معرفی یک برنامهٔ رایانه‌ای برای تحلیل مسائل غیرخطی و دینامیکی با تغییر شکلهای بزرگ و کاربرد آن در مهندسی ژئوتکنیک

احمدعلی فخیمی*

بخش مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس و مشاور مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن

(دریافت مقاله: ۷۷/۹/۲۳ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۷۸/۱۲/۱۴)

چکیده - *با توجه به فراوانی رایانه‌های شخصی و وجود برنامه‌های رایانه‌ای مقتدر، امکان تحلیل محیطهای پیچیدهٔ مکانیکی بیش از گذشته فراهم شده است. CA2[1] برنامهٔ رایانه‌ای است که توسط مولف این مقاله تهیه شده است. این برنامه، یک برنامهٔ تفاضل محدود صریح است که قادر به تحلیل مسائل متنوع و پیچیده در زمینهٔ ژئوتکنیک است. در این مقاله، ضمن ارائهٔ مقدمه‌ای بر روابط ریاضی مرتبط با تحلیل عددی به‌کارگرفته شده، با حل چند مثال غیرخطی و دینامیکی کارایی برنامه نشان داده می‌شود. در انتها نیز با تحلیل یک شیب خاکی، روش جدیدی برای یافتن جابه جایی دائمی این گونه شیروانیها پیشنهاد شده است.*

A Computer Program for Modeling Large Deformation Nonlinear and Transient Problems in Geotechnical Engineering

A. A. Fakhimi

Department of Civil Engineering, Tarbiat Modarres University & Building and Housing Research Center

ABSTRACT- *CA2 (Continuum Analysis, 2- dimensional) is a computer program developed by the author. CA2 can solve a variety of complex geotechnical problems, using explicit finite difference method. In this paper, an introduction will be given to the theoretical and numerical basis of the program and the capability of the code will be shown by solving a few interesting nonlinear and transient problems. Finally, a new technique in finding earthquake induced displacement of slopes is proposed.*

*- دانشیار

فهرست علائم

A	مساحت المان	M	لنگر خمشی	Δs	طول مرز
C	چسبندگی	n_j	بردار یکه	ε^p	نامتغیر کرنش پلاستیک
E	مدول الاستیسیته	r	شعاع دایره	ε^p_{ij}	تانسور کرنش پلاستیک
f	کمیتی عددی، برداری یا تانسوری	t	زمان	$\dot{\varepsilon}_{ij}$	تانسور نرخ کرنش
F_i	نیروی گرهی	T_{min}	پریود حداقل	ϕ	زاویه اصطکاک
g_i	شتاب ثقل	$\dot{u}_i$	بردار سرعت	ν	ضریب پواسون
I	ممان اینرسی	W_{ij}	تانسور چرخش	ρ	چگالی جسم
k	سختی فنر	x_j	مختصات هر نقطه	ψ	زاویه اتساع
m	جرم متمرکز در گره	Δt	گام زمانی	σ_{ij}	تانسور تنش

۱- مقدمه

برنامهٔ CA2 برنامهٔ رایانه‌ای برای تحلیل عددی مسایل مرتبط با ژئوتکنیک است که توسط مولف این مقاله تهیه شده است.

تواناییهای این برنامه به قرار زیر است:

۱- حل مسائل دو بعدی در وضعیت کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری.

۲- تحلیل محیطهای الاستیک، الاستیک ـ پلاستیک کامل و الاستیک ـ پلاستیک سخت شونده و نرم شونده (تحلیل خطی و غیرخطی).

۳- تحلیل خطی و غیرخطی اعضای خمشی نظیر تیرها و قابها.

۴- امکان بررسی اندرکنش خاک و سازه.

۵- تحلیل استاتیکی و دینامیکی. تحلیل دینامیکی در حوزهٔ زمان انجام می‌شود. اثرات دینامیکی می‌توانند ناشی از زلزله و یا بارهای انفجاری باشند.

۶- مدل کردن تعداد محدودی از گسلها و درزها. این موضوع به خصوص در مسائل مربوط به مکانیک محیطهای ناپیوسته (نظیر محیطهای سنگی) کاربرد دارد.

۷- تحلیل جریان پایدار و غیر پایدار سیال در محیطهای متخلخل غیرهمگن و غیرایزوتروپیک (مثلاً در مسائل زه آب در سدها).

۸- اندرکنش جریان سیال و تغییر شکلهای مکانیکی (مثلاً در تحکیم دو بعدی و تورم محیطهای کشسان متخلخل).

۹- تحلیل غیرخطی هندسی. این موضوع به خصوص در مسائل با تغییر شکلهای بزرگ نظیر گسیختگی و ریزش شیروانیها حائز اهمیت است.

۱۰- توانایی بررسی پایداری شیروانیها.

