

# تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مثلثی با ضخامت نایکنواخت خطی و شرایط مرزی مختلف

محمد مهدی سعادت پور\*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۷/۱۱/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۸/۷/۱۴)

چکیده - به کمک دستگاه مختصات مساحتی یک روش ساده ریلی - ریتز برای تعیین فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی صفحات مثلثی با شرایط مرزی دلخواه و ضخامت متغیر خطی در هر دو راستای  $x$  و  $y$  ارائه شده است. برای دستیابی به جوابها از چند جمله‌ایهای  $L_1^i, L_2^j, L_3^k$  در دستگاه مختصات مساحتی به عنوان توابع درونیایی میدان و از جمله  $L_1^a, L_2^b, L_3^c$  به عنوان تابع مرزی استفاده شده است. حاصلضرب جملات مزبور با مقادیر مشخص  $a, b$  و  $c$  با مقادیر مختلف  $d, j$  و  $k$  به عنوان توابع مجاز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش حل برای حالت کلی صفحات ارتوتروپیک با خواص ماده مشخص در دستگاه اصلی توسعه داده شده است. براساس برنامه رایانه‌ای تهیه شده فرکانسهای طبیعی چندین صفحه مختلف استخراج شده و با جوابهای موجود مقاله‌های دیگر محققان مقایسه شده است. جوابها در توافق کامل با جوابهای دیگران است.

## Analysis of Free Vibration of Triangular Plates with Non-Uniform Linear Thickness and Arbitrary Boundary Conditions

M. M. Saadatpour

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** Using area coordinates, a new simple Rayleigh-Ritz method is developed to solve free vibration and to obtain natural frequencies and mode shapes of triangular plates with arbitrary boundary conditions. The method is suitable for plates with nonuniform thickness, especially linear in both directions. The polynomial terms  $L_1^i, L_2^j, L_3^k$  in the area coordinates are employed to interpolate plate deflection and  $L_1^a, L_2^b, L_3^c$  are used to enforce the prescribed boundary conditions. Therefore the admissible basic functions are given as  $L_1^{(i+a)}, L_2^{(j+b)}, L_3^{(k+c)}$ . The solution technique is applicable to orthotropic plates with material properties given in principal directions. Natural frequencies are calculated according to the method for a few cases and

\* - استاد

فهرست علائم	
A	مساحت
{A}	بردار ضرب مجهول
D	مشخصه سختی ورق
[D]	ماتریس منحنی ماده
[H]	ماتریس مشتقات توابع
	شکل
[K]	ماتریس سختی
$L_1, L_2, L_3$	مختصات مساحتی،
[m]	ماتریس جرم
N	تعداد جملات سری
	درونیابی
p	مرتبه تابع درونیابی
[Q]	ماتریس تبدیل بردار انحنا
t	ضخامت
T	انرژی جنبشی
U	انرژی کشسانی
w	تابع تغییر مکان
$\kappa$	انحنا
$\xi, \zeta$	مختصات طبیعی
$\Pi$	انرژی پتانسیل کل
$\{\psi\}$	بردار توابع شکل
$\omega$	فرکانس طبیعی

*the compared with available solutions in the literature. The results are in complete agreement.*

## ۱- مقدمه

می‌دهند که در مقاله اول صفحات قائم الزاویه و در مقاله دوم صفحات کلی مثلثی با هر شرایط مرزی موضوع تحقیق قرار می‌گیرند. روش حل بر مبنای استفاده از اصل انرژی به شیوه ریلی - ریتز و کاربرد چند جمله‌ایهای ساده به عنوان توابع مجاز پایه استوار است. لیسا [۹] بحث نسبتاً جامع و مختصری از ارتعاشات صفحات مثلثی با لبه‌های آزاد را ارائه می‌دهد. مطالعه نامبرده بر پایه استفاده از روش ریتز و کاربرد توابع جابه‌جایی فرضی به شکل چند جمله‌ایهای جبری متکی است. بر مبنای روش حل پیشنهادی جداول متعددی از فرکانسهای صفحات مثلثی با نسبت ابعادی مختلف ارائه شده است. سینک و چاکراورتی [۱۰] به همان روش ریلی - ریتز و استفاده از توابع جابه‌جایی مجازی متعام برهم مسئله ارتعاش عرضی صفحات مثلثی با شرایط مرزی مختلف و شکل دلخواه را مورد بررسی و تحقیق قرار می‌دهند. مزیت راه حل اخیر همان خاصیت تعامد توابع جابه‌جایی فرضی آن است زیرا چنین خاصیتی منجر به تسهیل محاسبات تعیین ضریب مجهول توابع فرضی می‌شود. همچنین در این حل از دستگاه مختصات طبیعی  $\xi\eta$  برای انجام محاسبات استفاده شده است، که انتگرالگیری جملات تابع انرژی را به روش بسته میسر می‌سازد.

ارتعاش صفحات مثلثی با ضخامت نایک‌نواخت اولین بار توسط میرزا و بولانی انجام شد [۸]. ایشان برای انجام تحقیقات خود از روش اجزای محدود استفاده کردند. کیتربونچای و

مسئله ارتعاش خمشی صفحات مثلثی شکل و دستیابی به حل آن همواره یکی از موارد قابل توجه محققان در زمینه ارتعاشات صفحات بوده است. مطالعه این موضوع منجر به تألیف مقاله‌های متعدد و غنی شدن ادبیات موضوع شده است. محققان متعددی در جهت راهگشایی حل مسئله ارائه طریق کرده‌اند که فهرست گسترده ایشان در مرجع [۴] یافت می‌شود. در این مرجع همچنین اشاره به کارهای عملی پژوهشگران چندی شده است. ارتعاش صفحات همواره با نام لیسا یکی از پیشگامان تحقیق در مورد این موضوع مترادف است [۱-۴] که بی شک برای گسترش مرزهای موجود در این زمینه ارجاع به مقاله‌های او ضروری است. هر یک از کارهای تحقیقاتی گذشته در موضوع ارتعاشات صفحات به حالت یا حالت‌های مربوط می‌شود که صفحه دارای پلان خاصی و یا شرایط مرزی مشخصی بوده و تحلیل جامعی که نتایج آن قابل اعمال به هر حالت اختیاری باشد صورت نگرفته است مگر اینکه از روش اجزای محدود استفاده شده باشد [۸و۷].

