

# حل جریان لایه مرزی آرام و جت آزاد توربولانس با استفاده از شبکه‌های عصبی

حسن بصیرت تبریزی\*، محمد باقر منهج\*\* و آریوبرزن شعبانی\*\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۷/۱۹ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۷/۲/۱۲)

چکیده - روش جدیدی که مبتنی بر کاربرد شبکه‌های عصبی برای حل معادله جریان لایه مرزی آرام و جت آزاد توربولانس است در بررسی حاضر مد نظر گرفته می‌شود. به منظور حل معادله‌ها از شبکه‌های عصبی سلولی که کاربرد وسیعی در حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی دارند استفاده می‌شود. عملکرد مناسب شبکه عصبی سلولی توسط پیاده سازی رایانه‌ای نشان داده شده است.

## Solution of Laminar Boundary Layer and Turbulent Free Jet with Neural Networks

H. Basirat Tabrizi, M. B. Menhaj and A. Shabani

Department of Mechanical Engineering , Amir Kabir University of Technology

Department of Electrical Engineering , Amir Kabir University of Technology

**ABSTRACT-** A novel neuro-based method is introduced to solve the laminar boundary layer and the turbulent free jet equations. The proposed method is based on cellular neural networks, CNNs, which are recently applied widely to solve partial differential equations. The effectiveness of the method is illustrated through some examples.

۱- مقدمه

است [۱ و ۲]. این شبکه‌ها دارای خصوصیتی از شبکه‌های عصبی طبیعی اند و خصایص اصلی آنها پردازش موازی و همزمان اطلاعات و دینامیک زمان پیوسته است [۱ و ۲]. شبکه‌های عصبی

احتیاج قابل ملاحظه به پردازش موازی اطلاعات موجب ایجاد و توسعه یک مدل جدید محاسباتی به نام شبکه‌های عصبی شده

\* استادیار      \*\* دانشیار      \*\*\* دانشجوی دکتری

فهرست علائم

A	ماتریس ضرایب خطی ولتاژ ورودی	I	ستون در همسایگی سلول	u	ورودی
B	ماتریس ضرایب خطی ولتاژ خروجی	M	سطر	x	حالت
C	ماتریس ضرایب غیر خطی ولتاژ ورودی	N	ستون	y	خروجی
C'	خازن	r'	همسایگی	اندیس بالاها	
C''	سلول	R	مقاومت الکتریکی	u	لایه u
D	ماتریس ضرایب غیر خطی خروجی	t	زمان	v	لایه v
E	منبع مستقل غیر وابسته به زمان ولتاژ	u	مؤلفه افقی سرعت	v, u	از لایه محاسباتی v به لایه محاسباتی u
f	اعضای ماتریس C	v	مؤلفه عمودی سرعت	u	محاسباتی u
g	اعضای ماتریس D	V	ولتاژ	u, u	از لایه محاسباتی u به لایه محاسباتی u
h	قدم مکانی	x	مختصات طولی	محاسباتی u	
I	جریان	y	مختصات عرضی	حروف یونانی	
k	سطر در همسایگی سلول	i	سطر	v	لزجت سینماتیکی
		j	ستون	p	چگالی
		k	سطر در همسایگی	t	تنش برش ظاهری
		l	ستون در همسایگی		
		r	شعاع همسایگی		

می‌توان به دو گروه اصلی تقسیم کرد: جتهای آزاد و جریان پشت اجسام. جریان مورد مطالعه در اینجا به گروه اول تعلق دارد. این جریان بر اثر عبور سیال با سرعت ثابت متناهی، از روی یک پله با پهنا و عمق بی نهایت پدید می‌آید [۱۱]. میدان جریان توربولانس علاوه بر شمول تنشهای موجود در میدان جریان آرام از کمیتهایی موسوم به تنشهای ظاهری نیز تأثیر می‌پذیرد. منشأ این تنشهای ظاهری مؤلفه‌های اغتشاشی موجود در متغیرهای میدان جریان است. برای جریان توربولانس آزاد مورد نظر رابطه ساده‌ای بین این تنشهای ظاهری و پارامترهای میدان جریان وجود دارد که در اینجا از آن برای مدلسازی جریان توسط شبکه عصبی سلولی استفاده شده است [۱۱].

بخشی از این گزارش به تشریح ساختار شبکه عصبی به کار رفته اختصاص یافته است. سپس تقریب معادله‌های دیفرانسیل جزئی توسط شبکه‌های عصبی سلولی شرح داده شده است. بخش سوم به بیان معادله‌های حاکم پرداخته و بخش چهارم به نتایج پیاده‌سازی اختصاص یافته است. در بخش پنجم نتایج به دست آمده توسط شبکه عصبی مورد بررسی قرار گرفته و صحت آنها با جوابهای شبیه‌سازی شده مقایسه شده است. در بخش آخر نیز نتیجه‌گیری

سلولی<sup>۱</sup> مدارهای آنالوگی هستند که برای پیاده سازی توسط مدارهای مجتمع<sup>۲</sup> بنا شده‌اند [۱ و ۳] و از نوع آن گروه شبکه‌های عصبی‌اند که خصوصیات فوق الذکر را دارند و برای حل انواع مختلفی از معادله‌های دیفرانسیلی جزئی به کار گرفته شده‌اند [۴، ۸ و ۱۰].

