

تأثیر پارامترهای پنجره تبدیل فوریه کوتاه زمان بر پردازش سیگنالهای آرایه گیرنده به روش تخمین بیشترین درستنمایی

سعید صدری*، سعید گازر* و علی محمد دوست حسینی*

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۹/۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۷/۴/۳)

چکیده - این مقاله توانایی تبدیل فوریه در زمان محدود STFT^۱ در پردازش سیگنالهای با پهنای باند بزرگ از آرایه‌های گیرنده را بررسی می‌کند. سیگنالهای با پهنای باند بزرگ که توسط آرایه با کمک STFT دریافت و به حوزه فرکانس منتقل شده و پردازش لازم برای تخمین محل منابع سیگنال و تخمین خود سیگنالها ارائه می‌شوند. یک الگوریتم وقتی مبتنی بر روش بیشترین درستنمایی (ML) برای تعیین و ردیابی محل منابع و استخراج آنها پیشنهاد می‌کنیم و توانایی الگوریتم و شرایط لازمی که باید طول و نوع پنجره و میزان لغزش آن داشته باشند تا نتایج مناسب به دست آیند مطالعه می‌شود. ملاحظه می‌شود که تخمین محل منابع سیگنال بدون بایاس نخواهد بود که این امر ناشی از طول محدود پنجره به کار رفته است. انتخاب مناسب نوع و طول پنجره و تأثیر آن برای کوچکتر کردن خطاهای بایاس از هر مقدار دلخواه نیز ارائه می‌شود و نتایج به دست آمده با شبیه‌سازی تأیید می‌شوند. علاوه بر آن نشان می‌دهیم که الگوریتم پیشنهادی دارای این مزیت است که در حضور سیگنال به نویزهای کوچک و همچنین سیگنالهای شدیداً وابسته به خوبی کار می‌کند.

Windowing Effects of Short Time Fourier Transform on Wideband Array Signal Processing Using Maximum Likelihood Estimation

S. Sadri, S. Gazor and A. M. Doosthoseini

Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT- During The last two decades, Maximum Likelihood estimation (ML) has been used to determine Direction Of Arrival (DOA) and signals propagated by the sources, using narrowband array

* استادیار

signals. The algorithm fails in the case of wideband signals. As an attempt by the present study to overcome the problem, the array outputs are transformed into narrowband frequency bins, using short time Fourier transform together with ML, to estimate DOA's and the signals. The effect of window parameters (i.e, type, length and decimation factor) on the bias and variance of estimation of DOA's and signals is investigated. The algorithm robustness and convergence in presence of low SNR and coherent signals is illustrated. It is also shown that the local optimal problem encountered in the narrowband case is resolved for the wideband signals.

۱- مقدمه

گسترش الگوریتمهای مختلف برای تخمین پارامترهای مربوط به تعیین محل منابع سیگنال و تخمین و آشکارسازی سیگنالهای مربوطه، در سالهای اخیر جزو جالبترین تحقیقات در حوزه پردازش سیگنالها بوده است. از این روشهای تخمین در حوزههای کاربردی مانند تجزیه و تحلیل سریهای زمانی، تخمین طیف، رادار سونار و سیستمهای مخابراتی و غیره استفاده شده است.

روشهای اولیه به تخمین محل منابع سیگنال با پهنای باند باریک و با فرض انتشار امواج مسطح در فضا می پردازد. از یک آرایه از گیرنده، شامل M گیرنده، که در مقابل صحنه ای از P منبع سیگنال قرار می گیرند استفاده می شود. سیگنال دریافتی گیرنده ها در یک ترکیب کننده خطی با یکدیگر جمع می شوند و سیگنال خروجی را می سازند. توان سیگنال خروجی $y(t)$ تابعی از زوایای ورود سیگنالها به آرایه است و وجود قله هایی در منحنی تغییرات آن نشانگر وجود منبع سیگنال در زوایای متناظر است. روش تخمین زننده بارتلت [۱]، روش تخمین زننده حداقل پراکندگی^۱ معروف به کاپون [۲]، و روش پیشگویی خطی^۲ [۴ و ۳]، همگی به بررسی رابطه توان می پردازند. در ساده ترین روش شکل دادن به نماد آرایه^۳، ضرایب ترکیب کننده خطی چنان انتخاب می شوند که تاخیرهای مربوط به سیگنال ورودی از یک جهت مشخص، جبران شوند. برای تخمین جهت های ورود نیز توان خروجی محاسبه می شود و هر کجا قله ای وجود داشته باشد به عنوان وجود منبع سیگنال در زاویه متناظر با آن تلقی می شود. اما به مجرد آنکه منابع به هم نزدیک شوند قله ها در هم فرو رفته و

تفکیک منابع از یکدیگر ناممکن می شود. در روش کاپون ضرایب ترکیب کننده خطی را چنان انتخاب می کنند که توان خروجی، مگر به ازای ورود سیگنال از یک جهت خاص، حداقل شود. در روش پیشگویی خطی، خروجی یکی از گیرنده ها بر حسب ترکیبی از ورودی $M-1$ گیرنده دیگر پیشگویی می شود و بردار ضرایب ترکیب کننده خطی چنان انتخاب می شود که مجذور قدر مطلق خطای تخمین در پیشگویی مزبور حداقل باشد. اثبات می شود که توانایی روش پیشگویی خطی در تفکیک منابع نزدیک به هم، از روش کاپون دقیقتر است. مجموعه روشهای بالا تحت نام کلی "حداقل کردن مشروط توان" شناخته می شوند. روشهای بالا، هم به صورت ثابت و هم به شکل وقفی و با پردازش سیگنال به صورت بسته ای (بلوکی) ارائه شده اند [۶-۸].

از دهه ۱۹۸۰ به بعد، روشهای پیشرفته تری برای تخمین محل منابع سیگنال بر مبنای تجزیه و تحلیل بردارهای ویژه ماتریس همبستگی داده ها، R ، به وجود آمده اند. این روشها با نام تجزیه و تحلیل زیرفضا شناخته می شوند و همگی از این ویژگی بهره می جویند که در صورتی که منابع سیگنال نایسته باشند بردارهای جهت ورود سیگنالها به آرایه، همگی بر زیرفضای متشکل از بردارهای ویژه متناظر با کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس R عمودند. [۷-۱۰].

در تمام روشهای بالا سیگنالها دارای پهنای باند باریک اند به طوری که اختلاف فاز سیگنال از یک گیرنده تا گیرنده دیگر دارای مقدار ثابت و مستقل از فرکانس است حال آنکه اگر سیگنالها دارای پهنای باند وسیع باشند اختلاف فاز ناشی از مولفه های مختلف فرکانسی تابعی از فرکانس خواهند بود و به همین دلیل از روشهای

معمول در مورد پهنای باند باریک نمی‌توان استفاده کرد [۱۱]، لذا برای سیگنالهای با پهنای باند بزرگ به جای استفاده از ترکیب کننده‌های خطی ساده، در خروجی هر گیرنده از فیلترهای FIR استفاده شده است. نشان داده شده است که اگر پهنای باند نسبی سیگنالها از ۵۰٪ بزرگتر شود طول فیلترهای FIR مورد نیاز بسیار بزرگ می‌شوند [۸-۱۰]. به همین دلیل تلاشهایی صورت گرفته است تا به جای فیلترهای FIR از فیلترهای IIR با تعداد ضرایب کمتر استفاده شود [۱۱]. از الگوریتمهای بالا انواع ثابت و وقتی آن به طور مفصل در ادبیات پردازش سیگنالها مورد بحث واقع شده‌اند [۹-۱۲]. علاوه بر اینها از الگوریتم ESPRIT و همچنین روش تجزیه و تحلیل زیرفضاها نیز برای این مقصود استفاده شده است [۱۳ و ۱۶].