با شروع جدی تحقیقاتی فضایی در نیمه دوم قرن حاضر و پیشرفت چشمگیر آن در سالهای اولیه و لزوم تحلیل ارتعاش صفحاتی که رویه سفاین فضایی و نیز پوسته موشکها و وسایل پرتاب کننده را تشکیل می‌دادند طبیعتاً مسئله ارتعاش صفحات مثلثی نیز مورد توجه محققان قرار گرفت. کیم و دیکینسون [۶و۵] مسئله ارتعاش صفحات مثلثی را در دو مقاله مجزا مورد مطالعه قرار

همکاران [۱۱] با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل در حالت دینامیک در قالب روش ریلی - ریتز مسئله ارتعاش صفحات مثلثی ضخیم را با در نظر گرفتن اثر برشی مورد مطالعه قرار دادند.

در مقاله حاضر که در حقیقت در تداوم کار قبلی است، [۲۱] تحلیل ساده‌ای برای ارتعاش آزاد صفحات مثلثی با شکل کلی و ضخامت نایکنواخت و شرایط مرزی دلخواه ارائه می‌شود. اگرچه عمده نتایج برای حالت ایزوتروپیک استخراج شده است، لیکن روش ارائه شده را می‌توان به همان سهولت برای حالت ارتوتروپیک نیز به کار برد. مزیت راه حل ارائه شده در مقایسه با راه‌های قبلی که تا کنون بر مبنای روش ریلی ریتز گسترش یافته است استفاده از دستگاه مختصات مساحتی برای انجام محاسبات است که در مرجع [۱۷] تشریح شده است. استفاده از دستگاه مساحتی نه تنها ارائه معادله‌های مرزی و در نتیجه شرایط مرزی صفحه را به صورت بسیار ساده انجام پذیر می‌سازد و این کار باعث انتخاب توابع چند جمله‌ای ساده برای بسط میدان جابه‌جایی می‌شود، بلکه دستگاه مزبور ما را قادر می‌سازد که انتگرال‌گیریهای توابع انرژی به صورت کاملاً بسته و دقیق و بدون هیچ‌گونه خطایی میسر شود.

جالب توجه است که دقت کنیم در حالت شرایط مرزی ساده مقادیر مشخصه نرمالیزه شده فرکانس و ضریب کماتش تحت بار یکنواخت  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  یکسان بوده [۱۲] و از این جهت امکان مقایسه جوابهای فرکانس با جوابهای ضریب کماتش، در صورت دقیق بودن چنین جوابهایی، میسر است. کماتش صفحات مثلثی تحت بار یکنواخت فشاری توسط وانگ و لویو [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است که ما از این مطالعه برای تأیید صحت و دقت روش توسعه داده شده استفاده می‌کنیم. همچنین در مقاله دیگری توسط جانکی و نایت [۱۴] تحلیل کماتش صفحات مثلثی غیرایزوتروپیک مورد تحقیق گرفته است که بعضی از جوابهای این مقاله برای تأیید و صحت روش حاضر استفاده می‌شود.

## ۲- تابع جابه‌جایی میدان و تبدیل بردار انحنا

وضعیت هر نقطه داخل یک مثلث توسط سه مختصه  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_3$  به نام مختصات مساحتی به طور کامل تعیین می‌شود. تبدیل مختصات کارتزین به مختصات مساحتی به سادگی انجام‌پذیر

است [۲۱]. برای بیان میدان جابه‌جایی در دستگاه مساحتی  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_3$  از تابعی به صورت زیر استفاده می‌شود

$$w = w_b w_d \quad (1)$$

به طوری که  $w_b = w_b(L_1, L_2, L_3)$  اعمال کننده شرایط مرزی مسئله و  $w_d = w_d(L_1, L_2, L_3)$  یک چند جمله‌ای کامل از مختصات مساحتی با ضریب نامعین بوده که بیان دارنده بسط میدان جابه‌جایی مسئله است. تابع  $w_b$  چنین ارائه می‌شود

$$w_b = L_1^a L_2^b L_3^c \quad (2)$$

که در آن مقدرا  $a$  بسته به اینکه مرز  $L_1=0$  در حالت آزاد، لولایی و یا ثابت باشد مقدار صفر، یک و یا دو اختیاری می‌کند. به همین ترتیب مقدار  $b$  تعیین کننده شرایط مرزی هندسی در مرز  $L_2=0$  و  $c$  تعیین کننده شرایط مرزی هندسی در مرز  $L_3=0$  است. تابع  $w_d$  شامل جملاتی با ضریب نامعلوم  $a_{ijk}$  به صورت زیر است

$$w_d = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p a_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad (3)$$

$$i+j+k=p$$

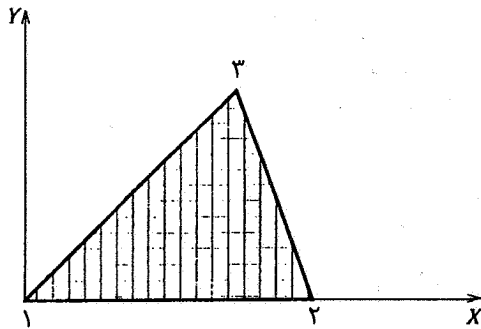
به طوری که  $p$  مرتبه چند جمله‌ای و  $i, j, k$  به ترتیب نمای صحیح مختصات  $L_1, L_2, L_3$  از صفر تا حداکثر مقدار  $p$  تغییر می‌کنند. تابع  $w_d$  را می‌توان به صورت زیر نیز با ضریب نامعینی که فقط دارای یک اندیس است نشان داد. چنین نمایشی از تابع  $w_d$  برای برنامه نویسی رایانه‌ای ضروری است

$$w_d = \sum_{I=1}^N A_I L_1^i L_2^j L_3^k \quad (4)$$

که در آن  $I$  شماره جمله و  $N$  تعداد جملات است. با انجام بعضی عملیات ریاضی می‌توان نشان داد که یک انتخاب ساده برای تعیین شماره جمله استفاده از معادله

$$I = \frac{1}{p} k(2p - k + 3) + (j + 1) \quad (5)$$

و تعیین تعداد جملات توسط معادله زیر امکانپذیر است



شکل ۱- صفحه مثلثی ارتوتروپیک

بردار انحنا در دستگاه مختصات مساحتی چنین تعریف می شود

$$\{\hat{\kappa}\} = \langle \kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3 \ \kappa_{12} \ \kappa_{23} \ \kappa_{31} \rangle^T \quad (10)$$

$$= \langle \frac{\partial^2 W}{\partial L_1^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial L_2^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial L_3^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial L_1 \partial L_2}, \frac{\partial^2 W}{\partial L_2 \partial L_3}, \frac{\partial^2 W}{\partial L_3 \partial L_1} \rangle^T$$