معادله جریان جت آزاد توربولانس و معادله لایه مرزی آرام سرعت توسط یک شبکه سلولی دو لایه حل شده است. به عنوان مقدمه‌ای بر حل معادله‌های جریان جت آزاد توربولانس، جریان لایه مرزی آرام توسط یک شبکه عصبی سلولی حل شده است. جریان لایه مرزی روی صفحه تخت دو بعدی است و به دلیل چسبندگی جریان سیال به دیواره تختی که جریان روی آن برقرار می‌شود پدید می‌آید. روش عددی مطلوب برای حل معادله‌های جریان لایه مرزی با کاربرد شبکه محاسباتی متغیر و گسسته سازی مناسب این معادله‌ها حاصل می‌شود.

جریان جت آزاد از جمله جریانهای موجود در چارچوب توربولانس آزاد است. در مطالعه میادین جریان ناهمسانگرد توربولانس به دلایل عملی چنین رایج است که در ابتدا به جریانهای به اصطلاح مقدماتی پرداخته شود [۱۱]. این جریانهای مقدماتی را

$$|V_{xij}(0)| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N \quad (2-د)$$

$$|V_{uij}(t)| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N \quad (2-ه)$$

که  $C'$  نشانگر یک خازن خطی،  $R_x$  نشانگر یک مقاومت خطی،  $I$  یک منبع مستقل جریان،  $A(i, j; k, l)V_{ukl}$  و  $B(i, j; k, l)V_{ykl}$  منابع خطی جریان کنترل شونده توسط ولتاژ، و  $V_{ukl}(t)$ ،  $C(V_{uij}(t))$  و  $D(V_{yij}(t), V_{ykl}(t))$  نیز منابع غیر خطی جریان کنترل شونده توسط ولتاژ هستند [۴] و برای آنها،

$$D(V_{yij}(t), V_{ykl}(t)) = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{M1} & \dots & f_{MN} \end{bmatrix} \quad (2-و)$$

و

$$C(V_{uij}(t), V_{ukl}(t)) = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{M1} & \dots & g_{MN} \end{bmatrix} \quad (2-ز)$$

که در آنها

$$f_{kl} = d_{kl} V_{yij}(t) V_{ykl}^\alpha(t) \quad (2-ح)$$

$$g_{kl} = c_{kl} V_{uij}(t) V_{ukl}^\beta(t) \quad (2-ط)$$

و  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $c_{kl}$  و  $d_{kl}$  کمیت‌های ثابتی‌اند و مقدار همه آنها در اینجا برابر یک است.  $E_{ij}$  نیز یک منبع مستقل ولتاژ است که به زمان وابسته نیست.

## ۱-۲ تقریب معادله‌های دیفرانسیل جزئی توسط شبکه‌های عصبی سلولی

به طور کلی شبکه‌های عصبی سلولی توسط یک سیستم گسترده از معادله‌های دیفرانسیل معمولی بیان می‌شود [۱ و ۲]. شبکه‌های عصبی سلولی مانند معادله‌های دیفرانسیل جزئی دارای این ویژگی هستند که رفتار دینامیکی آنها فقط به ارتباط‌های موضعی<sup>۳</sup> فضایی آنها بستگی دارد [۱]. شبکه عصبی سلولی به عنوان یک سیستم گسترده فضایی<sup>۴</sup>، معادله دیفرانسیل جزئی توصیف کننده رفتار یک سیستم پیوسته فضایی<sup>۵</sup> را تقریب می‌زند.

## ۲- ساختار شبکه عصبی سلولی

به منظور فراهم آوردن زمینه لازم برای حل معادله‌های جریان مربوط به لایه مرزی آرام و جت آزاد توربولانس باید با ساختار شبکه عصبی به کار رفته آشنا شد. ساختار شبکه عصبی سلولی مانند Cellular Automata است [۱، ۲، ۶ و ۷]. بدین صورت که هر سلول در شبکه فقط به سلولهای مجاور خود به طور مستقیم متصل است. ردیف  $i$ ام و ستون  $j$ ام از یک ترکیب فضایی خاص با  $C''(i, j)$  نمایش داده می‌شود. همسایگی  $N'_r(i, j)$  با شعاع  $r$  یک سلول  $C''(i, j)$  در یک شبکه عصبی دارای  $M$  سطر و  $N$  ستون بدین صورت تعریف می‌شود [۱ و ۲]

$$N'_r(i, j) = \left\{ C''(k, l) \mid \max[|k-i|, |l-j|] \leq r, \right. \\ \left. 1 \leq k \leq M, 1 \leq l \leq N \right\} \quad (1)$$