استفاده از روش تخمین بیشترین درست‌نمایی (ML) در تخمین محل منابع سیگنال و تخمین خود سیگنالها نیز در مراجع مختلف از جمله در [۱۴] مورد بحث واقع شده است. ما در این مقاله از نتایج مربوط به الگوریتم ML و با استفاده از تبدیل فوریه در زمان محدود، با مزیت کاهش حجم محاسبات می‌پردازیم. علاوه بر آن به بررسی اثر نوع و طول پنجره و طول تبدیل فوریه لازم می‌پردازیم و یک روش وقتی برای تخمین محل منابع سیگنال و تخمین خود منابع سیگنال ارائه می‌کنیم. در بخش (۲) صورت مسئله را با استفاده از تبدیل فوریه گسسته با طول محدود طرح می‌کنیم آن‌گاه در بخش (۳) چکیده‌ای از روش تحلیل و ترکیب تبدیل فوریه با طول محدود را ارائه خواهیم کرد. سپس در بخش (۴) روش تخمین وقتی محل منابع بر مبنای روش ML را بیان کرده و بالاخره در بخش (۵) به شبیه‌سازی و بحث روی نتایج آن خواهیم پرداخت.

۲- بیان مسئله

بیان مسئله در حالت کلی به شکل زیر است: فرض کنید به تعداد P منبع (P معلوم است) به صورت نقطه‌ای در فضا واقع شده و در حال انتشار امواج به صورت مسطح باشند، می‌خواهیم محل منابع (جهت ورود سیگنالها) را توسط یک رشته یا آرایه از گیرنده‌ها تخمین بزنیم و سیگنالهای واقع شده در این محلها معلوم را نیز

استخراج کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم که از M گیرنده در آرایه استفاده شده باشد. سیگنالها پس از انتشار با نویز که آن را سفید و گوسی فرض می‌کنیم جمع شده و توسط تک تک گیرنده‌ها دریافت می‌شوند. سیگنال دریافت شده توسط گیرنده m ام آرایه در لحظه t به شکل زیر خواهد بود:

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t - \tau_m(\theta_i)) + e_m(t); m = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

در معادله (۱)، $s_i(t)$ سیگنال منتشر شده توسط i امین منبع در t و $\tau_m(\theta_i)$ تأخیر دریافت سیگنال منبع i ام توسط گیرنده m ام نسبت به یک مبدأ مشخص است و θ_i زاویه‌ای است که محل منبع i ام را مشخص می‌کند. $e_m(t)$ هم نویز دریافتی توسط گیرنده m ام است. در صورتی که از سیگنالهای دریافتی توسط گیرنده‌ها نمونه‌برداری کنیم، معادله بالا در حوزه زمان گسسته با تبدیل t به n و تبدیل $\tau_m(\theta_i)$ به d_{mi} به شکل زیر قابل بیان است:

$$x_m(n) = \sum_{i=1}^P s_i(n - d_{mi}) + e_m(n) \quad (2)$$

در معادله (۲) d_{mi} تأخیر سیگنال i ام در محل گیرنده m ام است که تابعی از محل معلوم گیرنده‌ها و محل منابع سیگنال است، یعنی $d_{mi} = f(\theta_i, \phi_m)$ که در آن θ_i محل منبع i ام و ϕ_m محل گیرنده m ام را مشخص می‌کند و f نیز یک تابع شناخته شده است.

در این مقاله می‌خواهیم با دریافت سیگنالهای خروجی گیرنده‌ها یعنی بردار $[x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$ ، اولاً بردار $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ و ثانیاً سیگنالهای $[s_1(n), s_2(n), \dots, s_p(n)]^T$ را تخمین بزنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که:

- الف - نویز در محل هر کدام از گیرنده‌ها سفید و گوسی و در گیرنده‌های مختلف مستقل از هم و از سیگنالها نیز مستقل اند.
- ب - تعداد منابع P مشخص است.
- ج - سیگنالها دارای پهنای باند وسیع بوده و حول فرکانس مرکزی معلوم ω واقع‌اند.
- د - بین هر دو منبع سیگنال به اندازه کافی فاصله وجود دارد طوری که می‌توان آنها را از هم تفکیک کرد.
- ه - مؤلفه فرکانس صفر سیگنالها مورد علاقه ما نیست.

(DFT)، سیگنال $y_n(r) = x(r)w(n-r)$ را اخذ کنیم. یعنی در هر لحظه n ، تبدیل فوریه گسسته از سیگنال، $y_n(r)$ را اخذ کرده و آن را با $X(n, k)$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان اثبات کرد که اگر داشته باشیم:

$$x(n) \rightarrow X(n, k)$$

در این صورت برای سیگنال $x(n-n_0)$ خواهیم داشت:

$$x(n-n_0) \rightarrow e^{-j2\pi k n_0 / N} X(n-n_0, k) \quad (5)$$

ممکن است DSTFT را برای لغزشهای L تایی $w(m)$ روی بردار $x(m)$ تعریف کنیم در این صورت داریم:

$$X(nL, k) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r) w(nL - r) e^{-j2\pi kr / N} \quad (6)$$

معادله (6) معادله تحلیل یا تجزیه DSTFT نامیده می‌شود. با در دست داشتن تبدیل فوریه در زمان محدود سیگنال $y_n(m)$ یعنی $X(n, \omega)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x(r)w(n-r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(n, \omega) e^{j\omega r} d\omega \quad (7)$$

برای $n=r$ می‌توانیم از معادله (8) برای استخراج $x(n)$ استفاده کنیم:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} X(r, \omega) e^{j\omega r} d\omega \quad (8)$$

به خلاف $X(n, \omega)$ یعنی تبدیل فوریه گسسته که همواره برگشت پذیر است، DSTFT یعنی $X(n, k)$ فقط تحت شرایط خاصی برگشت پذیر است [10]. برای بازیابی سیگنال $x(n)$ با کمک $X(n, k)$ روشهای مختلفی ابداع شده است. از مهمترین آنها روشهای جمع بندی خروجهای یک گروه از فیلترها (FBS)³، و روش همپوشانی و جمع بندی، (OLA)²، و یک نوع دیگر از روش اخیر که همراه با وزندهی به مؤلفه های فرکانسی است تحت نام (WOLA)⁵ ارائه شده است [9 و 10].

برای بازیابی یا استخراج $x(n)$ در روش FBS، سیگنال $y(n)$

در بحث بالا هیچ محدودیت دیگری روی سیگنالها اعمال نشده است و مفروضات بالا در بسیاری از کاربردهای عملی وجود دارند. سیگنالها با پهنای باند وسیع بوده و می‌توانند فرایندهای معین و یا تصادفی باشند. تجزیه و تحلیل سیگنالهای ناشی از آرایه‌ها برای سیگنالهای با پهنای باند وسیع در دهه اخیر توجه متخصصان را به خود جلب کرده است [9-16]. در اینجا ما بر مبنای STFT به مطالعه این مسئله خواهیم پرداخت. می‌دانیم که در تجزیه و تحلیل بر مبنای تبدیل فوریه لازم است سیگنال $x(n)$ برای تمام زمان در دست باشد لذا تبدیل فوریه غیر عملی است. علاوه بر آن اگر آمارگان سیگنالها در زمان تغییر کند، یعنی منابع غیر ایستاد باشند و یا حرکت کنند، روش تجزیه و تحلیل فوریه عملی نیست. حال آنکه با کمک STFT هر دو محدودیت بالا منتفی خواهند شد.

روش STFT در مراجع علمی زیادی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است [17-19]. با کمک STFT می‌توانیم سیگنالهایی را که طیف آنها در زمان تغییر می‌کند به حوزه فرکانس برده و تجزیه و تحلیل کنیم. علاوه بر آن می‌توانیم به بررسی سیستمهای متغیر با زمان و فرایندهای غیر ایستاد پردازیم. با کمک آن به تخمین پارامترهای سیگنالهایی که برای یک زمان محدود اندازه گیری شده‌اند پردازیم [18 و 19].