۱۱- امکان تحلیل عناصر کابلی. کابلها می‌توانند با محیط پیوسته اندرکنش داشته باشند. به این ترتیب امکان تحلیل محیطهای پیش تنیده (نظیر سازه‌های بتن پیش تنیده) و محیطهای مهار شده (نظیر پیچ سنگها در پایداری تونلها) فراهم است.

در این مقاله ضمن معرفی اجمالی نحوهٔ تحلیل مسائل به کمک برنامهٔ CA2، به تحلیل چند مثال پیچیده مرتبط با مکانیک خاک می‌پردازیم.

۲ـ معادله‌های ریاضی حاکم در تحلیل یک محیط پیوسته

برای مدل کردن عددی معادله‌های حرکت از ایدهٔ به کار رفته در مرجع [۱] استفاده شده است. معادله‌های حرکت در یک محیط پیوسته به قرار زیرند:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho \frac{\partial \mathring{u}_i}{\partial t} \qquad (۱)$$

که در آن ρ چگالی جسم، t زمان، x_i مولفه‌های بردار مکان هر نقطه مادی، g_i مولفه‌های شتاب ثقل (نیروهای جسمی)، $\mathring{u}_i$ مولفه‌های بردار سرعت هر نقطه و σ_{ij} مولفه‌های تانسور تنش کوشی هستند.

برای تحلیل یک محیط پیوسته، باید معادله‌های حرکت را به همراه معادله‌های مشخصه مورد ارزیابی قرار داد زیرا یک محیط پیوسته در حالت کلی یک محیط نامعین است. معادله‌های مشخصه در واقع، بیانگر ارتباط بین مولفه‌های تنش و کرنش (و یا نرخ کرنش) هستند. شکل کلی معادله‌های تنش و کرنش می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\sigma_{ij} = f(\sigma_{ij}, \mathring{\varepsilon}_{ij}, r) \qquad (۲)$$

که در آن $\mathring{\varepsilon}_{ij}$ مولفه‌های نرخ کرنش (° بیانگر مشتق مادی نسبت به زمان است) و r پارامتری است که مرتبط با تاریخچه بارگذاری است و در حالت کلی می‌تواند وجود داشته و یا نداشته باشد.

مولفه‌های نرخ کرنش از طریق معادله‌های زیر با مولفه‌های سرعت $\mathring{u}_i$ ارتباط دارند:

$$\mathring{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathring{u}_{i,j} + \mathring{u}_{j,i}\right) \qquad (۳)$$

برای حل معادله‌های بالا، باید شرایط مرزی اساسی و طبیعی را مشخص کرد. در مرز جسم مورد تحلیل می‌توان مولفه‌های جابه‌جایی (u_i) و یا مولفه‌های تنش مرزی[۲] را اعمال کرد. در صورتی که مولفه‌های نیروی مرزی F_i در ناحیه‌ای از مرز جسم مشخص باشند، برای تعادل هر نقطهٔ مرزی، شرط طبیعی زیر باید برقرار باشد:

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \, \Delta S \qquad (۴)$$

که در آن n_i بردار یکه خارجی عمود بر مرز و ΔS طول مرزی است که F_i بر آن اثر می‌کند.

۳- فرمولبندی عددی معادله‌های حرکت

در برنامهٔ CA2، برای مدل کردن عددی معادله‌های حرکت، از روش تفاضل محدود صریح[۳] استفاده می‌شود. بر روی سطح یک المان مثلثی دلخواه (A)، با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial X_i} dA = \int_S n_i f ds \qquad (۵)$$

که در آن f یک کمیت عددی، برداری یا تانسوری است. مقدار متوسط گرادیان f بر روی سطح A از معادلهٔ (۶) به دست می‌آید:

$$< \frac{\partial f}{\partial X_i} > = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial f}{\partial X_i} dA \qquad (۶)$$

با جایگذاری معادلهٔ (۶) در معادلهٔ (۵) خواهیم داشت:

$$< \frac{\partial f}{\partial X_i} > = \frac{1}{A} \int_S n_i f ds \qquad (۷)$$

شکل تفاضل محدود معادلهٔ (۷) را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$< \frac{\partial f}{\partial X_i} > = \frac{1}{A} \sum_S < f > n_i \, \Delta S \qquad (۸)$$

که در آن ΔS طول هر ضلع مثلث و $<f>$ مقدار متوسط f روی ضلع مربوطه است. با استفاده از معادلهٔ (۸) و توجه به شکل (۱)، برای مولفه‌های تانسورگرادیان سرعت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \mathring{u}_i}{\partial X_j} = \frac{1}{2A} \sum_S \left(\mathring{u}_i^{(a)} + \mathring{u}_i^{(b)}\right) n_j \, \Delta S \qquad (۹)$$

از ترکیب معادله‌های (۳) و (۹) می‌توان مقدار نرخ کرنش در هر المان را برحسب سرعتهای گرهی به دست آورد.