با انتخاب اندیس پایینه‌های  $x$  و  $y$  به ترتیب برای نشان دادن ورودی، حالت و خروجی، معادله‌های حاکم بر شبکه عصبی سلولی عبارت‌اند از [۶]:

معادله حالت:

$$C' \frac{dV_{xij}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_x} V_{xij}(t) + I \\ + \sum_{C''(k, l) \in N'_r(i, j)} A(i, j, k, l) V_{ukl}(t) \\ + \sum_{C''(k, l) \in N'_r(i, j)} B(i, j, k, l) V_{ykl}(t) \quad (2-الف) \\ + \sum_{C''(k, l) \in N'_r(i, j)} C(V_{uij}(t), V_{ukl}(t)) \\ + \sum_{C''(k, l) \in N'_r(i, j)} D(V_{yij}(t), V_{ykl}(t)) \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N$$

معادله خروجی:

$$V_{uij}(t) = \text{Sigmoid}(V_{xij}(t)), \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N \quad (2-ب)$$

$$V_{uij}(t) = \text{Sigmoid}(V_{xij}(t)), \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N$$

معادله ورودی:

$$V_{uij}(t) = E_{ij}, \quad 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N \quad (2-ج)$$

با استفاده از معادله‌های (۵) صورت تفاضلی و گسسته این روابط عبارت‌اند از:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \nu \left[ \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h_y^2} - \left[ \frac{-(u_{i-1j})^2 + (u_{i+1j})^2}{2h_x} \right] - \left[ \frac{-(u_{ij} - \nu_{ij-1}) + (u_{ij} + \nu_{ij+1})}{2h_y} \right] \right] \quad (۶-الف)$$

$$\frac{dv_{ij}}{dt} = \nu \left[ \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h_y^2} - \left[ \frac{-(v_{i-1j})^2 + (v_{i+1j})^2}{2h_y} \right] - \left[ \frac{-(u_{ij} - \nu_{ij-1}) + (u_{ij} + \nu_{ij+1})}{2h_x} \right] \right], \quad (۶-ب)$$

در این معادله‌ها  $h_x$  اندازه قدم مکانی در جهت  $x$  و  $h_y$  اندازه قدم مکانی در جهت  $y$  است. نکته قابل توجه این است که  $h_x$  ثابت است ولی با فاصله گرفتن از صفحه یا مرز ناپیوستگی  $h_y$  افزایش پیدا می‌کند.

از آنجایی که هر سلول شبکه عصبی سلولی فقط یک خروجی حقیقی دارد، برای پیاده سازی معادله‌های بالا به یک شبکه دو لایه نیاز است. هر لایه از این شبکه به کمک اتصالات موضعی بین هر سلول موجود در آن با سلولهای قرار گرفته در شعاع همسایگی، آن مقدار پایدار متغیرهای مورد نظر را به دست می‌دهد. برای حل معادله‌های بالا مقادیر متغیرهای  $u(ih_x, jh_y, t)$  و  $v(ih_x, jh_y, t)$  موجود در هر گره محاسباتی را بر روی ولتاژ حالت  $V_{xij}(t)$  سلولهای متناظر با آن گره در لایه‌های مربوطه شبکه عصبی نگاشت می‌دهیم. به عبارت دیگر مقدار متغیر  $u(ih_x, jh_x, t)$  در گره محاسباتی  $(i, j)$  در هر لحظه از زمان با ولتاژ حالت سلول متناظر با آن گره در لایه مربوط به محاسبه  $u$  برابر است. برای متغیر  $v(ih_x, jh_y, t)$  نیز به طریق مشابهی عمل می‌شود.

برای حل معادله دیفرانسیل جزئی توسط شبکه عصبی سلولی ابتدا آن را گسسته کرده و مطابق با معادله حالت شبکه سلولی به صورتی دسته بندی می‌کنیم که متغیر مورد محاسبه در هر گره بر ولتاژ حالت شبکه در سلول متناظر با آن گره منطبق شود. سپس با در نظر گرفتن شرایط قید (۲-د) و (۲-ه) به حل معادله پرداخته می‌شود. شرایط مرزی نیز از طریق به کارگیری سلولهایی با ولتاژ حالت معین در مرزهای متناظر پیاده‌سازی می‌شوند [۴-۶].

وقتی معادله دیفرانسیل جزئی گسسته می‌شود مقداری خطا وارد می‌شود که این خطا تنها اختلاف بین دو سیستم است [۵ و ۸]. اگرچه شبکه عصبی سلولی از لحاظ زمانی پیوسته است، رفتار گذرای آن با رفتار سیستم مورد مطالعه یکسان نیست و این تنها رفتار پایدار آن است که بر رفتار سیستم مورد نظر منطبق است. معادله‌های دیفرانسیل جزئی را می‌توان با دقتی قابل ملاحظه توسط شبکه‌های عصبی سلولی حل کرد [۵، ۸ و ۱۰].