رابطه بین بردار  $\{\kappa\}$  و  $\{\hat{\kappa}\}$  با استفاده از روابط موجود بین مختصات کارترین و مختصات مساحتی به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{\kappa\} = [Q] \{\hat{\kappa}\} \quad (11)$$

به طوری که ماتریس تبدیل  $[Q]$  با درایه های ثابت در مرجع [۲۱] محاسبه شده و موجود است.

#### ۴- تابع انرژی پتانسیل کل

یک صفحه مثلثی را به صورت کلی خود مطابق شکل (۱) در نظر گرفته فرض می کنیم ماده تشکیل دهنده این صفحه ارتوتروپیک و جهات اصلی آن منطبق بر محورهای  $x$ ،  $y$  باشد. مرزهای این صفحه با معادله های  $L_1=0$ ،  $L_2=0$  و  $L_3=0$  مشخص شده و شرایط مرزی آن با انتخاب  $a$ ،  $b$  و  $c$  در معادله (۲) تأمین می شود. قابل ذکر است که حتی اگر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق بر راستاهای اصلی ماده نباشند محدودیتی در فرمولبندی پیش رو به وجود نمی آید. ماکزیمم انرژی ارتجاعی صفحه نازک مورد نظر با استفاده از معادله زیر قابل محاسبه است

$$U = \iint_A \frac{1}{2} \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA \quad (12)$$

$$N = \frac{1}{2} (p-1) (p+2) \quad (6)$$

بالعکس اگر مقدار  $I$  مشخص باشد و بخواهیم  $i$ ،  $z$  و  $k$  را تعیین کنیم ابتدا شماره جمله را از انتهای زنجیره چند جمله ای که با  $I$  نشان داده می شود مشخص کنیم به طوری که

$$r = N - I + 1 \quad (7)$$

سپس مقدار  $q$  را طوری تعیین می کنیم که رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{1}{2} q (q+1) < r \leq \frac{1}{2} (q+1) (q+2) \quad (8-f)$$

و آن گاه  $i$ ،  $z$  و  $k$  را مطابق زیر محاسبه می کنیم

$$i = r - \frac{1}{2} q (q+1) - 1 \quad (8-b)$$

$$k = p - q \quad (8-c)$$

$$j = p - i - k \quad (8-d)$$

و به این ترتیب با در دست بودن مرتبه چند جمله ای  $p$  و شماره جمله می توان به نماهای  $i$ ،  $z$  و  $k$  در جمله  $L_1^i L_2^j L_3^k$  با شماره جمله  $I$  رسید.

#### ۳- تبدیل بردار انحنا

از آنجا که به منظور سهولت اعمال معادله های مرزی صفحه و نیز انتگرالگیری توابع مختلف در محدوده صفحه استفاده از مختصات مساحتی بسیار ساده تر است و از طرفی برای محاسبه تابع انرژی کشسانی صفحه نیازمند بردار انحنا هستیم در این قسمت سعی می کنیم بردار انحنا در دستگاه مختصات کارترین را که به صورت زیر تعریف می شود

$$\{\kappa\} = \langle \kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy} \rangle^T = \langle \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \rangle^T \quad (9)$$

بر حسب بردار انحنا در دستگاه مختصات مساحتی بنویسیم.

$$U = \frac{1}{\gamma} \sum_I \sum_J k_{IJ} A_I A_J \quad (20)$$

به طوری که

$$k_{IJ} = \iint_A \{H\}_I^T [\hat{D}] \{H\}_J dA \quad (21)$$

و

$$\{H\}_I = \begin{Bmatrix} (a+i)(a+i-1) L_1^{a+i-2} L_2^{b+j} L_3^{c+k} \\ (b+j)(b+j-1) L_1^{a+i} L_2^{b+j-2} L_3^{c+k} \\ (c+k)(c+k-1) L_1^{a+i} L_2^{b+j} L_3^{c+k-2} \\ 2(a+i)(b+j) L_1^{a+i-1} L_2^{b+j-1} L_3^{c+k} \\ 2(b+j)(c+k) L_1^{a+j} L_2^{b+j-1} L_3^{c+k-1} \\ 2(c+k)(a+i) L_1^{a+i-1} L_2^{b+j} L_3^{c+k-1} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

مشروط بر اینکه در درایه‌های ماتریس  $\{H\}_I$  هر گاه نمای مختصه‌ای منفی شود، جمله مربوط کاملاً صفر اختیار شود. حداکثر انرژی جنبشی صفحه‌ای در حالت ارتعاش آزاد با فرکانس  $\omega$  از معادله زیر به دست می‌آید.

$$T = \frac{1}{\gamma} \rho \omega^2 \iint_A t \omega^2 dA \quad (23)$$

به طوری که  $\rho$  جرم واحد حجم صفحه است. هر گاه از معادله (۱۸) در معادله بالا قرار دهیم تابع انرژی جنبشی صفحه به صورت زیر در می‌آید

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum_I \sum_J A_I m_{IJ} A_J \omega^2 \quad (24)$$