معادلهٔ حرکت برای هر گره دلخواه را می‌توان به شکل عددی زیر در نظر داشت:

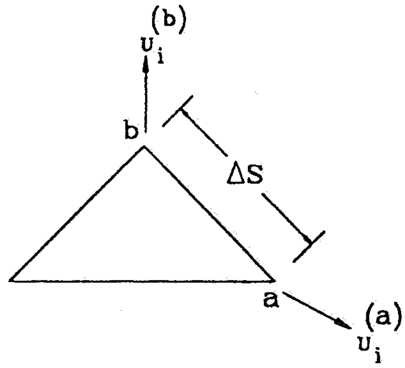
$$\mathring{u}_i \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathring{u}_i \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \sum F_i^{(t)} \frac{\Delta t}{m} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\sum F_i^{(t)}$ جمع نیروهای ناشی از تنشهای داخلی المانهای چسبیده به گرهٔ مورد نظر، Δt تغییرات کوچک زمان و m جرم متمرکز شده[۴] در گره است. برای محاسبهٔ نیروی $\sum F_i^{(t)}$ در هر گره، به نحوی که توضیح آن در ادامه می‌آید، عمل می‌شود. ابتدا، با توجه به معلوم بودن تنش در هر المان در هر گام محاسباتی، از معادلهٔ (۴) مقدار نیروی معادل تنشهای داخلی بر روی هر ضلع متصل به گرهٔ مورد نظر یافته می‌شود. در این حالت در معادلهٔ (۴)، باید ΔS را برابر نصف طول ضلع المان مثلثی در نظر گرفت. سپس، $\sum F_i^{(t)}$ در هر گره، برابر مجموع نیروهای به دست آمده از تمام المانهای متصل به آن گره فرض می‌شود. جزئیات بیشتر در این مورد، در مرجع [۲] آمده است.

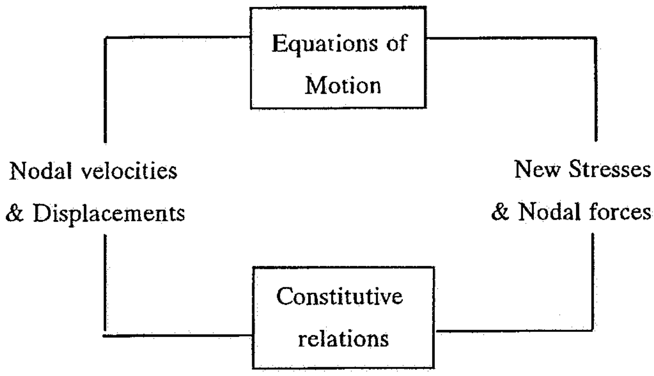
به طور کلی نحوهٔ تحلیل مسئله در برنامهٔ CA2 مطابق شکل (۲) است:

ابتدا با استفاده از معادلهٔ (۱۰) که در حالت کلی می‌تواند همراه با میرایی نیز باشد سرعت جدید گره‌ها به دست می‌آید و سپس با استفاده از معادله‌های (۹) و (۳) نرخ کرنش در المانها محاسبه می‌شود. حال با استفاده از معادله‌های مشخصه، مقادیر جدید تنش

[DOR: 20.1001.1.22287698.1379.19.1.10.8]



شکل ۱- یک المان مثلثی دلخواه و بردارهای سرعت گرهی در گره‌های a و b



شکل ۲- مراحل یک گام محاسباتی در روش تفاضل محدود صریح

در المانها به دست می‌آید. با داشتن تنشهای جدید، می‌توان نیروهای گرهی جدید درگره‌ها را به دست آورد و مجدداً با استفاده از معادلهٔ (۱۰) مراحل تحلیل را ادامه داد. مراحل بالا، در واقع یک گام محاسباتی در برنامهٔ CA2 هستند. با تکرار گامهای محاسباتی می‌توان نتایج تحلیل نهایی را به دست آورد.

نکتهٔ مهم در تحلیلهای عددی به روش صریح، تعیین گام زمانی Δt و پایداری محاسبات است. Δt بستگی به سختی مادهٔ مورد تحلیل و جرمهای تمرکز یافته درگره‌ها دارد. در یک سیستم یک درجه آزادی، مثلاً جرم متصل به یک فنر، شرط پایداری محاسبات عددی معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta t \leq 2\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۱۱)$$

که در آن m جرم و k سختی فنر است. رابطهٔ بالا در واقع بیانگر آن است که مقدار گام زمانی باید از پریود حداقل ارتعاش سیستم، با یک ضریب اطمینان قابل قبول، کوچکتر باشد. در این حالت، در محاسبهٔ Δt، پریود ارتعاش بر عدد π تقسیم شده است تا اطمینان کافی از پایداری محاسبات به دست آید.