### ۳- معادله‌های حاکم بر جریان لایه مرزی آرام و جت آزاد توربولانس

معادله‌های حاکم بر جریان لایه مرزی آرام روی صفحه تخت برای جریان تراکم ناپذیر عبارت‌اند از [۱۱]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۳-الف)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (۳-ب)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۴)$$

که در معادله‌های بالا  $u$  و  $v$  به ترتیب مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت جریان هستند با استناد به معادله پیوستگی (۴) می‌توان معادله‌های (۳) را بدین صورت نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} \quad (۵-الف)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (۵-ب)$$

اکنون با استفاده از تابع خروجی سیگمویید می توان ماتریسهای  
راکه روی لایه ها و بین آنها عمل می کنند با توجه به معادله های (۶)  
به دست آورد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (\text{الف} - ۷)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{ب} - ۷)$$

که در آن با جایگذاری معادله پرناندل [۱۱] برای تنش ظاهری،  $\tau$   
داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = kx \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} \quad (\text{الف} - ۸)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{ب} - ۸)$$

در این معادله یک ضریب ثابت است که به صورت تجربی تعیین  
می شود و مقدار عددی آن در اینجا برای نرخ گسترش فضایی  $0.1x$   
برابر  $0.0014$  است [۱۱]. صورت تفاضلی معادله های بالا  
عبارت اند از:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = ikh_x \left[ \frac{u_{i-1j} - v_{ij} + u_{i+1j}}{h_y} \right] - \left[ \frac{- (u_{i-1j})^2 + (u_{i+1j})^2}{2h_x} \right] \quad (\text{الف} - ۹)$$

$$- \left[ \frac{- (u_{ij} - v_{ij-1}) + (u_{ij+1} v_{ij+1})}{2h_y} \right] + \left[ \frac{(u_{ij} - u_{i-1j})}{h_x} \right] + \left[ \frac{(v_{ij} - v_{ij-1})}{h_y} \right] \quad (\text{ب} - ۹)$$

ماتریسهای به دست آمده برای معادله های (۹) به همان روش  
ماتریسهای مربوط به لایه مرزی حاصل شده و عبارت اند از:

$$A_{ij,kl}^{u,u} = \frac{ih_x}{h_y} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & -2k & 0 \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix} [u_{kl}]$$

$$C_{ij,kl}^{uu,u} = \frac{1}{2h_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [u_i \cdot u_k]$$

$$C_{ij,kl}^{uv,u} = \frac{1}{2h_y} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [u_j \cdot v_l]$$

$$A_{ij,kl}^{u,u} = \frac{1}{h_y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v & -2v & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [u_{kl}]$$

و برای عبارتهای غیر خطی نیز داریم:

$$C_{ij,kl}^{uu,u} = \frac{1}{2h_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [u_i \cdot u_k]$$

$$C_{ij,kl}^{uv,u} = \frac{1}{2h_y} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [u_j \cdot v_l]$$

ماتریسهای مربوطه برای محاسبه سرعت  $v$  نیز به همین ترتیب به  
دست می آیند. شرایط اولیه و مرزی مربوط به معادله های لایه  
مرزی تخت آرام عبارت اند از:

$$\text{شرایط اولیه: } (t = 0; u = v = 0)$$

شرایط مرزی

$$\text{الف) } y=0; u=v=0$$

$$y \rightarrow \infty; u \rightarrow 1 \text{ (m/s), } v = 0$$

$$\text{ب) } y=0; u=0, v = \pm 0.05 \text{ (m/s)}$$

$$y \rightarrow \infty; u \rightarrow 1 \text{ (m/s), } v = 0$$

معادله های توربولانس آزاد نیز از نوع معادله های لایه مرزی اند و  
حل معادله بقای مومتمم برای متوسط مؤلفه افقی سرعت به  
همراه معادله پیوستگی، نیمرخهای متوسط مؤلفه های افقی و  
عمودی سرعت را به دست می دهد. علی رغم تشابه ظاهری  
روابط جت آزاد توربولانس و لایه مرزی آرام، اختلاف  
چشمگیری بین این دو مجموعه از معادله ها وجود دارد. در  
جریان توربولانس آزاد تنش برشی علاوه بر شیب تغییرات  
سرعت در راستای عمود برجهت جریان به ضریب متغیر لزجت  
(ظاهری) نیز بستگی دارد. در جریان لایه مرزی آرام نیز تنش  
برشی به همان عوامل بستگی دارد ولی مقدار لزجت ثابت است.  
معادله های حاکم برجهت آزاد توربولانس عبارت اند از:

و برای لایه مربوط به سرعت  $v$  داریم:

$$A_{ij,kl}^{u,v} = \frac{1}{h_x} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ -1 & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} [u_k]$$

$$A_{ij,kl}^{v,v} = \frac{1}{h_y} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & -1 & \circ \end{bmatrix} [v_l]$$