که در آن

$$m_{IJ} = \iint_A \rho t \psi_I \psi_J dA \quad (25)$$

انتگرالگیری هر دو معادله (۲۱) و (۲۵) به صورت بسته و یا عددی انجام پذیر است که در اینجا از انتگرال عددی استفاده شده است [۲۱]. و بالاخره با در دست بودن هر دو تابع انرژی کشسانی و تابع انرژی جنبشی تابع انرژی کل چنین نوشته می‌شود

$$\Pi = U - T$$

به طوری که  $[D]$  ماتریس سختی صفحه به صورت زیر بیان می‌شود

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & \nu_{xy} D_y & \cdot \\ \nu_{yx} D_x & D_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

به طوری که

$$D_{xy} = G_{xy} t^3 / 12, \quad D_y = D_x E_y / E_x \quad (14)$$

$$, \quad D_x = E_x t^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

تغییرات خطی ضخامت صفحه مثلثی را می‌توان با درونیابی ضخامت به کمک ضخامتهای رئوس آن به سادگی ارائه کرد. اگر ضخامت رئوس یک صفحه مثلثی به ترتیب با  $t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  نشان داده شوند، ضخامت هر نقطه آن به مختصات  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  از معادله زیر به دست می‌آید.

$$t = t_1 L_1 + t_2 L_2 + t_3 L_3 \quad (15)$$

و به این ترتیب با کاربرد تابع  $t$  در ثابتهای سختی در معادله (۱۴) و سپس معادله (۱۳) ماتریس سختی ماده  $[D]$  برحسب  $t$  مشخص می‌شود. هر گاه از معادله (۱۱) در معادله (۱۲) قرار دهیم معادله انرژی کشسانی به شکل زیر در می‌آید.

$$U = \frac{1}{\gamma} \iint_A \{\hat{\kappa}\}^T [\hat{D}] \{\hat{\kappa}\} dA \quad (16)$$

که در آن

$$[\hat{D}] = [Q]^T [D] [Q] \quad (17)$$

حال چنانچه بردار انحنای  $\{\hat{\kappa}\}$  را از روی تابع جابه جایی  $w$  که به صورت زیر با استفاده از معادله‌های (۲)، (۳) و (۴) قابل ارائه است

$$w = \langle \psi(L_1, L_2, L_3) \rangle \{A\}, \psi_I = L_1^{a+i} L_2^{b+j} L_3^{c+k} \quad (18)$$

محاسبه کرده و در معادله (۱۴) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$U = \{A\}^T \left( \frac{1}{\gamma} \right) \iint_A [H]^T [\hat{D}] [H] dA \{A\} \quad (19)$$

$$\Pi = \sum_I \sum_J \left( \frac{1}{V} k_{IJ} A_I A_J - \frac{\omega^2}{V} m_{IJ} A_I A_J \right) \quad (26)$$

با حداقل کردن معادله بالا به معادله مشخصه زیر می‌رسیم

$$([k] - \omega^2 [m]) \{A\} = \{0\} \quad (27)$$

با حل معادله مشخصه (27) مقادیر فرکانس طبیعی  $\omega^2$  و ضریب مجهول  $\{A\}$  به عنوان بردارهای مشخصه به دست می‌آیند.

## ۵- نتایج عددی

به منظور نشان دادن اعتبار، همگرایی و دقت روش پیشنهاد شده برای حل مسائل ارتعاشی صفحات مثلثی ابتدا حل چندین صفحه ایزوتروپیک ارائه شده و سپس چندین نمونه صفحه مثلثی ارتوتروپیک حل شده است. صفحات طوری انتخاب شده‌اند که حتی الامکان حل آنها در ادبیات موجود مبحث ارتعاش صفحات در دسترس باشد. بنابر این باید توجه داشت که اگر چه تعداد مثالهای ارائه شده محدودند لیکن برنامه نوشته شده بر مبنای روش بالا قادر است هر نوع مثالی را حل کند. در ابتدا سعی شده است همگرایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور چندین فرکانس اولیه صفحات مثلثی متساوی الاضلاع با شرایط مرزی لولایی یا ثابت و یا آزاد با مرتبه‌های مختلف  $\psi_I$  حل شده است که  $\psi_I$  از یک شروع می‌شود و تا مرحله‌ای افزایش می‌یابد که افزایش بیشتر مرتبه آن عملاً تأثیری در مقدار فرکانس به دست آمده نداشته باشد. اثر افزایش مرتبه بسط میدان جابه جایی یا  $\psi_I$  در همگرایی جوابها به سوی جوابهایی که توسط محققان دیگر به دست آمده است نشان داده شده است. در ارائه جوابهای فرکانس به جای محاسبه فرکانس که پارامتر بعدبرداری است از پارامتر محاسبه  $\lambda = \omega a^2 \sqrt{m/D}$  که در آن  $m$  جرم واحد سطح است استفاده شده است. در این پارامتر فرکانس مقدار  $a$  یکی از ابعاد شاخص مثلث است که در هر مورد آن را مشخص می‌کنیم. مثلاً در مورد مثلث متساوی الاضلاع طول ضلع مثلث است، و  $D$  سختی خمشی صفحه در مورد صفحات ایزوتروپیک بوده و در مورد ارتوتروپیک ممکن است همان مقدار  $D_x$  و یا  $D_y$  و یا هر تعریف دیگر انتخاب شود. در جداول ارائه نتایج نمادهای  $k$ ،  $C$  و  $F$  به ترتیب شرایط

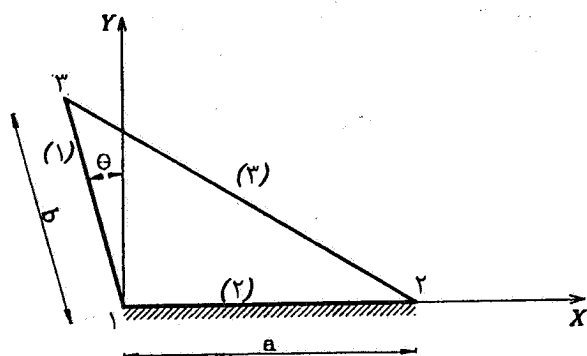
مرزی ساده، ثابت و آزاد را نشان می‌دهند.