۳- چکیده‌ای از روش STFT

سیگنال $x(n)$ و پنجره $w(n)$ با طول محدود N_w را در نظر می‌گیریم طبق تعریف STFT برای سیگنال $x(n)$ از معادله (3) به دست می‌آید. این معادله در حالت کلی تر به تبدیل گابور [19] نیز معروف است

$$X(n, \omega) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r) w(n-r) e^{-j\omega r} \quad (3)$$

که در آن $w(n)$ یک پنجره است. شکل گسسته آن که از نمونه برداری از معادله (3) در N لحظه به دست می‌آید و آن را با DSTFT نشان می‌دهیم به صورت زیر خواهد بود:

$$X(n, k) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r) w(n-r) e^{-j2\pi kr / N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

در بحث زیر تلفی ما از DSTFT این است که تبدیل فوریه گسسته

را با کمک معادله (۸) به صورت زیر شبیه سازی می کنیم:

$$y(n) = \frac{1}{Nw(\circ)} \sum_{k=0}^{N-1} X(n,k) e^{j\pi kn/N} \quad (9\text{-الف})$$

ثابت می شود که اگر شرط زیر:

$$w(n)N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) = Nw(\circ)\delta(n) \quad (9\text{-ب})$$

برقرار باشد $y(n)=x(n)$ می شود [۱۹]. در یک حالت برقراری شرط (۹-ب) معادل شرط $N_w > N$ است. با توجه به این شرط و با اخذ تبدیل فوریه از طرفین معادله (۹-ب)، معادله (۹-ج) به دست می آید:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(\omega - \frac{j\pi k}{N}) = Nw(\circ) \quad (9\text{-ج})$$

معادله (۹-ج) بیان می دارد که طیف $W(\omega)$ که هر بار به اندازه $\frac{j\pi}{N}$ بلغزد و سپس در تمام طول پهنای باند جمع شود باید مقدار ثابتی باشد. محاسبات لازم (جمع و ضرب اعداد مختلف) در روش FBS برای هر مؤلفه از $x(n)$ از مرتبه N_w است. از روش FBS بیشتر برای مواردی استفاده می شود که بخواهیم خود سیگنال $x(n)$ را از $X(n,k)$ استخراج کنیم. حال آنکه اگر $X(n,k)$ تحت تأثیر فیلتری قرار گرفته و یا نویز به آن اضافه شده باشد و مثلاً به صورت $Y(n,k)$ درآمده باشد از روشهای دیگر هم استفاده می شود.

معادله بازبایی $x(n)$ از روش OLA مطابق زیر است:

$$x(n) = \frac{L}{W(\circ)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(pL,k) e^{j\pi kn/N} \quad (10\text{-الف})$$

که در معادله (۱۰-الف)، $W(\circ)$ از معادله (۱۰-ب):

$$W(\circ) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) \quad (10\text{-ب})$$

و تحت شرط (۱۰-ج):

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} w(pL-n) = \frac{W(\circ)}{L} \quad (10\text{-ج})$$

به دست می آید. این به مفهوم آن است که اگر پنجره $w(n)$ در حوزه زمان n با طولهای L بلغزد و سپس جمع شود حاصل جمع باید مقدار ثابتی باشد. معادله (۱۰-الف) بر مبنای مشابه سازی معادله زیر به دست آمده است:

$$x(n) = \frac{1}{j\pi W(\circ)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(r,\omega) e^{j\pi rn} d\omega \quad (11)$$

برای اثبات معادله (۱۱) کافی است از طرفین معادله (۳) برحسب n تبدیل فوریه اخذ کرده و مقدار آن را در فرکانس صفر به دست آوریم. با انتخاب ϕ به عنوان پارامتر فرکانس به راحتی اثبات می شود که:

$$F(X(\phi, \omega)) \Big|_{\phi=0} = W(\circ)X(\omega) \quad (12)$$

در معادله (۱۲) طرف راست یعنی تبدیل فوریه F در فرکانس صفر معادل حاصل جمع سیگنال در طول زمان است و داریم:

$$F(X(\phi, \omega)) \Big|_{\phi=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n,\omega) \quad (13)$$

از دو معادله (۱۲) و (۱۳)، معادله (۱۴) به دست می آید:

$$X(\omega) = \frac{1}{W(\circ)} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(n,\omega) \quad (14)$$

با اخذ عکس تبدیل فوریه از معادله (۱۴) و با وجود شرط (۱۰-ج)، معادله (۱۰-الف) استنتاج می شود.

۴- بیان ریاضی مسئله

اگر از معادله (۲)، DSTFT را اخذ کنیم، داریم:

$$X_m(n,k) = \sum_{i=1}^P S_i(n-d_{mi}, k) e^{-j\pi d_{mi}k/N} + E_m(n,k) \quad (15)$$

اگر فرض کنیم $W = e^{-j\pi k/N}$ و بردار تأخیرهای منابع سیگنال در محل گیرنده m را هم با $[d_{m1}, d_{m2}, \dots, d_{mp}]$ نمایش دهیم، در این صورت معادله (۱۵) را به شکل برداری نیز می توان نوشت:

$$X_m(n,k) = a_m^T(k) \cdot \underline{S}_m(n,k) + E_m(n,k) \quad (16)$$

که در آن تعریف می کنیم:

$$a_m(k) = [Wd_{m1} \ Wd_{m2} \ \dots \ Wd_{mp}]^T \quad (17)$$

و

$$\underline{S(n,k)} = [S_1(n,k), S_2(n,k), \dots, S_P(n,k)]^T$$

بنابراین معادله (۲۰) را به صورت فشرده‌تر از نظر ابعاد نیز می‌توان نوشت:

$$\underline{X(n,k)} = A(D,k) \underline{S(n,k)} + E(n,k) \quad (۲۲-الف)$$

که در معادله (۲۲-الف)، داریم:

$$A(D,k) = [a_1(k), a_2(k), \dots, a_M(k)]^T \quad (۲۲-ب)$$

که در آن D ماتریس تأخیرهاست و تابعی از بردارهای محل منابع که در آن $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]^T$ و محل گیرنده‌ها $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M]^T$ است. اگر خطای موجود در تقریب معادله (۲۱) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\varepsilon = E\{|S_i(n,k) - S_i(n-d_{mi},k)|^2\} \quad (۲۳)$$

که در معادله بالا E معرف میانگین است، و خطای نسبی δ را هم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{E\{|S_i(n,k)|^2\}} \quad (۲۴-الف)$$

در پیوست ۱ ثابت می‌کنیم که معادله (۲۴-الف) برای وقتی که سیگنال ورودی نویز سفید باشد به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\delta = \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(m)w(m-d_{ji})}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |w(m)|^2} \quad (۲۴-ب)$$

از معادله بالا به سادگی نشان داده می‌شود که برای آنکه در پنجره مستطیلی $\delta < 0.01$ باشد کافی است که $(\frac{1}{2f_u T_s}) > 200 \cdot (\frac{M-1}{2})$ که در آن M تعداد گیرنده‌ها، f_u فرکانس بالایی طیف سیگنال و T_s پریود نمونه برداری از سیگنال ورودی است (پیوست). در جدولهای (۱) و (۲) از پیوست مبتنی بر معادله (۲۴-ب)، طول مورد نیاز برای پنجره، N_w را برحسب طول آرایه گیرنده‌ها محاسبه کرده‌ایم. خواهیم دید که فقط در صورت برقراری روابط مربوطه، الگوریتم وفقی پیشنهادی عملکرد مناسبی خواهد داشت. به طوری

$$\underline{S_m(n,k)} = [S_1(n-d_{m1},k), S_2(n-d_{m2},k), \dots, S_P(n-d_{mp},k)]^T \quad (۱۸)$$

در معادله (۱۵)، m را از ۱ تا M تغییر می‌دهیم و در واقع DSTFT سیگنالهای دریافتی را برای M گیرنده به طور یک جا در یک بردار $X(n,k)$ می‌نویسیم:

$$\underline{X(n,k)} = [X_1(n,k), X_2(n,k), \dots, X_M(n,k)]^T \quad (۱۹)$$

بنابراین معادله (۱۹) به شکل زیر قابل بیان است:

$$\underline{X(n,k)} = \text{diag}(a_1^T(k), a_2^T(k), \dots, a_M^T(k)) \cdot \text{diag}(S_1(n,k), S_2(n,k), \dots, S_M(n,k)) + E(n,k) \quad (۲۰)$$

که در آن diag به مفهوم یک ماتریس قطری مربعی است که عناصر قطر آن به ترتیب بردارهای داخل پراتز با طول P هستند و ضمناً $E(n,k)$ برابر است با:

$$E(n,k) = [E_1(n,k), E_2(n,k), \dots, E_M(n,k)]^T$$

ابعاد ماتریسهای معادله (۲۰) بسیار بزرگ‌اند. لیکن با یک تقریب مناسب می‌توانیم آن را کاهش دهیم. برای این کار کافی است شرایطی را جستجو کنیم که $S_m(n,k)$ ها به ازای m های ۱ تا M با تقریب خوب مساوی باشند، طوری که بتوانیم برای منبع سیگنال i ام بنویسیم:

$$S_i(n,k) \approx S_i(n-d_{i1},k) \approx S_i(n-d_{i2},k) \approx \dots \approx S_i(n-d_{Mi},k) \quad (۲۱)$$

این به معنای آن است که DSTFT را برای منبع سیگنال i ام در محل M گیرنده، مستقل از محل گیرنده، (و یا مستقل از تاخیرها) فرض کنیم. در معادله (۲۰) یکی از گیرنده‌ها را به عنوان مبدأ فرض کرده و DSTFT برای منبع سیگنال i ام را در محل گیرنده مبدأ با $S_i(n,k)$ تعریف کرده‌ایم. در نتیجه، معادله (۱۸) به شکل زیر در می‌آید.