شرایط اولیه و مرزی برای جت آزاد توربولانس عبارت‌اند از:  
شرایط اولیه:

$$t = \circ \quad ; \quad u = v = \circ$$

شرایط مرزی:

$$y = \circ \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \circ$$

$$y = b \quad ; \quad u = 10 \text{ (m/s)}, v = \circ$$

$$y = -b \quad ; \quad u = v = \circ$$

اندیس بالا‌های نوشته شده روی ماتریسها نمایشگر این هستند که این ماتریسها مربوط به کدام متغیر محاسباتی است و روی کدام لایه عمل می‌کند. به عنوان مثال، اندیس بالای  $uv, u$  به این معناست که کمیت حاصل شده  $uv$ ، که خود از اتصالهای خاص برقی بین دو لایه مربوط به محاسبه متغیرهای  $u$  و  $v$  به دست آمده است، روی لایه  $u$  عمل می‌کند.

#### ۴- نتایج پیاده‌سازی

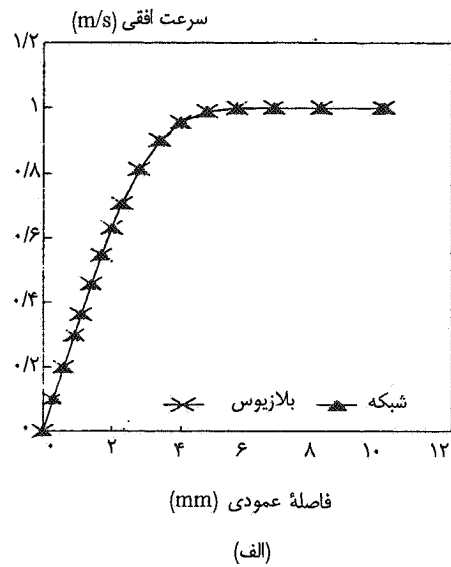
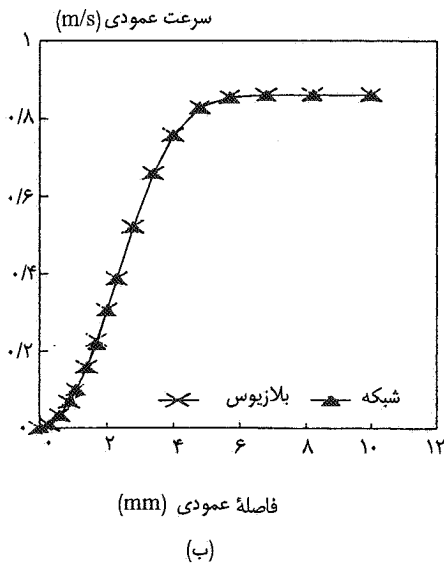
برای لایه مرزی به طور دلخواه از یک شبکه دو لایه با تعداد  $11 \times 17$  نقطه استفاده شده است. مقادیر  $h_x$  و  $h_y$  اولیه در کنار دیواره، به ترتیب با  $0.01 \text{ (m)}$  و  $0.01 \text{ (m)}$  برابرند. در قدم  $h_y$  در جهت عمود بر دیواره بر مقدار آن به اندازه یک هفدهم مقدار قدم اولیه اضافه شده است. سرعت سیال آزاد برابر  $1 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است. مقادیر مکش و دمش مورد بررسی نیز به ترتیب با  $0.05 \text{ m/s}$  و  $-0.05 \text{ m/s}$  برابرند. عملکرد این شبکه با عملکرد مدل تشابهی بلازیوس [۱۱] از لحاظ سرعت و دقت محاسبات بر روی شبکه مستطیلی محاسباتی مورد نظر مقایسه شده است. مرتبه زمانی همگرایی شبکه عصبی سلولی که توسط حاصل ضرب  $C' \times R_x$  تعیین می‌شود [۱] حدود  $0.1$  ثانیه و برای حل تشابهی با

استفاده از یک کد رایانه‌ای به زبان فورتن که با کامپایلر لی‌های  $4/1$  روی یک رایانه پنتیوم  $133-586 \text{ MHz}$  اجرا شده بود حدود  $7/5$  ثانیه بود. نتایج به دست آمده برای این شبیه سازی به طور دلخواه برای مقطع  $x = 0.05 \text{ m}$  در شکلهای (۱) تا (۳) آورده شده‌اند. در شکل (۱) حالت جریان با شرط مرزی عدم لغزش آورده شده است. در شکل (۲) حالت مکش در سطح جداره و در شکل (۳) حالت دمش در سطح جدار نشان داده شده است.