مثال ۱- به منظور بررسی مسئله همگرایی روش عددی پیشنهادی در حل فرکانسهای صفحات، مثال موجود ارائه شده است. در این مثال یک صفحه مثلثی ایزوتروپیک متساوی الاضلاع با ضخامت یکنواخت، ضریب پواسون  $\nu = 0/3$  و طول ضلع  $a$  با سه حالت شرایط مرزی مختلف حل شده است. در حالت اول شرایط مرزی لولایی کامل، در حالت دوم شرایط مرزی ثابت کامل و در حالت سوم شرایط مرزی آزاد کامل مورد استفاده قرار گرفته است. مرتبه چند جمله‌ای  $w_H$  حداقل ۳ تا حداکثر ۱۰ انتخاب شده و در هر حالت سعی شده است شش فرکانس اولیه صفحه محاسبه شود. جدول (۱) نتایج به دست آمده از حل این مثال را نشان می‌دهد. به طوری که مشاهده می‌شود دو نکته مهم از این جدول قابل استنباط است؛ اول اینکه با افزایش مرتبه چند جمله‌ای درونیابی یا تعداد جملات چند جمله‌ای  $w_H$  پارامترهای فرکانس به سمت مقدار معینی که در حقیقت همان مقدار دقیق آنهاست همگرا می‌شوند و دوم اینکه با افزایش شماره مود ارتعاشی صفحه مرتبه مورد لزوم چند جمله‌ای برای دستیابی به جواب دقیقتر بالا می‌رود. به عبارت دیگر برای حصول و دقت یکسان در کلیه مودهای ارتعاشی لازم است هر چه شماره مود بالاتر می‌رود مرتبه چند جمله‌ای درونیابی نیز افزایش یابد. در هر صورت اگر جواب مربوط به مرتبه  $p=10$  به عنوان جواب دقیق مسئله مورد قبول باشد. این جدول نشان می‌دهد که تنها با انتخاب  $p=4$  یا تعداد جملات  $N=15$  حداکثر خطای پارامتر فرکانس  $\lambda$  در مود ششم ظاهر می‌شود که مقدار آن کمتر از ۰.۷٪ است. به منظور تأیید جوابهای پارامترهای فرکانس  $\lambda$ ، این جوابها برای مثال بالا با جوابهای ارائه شده توسط محققان دیگر مقایسه شده است. جدول (۲) این مقایسه را نشان می‌دهد. در استخراج این جوابها از مرتبه  $p=10$  استفاده شده است. به طوری که از این جدول استنباط می‌شود جوابهای به دست آمده از روش حل موجود با جوابهای دیگر محققان همخوانی کامل دارد. البته ذکر این نکته ضروری است که شرایط استخراج این جوابها حتی در حالتی که از روش ریتز استفاده شده است یکسان نیست، به عبارت دیگر مرتبه تابع درونیابی در حلها مختلف متفاوت است.

مثال ۲- در این مثال فرکانسهای شش مود اول یک صفحه مثلثی با شرایط مرزی یک لبه ثابت و دو لبه آزاد محاسبه شده و با حلی که

جدول ۱- پارامترهای فرکانس برای شش مود اولیه یک صفحه مثلث متساوی الاضلاع با ضخامت یکنواخت با لبه‌های ساده کامل، ثابت کامل و آزاد کامل

مرتبه درونیابی P								شماره مود	شرایط مرزی
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳		
۵۲/۶۳۸	۵۲/۶۳۸	۵۲/۶۳۸	۵۲/۶۳۸	۵۲/۶۳۸	۵۲/۶۳۹	۵۲/۶۳۹	۵۲/۸۴۸	۱	مرزهای ثابت
۱۲۲/۸۲۲	۱۲۲/۸۲۲	۱۲۲/۸۲۲	۱۲۲/۸۲۳	۱۲۲/۸۴۸	۱۲۲/۹۱۱	۱۲۴/۵۸۹	۱۲۵/۷۸۳	۳۰۲	
۲۱۰/۵۵۲	۲۱۰/۵۵۵	۲۱۰/۵۵۵	۲۱۰/۷۸۷	۲۱۰/۸۳۴	۲۱۸/۲۸۱	۲۱۹/۴۳۴	۳۴۴/۸۲۴	۴	
۲۲۸/۰۹۸	۲۲۸/۱۰۲	۲۲۸/۱۲۹	۲۲۸/۳۸۸	۲۲۹/۱۷۴	۲۳۵/۷۹۸	۲۴۳/۲۰۷	۳۵۲/۹۰۷	۶۰۵	
۹۹/۰۲۰	۹۹/۰۲۰	۹۹/۰۲۰	۹۹/۰۲۰	۹۹/۰۲۰	۹۹/۰۲۲	۹۹/۰۳۰	۹۹/۰۵۶	۱	مرزهای ثابت
۱۸۹/۰۰۶	۱۸۹/۰۰۶	۱۸۹/۰۰۶	۱۸۹/۰۰۷	۱۸۹/۰۱۶	۱۸۹/۰۵۱	۱۸۹/۳۵۶	۱۹۰/۹۷۷	۳۰۲	
۲۹۵/۲۴۸	۲۹۵/۲۴۹	۲۹۵/۲۵۴	۲۹۵/۲۹۶	۲۹۵/۴۸۹	۲۹۶/۸۵۳	۳۰۲/۵۰۲	۳۲۷/۹۶۲	۴	
۳۱۵/۱۸۰	۳۱۵/۱۸۱	۳۱۵/۱۸۹	۳۱۵/۲۳۹	۳۱۵/۴۵۷	۳۱۶/۸۳۲	۳۲۰/۲۸۹	۳۴۴/۶۵۴	۶۰۵	
۳۴/۲۷۹	۳۴/۲۷۹	۳۴/۲۸۰	۳۴/۲۸۳	۳۴/۲۸۴	۳۴/۹۶۳	۳۵/۲۷۳	۳۸/۷۶۸	۱	مرزهای ثابت
۳۶/۰۶۲	۳۶/۰۶۲	۳۶/۰۶۳	۳۶/۰۷۲	۳۶/۰۸۷	۳۶/۳۳۲	۳۶/۵۹۸	۳۹/۵۱۱	۳۰۲	
۸۴/۶۸۴	۸۴/۶۹۸	۸۴/۷۳۸	۸۴/۸۹۶	۸۸/۱۳۰	۸۹/۲۷۶	۱۱۱/۹۶۰	۱۱۸/۷۹۴	۵۰۴	
۹۱/۹۵۶	۹۱/۹۷۶	۹۲/۱۲۷	۹۲/۱۳۰	۹۴/۵۴۳	۹۴/۸۱۴	۱۱۸/۷۹۴	۱۳۶/۲۴۱	۶	