که عدم برقراری آنها موجب ایجاد بایاس در تعیین محل منابع و یا ناپایدار شدن نسبی الگوریتم می‌شود.

۵- تخمین وقتی محل منابع و سیگنالها مبتنی بر روش ML

با توجه به آنکه $E(n,k)$ گوسی با میانگین صفر و با ماتریس کواریانس:

$$E(E(n,k_1).E(n,k_2)^H) = \sigma_N^2 \delta(k_1) \delta(k_1 - k_2) \cdot I_M$$

است که در آن I_M ماتریس واحد و $\delta(k)$ تابع کروکر است. تابع چگالی احتمال مشروط برای $X(n,k)$ برای $k=1, \dots, N-1$ به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(\{X(n,k)_{k=1}^{N-1}\} \mid D, \{S(n,k)_{k=1}^{N-1}\}) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|X(n,k) - A(D,k)S(n,k)|^2}{\sigma N^2(k)}\right) / \left(\prod_{k=1}^{N-1} (\pi \sigma N^2(k))^M\right) \quad (25)$$

تخمین ML برای سیگنال $S(n,k)$ با فرض در دسترس بودن محل منابع (با در دست بودن تخمین ماتریس D) از معادله (۲۶) به دست می‌آید:

$$\hat{S}(n,k) = [A(D,k)^H A(D,k)]^{-1} A(D,k) H X(n,k) \quad (26)$$

برای تعیین تخمینها که تابعی از بردارهای θ , یعنی محل‌های منابع و گیرنده‌ها هستند، از روش گرادیان آماری مبتنی بر لگاریتم تابع چگالی احتمال مشروط در معادله (۲۵) استفاده می‌کنیم. برای این کار θ_i ها را چنان تعیین می‌کنیم که تابع L تعریف شده در معادله (۲۷) که با لگاریتم تابع چگالی احتمال ارتباط دارد حداکثر شود:

$$L(n, \theta) = -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sigma N^2(k)} |X(n,k) - A(D(\theta, k)S(n,k)|^2 \quad (27)$$

باید θ_i هایی را بیابیم که $\frac{\partial L(n)}{\partial \theta_i} = 0$ شود در این صورت با روش گرادیان آماری و با توجه به اینکه D تابعی از بردارهای θ و Φ است

می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{\theta}_i(n+1) = \hat{\theta}_i(n) - \mu \nabla_{\theta_i} L(n) = \hat{\theta}_i(n) + \mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_i(n,k)^H}{\sigma N^2(k)} \nabla_{\theta_i} A(D(\theta, k), k)^H \cdot [X(n,k) - A(D(\theta, k), k)] \cdot \hat{S}_i(n,k) \quad (28)$$

بنابراین الگوریتم وقتی پس از انتخاب اولیه پارامتر μ و تعیین مقادیر اولیه زوایای ورود θ_i ، در قدمهای زیر به تخمین نهایی زوایای ورود و سیگنالها می‌پردازد:

الف - با کمک معادله (۲۶) و با توجه به معلوم بودن $X(n, k)$ STFT داده‌هاست و معلوم بودن $A(D, K)$ از معادله (۲۲-ب)، تخمین $\hat{S}(n, k)$ به دست می‌آید.

ب - با معلوم بودن تخمین اولیه زوایای ورود و همچنین محاسبه $\hat{\theta}$ از قدم قبل و با استفاده از معادله (۲۸) مقدار جدید $\hat{\theta}$ به دست می‌آید و سپس قدم (الف) تکرار می‌شود تا سرانجام الگوریتم به همگرایی برسد.

در اینجا دو نکته زیر قابل ذکرند: الف - در حالت کلی انتخاب مقادیر اولیه برای زوایای ورود θ_i از اهمیت زیادی برخوردار است. باید نقطه شروع θ_i نزدیک به لوب اصلی ای باشد که $L(\theta_i)$ را حداقل می‌کند در غیر این صورت ممکن است الگوریتم به مقادیر θ_i که $L(\theta_i)$ را به نقاط محلی حداقل می‌برد همگرا شود. اگر پهنای باند سیگنالها باریک باشد تعداد نقاط حداقل محلی زیادند [۲۵] اما در حالت پهنای باند بزرگ نقاط حداقل محلی برای هر باند باریک فرکانس در کنار هم قرار دارند و با تغییر فرکانس جابه جا می‌شوند. به همین دلیل تابع معیار $L(\theta_i)$ در فرکانسهای متفاوت به طور متوسط دارای تعداد حداقلهای محلی کمتری است و در نتیجه در حالتی که پهنای باند وسیع است امکان همگرا شدن به حداقلهای محلی کمتر است و حساسیت الگوریتم در قبال انتخاب مقادیر اولیه برای زوایای ورود θ_i کمتر است. شبیه‌سازها هم نشان می‌دهند که اگر مقادیر اولیه θ_i را در حوالی صفر انتخاب کنیم جوابها قابل اطمینان خواهند بود. ب - حجم محاسبات مورد نیاز برای یک قدم زمانی نیز قابل محاسبه است. برای معکوس کردن ماتریس $A^H A$ در معادله (۲۶) به حجم محاسباتی از مرتبه P^3 احتیاج داریم (P تعداد منابع سیگنال است). محاسبه $X(n, k)$ برای یک k مشخص به

$$\text{av.bias} = \frac{|E(\hat{\theta}_1) - \theta_1| + |E(\hat{\theta}_2) - \theta_2|}{2} \quad (29\text{-الف})$$

$$\text{av.std} = \frac{\text{std}(\hat{\theta}_1) + \text{std}(\hat{\theta}_2)}{2} \quad (29\text{-ب})$$

که در آن علامت std معرف انحراف معیار است.

در بخشهای زیر به ترتیب اثر انتخاب نوع، طول و مقدار لغزش پنجره در هر مرحله بر دقت تخمین و پس از آن اثر انتخاب نسبت سیگنال به نویز و همچنین وابستگی سیگنالها به یکدیگر بررسی می‌شوند آن گاه میزان دقت الگوریتم در تخمین سیگنالها ارائه شده و سرانجام توانایی و دقت الگوریتم در تفکیک محل منابع در فضا بررسی می‌شود.

۱-۶ اثر نوع پنجره

در جدولهای (۱) و (۲) بخش پیوست برای داشتن یک خطای محدود در الگوریتم، طول مورد نیاز برای پنجره‌های مختلف ارائه شده است. مشاهده می‌شود که پنجره مستطیلی احتیاج به بزرگترین طول دارد. علاوه بر آن در شکل (۱) برای $\mu = 7 \times 10^{-7}$ ، $N_w = 64$ و $L = 16$ نحوه همگرایی الگوریتم برای تعیین خطا در تخمین زوایای ورود پنجره‌های مستطیلی، هنینگ و مثلثی ارائه شده است. مشاهده می‌شود که اگر چه سرعت همگرایی برای پنجره مستطیلی بیشتر از پنجره هنینگ است اما بایاس و واریانس تخمین برای پنجره مستطیلی بیشتر بوده و در نتیجه در شبیه‌سازهای زیر از پنجره مستطیلی استفاده نمی‌شود. علت این موضوع واضح است چرا که می‌دانیم پنجره گوسی (گابور) در تفکیک در حوزه‌های زمان-فرکانس بهینه است [۲۶]، و اگر فاصله این دو پنجره از پنجره گابور را با معیار MS مشخص کنیم، بیشتر از فاصله پنجره گابور از پنجره مستطیلی است. به عبارت دیگر پنجره‌های هنینگ و همینگ شباهت بیشتری به پنجره بهینه دارند.

