7 \times 10^{-4}$ | $\beta$     | $(M_y)_2$   |
| ۰/                  | $3/3 \times 10^{-5}$  | $1 \times 10^{-4}$    | $2 \times 10^{-4}$    | $3 \times 10^{-4}$  | $\beta_2$   |             |

جدول ۶- ضرایب  $\beta_1$  و  $\beta_2$  برای کمیات  $M = \beta p a^2$  و  $M = \beta_1 p a^2$  صفحه شکل (۴) با مرز فوقانی ثابت تحت دو سیستم بار گسترده یکنواخت و خطی

| [۱]     | (۳)     | (۲)     | (۱)     | (۰)    | درجه تابع w | کمیت و ضریب |
|---------|---------|---------|---------|--------|-------------|-------------|
| ۰/۰۱۱۳  | ۰/۰۱۱۰  | ۰/۰۱۱۱  | ۰/۰۱۰۰  | ۰/۰۱۰۰ | $\beta$     | $(M_x)_1$   |
| ۰/۰۰۵۱  | ۰/۰۰۳۸  | ۰/۰۰۳۸  | ۰/۰۰۳۳  | ۰/۰۰۳۳ | $\beta_2$   |             |
| ۰/۰۱۱۰  | ۰/۰۱۱۰  | ۰/۰۱۱۱  | ۰/۰۱۰۰  | ۰/۰۱۰۰ | $\beta$     | $(M_y)_1$   |
| ۰/۰۰۳۴  | ۰/۰۰۳۵  | ۰/۰۰۳۶  | ۰/۰۰۳۳  | ۰/۰۰۳۳ | $\beta_2$   |             |
| -۰/۰۲۳۸ | -۰/۰۲۶۵ | -۰/۰۲۴۷ | -۰/۰۲۶  | -۰/۰۲۶ | $\beta$     | $(M_x)_2$   |
| -۰/۰۰۹۱ | -۰/۰۱   | -۰/۰۰۹۵ | -۰/۰۱   | -۰/۰۰۹ | $\beta_2$   |             |
| -۰/۰۲۳۸ | -۰/۰۲۶۴ | -۰/۰۲۴۷ | -۰/۰۲۶۰ | -۰/۰۲۶ | $\beta$     | $(M_y)_2$   |
| -۰/۰۰۶۰ | -۰/۰۰۶۳ | -۰/۰۰۵۸ | -۰/۰۰۵۲ | -۰/۰۰۸ | $\beta_2$   |             |

جدول ۷- ضریب  $\alpha$  برای کمیت  $w = \alpha \frac{pa^2}{D} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2$  در مرکز صفحه شکل (۴) با مرز فوقانی ثابت تحت بار گسترده یکنواخت

| ضریب     | درجه تابع $w$ | (۰)     | (۱)     | (۲)     | (۳)     | [۲]     |
|----------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\alpha$ |               | ۰/۰۰۰۱۶ | ۰/۰۰۰۱۶ | ۰/۰۰۰۱۷ | ۰/۰۰۰۱۷ | ۰/۰۰۰۱۶ |

جدول ۸- ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta_1$  و  $\beta_2$  برای کمیت  $w = \alpha \frac{pa^2}{Et^3}$  و  $M_x = \beta_1 pa^2$  و  $M_y = \beta_2 pa^2$  نقطه B صفحه مثلثی شکل (۵) تحت بار گسترده یکنواخت

| ضریب      | درجه تابع $w$ | (۰)     | (۱)     | (۲)     | (۳)     | (۴)     | روش          | [۴]     |
|-----------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|--------------|---------|
| $\alpha$  |               | ۰/۰۰۰۲۸ | ۰/۰۰۰۴۲ | ۰/۰۰۰۶۱ | ۰/۰۰۰۶۵ | ۰/۰۰۰۶۶ | آئینه‌ای [۱] | ۰/۰۰۰۶۶ |
| $\beta_1$ |               | ۰/۰۰۵۴۲ | ۰/۰۰۱۰۵ | ۰/۰۰۱۵۴ | ۰/۰۰۱۷۸ | ۰/۰۰۱۸۳ |              | ۰/۰۰۱۸۱ |
| $\beta_2$ |               | ۰/۰۰۵۴۲ | ۰/۰۰۰۰۹ | ۰/۰۰۱۴۷ | ۰/۰۰۱۶۹ | ۰/۰۰۱۷۹ |              | ۰/۰۰۱۸۱ |