شکل ۲

$$T_i = t_i / t_m \quad , \quad t_m = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3)$$

$$\alpha = b/a$$

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho t_m}{D_m}}$$

شکل (۳) را اختیار می‌کنیم. این صفحه مثلثی را با دو جنس متفاوت، یک بار با جنس گرافیت - اپوکسی و یک بار دیگر با جنس کربن - اپوکسی حل می‌کنیم. علاوه بر آن راستای سخت‌تر مواد ارتوتروپیک بالا را یک مرتبه در راستای  $y$  و بار دیگر در راستای  $x$  فرض می‌کنیم و حالت اول را حالت (۱) و حالت دوم را حالت (۲) می‌نامیم. خواص این دو ماده به ترتیب چنین است [۶]

از میرزا و همکاران [۷] موجود است مطابق جدول (۳) مقایسه شده است. این صفحه دارای ضخامت نایکنواخت بوده و حل آن برای سه وضعیت مختلف ضخامت انجام شده است. مثلث مورد نظر همراه با پارامترهای مورد استفاده در شکل (۲) نشان داده شده است.

مثال ۳- برای اینکه کارا بودن روش حل موجود را برای صفحات مثلثی ارتوتروپیک و تعیین فرکانسهای آنان نشان دهیم مثلث

جدول ۲- پارامترهای فرکانس شش مود اولیه یک صفحه مثلث متساوی الاضلاع با ضخامت یکنواخت با لبه‌های ساده کامل،

ثابت کامل و آزاد کامل

[۱۶]	[۱۰]	[۹]	[۶]	[۱۷]	مطالعه موجود	شماره مود	شرایط مرزی
۵۲/۶۳۷	۵۲/۶۳۸	—	۵۲/۶۴	۵۲/۶۴	۵۲/۶۳۸	۱	مرزهای ساده
۱۲۲/۸۱۷	۱۲۲/۹۱	—	۱۲۲/۸	—	۱۲۲/۸۲۲	۳و۲	
۲۱۰/۵۴۳	۲۱۸/۲۸	—	۲۱۰/۷	—	۲۱۰/۵۵۲	۴	
۲۲۸/۱۱۵	۲۳۵/۷۹	—	۲۲۸/۱	—	۲۲۸/۰۹۸	۶و۵	
۹۹/۰۱۷	۹۹/۰۲۲	—	۹۹/۰۲	۹۸/۹۹۰	۹۹/۰۲۰	۱	مرزهای ثابت
۱۸۸/۹۹۶	۱۸۹/۰۵	—	۱۸۹/۰	۱۸۸/۸۹	۱۸۹/۰۰۶	۳و۲	
۲۹۵/۲۷۳	۲۹۶/۸۵	—	۲۹۵/۳	—	۲۹۵/۲۴۸	۴	
۳۱۵/۲۱۱	۳۱۶/۸۳	—	۳۱۵/۲	—	۳۱۵/۱۸۰	۶و۵	
—	۳۴/۹۶۲	۳۴/۲۷۹	۳۴/۲۸	—	۳۴/۲۷۹	۱	مرزهای آزاد
—	۳۶/۳۳	۳۶/۰۰۳	۳۶/۰۶	—	۳۶/۰۶۲	۳و۲	
—	۸۹/۲۷۶	۸۴/۶۸۳	۸۴/۷۱	—	۸۴/۶۸۴	۵و۴	
—	۹۲/۶۶۰	۹۱/۹۵۶	۹۱/۹۸	—	۹۱/۹۵۶	۶	

جدول ۳- پارامترهای فرکانس برای صفحه مثلثی ایزوتروپیک نایکنواخت با شرایط مرزی F, C, F و  $\alpha = 1$  و  $\theta = 0.5^\circ$

$T_1=1, T_2=1, T_3=1$		$T_1=1/5, T_2=0, T_3=1/5$		$T_1=1/2, T_2=0/6, T_3=1/2$	
مطالعه موجود	میرزاوهمکاران [۷]	مطالعه موجود	میرزاوهمکاران [۷]	مطالعه موجود	میرزاوهمکاران [۷]
۵/۷۷۳۷	۵/۷۸۷	۶/۳۲۱۹	۶/۳۳۳	۵/۹۰۰۶	۵/۹۱۱
۲۱/۵۲۹۰	۲۱/۱۱۸	۲۲/۶۲۷۳	۲۲/۱۹۵	۲۱/۷۴۷۲	۲۱/۲۹۲
۳۳/۶۶۸۷	۳۳/۹۵۴	۳۹/۷۶۱۵	۳۹/۳۴۸	۳۶/۲۸۲۳	۳۶/۳۶۳
۵۲/۰۷۰	۵۱/۸۹۹	۴۸/۷۹۹۰	۴۹/۶۳۱	۵۱/۵۳۸۲	۵۱/۸۶۶
۷۱/۶۸۷۱	۶۸/۸۵۷	۶۶/۵۶۵۳	۶۵/۶۶۲	۷۲/۸۲۰۹	۶۹/۸۷۹
۹۸/۶۳۶۵	۹۹/۸۹۰	۸۷/۰۶۶۱	۸۵/۶۹۰	—	—

که در آن ضریب سختی D چنین تعریف می‌شود

$$D = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$$

پارامترهای فرکانس این صفحه مثلثی با شرایط مرزی F, C, F

برای چندین نسبت ارتفاع به طول لبه گیردار b/a در جدولهای

(۴) و (۵) ارائه شده است. به منظور مقایسه جوابها پارامترهای

فرکانس استخراج شده از مقاله کیم و دیکینسون [۶] نیز آورده شده

$$[D] = D \begin{bmatrix} 0.60023 & 0.16806 & . \\ 0.16806 & 0.0548 & . \\ . & . & 0.41597 \end{bmatrix}$$