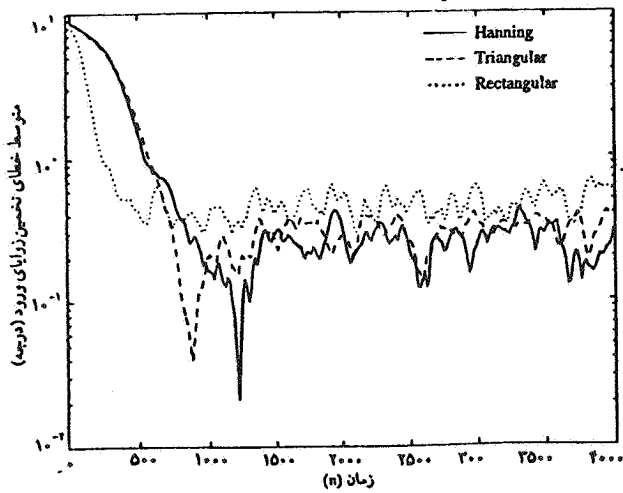
جدول (۱) برای پنجره‌های مختلف و برای $N_w = 64$ و $\mu = 7 \times 10^{-7}$ ، $L = 16$ ، بایاس و واریانس تخمین را مبتنی بر معادله‌های (۲۹-الف) و (۲۹-ب) ارائه می‌کند. مشاهده می‌شود که اگر چه پنجره‌های مورد آزمایش با تقریب خوب از کیفیت یکسان برخوردارند اما پنجره هنینگ در میان پنجره‌های مورد مقایسه به دلیل کمتر بودن بایاس تخمینش ارجح است و به همین دلیل در

$\log(N_w)$ محاسبه احتیاج دارد. ضرب کردن $(A^H A)^{-1}$ در A^H نیز به حجم محاسباتی از مرتبه PM احتیاج دارد. در نتیجه برای تغییرات k از ۱ تا N_w به محاسباتی از مرتبه $N_w(M \log(N_w) + P^2 + MP)$ نیاز است. به همین ترتیب حجم محاسبات در معادله (۲۸) نیز در مرتبه $N_w(MP)$ است. واضح است که با کوچک کردن N_w یعنی طول پنجره، حجم محاسبات به شدت کاهش خواهد یافت. اما چنانچه دیدیم با کاهش N_w از حد معینی خطای δ افزایش می‌یابد. بنابراین باید حدس زد که برای N_w مقادیر متوسط بهینه‌ای وجود دارد. این موضوع در بخش شبیه‌سازی بحث می‌شود.

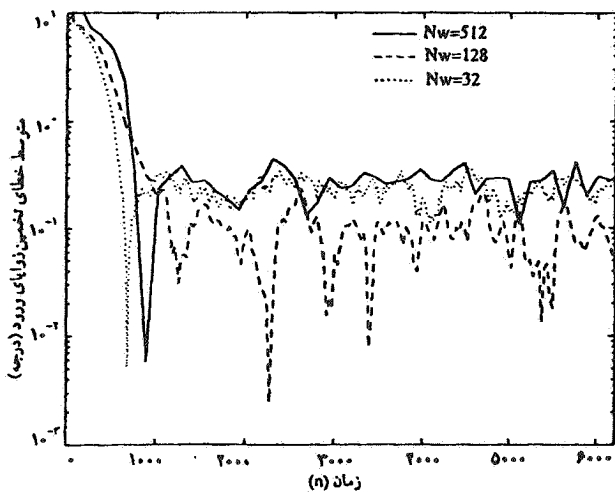
۶- نتایج شبیه‌سازی و بحث بر روی نتایج

فرض کرده‌ایم که سیگنالهای آنالوگ دارای طیف در گستره Hz $1666/6$ تا 5000 باشند. فرکانس نمونه برداری $f_s = 13/33$ kHz را کمی بالاتر از میزان نایکوئیست انتخاب کرده‌ایم در این صورت طیف سیگنالهای گسسته زمان از $0/25\pi$ تا $0/75\pi$ گسترده خواهد بود، به طوری که نسبت فرکانس میانی به پهنای باند 100% باشد. رشته گیرنده را خطی و شامل M گیرنده با فاصله‌های مساوی d فرض کرده‌ایم. اگر λ_{\min} طول موج متناظر با لبه بالایی طیف فرکانس سیگنالها باشد d را برابر $\lambda_{\min}/2$ انتخاب کرده‌ایم تا از ایجاد ابهام ناشی از همپوشانی فضایی جلوگیری کنیم [۲۴]. اگر سرعت سیر امواج را 340 m/sec فرض کنیم $d = \lambda_{\min}/2 = 3/4$ cm خواهد بود. با این انتخاب اگر فرض کنیم که زوایای محل منابع نسبت به محور رشته گیرنده در محدوده $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ قرار داشته باشد با توجه به معادله $\theta = \arcsin(\frac{4}{3}n_0)$ که بین تاخیر در زمان گسسته، n_0 و θ وجود دارد، n_0 دارای محدوده $-\frac{4}{3} \leq n_0 \leq \frac{4}{3}$ خواهد بود. در شبیه‌سازهای زیر، مگر در موارد مورد ذکر، دو منبع سیگنال با مشخصات طیفی فوق‌الذکر در زوایای $\theta_1 = 15^\circ$ و $\theta_2 = -10/5^\circ$ واقع شده‌اند و SNR در ورودی گیرنده‌ها 20 dB است. نویزها در گیرنده‌ها سفید و گوسی و مستقل از سیگنالها و مستقل از یکدیگر فرض شده‌اند.

برای قضاوت بر روی دقت الگوریتم در تخمین صحیح زوایای ورود و سیگنالها دو تعریف زیر را برای مقادیر متوسط خطای تخمین و انحراف معیار تخمین انجام می‌دهیم:



شکل ۱ - اثر نوع پنجره بر میزان متوسط خطا در تخمین زوایای ورود



شکل ۲ - اثر طول پنجره بر متوسط خطای تخمین زوایای ورود

طول زمانی پنجره زیادتر باشد دقت در تفکیک فرکانس آن کاهش می‌یابد و بالعکس [۲۶]. بنابراین واضح است که برای یک سیگنال ایستاد با پهنای باند بزرگ و با طیف فرکانسی مشخص، یک پنجره با طول متوسط وجود دارد که بهترین دقت را در حوزه زمان=فرکانس به دست می‌دهد. علاوه بر این مشاهده کردیم که از یک طرف باید N_w بزرگ باشد تا خطای نسبی δ کوچک باقی بماند و از طرف دیگر برای کاهش حجم محاسبات باید N_w کوچک انتخاب شود. بنابراین مقدار متوسط مشخصی از N_w اهداف فوق را به طور همزمان برآورده می‌سازد و این با نتایج شبیه‌سازی هماهنگ است. اگر سیگنالها غیر ایستاد باشند می‌توان طول پنجره را متناسب با فرکانس لحظه‌ای به طور وقتی تغییر داد. بررسی این

جدول ۱- اثر نوع پنجره بر الگوریتم

نوع پنجره	متوسط خطای تخمین	انحراف معیار تخمین
مستطیلی	۰/۴۵۸	۰/۱۲۲۲
مثلثی	۰/۲۸۰	۰/۱۰۲۱
بارتلت	۰/۲۵۴۷	۰/۰۷۸۷
کایزر ($\beta=3$)	۰/۲۶۵۴	۰/۱۰۶
کایزر ($\beta=6$)	۰/۲۵۲۲	۰/۱۰۶۵
هینینگ	۰/۲۳۳۱	۰/۱۰۶۵