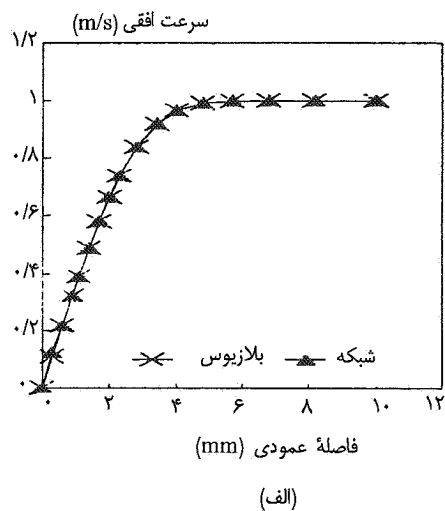
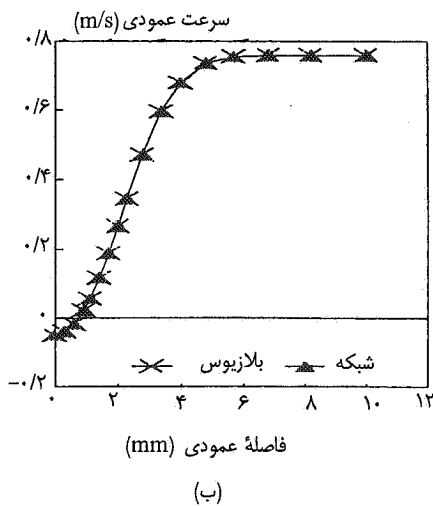
برای جت آزاد توربولانس نیز به طور دلخواه از یک شبکه دو لایه با  $30 \times 30$  نقطه محاسباتی استفاده شده است. مقادیر  $h_x$  و  $h_y$  اولیه در کنار دیواره، به ترتیب با  $0.01 \text{ m}$  و  $0.01 \text{ m}$  برابرند. در هر قدم  $h_y$  در جهت عمود بر راستای مرز ناپیوستگی اولیه جریان، و به عبارت دیگر مماس بر سطح فوقانی پله، بر مقدار آن به اندازه یک سی‌ام مقدار اولیه اضافه می‌شود. عملکرد این شبکه با مدل تشابهی موجود در مرجع [۱۱] مقایسه شده است. در اینجا زمان همگرایی شبکه ۱ ثانیه و برای حل تشابهی به همان ترتیب فوق‌الذکر حدود ۱ دقیقه و ۱۰ ثانیه بود. نتایج به دست آمده نیز برای دو مقطع مختلف در نمودارهای (۴) و (۵) آورده شده‌اند. در شکلهای (۴- الف) و (۴- ب) به ترتیب تغییرات مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در فاصله  $0.01 \text{ m}$ ، که با توجه به طول قدمهای  $h_x$  نزدیکترین مقطع عرضی محاسباتی به لبه شروع جریان توربولانس است، نشان داده شده است. در شکلهای (۵- الف) و (۵- ب) نیز به ترتیب تغییرات مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در فاصله  $0.1 \text{ m}$ ، یعنی در فاصله قابل توجهی از لبه شروع جریان توربولانس، نشان داده شده است.

#### ۵- بحث و بررسی

از مقایسه نتایج به دست آمده از مدل شبکه عصبی سلولی و نتایج به دست آمده از جوابهای مبتنی بر حل‌های تشابهی معادله‌های لایه مرزی آرام و جت آزاد توربولانس می‌توان نتیجه گرفت که این شبکه‌ها با دقتی یکسان نیمرخهای سرعت را در زمان بسیار کمتری به دست می‌آورند. تنها موقعیتی که در آن جوابهای شبکه عصبی مورد نظر با جوابهای تشابهی اختلاف چشمگیری دارند برای جریان جت آزاد توربولانس در نزدیکی لبه جریان است. البته لبه شروع جریان یک نقطه تکینه<sup>۹</sup> در میدان جریان است و حل تشابهی موجود قادر به محاسبه یک نیمرخ دقیق سرعت در این نقطه نبوده [۱۱] و با



شکل ۱- نمودار تغییرات سرعت در لایه مرزی بدون لغزش برای الف) مؤلفه افقی ، ب) مؤلفه عمودی

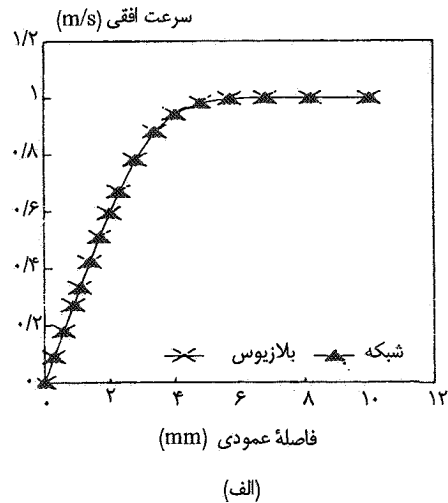
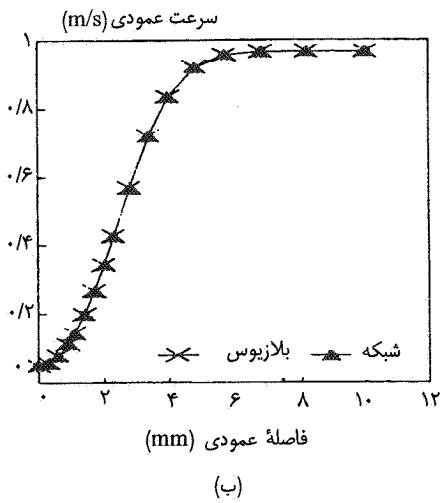