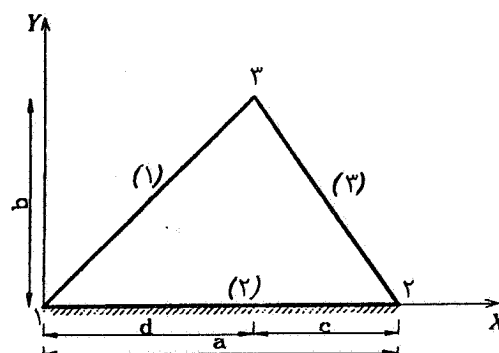
$$[D] = D \begin{bmatrix} 0.91160 & 0.28716 & . \\ 0.28716 & 15.637 & . \\ . & . & 0.35642 \end{bmatrix}$$



جدول ۴- پارامترهای فرکانس صفحه مثلثی گرافیت - اپوکسی با شرایط مرزی F, C, F برای دو حالت (۱) و (۲)،  $d/a = 0.5$

نوع مود ارتعاشی						b/a
$A_3$	$A_2$	$A_1$	$S_3$	$S_2$	$S_1$	
۲۳۷/۲ (۲۳۷/۱)	۱۷۰/۰۴۲ (۱۷۰/۰)	۶۲/۰۲۳ (۶۲/۰۲)	۱۴۳/۲۴۳ (۱۴۳/۲)	۱۰۸/۱۵۰ (۱۰۸/۲)	۲۶/۵۳۶ (۲۶/۵۴)	$\sqrt{3}/2$
۲۰۲/۰۵۶ (۲۰۲/۰)	۱۴۲/۱۷۲ (۱۴۲/۲)	۵۰/۹۰۳ (۵۰/۹۰)	۱۱۹/۳۸۸ (۱۱۹/۴)	۸۶/۱۹۹ (۸۶/۲۰)	۲۰/۴۷۱۸ (۲۰/۴۷)	۱
— (۱۳۷/۵)	۸۰/۵۰۸ (۸۰/۵۱)	۲۹/۰۷۳ (۲۹/۰۷)	۷۸/۲۹۴ (۷۸/۳۱)	۴۱/۶۲۰ (۴۱/۶۲)	۹/۶۹۶ (۹/۶۹۶)	۱/۵
— (۹۷/۷۱)	۵۲/۷۱۰ (۵۲/۷۱)	۱۹/۴۸۶ (۱۹/۴۸)	۵۵/۵۲۴ (۵۵/۵۳)	۲۴/۱۰۳ (۲۴/۱۰)	۵/۶۱۰ (۵/۶۱۰)	۲
— —	۹۳/۳۳۵ (۹۳/۳۳)	۳۶/۳۱۳۵ (۳۶/۳۱)	۷۶/۶۴ (۷۶/۶۴)	۳۱/۶۲۹ (۳۱/۶۳)	۷/۳۱۴۱ (۷/۳۱۹)	$\sqrt{3}/2$
— —	۷۶/۴۲۲۲ (۷۶/۴۱)	۳۰/۰۹۸۹ (۳۰/۱۰)	۵۷/۷۵۵ (۵۷/۷۵۵)	۲۳/۸۰۶۸ (۲۳/۸۰۱)	۵/۵۱۱۹ (۵/۵۰۳)	۱
— —	۴۴/۴۸۶ (۴۴/۴۹)	۱۸/۰۹۵ (۱۸/۰۹)	۲۵/۸۵۱ (۲۵/۸۵)	۱۰/۶۴۰ (۱۰/۶۴)	۲/۴۵۶ (۲/۴۵۶)	۱/۵
— —	۲۶/۹۴۰ (۲۶/۹۳)	۱۲/۸۳۴ (۱۲/۸۳)	۱۴/۵۷۲ (۱۴/۵۷)	۵/۹۹۳ (۵/۹۹۲)	۱/۳۴۱۴ (۱/۳۸۲)	۲

است. در این جداول S به مفهوم متعادل و A به مفهوم پاد متقارن به کار رفته است. پارامترهای اخیر به صورت اعداد داخل پارامتر نشان داده شده است. در این جداول علامت S برای مودهای متقارن و علامت A برای مودهای پاد متقارن به کار رفته است. به طوری که از این جداول استنباط می شود جوابهای مطالعه حاضر کاملاً با جوابهای مرجع [۶] مطابقت دارند.



شکل ۳

جدول ۵ - پارامترهای فرکانس صفحه‌ مثلثی کربن - اپوکسی با شرایط مرزی F, C, F برای دو حالت (۱) و (۲)،  $d/a = 0.5$