در یک سیستم کلی، Δt را باید با استفاده از T_{min} که پریود حداقل ارتعاش سیستم است به دست آورد. از آنجا که تعیین T_{min} امری پیچیده و وقتگیر است، در برنامهٔ CA2، Δt را به روش تقریبی زیر تخمین می‌زنیم:

۱- هرگرهٔ شبکهٔ اختلاف محدود را در نظر گرفته و تمام گره‌های مجاور آن را در جهات x و y مقید می‌کنیم. آن گاه با محاسبهٔ نیروی لازم برای تغییر مکان گرهٔ مورد نظر به اندازهٔ واحد (در جهت x و نیز در جهت y)، مقدار سختی k_x و k_y گره به دست می‌آید. جرم گرهٔ مورد نظر (m) نیز به صورت متمرکز محاسبه می‌شود. در محاسبهٔ k_x و k_y، میدان تغییر مکان در المانهای متصل به گرهٔ مورد نظر را به صورت خطی در نظر می‌گیریم.

۲- عملیات مربوط به بند (۱)، در تمام گره‌ها انجام می‌شوند و برای هر گره مقدار Δt از معادلهٔ (۱۲) به دست می‌آید

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{m}{k_{total}}} \qquad (۱۲)$$

که در آن k_{total} را به صورت $k_x + k_y$ فرض می‌کنیم. Δt محاسباتی، حداقل Δt به دست آمده خواهد بود.

نکتهٔ حائز اهمیت آن است که Δt بالا، تخمینی از مقدار Δt بحرانی است ولی تجربهٔ کار با برنامهٔ CA2 نشان می‌دهد که این تخمین، به صورت مناسبی از مشکل ناپایداری محاسبات دینامیکی جلوگیری می‌کند.

جزئیات بیشتر در مورد نحوهٔ محاسبهٔ Δt بحرانی، در تحلیلهای استاتیکی و دینامیکی، در مرجع [۲] آمده است.

۴- تحلیل مسائل با تغییر شکلهای بزرگ

تحلیل عددی در برنامهٔ CA2، یک تحلیل لاگرانژی است. به این معنی که فرض می‌شود که مادهٔ مورد تحلیل به شبکهٔ عددی کاملاً چسبیده و همراه با آن حرکت می‌کند. برای تحلیل مسائل با تغییر شکلهای بزرگ، مهمترین مشکل تصحیح تنش کوشی در اثر دورانهای بزرگ است. جزئیات این تصحیح در مرجع [۲] آمده است

[DOR: 20.1001.1.22287698.1379.19.1.10.8]

و نتیجهٔ نهایی آن با فرض آنکه مقادیر دوران هر المان مثلثی در هر گام محاسباتی کوچک باشد به قرار زیر است:

$$\sigma_{11} := \sigma_{11} + 2\Delta t \, W_{12} \, \sigma_{12}$$
$$\sigma_{22} := \sigma_{22} - 2\Delta t \, W_{12} \, \sigma_{12} \qquad (۱۳)$$
$$\sigma_{12} := \sigma_{12} + \Delta t \, (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \, W_{12}$$

که در آن =: برای جایگزینی است و W_{ij} تانسور چرخش است که با سرعت گرهی رابطهٔ زیر را دارد:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathring{u}_{i,j} - \mathring{u}_{j,i}\right) \qquad (۱۴)$$

تانسور چرخش در هر المان را نیز مانند تانسور کرنش می‌توان به شکل عددی در آورد و محاسبه کرد. پس از تصحیح تنش، با استفاده از معادلهٔ (۱۳)، مقادیر نرخ تنش جدید به دست آمده از معادله‌های مشخصه، به تنشهای تصحیح شده اضافه می‌شوند تا تنشهای جدید به دست آید.

۵- تحلیل مسائل غیرخطی

در تحلیل عددی محیطهای الاستیک ـ پلاستیک از المانهای سادهٔ مثلثی نمی‌توان استفاده کرد. کاربرد این المانها سبب می‌شود که بار واژگونی به دست آمده از محیط مورد تحلیل، به مراتب بیشتر از مقدار واقعی به دست آید (مثلاً در فشردن یک پی‌صلب در خاک). این مشکل ریشه در تراکم ناپذیری (در پلاستیسیته فلزات) و یا اتساع (تغییر حجم پلاستیک در برش) در مواد دانه‌ای دارد که سبب می‌شوند تا قیدهای سینماتیکی اضافی در یک المان مثلثی که دارای حداقل درجات آزادی ممکن است ایجاد شود. جزئیات این موضوع در مرجع [۳] بررسی شده است. مشکل بالا را می‌توان حداقل به دو طریق برطرف کرد:

۱- استفاده از المانهای با مرتبهٔ بالا

۲- استفاده از روش المان بندی مختلط

در برنامهٔ CA2 از روش دوم استفاده شده است. در این روش هر المان چهار وجهی از دو جفت المان مثلثی تشکیل می‌شود و کرنش حجمی در هر جفت المان مثلثی یکسان در نظر گرفته می‌شود در حالی که کرنش انحرافی به طور مستقل در هر المان مثلثی محاسبه می‌شود. جزئیات این روش در مرجع [۴] آمده است.