شکل ۲- نمودار تغییرات سرعت در لایه مرزی با مکش برای الف) مؤلفه افقی ، ب) مؤلفه عمودی

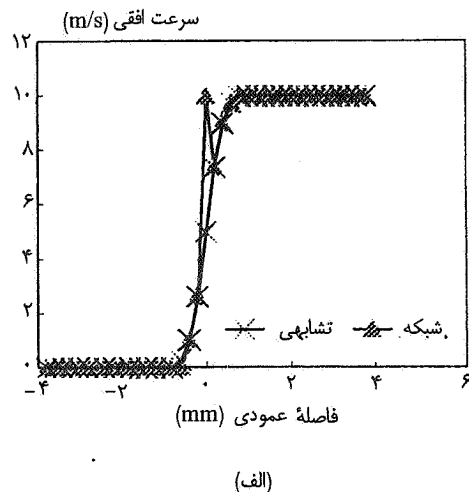
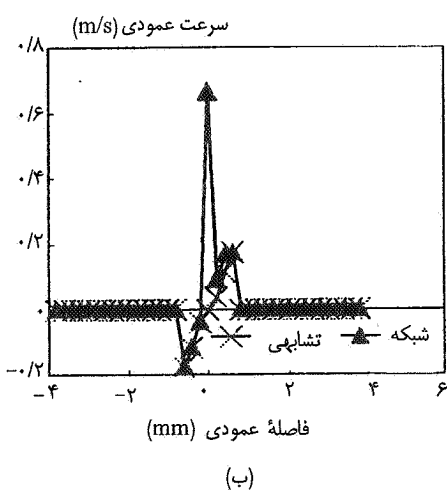
عصبی مزبور را قابل قبول توصیف کرد.

اهمیت این موضوع در حل معادله‌های توربولانس آزاد، یعنی در شرایطی که جریان توربولانس به دور از دیواره‌های فیزیکی توسعه پیدا می‌کند، بسیار زیاد است. دلیل این امر آن است که برای جریانهای مزبور کلیه مدل‌های موجود از لحاظ محاسبه نیمرخ سرعت متوسط جریان دقت کم و بیش یکسانی داشته [۱۱] ولی از لحاظ سرعت محاسبات متفاوت‌اند. همچنین با توجه به اینکه حل معادله‌های جریانهای توربولانس در حالت کلی به شبکه‌های محاسباتی بسیار ریزی نیاز داشته [۱۲] و در نتیجه از لحاظ توان و

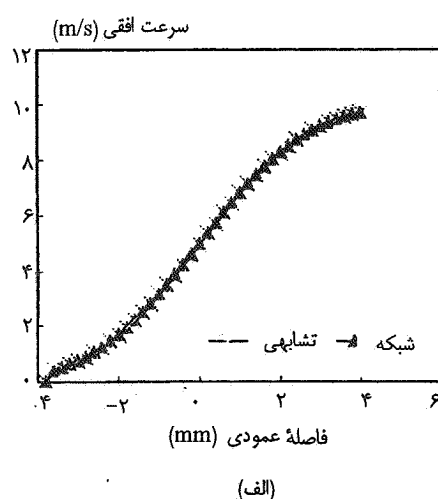
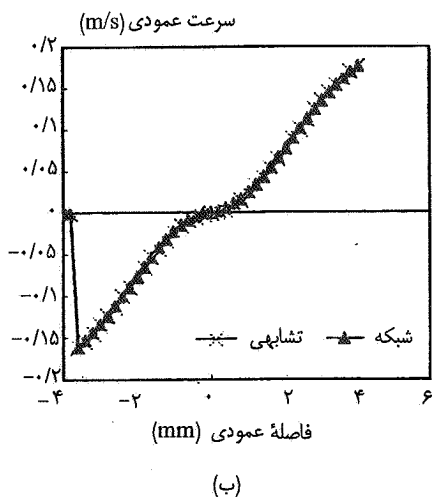
توجه به ذات تشابهی خود فقط یک نیمرخ سرعت تقریبی را در نزدیکی این نقطه به دست می‌دهد. بنابراین نمی‌توان بر پایه مقایسه با حل تشابهی در مورد صحت جوابهای به دست آمده از شبکه عصبی مورد نظر قضاوت کرد. از طرف دیگر شبکه عصبی سلولی مورد استفاده برای مقادیر  $h_x$  با مرتبه ابعادی حدود  $0.1$  مقدار  $h_x$  به کار رفته رفتار ناپایداری از خود نشان می‌دهد و از این رو نمی‌توان با شبکه به کار رفته میدان جریان را در داخل این ناحیه به دست آورد. به هر جهت با توجه به کوچکی قابل ملاحظه این ناحیه که در حدود  $0.01$  m بیشتر وسعت ندارد، می‌توان عملکرد شبکه