نوع مود ارتعاشی						b/a
$A_3$	$A_2$	$A_1$	$S_3$	$S_2$	$S_1$	
۲۷۴/۳۹۹ (۲۷۴/۲)	۱۹۸/۳۷۳ (۱۹۸/۳)	۷۰/۸۴۴ (۷۰/۸۴)	۱۶۹/۲۶۰ (۱۶۹/۳)	۱۲۸/۸۰۱ (۱۲۸/۸)	۳۱/۸۲۳ (۳۱/۸۲)	$\sqrt{3/2}$
۲۳۴/۳۴۸ (۲۳۴/۲)	۱۶۴/۶۴۵ (۱۶۴/۷)	۵۷/۸۴۹ (۵۷/۸۵)	۱۴۰/۵۰۶ (۱۴۰/۵)	۱۰۳/۲۳۰ (۱۰۳/۲)	۲۴/۶۰۳ (۲۴/۶۰)	۱
— (۱۵۸/۹)	۹۱/۰۷۲ (۹۱/۰۷)	— (۳۲/۳۰)	۹۱/۸۹۴ (۹۱/۹۲)	۵۰/۲۲۸ (۵۰/۲۳)	۱۱/۷۲۱ (۱۱/۷۲)	۱/۵
— (۱۱۰/۷)	۵۸/۵۵۱ (۵۸/۵۵)	۲۱/۱۷۲ (۲۱/۱۷)	۶۶/۲۸۸ (۶۶/۲۹)	۲۹/۱۷۷ (۲۹/۱۸)	۶/۸۰۱ (۶/۸۰۲)	۲
— —	۹۹/۷۱۰ (۹۹/۷۰)	۳۷/۷۱۳ (۳۷/۷۱)	۹۴/۱۵۱ (۹۴/۱۵)	۳۸/۸۸۸ (۳۸/۸۹)	۹/۰۰۰ (۹/۰۰۴)	$\sqrt{3/2}$
— —	۸۰/۶۸۴ (۸۰/۶۷)	۳۰/۹۰۷ (۳۰/۹۰)	۷۱/۰۰۸ (۷۱/۰۷)	۲۹/۲۸۸ (۲۹/۲۸)	۶/۷۸۷ (۶/۷۷۲)	۱
— —	۴۵/۴۸۰ (۴۵/۴۷)	۱۸/۰۵۶ (۱۸/۰۵)	۳۱/۸۲۱ (۳۱/۸۲)	۱۳/۰۹۲ (۱۳/۱۰)	۳/۰۰۶ (۳/۰۲۲)	۱/۵
— —	۳۰/۹۹۵ (۳۰/۹۹)	۱۲/۵۹۸ (۱۲/۵۹)	۱۷/۹۴۷ (۱۷/۹۴)	۷/۳۷۹ (۷/۳۷۹)	۱/۶۹۷ (۱/۷۰۲)	۲

#### ۶- نتیجه

کامل است. به نظر می‌رسد روش توسعه یافته بتواند جوابگوی حل فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی صفحات مثلثی ارتوتروپیک با نسبتهای ابعادی متعارف و ضخامت متغیر با شرایط مرزی متفاوت باشد. روش موجود قابل بسط برای صفحات مرکب است که ارضای شرایط مرزی آنها به مراتب پیچیده‌تر از صفحات مثلثی غیر مرکب است

یک روش ساده ریلی - ریتز برای تعیین فرکانسها و مودهای ارتعاشی صفحات ارتوتروپیک با ضخامت متغیر و شرایط مرزی مختلف توسعه داده شده است. به دلیل استفاده از دستگاه مختصات مساحتی اعمال شرایط مرزی مورد دلخواه به سهولت امکانپذیر است. همگرایی ودقت جوابها با ارائه چندین مثال نشان داده شده است. تمام جوابهای استخراجی با جوابهای دیگر محققان در توافق

## تشکر و قدردانی

انجام این تحقیق با پشتیبانی معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان میسر شد که بدین وسیله قدردانی می‌شود.

## مراجع

1. Leissa, A.W., *Vibration of Plates (NASA SP-160)*, Washington D.C. : Office of Technology Utilization, NASA, 1969.
2. Leissa, A.W., "Recent Research in Plate Vibrations: Classical Theory," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 9, No. 10, pp. 13-24, 1977.
3. Leissa, A.W., *Plate Vibration Research, 1976-1980: Classical Theory*, *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, No. 9, pp. 11-22, 1981.
4. Lessa, A.W., "Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-1985: PART 1. Classical Theory," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, No. 2, pp. 11-18, 1987.
5. Kim, C.S., and Dickinson, S.M., "The Free Vibration of Right Triangular Isotropic and Orthotropic Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 141, No. 2, pp. 291-311, 1990.
6. Kim, C.S., and Dickinson, S.M., "The Free Flexural Vibration of Isotropic and Orthotropic General Triangular Shaped Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 3, pp. 383-403, 1992.
7. Mirza, S., and Biglani, M., "Vibration of Traingular Plates," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 10, pp. 1472-1476, 1983.
8. Mirza, S., and Bulani, M., "Vibration of Triangular Plates of Variable Thickness," *Computer & Structures*, Vol. 21, No. 6, pp. 1129-1135, 1985.
9. Leissa, A. W., and Jaber, N.A., "Vibrations of Completly Free Triangular Plates," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 34, No. 8, pp. 605-616, 1992.
10. Singh, B., and Chakraverty, S., "Transveres Vibrations of Triangular Plates Using Orthogonal Polynomials in Two Variables," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 34, No. 12, pp. 947-955, 1992.
11. Kitipornchai, S., Liew, K.M., Xiang, Y., and Wang, C.M., "Free Vibration of Isoscales Triangular Mindlin Plates," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 35, No. 2, pp. 89-102, 1993.
12. Conway, H. D., *Analogies Between the Buckling and Vibrations of Polygonal Plates and members*, 1960.
13. Wang, C.M., and Liew, K.M., "Buckling of Triangular Plates under Uniform Compression," *Engng. Struct.*, Vol. 116, No. 1, pp. 43-50, 1994.
14. Jaunky, N., and Knight Jr., F., "Buckling Analysis of General Triangular Anisotropic Plates Using Polynomials," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 12, pp. 2414-2417, 1995.
15. Abrate, S.m, "Maximizing the Fundamental Natural Frequency of Triangular Composite Plates," *Journal of Vibration and Acoustica*, Vol. 118, pp. 141-146, 1996.
16. Liew, K.M., Xiang Y., and Wang, C.M., "Free Vibration of Triangular Mindlin Plates," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 35, No. 2, pp. 89-102, 1993.
17. Kuller, J.R., and Sigillito, V. G., "Upper and Lower Bounds for Frequencies of Trapezoidal and Triangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 78, No. 4, pp. 385-590, 1981.
18. Saliba, H.T., "Transverse Free Vibration of Isoscales Triangular Mindlin Plates," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 35, No. 2, pp. 89-102, 1978.
19. Gorman, D.J., "A Highly Accurate Analytical Solution for Free Vibration Anslysis of Simply Supported Right Triangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 89, No. 1, pp. 107-118, 1983.
20. Dumavant, D.A., "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 1129-1148, 1985.

۲۱. سعادت پور، م. م.، و مخالفی، د.، تحلیل استاتیکی صفحات مثلثی، استقلال، نشریه مهندسی دانشگاه صنعتی اصفهان، شماره ۲، ص ۶۴-۵۱۱، ۱۳۷۶.