۶- حل چند مثال

در ادامه برای نشان دادن توانایی روشهای عددی در مدل کردن رفتار محیطهای پیوسته و ناپیوسته به تحلیل چند مثال می‌پردازیم.

مثال (۱):

آزمون دو محوری یک مادهٔ الاستیک ـ پلاستیک نرم شونده موضوع این مثال است. نمونهٔ مورد تحلیل در انتهای تحتانی در هر دو جهت x و y گیردار است و در انتهای فوقانی با سرعت یکنواخت 1×10^{-5} m/step به پایین فشرده می‌شود، شکل (۳). در واقع آزمون عددی انجام شده یک آزمون با کنترل کرنش است. ابعاد نمونه ۱۰×۵ است. یک لایه نازک (متشکل از سه ردیف المان) در قسمت بالای نمونه را از جنس فلز در نظر گرفته‌ایم تا نقش ورق بارگذاری را در آزمون واقعی بازی کند.

در مدل کردن عددی محیطهای نرم شونده باید توجه به حساسیت نتایج نسبت به بزرگی و اندازهٔ المانها داشت. در این مورد روشهایی در ادبیات علمی ارائه شده است [۵ و ۶] که از آن میان ساده‌ترین روشها آن است که اندازهٔ المانها، متناسب با طول داخلی سیستم که خود وابسته به اندازهٔ دانه‌های تشکیل دهندهٔ جسم است اختیار شود [۷]. خصوصیات مادی جسم مورد تحلیل به قرار زیرند:

مدول الاستیسیته $= E = 10^8$ pa   ضریب پواسون $= \nu = 0.0$

زوایه اصطکاک $= \phi = 0^\circ$ زاویه اتساع $= \psi = 0^\circ$

چسبندگی (c) را به صورت تابعی از ε_p مطابق شکل (۴) فرض می‌کنیم.

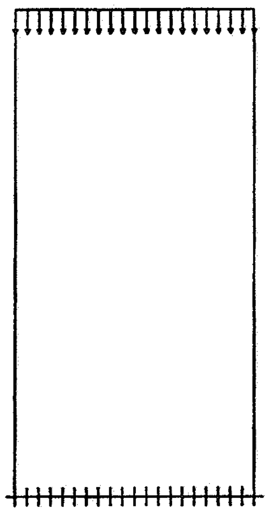
در برنامهٔ CA2، ε_p یک نامتغیر مرتبط با کرنشهای پلاستیک است که طبق معادلهٔ زیر به دست می‌آید [۲و۸].

$$\varepsilon_p = \int_0^{\varepsilon^P_{ij}} \left[\frac{2}{3} d\varepsilon^P_{ij} \, d\varepsilon^P_{ij}\right]^{0.5}$$

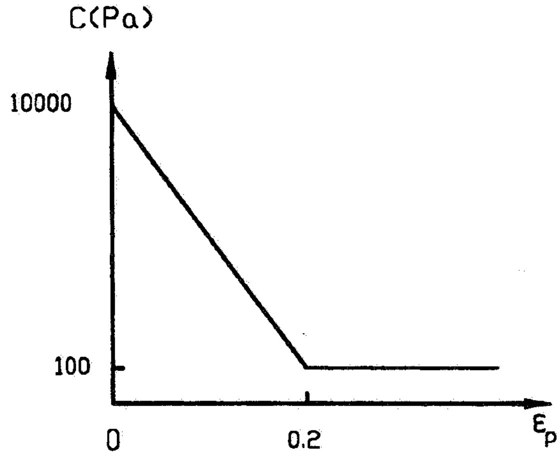
که در آن $d\varepsilon^P_{ij}$ تغییر در مولفهٔ (ij) کرنش پلاستیک در هر گام محاسباتی است.

پس از ۵۰۰۰۰ سیکل محاسباتی، شکل تغییر شکل یافتهٔ جسم در شکل (۵) آمده است. بردارهای سرعت به همراه کنتورهای مؤلفهٔ عمودی سرعت نیز در شکل (۶) نشان داده شده است. از این دو شکل دیده می‌شود که دو باند برشی در مادهٔ مورد تحلیل ایجاد شده است

[DOR: 20.1001.1.22287698.1379.19.1.10.8]



شکل ۳- آزمون عددی دو محوری یک مادهٔ نرم شونده

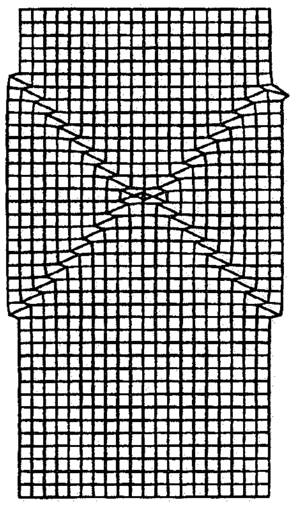


شکل ۴- تغییرات چسبندگی با ε_p در مثال (۱)