شکل ۳- نمودار تغییرات سرعت در لایه مرزی بادمش برای الف) مؤلفه افقی ب) مؤلفه عمودی



شکل ۴- نمودار تغییرات سرعت جت مرزی آزاد در ناحیه لبه برای الف) مؤلفه افقی ب) مؤلفه عمودی



شکل ۵- نمودار تغییرات سرعت جت مرزی آزاد در ناحیه دور از لبه الف) مؤلفه افقی، ب) مؤلفه عمودی



می‌گیریم که می‌توان از شبکه‌های عصبی سلولی به عنوان یک مدل محاسباتی نوین که قادرند در زمانی بسیار کوچک با دقتی قابل قبول نیمرخهای سرعت را به دست دهند در حل موارد مشابه موجود در جریانات توربولانس استفاده کرد. در عین حال قابلیت پیاده‌سازی این شبکه‌ها توسط مدارهای مجتمع امکان استفاده ارزانی‌ت آنها را در میدانهایی با تعداد نقاط محاسباتی زیاد فراهم می‌سازد. از نقطه نظر مکانیک سیالات این ویژگی در حل معادله‌های جریان توربولانس، که در حالت کلی به نقاط محاسباتی زیادی نیازمندند، اهمیت زیادی دارد.

حافظه سخت افزاری زمانبر و پرهزینه‌اند [۵]، می‌توان با توجه به قابلیت‌های پیاده‌سازی شبکه‌های عصبی سلولی توسط مدارهای مجتمع و سرعت بالای پردازش موازی اطلاعات با هزینه ناچیز [۳-۵] از این شبکه‌ها به صورت مناسبی استفاده کرد. از آنجایی که اکثر جریانه‌های مهم طبیعی و صنعتی توربولانس‌اند اهمیت کاربرد این نوع شبکه‌ها در حل معادله‌های جریان هر چه بیشتر روشن می‌شود.

## ۶- نتیجه‌گیری

با توجه به مثالهای حل شده و نتایج به دست آمده نتیجه

## واژه نامه

- |                            |                              |                                |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1. cellular neural network | 3. local interactions        | 5. spatially continuous system |
| 2. integrated circuits     | 4. spatially discrete system | 6. discretize                  |

## مراجع

- Chua, L. O., and Yang, L., "Cellular Neural Networks: theory," *IEEE Transactions on Circuits and systems*, CAS-35, pp. 1257-1272, 1988.
- Chua, L. O., and Yang, L., "Cellular Neural Networks: theory," *IEEE Transactions on Circuits and systems*, CAS-35, pp. 1273-1290, 1988.
- Chua, L. O., and Roska, T., "The CNN paradigm," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-40, pp. 147-156, 1993.
- Roska, T., Wolf, D., Kozek, T., Tetzlaff, R., Chua, L. O., and Yang, L., "Solving Partial Differential Equations by CNN." *Proceedings of the 11th European Conference on Circuit Theory and Design*, Davos, pp. 1477-1482, 1993.
- Roska, T., and Kozek, T., "A Double Time-Scale CNN for Solving Two Dimensional Navier-Stokes Equation," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 24, pp. 49-55, 1996.
- Gobovic, D., and Zaghoul, M. E., "Analog Cellular Neural Network with Application to Partial Differential Equations," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 6, pp. 359-362, 1994.
- Roska, T., and Chua, L. O., "The CNN Universal Machine: An Analogic Array Computer," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-40, pp. 163-173, 1993.
- Dissananyake, M.W. M. G., and phan-Thien, N., "Neutral-Network-Based Approximation for Solving Partial Differential Equations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 3, 1993.
- Kozek, T., Chua, L. O., Roska, T., Wolf, D., Tetzlaff, R., Puffer, F., and Lotz, K., "Simulating Nonlinear Waves and Partial Differential Equations via. CNN," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 42, No. 10, pp. 816-820, 1995.
- Roska, T., Chua, L.O., Wolf, D., Kozek, T., Tetzlff, R., and Puffer, F., "Simulating Nonlinear Waves and Partial Differential Equations via. CNN," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 42, No. 10, pp. 807-815, 1995.
- Schlichting, H., *Boudary Layer Theory*, 6th ed., pp. 681-690, McGraw Hill, New York, 1968.
- Fischberg, J., Rhie, C. M., Zacharias, R. M., Bradley, P. C., and DesSureault, T. M., "Using Hundreds of Workstations for Production Running of Parallel CFD Applications," *Proceedings of the Parallel CFD, 95 Conference*, Pasadana, CA, U.S.A., pp. 9-22, 1995.