جدول ۹- ضریب  $\alpha$  برای کمیت  $w = \alpha \frac{pa^2}{D}$  برای صفحه شکل (۵) با مرزهای ثابت تحت اثر بار گسترده یکنواخت

| ضریب     | درجه تابع $w$ | (۰)       | (۱)       | (۲)       | (۳)       | [۶]       |
|----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\alpha$ |               | ۰/۰۰۰۰۱۴۳ | ۰/۰۰۰۰۱۶۶ | ۰/۰۰۰۰۱۷۷ | ۰/۰۰۰۰۱۷۷ | ۰/۰۰۰۰۱۴۳ |

#### ۴- بررسی جوابها و نتیجه گیری

جوابهای ارائه شده در جداول (۲) تا (۹) نشان می‌دهند که روش جدید ارائه شده برای حل مسائل صفحات مثلثی یکنواخت با شرایط مرزی اختیاری کاملاً مؤثر بوده و جوابها با دقت کافی قابل اعتمادند. صفحه مثلثی متساوی اضلاع با لبه‌های لولایی تحت بار یکنواخت و یا لنگر یکنواخت در لبه‌ها تنها صفحه ای است که برای آن حل دقیق وجود دارد. این حل برای دو حالت مزبور در دستگاه مختصات مساحتی به ترتیب به صورت زیر است:

$$w = \frac{pa^2}{12D} L_1 L_2 L_3 (L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1) \quad (23)$$

$$w = \frac{M_0 a^2}{D} L_1 L_2 L_3 \quad (24)$$

مقدار تغییر مکان در مرکز این مثلث برای دو حالت بارگذاری به ترتیب عبارت‌اند از:

این مقادیر در جداول (۲) و (۴) به طور دقیق به دست آمده‌اند. در جدول (۲) برای بار گسترده هنگامی که مرتبه تابع میدان  $w$  دو یا بیشتر باشد و در جدول (۴) برای لنگر خمشی یکنواخت در لبه‌ها هنگامی که مرتبه تابع  $w$  صفر یا بیشتر باشد به ضرایب دقیق  $\alpha$  می‌رسیم و این نتایج با دقت در معادلات (۲۳) و (۲۴) قابل رؤیت است.

نتایج روش موجود برای حل مثلث قائم الزاویه لولایی تحت بار یکنواخت که در جدول (۸) ارائه شده‌است با نتایج داده شده توسط تیموشنکو [۱] حدود ۵۰ درصد اختلاف دارد اما با جوابهای مرجع [۴] کاملاً مطابقت دارد، بنابراین به نظر می‌رسد دقت

جوابهای [۱] مورد سؤال باشد.

حل موجود اگرچه برای صفحات ایزوتروپیک انجام شد، اما به همین سادگی می‌تواند برای صفحات ارتوتروپیک نیز توسعه داده شود. برای این منظور کافی است در معادله (۸) ماتریس [D] ماتریس سختی ساده ایزوتروپیک اختیار شود. اگر محورهای  $x$  و  $y$  بر محورهای اصلی ماده ایزوتروپیک اختیار شود، ماتریس [D] ماتریس سختی اصلی انتخاب می‌شود.

تمام جداول همگرایی حل را با افزایش درجه چند جمله ای تابع میدان  $w$ ، کاملاً به صورت هموار، نشان می‌دهند. در حقیقت با توجه به اینکه چند جمله‌ایهای به کار رفته در تابع  $w$  چند جمله ایهای کامل هستند انتظار یک همگرایی هموار انتظاری به جاست و می‌توان مطمئن بود روش موجود قادر به حل هر نوع صفحه یکنواخت مثلثی با شرایط مرزی و بارگذاری است.

#### مراجع

1. Timoshenko, S. T. and Wainowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, pp. 313-317, McGraw-Hill, New York, 1970.
2. Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Science Publisher, 1968.
3. Szilard, S., *Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods*, p. 125, Prentice-Hall, 1974.
4. Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, pp. 95-100, McGraw-Hill, 1981.
5. Leissa, A. W. and Jaber N. A., "Vibration of Completely Free Triangular Plates," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 34, No. 8, pp. 605-616, 1992.
6. Kim, C. S. and Dickinson, "The Free Flexural Vibration of Right Triangular Isotropic and Orthotropic Plates, *J.S.V.*, 141(2), 291-311, 1990.
7. Kim, C. S. and Dickinson, "The Free Flexural Vibration of Isotropic and Orthotropic General Triangular Shaped Plates, *J.S.V.*, 152(3), 383-403, 1992.
8. Singh, B. and Chakraverty, "Transverse Vibration of Triangular Plates using Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables" *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 34, No. 8, pp. 605-616, 1992.
9. Dym, C. L. and Shames I. M., *Solid Mechanics, A Variational Approach*, McGraw-Hill, 1973.
10. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4th ed., pp. 128-132, McGraw-Hill, 1989.
11. Caramanlian, C., Selby, K. A. and Will, G. T., "A Quintic Conforming Plate Bending Triangle," *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 12, pp. 1109-1136, 1978.