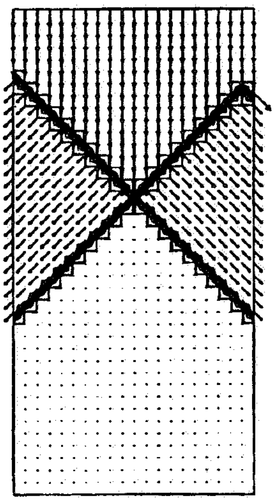
و جسم در طول این دو باند برشی، گسیخته می‌شود. شکل (۷)، کانتورهای چسبندگی را نشان می‌دهد که مبین تمرکز تغییرات در طول باندهای برشی است.

مثال (۲):

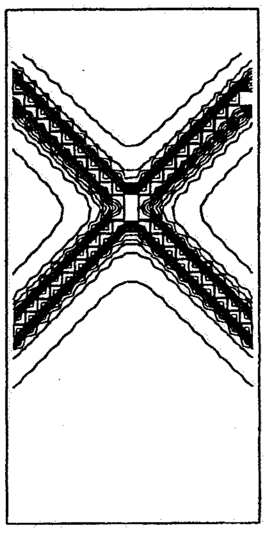
این مثال به بررسی برخورد یک نیم استوانهٔ الاستیک تحت اثر وزن خود با یک جسم الاستیک دیگر که در قسمت تحتانی گیردار است، می‌پردازد. تحلیل در مد تغییر شکلهای بزرگ صورت می‌گیرد. سطح برخورد دوجسم در واقع یک درز غیر مستوی است. روابط ریاضی مربوط به مدل کردن صفحات درز در مرجع [۹] آمده است. درز (سطح برخورد) دارای مدل رفتاری الاستیک ـ پلاستیک موهر ـ کولمب است و مقاومت کششی آن صفر فرض می‌شود تا نیم



شکل ۵- شبکهٔ محاسباتی تغییر شکل یافته



شکل ۶- بردارهای سرعت به همراه کانتورهای مولفهٔ عمودی سرعت



شکل ۷- کانتورهای چسبندگی

استوانه در اثر نیروهای تماسی ایجاد شده، پس از برخورد بتواند مجدداً بطرف بالا حرکت کند. شبکهٔ محاسباتی در شکل (۸) نشان داده شده است. تقریباً در لحظهٔ t=1 sec، اولین برخورد بین دو جسم صورت می‌گیرد و همچنان که شکل (۹) نشان می‌دهد در محل تماس دو جسم تنشهایی ایجاد می‌شود.

رکورد مولفهٔ عمودی سرعت، تنش σ_{yy} در یک المان و جابه جایی عمودی گرهٔ (6,9) که در شکل (۸) با علامت × مشخص شده است در شکلهای (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نشان می‌دهند که سیستم به شیوهٔ درستی مدلسازی شده است. به عنوان مثال به خوبی می‌توان دید که حرکت استوانه بر روی یک سهمی و سرعت استوانه به صورت خطی تغییر می‌کند که با روابط دینامیک مربوط به سقوط آزاد هماهنگی دارند. شکلها مبین تغییرات یاد شده پس از ۳ بار تصادم و برخوردند.

مثال (۳):

در این مثال کوبش دینامیکی یک شمع در خاک مدلسازی شده است. خاک دارای رفتار الاستیک - پلاستیک کامل موهر-کولمب [۸] و شمع دارای رفتار الاستیک خطی فرض می‌شود. به علت تقارن محوری، تنها نصف مسئله مورد تحلیل قرار می‌گیرد (در واقع یک قطاع از مسئله). خصوصیات هندسی و مادی لازم به قرار زیرند:

طول شمع = 8m

طول فرورفته شمع در خاک = 6.4m

قطر شمع = 40cm

زاویه نوک شمع = 28°

طول قسمت مخروطی شکل (نوک تیز) ته شمع = 80cm

چگالی شمع = $2500\ kg/m^3$

مدول الاستیسیتهٔ شمع = 2×10^{10} Pa

نسبت پواسون شمع = 0.15

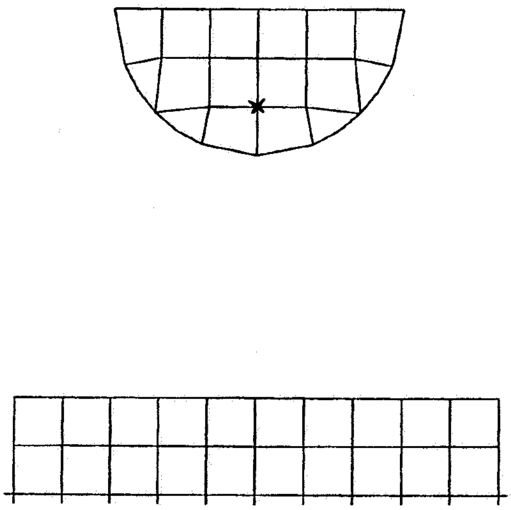
جرم چکش = 3181 kg

ارتفاع سقوط چکش = 1.83m

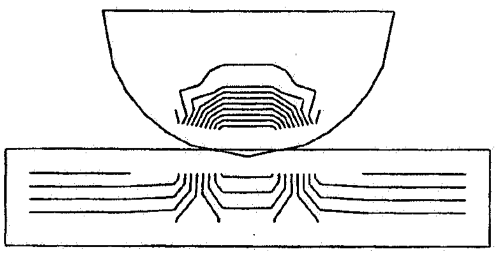
چگالی چکش = $7500 kg/m^3$

مدول الاستیسیتهٔ چکش = 2×10^{11} Pa

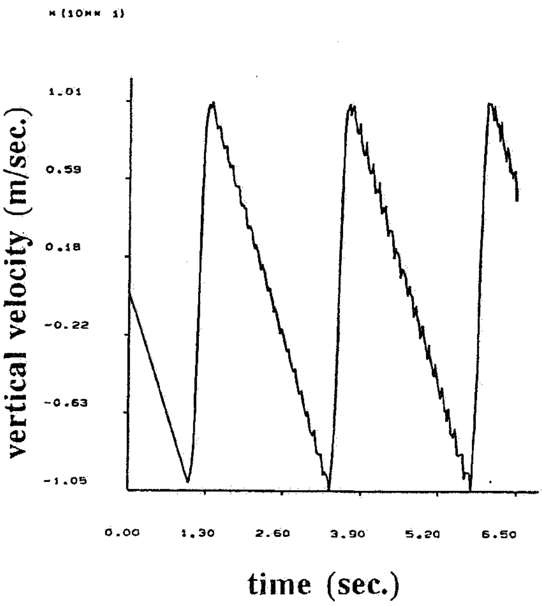
نسبت پواسون چکش = 0.1



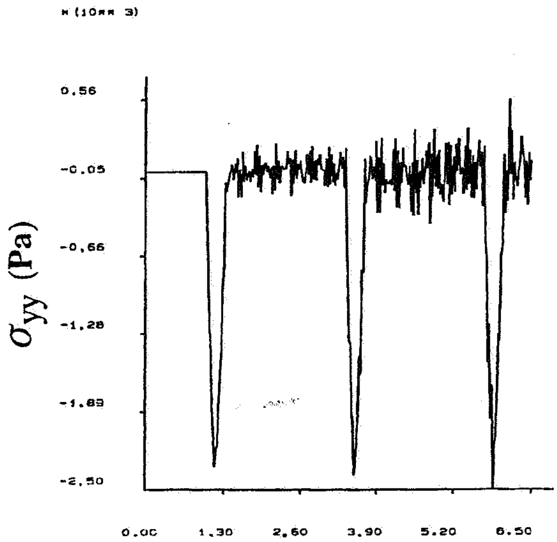
شکل ۸- شبکهٔ محاسباتی در تحلیل دینامیکی برخورد دو جسم



شکل ۹- کانتورهای مولفهٔ تنش σ_{yy} پس از برخورد در زمان t=1 sec



شکل ۱۰- تغییرات مولفهٔ عمودی سرعت گرهٔ (۹ و ۶) در نیم استوانه با زمان



شکل ۱۱- تغییرات مولفهٔ σ_{yy} تنش در المان (۹ و ۵) در نیم استوانه با زمان

چگالی خاک = $1900\ kg/m^3$

مدول الاستیسیتهٔ خاک = 2×10^7 Pa

نسبت پواسون خاک = 0.3

زاویه اصطکاک خاک = 25°

چسبندگی خاک = 4×10^4 Pa

زوایه انبساط خاک = 8°

(k_n) سختی نرمال درز بین خاک و شمع = 2×10^8 Pa/m

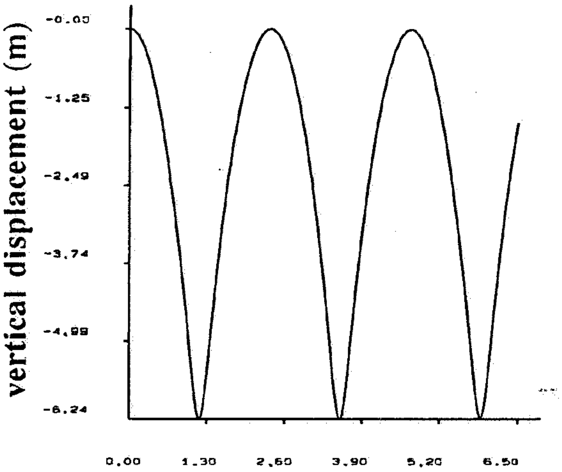
(k_s) سختی برشی درز بین خاک و شمع = 2×10^8 Pa/m