جدول ۲- اثر طول پنجره بر الگوریتم

طول پنجره (N_w)	متوسط خطای تخمین	انحراف معیار تخمین
۵۱۲	۰/۲۶۹۵	۰/۰۹۹۹
۲۵۶	۰/۲۷۷۵	۰/۰۸۵۶
۱۲۸	۰/۰۷۴۰	۰/۰۷۱۳
۶۴	۰/۰۵۴۶	۰/۰۸۶
۳۲	۰/۲۲۱۹	۰/۰۷۲۵
۸	۰/۴۵۹۸	۰/۰۷۸۷

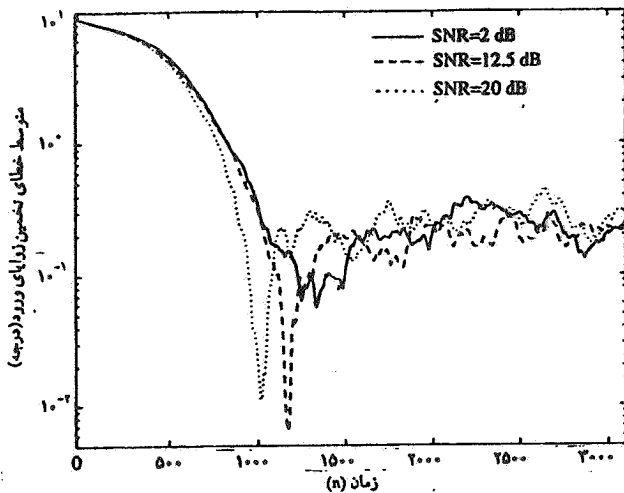
شبیه‌سازهای بعدی از آن استفاده می‌شود.

۲-۶ اثر طول پنجره (N_w)

جدول (۲) اثر طول پنجره N_w را برای پنجره هینینگ و $L = \frac{N_w}{4}$ نشان می‌دهد (علت انتخاب $L = \frac{N_w}{4}$ در بخش بعد بیان می‌شود). شکل (۲) نیز اثر تغییرات N_w را بر متوسط خطا در تخمین زوایای ورود معادله (۲۹-الف) نشان می‌دهد. منحنیهای نشان داده شده، متوسط ۵۰ بار تکرارند. می‌توان نتیجه گرفت که برای N_w طول متوسطی وجود دارد که به حالت بهینه نزدیک است. در مثالهای بالا کوچکترین مقدار بایاس مربوط به $N_w=64$ و $N_w=128$ است. نتیجه عملی به دست آمده در بالا منطقی است چرا که STFT صفحه زمان-فرکانس را به بلوکهای مساوی تقسیم می‌کند و هر چه

جدول ۳ - اثر میزان جهش پنجره بر الگوریتم

میزان جهش پنجره (L)	متوسط خطای تخمین	انحراف معیار تخمین
۱	۰/۳۶	۰/۲۲۴
۴	۰/۲۲۸۷	۰/۱۷۸۳
۸	۰/۱۶۴۶	۰/۱۳۲۱
۱۶	۰/۱۰۶۶	۰/۰۸۹
۳۲	۰/۲۵۰۸	۰/۱۳۰۲



شکل ۳ - اثر تغییرات SNR بر متوسط خطای تخمین زوایای ورودی

کامل در حوزه DSTFT ضبط می‌کنند طوری که می‌توان دوباره آنها را استخراج کرد. باید انتظار داشته باشیم در شرایط بالا بایاسهای تخمین توسط ضرایب DSTFT حداقل باشند.

۴-۶ اثر نسبت سیگنال به نویز (SNR)

در شکل (۳)، SNR را از مقدار ۲۰dB به ۱۲/۵dB و سپس به ۲dB کاهش داده‌ایم و اثر آن را بر متوسط خطا در تخمین زوایای ورودی تعیین کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که تغییرات وسیع در SNR فقط موجب ایجاد یک خطای بایاس بسیار جزئی می‌شود. این موضوع یعنی مقاوم بودن الگوریتم در حضور SNR های کوچک یکی از مزیت‌های عمده الگوریتم است.

۵-۶ اثر وابستگی سیگنالها به یکدیگر

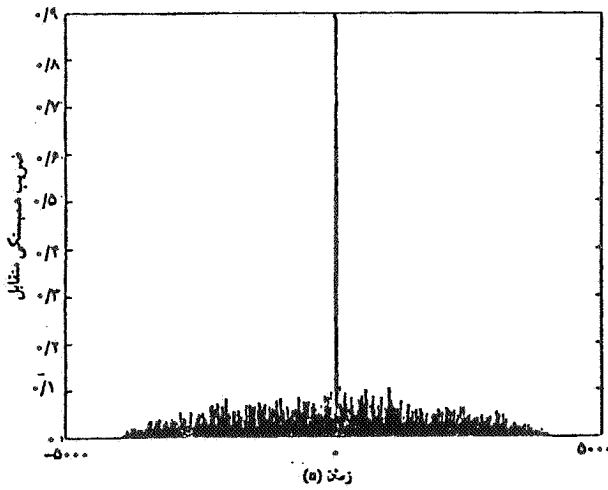
فرض کرده‌ایم که ابتدا دو منبع سیگنال $s_1(t)$ و $s_2(t)$ ناهمبسته باشند (ضریب همبستگی صفر) و آنگاه ضریب همبستگی دو منبع سیگنال را به ۵۰٪ و آنگاه به ۹۸٪ افزایش داده‌ایم و خطا در تخمین زوایای ورودی را محاسبه و در شکل (۴) رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که با افزایش همبستگی سیگنالها اگر چه خطا در تخمین زوایای ورودی به مقدار جزئی زیاد می‌شود اما واریانس آن کاهش می‌یابد. بنابراین الگوریتم نه تنها در برابر SNR های کوچک ایمن است بلکه از این مزیت نیز برخوردار است که در حضور منابع

موضوع خارج از حوزه این مقاله است.

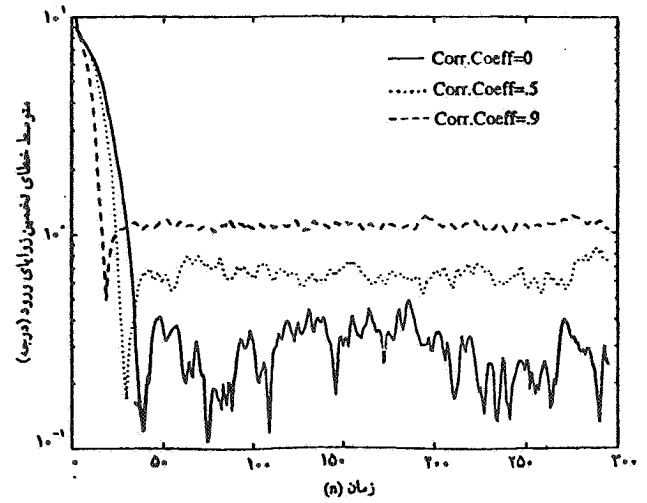
اشاره به یک نکته در اینجا ضروری است: در شبیه‌سازی برای شکل (۶-۲)، $N_w=8$ ، $\mu=4/8 \times 10^{-6}$ انتخاب شده است و هر بار که N_w دو برابر شده، μ نصف شده است. علت این امر را می‌توان در فصل (۹) مرجع [۲۷] یافت. به طور خلاصه می‌توان گفت که ثابت نگهداشتن μN_w میزان انحراف از تنظیم را ثابت نگاه می‌دارد. علاوه بر آن عدم افزایش μ به هنگام کاهش N_w باعث می‌شود که سرعت همگرایی کاهش یابد و اگر طول داده‌ها محدود باشد، الگوریتم در تخمین دارای بایاس شدید خواهد بود. بالعکس عدم کاهش μ به هنگام افزایش N_w باعث ناپایداری الگوریتم می‌شود.

۳-۶ اثر طول جهش پنجره (L)

جدول (۳) اثر طول جهش پنجره L را برای پنجره هنینگ با $N_w=64$ ، $\mu=8 \times 10^{-7}$ و مقادیر $L=1, 8, 16, 32$ نشان می‌دهد. در اینجا هم $L \approx N_w/4$ یک طول جهش بهینه است چرا که منجر به بایاس و واریانس تخمین کوچکتر می‌شود. به همین دلیل در شبیه‌سازیهای موجود $L = \frac{N_w}{4}$ انتخاب شده است. علت این امر را نیز می‌توان با کمک معادله (۱۰-ج) توجیه کرد. می‌دانیم که برای صحت معادله (۱۰-الف) باید معادله (۱۰-ج) برقرار باشد. این معادله به مفهوم آن است که باید مجموع پنجره $w(n)$ و لغزشهای L تایی آن در حوزه زمان مقدار ثابتی باشد. می‌توان نشان داد که جمع زمانی پنجره‌های هنینگ و همینگ با طول N_w و با لغزشهای زمانی $L = \frac{N_w}{4}$ تقریباً منجر به مقدار ثابتی می‌شود و در واقع این پنجره‌ها با طولهای مذکور هستند که اطلاعات سیگنال را به طور

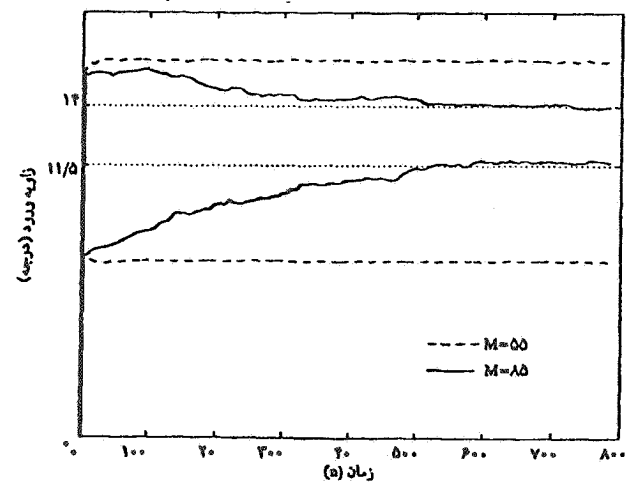


شکل ۵ - همبستگی متقابل سیگنال $s_i(t)$ و تخمین آن $\hat{s}_i(t)$



شکل ۴ - اثر میزان همبستگی منابع سیگنال بر متوسط خطای تخمین زوایای ورود

۶-۷ میزان دقت در تفکیک زوایای ورود منابع سیگنال در صورتی که منابع سیگنال در فضا به یکدیگر نزدیک شوند برای تفکیک آنها باید طول آرایه (تعداد گیرنده‌های M) را زیاد کرد. علت نیاز به طول بیشتر آرایه برای حصول قدرت تفکیک بزرگتر مشخص است چرا که الگوریتم برای تعیین محل منابع مبتنی بر میزان اختلاف فاز ایجاد شده در سیگنالها در گیرنده‌های مختلف کار می‌کند و با نزدیک شدن منابع به یکدیگر اختلاف فاز در گیرنده‌ها بسیار به هم نزدیک می‌شود. به همین دلیل برای تخمین دقیق باید طول وسیعتری از آرایه در دست باشد تا بتوانیم اختلاف فازها را تفکیک کنیم. شکل (۶) نحوه همگرایی الگوریتم وقتی برای تخمین زوایای دو منبع که در 14° و $11/5^\circ$ قرار گرفته‌اند و به ترتیب برای $M=85$ و $M=55$ را نشان می‌دهد.



شکل ۶ - وابستگی میزان دقت الگوریتم در تفکیک منابع سیگنال نزدیک به هم به طول آرایه

۷- نتیجه گیری

در این مقاله برای تخمین محل استقرار منابع سیگنال در فضا و همچنین استخراج سیگنالها در حالت پهنای باند وسیع با کمک یک آرایه از گیرنده‌ها از یک الگوریتم وقتی مبتنی بر تخمین بیشترین درست‌نمایی (ML) استفاده کرده‌ایم که در آن برای تبدیل سیگنالها از حوزه زمان به حوزه فرکانس از تبدیل فوریه کوتاه زمان استفاده شد. از خواص جالب این تبدیل آزادی عملی است که در انتخاب نوع پنجره، طول و میزان جهش آن در اختیار می‌گذارد. نشان دادیم که با انتخاب مناسب نوع، طول پنجره و میزان جهش آن می‌توانیم با

سیگنال وابسته هم به خوبی کار می‌کند.

۶-۶ دقت در تخمین سیگنالها

در شکل (۵) همبستگی متقابل سیگنال اصلی $s_i(t)$ و تخمین آن $\hat{s}_i(t)$ برای $\mu = 8 \times 10^{-7}$ ، $N_w = 64$ ، $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ و $L = 16$ و پنجره هنینگ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که سیگنال تخمین زده شده با دقت بسیار خوبی با سیگنال اصلی مطابقت دارد.

انجام می‌پذیرد. به لحاظ پهنای باند وسیع برای سیگنالها، الگوریتم
 وفقی حساسیت زیادی به انتخاب مقادیر اولیه زوایای ورود ندارد
 اما در صورتی که منابع در فضا خیلی به هم نزدیک شوند الگوریتم
 با این محدودیت روبروست که باید تعداد گیرنده‌ها را افزایش دهیم.

استفاده از بردارهای داده با طول محدود و با حجم محاسبات
 کوچک، مسئله بهینه‌سازی غیر خطی در الگوریتم ML را حل کنیم.
 آن‌گاه توانایی الگوریتم را در تخمین زوایای ورود و استخراج
 سیگنالهای منابع حتی در حضور SNR های کوچک ملاحظه
 کردیم. علاوه بر آن نشان دادیم که در صورتی که منابع سیگنال
 وابسته باشند تخمینهای مورد نظر با خطای بسیار محدود به راحتی

واژه نامه

1. Short Time Fourier
 2. beamforming

3. filter bank summation
 4. overlap-add

5. weighted-OLA

مراجع

1. Bartlett, M. S., "Periodogram Analysis and Continuous Spectra," *Biometrika*, Vol. 37, pp. 1-16, 1950.
2. Capon, J., "High Resolution Frequency Wavenumber Spectrum Analysis," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1408-1418, Aug. 1969.
3. Lang, S. W., and McCellan, J. H., "Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators," *IEEE Tran. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol. AASP-28, pp. 716-724, Dec. 1980.
4. McDonough, R. N., *Application of the Maximum Likelihood Method and the Maximum-Entropy Method to Array Processing*, Springer-Verlag, 1983.
5. Frost, O. I., "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing," *Proc. IEEE*, Vol. 60, Nom. 8, pp. 926-936, Aug. 1972.
6. HWAER, M., and Cantoni, A., "A New Set of Linear Constraints for Broad-Band Time Domain Element Space Processors," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. AP 34, No. 3, March. 1986.
7. Buckley, S. M., and Griffiths, L. J., "An Adaptive Generalized Sidelobe Canceller with Derivative Constraints," *IEEE Trans. on Antennas propagate.*, Vol. AP-34, March 1986.
8. Campton, R. T., *Adaptive Antennas Concepts and Performance*, New Jersey, Prentice Hall, 1988.
9. Roy, P. R., and Kailath, T., "Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance

- Technique-ESPRIT," in *Proc. 19th Asilomar Conf. Pacific Grove, CA*, NOV. 1985.
10. Pillai, S. U., and Kown, B. H., "GEESE (Generalized Eigenvalues Utilizing Signal subspace Eigenvectors)-A new technique for direction finding," *Proc. Twenty Second Annual Asilomar Conference On Signals Systems and computers*, Pacific grove, CA, oct. 31-Nov. 2, 1988.
11. Goch, R., and Shynk, J., "Wide-Band Adaptive Array Processing Using Ploe-Zero Digital Filters," *IEEE, Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. AP 34, No. 3, March. 1986.
12. Haff M. W., and Bukley, K. M., "Robust Time-Domain Processing of Broad-Band Microphone Array Data," *IEEE. Trans. on Speech and Audio Processing*, Vol. 3, May 1995.
13. Ottersten, B., and Kailath, T., "Direction-of-Arrival Estimation for Wide-Band Signals Using Esprit Algorithm," *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 38, No. 2, Feb. 1990.
14. Schultheses, P. M., and Messer, H., "Optimal and Suboptimal Broadband Source Location Estimation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 41, No. 9, pp. 2752-2763, Sept. 1993.
15. Chin, F. P. S., and Chungko, C., "Broadband Source Tracking Using Adaptive Directional Filter with Maximally Flat Responces at Null directiions," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 44., No. 4, pp. 862-873, April 1996.

16. Wang, H., and Kaveh, M., "Coherent Signal Subspace Processing for the Detection and Estimation of Angle of Arrival of Multiple Wide-Band Sources," *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP-33, pp. 823-831, Oct. 1985.
17. Rabiner, L. R., "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 65, No. 11, pp. 1558-1564, Nov. 1977.
18. Prortnoff, M. R., "Time-Frequency Representation of Digital Signals and Systems Based on Short-Time Fourier Analysis," *IEEE, Trans. on ASSP*. Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 55-68, Feb. 1988.
19. Lim, J. S., and Oppenheim, A. V., *Advanced Topics in Signal Processing*, Prentice Hall, 1988.
20. Gazor, S., Affes, S., and Grenier, Y., "Robust Adaptive Beamforming via Target Tracking," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 44, No. 6, pp. 1589-1593, 1996.
21. Rao, C. R., Zhang, L., and Zhao, L. C., "Multiple Target Angle Tracking Using Sensor Array Outputs," *IEEE Trans. Aerospace Electron Systems*, Vol. 29, pp. 268-271, Jan. 1993.
22. Eriksson, A. P., Stoica, and Soderstrom, T., "On-line Subspace Algorithms for Tracking Moving Sources," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 9, pp. 2319-2330, Sept. 1994.
23. Gazor, S., Affes, S., and Grenier, Y., "Wideband Multi-Source Beamforming with Adaptive Array Location Calibration and Direction Finding," *Proc. IEEE ICASSP, 95*, Detroit, MI, Vol. III, pp. 1904-1907, 1995
24. Johnson, D. H., and Dudgeon, D. E., *Array Signal Processing, Concepts and Techniques*, Prentice Hall, New Jersey, 1993.
25. Ziskind, I., and Wax, M., "Maximum Likelihood Localization of Multiple Sources by Alternating Projection," *IEEE Trans. on Acoustic, Speech, and Sig. Proc.* Vol. 36, No. 10, Oct. 1988.
26. Chui, C. K., *Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press Inc., 1992
27. Haykin, S., *Adaptive Filter theory*, Prentice Hall, 1991

ایستان با میانگین صفر فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\varepsilon = E \left\{ \left| s_i(m) \right|^2 \right\} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(n-m) \right|^2 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(n-m-d_{ji}) \right|^2 - 2E \left\{ \left| s_i(m) \right|^2 \right\} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(n-m)w(n-m-d_{ji}) \quad (2)$$

اما واضح است که داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(n-m) \right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(n-m-d_{ji}) \right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(m) \right|^2$$

بنابراین معادله (2) به شکل زیر در می آید.

$$\varepsilon = E \left\{ \left| s_i(m) \right|^2 \right\} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| w(m) \right|^2 - 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(n-m)w(n-m-d_{ji}) \right) \quad (3)$$

پیوست

۱- تعیین حداقل طول لازم برای پنجره بر حسب طول آرایه می خواهیم بررسی کنیم که تحت چه شرایطی تساوی $S_i(n,k) = S_i(n-d_{ji}, k)$ برقرار است. در این معادله $S_i(n,k)$ STFT برای منبع سیگنال $s_i(t)$ در مبدأ مفروض است. در واقع می خواهیم بدانیم اگر خطای ε را طبق معادله $\varepsilon = E \{ |S_i(n,k) - S_i(n-d_{ji},k)|^2 \}$ در نظر بگیریم تحت چه شرایطی خطای نسبی یعنی $\delta = \frac{\varepsilon}{E \{ |S_i(n,k)|^2 \}}$ از یک مقدار قابل قبول کوچکتر می شود. برای این کار می توانیم بنویسیم

$$\varepsilon = E \left\{ \left| S_i(n,k) - S_i(n-d_{ji}, k) \right|^2 \right\} = E \left\{ \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_i(m)w(n-m)e^{-j\pi k m/N_w} - \sum_{q=-\infty}^{+\infty} s_i(q-d_{ji})w(n-q)e^{-j\pi k q/N_w} \right|^2 \right\} \quad (1)$$

اگر در بدترین حالت آماری، سیگنال را معادل یک نویز سفید

جدول ۱- طول مورد نیاز برای پنجره‌های مختلف برحسب طول نرمالیزه شده آرایه و برای $\delta=0/01$

طول آرایه	kaiser	Bartlett	Hamming	Hanning	Rectangular
۵	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۲۵۶
۱۱	۲۵۶	۲۵۶	۲۵۶	۲۵۶	۲۰۴۸
۱۹	۵۱۲	۵۱۲	۵۱۲	۵۱۲	۴۰۹۶
۴۱	۱۰۲۴	۱۰۲۴	۱۰۲۴	۱۲۰۴	۸۱۹۲
۷۵	۲۰۴۸	۲۰۴۸	۲۰۴۸	۲۰۴۸	۱۶۳۴۸

جدول ۲- طول مورد نیاز برای پنجره‌های مختلف برحسب طول نرمالیزه آرایه و برای $\delta=0/1$

طول نرمالیزه شده آرایه	Kaiser($\beta=3$)	Hamming	Bartlett	Hanning
۵	۳۲	۳۲	۳۲	۶۴
۱۱	۶۴	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸
۱۹	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۲۵۶
۴۱	۲۵۶	۵۱۲	۵۱۲	۵۱۲
۷۵	۵۱۲	۱۰۲۴	۱۰۲۴	۱۰۲۴

بود. در شبیه‌سازیهای انجام شده در مقاله به علت آنکه ما از فرکانس $f_s=13330$ Hz برای نمونه‌برداری استفاده کرده‌ایم، $2f_u T_s=1/3$ خواهد بود.

اکنون بنابر بحث بالا می‌خواهیم بدانیم که به ازای یک طول مشخص برای آرایه و برای حصول یک خطای δ کمتر از یک مقدار مشخص، حداقل طول پنجره مورد نیاز چقدر است. می‌توانیم به راحتی برای انواع پنجره‌های معمول روابط تحلیلی برای عبارت

$$\delta = 2 \left(1 - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(m)w(m - d_{ji}) \right) / \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |w(m)|^2$$

را به دست آوریم. جدولهای (۱) و (۲) طول مورد نیاز پنجره، N_w ، برای پنجره‌های مختلف را به ترتیب به ازای $\delta=0/01$ و $\delta=0/1$ و برای طولهای مختلف آرایه گیرنده که برحسب $\lambda/2$ نرمالیزه شده‌اند نشان می‌دهند. در جدول (۲) پنجره مستطیلی را به دلیل دور بودن از حالت بهینه حذف کرده‌ایم.

و بنابراین با توجه به تعریف $\delta = \frac{\varepsilon}{E\{|S_i(n,k)|^2\}}$ و با تبدیل $n-m \rightarrow m$ خواهیم داشت:

$$\delta = 2 \left(1 - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(m)w(m - d_{ji}) \right) / \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |w(m)|^2 \quad (4)$$

به عنوان مثال برای پنجره مستطیلی $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(m)w(m - d_{ji})$ برابر با $N_w - d_{ji}$ خواهد بود و اگر مرکز آرایه را مبدأ فرض کنیم، حداکثر $|d_{ji}|$ از معادله (۵) به دست می‌آید:

$$\max |d_{ji}| = \frac{(M-1)d}{2T_s c} \quad (5)$$

که در این معادله، M تعداد گیرنده، d فاصله دو گیرنده، c سرعت سیر امواج و T_s پریود نمونه‌برداری امواج است. با توجه به آنکه داریم $d = \lambda_{\min}/2$ و $\lambda = c/f_u$ که در آن حداکثر فرکانس در باند سیگنال ورودی است خواهیم داشت: $\max |d_{ji}| = \frac{(M-1)}{4f_u T_s}$ اگر فرض استفاده از میزان نایکوئیست را بپذیریم $2f_u T_s=1$ خواهد