زاویه اصطکاک درز بین خاک و شمع = 20°

چسبندگی درز بین خاک و شمع = 3×10^4 Pa

زاویه انبساط درز بین خاک و شمع = 0°

تحلیل در مد تغییر شکل بزرگ صورت می‌گیرد زیرا در اثر کوبش شمع، هندسهٔ مسئله ممکن است تغییر فاحشی پیدا کند. برای مدل کردن اندرکنش شمع و خاک، شمع و خاک را به صورت دو سیستم تغییر شکل پذیر مجزا در نظر می‌گیریم که از طریق یک درزهٔ استوانه‌ای (و در انتهای شمع مخروطی) با یکدیگر اندرکنش دارند [۱۰]. این درزه همچنان که در معرفی پارامترهای مکانیکی مسئله آمده است دارای سختیهای برشی و نرمال، چسبندگی، اصطکاک و زاویه انبساط است. بین چکش و سر شمع نیز درز



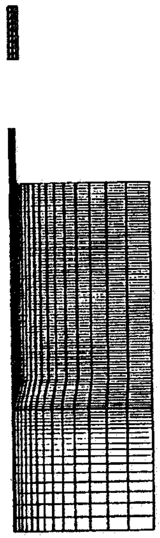
شکل ۱۲- تغییرات مولفهٔ عمودی جا به جایی گرهٔ (۹ و ۶) در نیم استوانه با زمان

دیگری در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر به جای مدل کردن بار وارده بر سر شمع از طریق اعمال یک شوک سرعتی و یا نیرویی فرضی، اجازه داده می‌شود که چکش از ارتفاع خاصی سقوط کند و نیروی بین شمع و چکش در اثر برخورد این دو به طور خودکار و واقعی ایجاد شود.

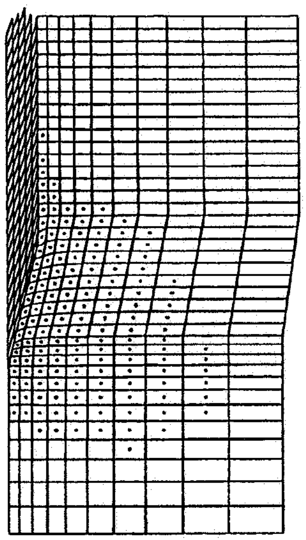
ابتدا سیستم تحت وزن خود در وضعیت استاتیکی تحلیل می‌شود و سپس با رهاکردن چکش، تحلیل دینامیکی آغاز می‌شود. مرزهای پایین وسمت چپ خاک در تحلیل دینامیکی دارای مرزهای آرام هستند تا انرژی ورودی جذب شده و به داخل سیستم برگشت نکند و نیمه بینهایت بودن محیط خاک مدل شود [۱۱].

شبکهٔ محاسباتی مربوط به خاک، شمع و چکش در شکل (۱۳) آمده است. پس از برخورد چکش و تحلیل دینامیکی مربوطه، قسمتی از خاک که در مجاورت زیر شمع قرار دارد به صورت پلاستیک در می‌آید، شکل (۱۴). در شکل (۱۴)، برای مشخص بودن نواحی پلاستیک شده، تنها المانهای اطراف نوک شمع نشان داده شده است. رکورد نشست سرو ته شمع در اثر ضربهٔ وارد شده، در شکل (۱۵) نشان داده شده است. این شکل با آنچه اندازه‌گیریهای در جای نشست شمعها در اثر ضربه نشان می‌دهند کاملاً هماهنگی و شباهت دارد.

در اثر ضربهٔ وارد شده، کل نشست اولیه (در زمان تقریباً 0.05 sec) برابر 10.4 cm است که قسمتی از آن در اثر تغییر



شکل ۱۳- شبکهٔ محاسباتی در بررسی کوبش یک شمع



شکل ۱۴- المانهای پلاستیک شده در زیر شمع در اثر ضربهٔ چکش

شکلهای برگشتی الاستیک به وضعیت اولیه بر می‌گردد و بنابراین نشست دائمی شمع حدود 9 cm می‌شود. ضمناً به علت سختی زیاد شمع، تغییر مکان پایین و بالای شمع تقریباً یکسان هستند. این شیوه از تحلیل دینامیکی شمعها، روشی مقتدر برای بررسی کوبش شمعهاست و بر روشهایی که مبتنی بر تحلیل یک بعدی اندرکنش شمع و خاک است برتری دارد.

مثال (۴):

در این مثال یک تیر یکسر گیردار که در یک انتها تحت لنگر ثابتی برابر 109.956 kg-cm قرار دارد مورد تحلیل قرار می‌گیرد. تحلیل مسئله با فرض تغییر شکلهای کاملاً بزرگ صورت می‌گیرد. خصوصیات تیر به قرار زیر است:

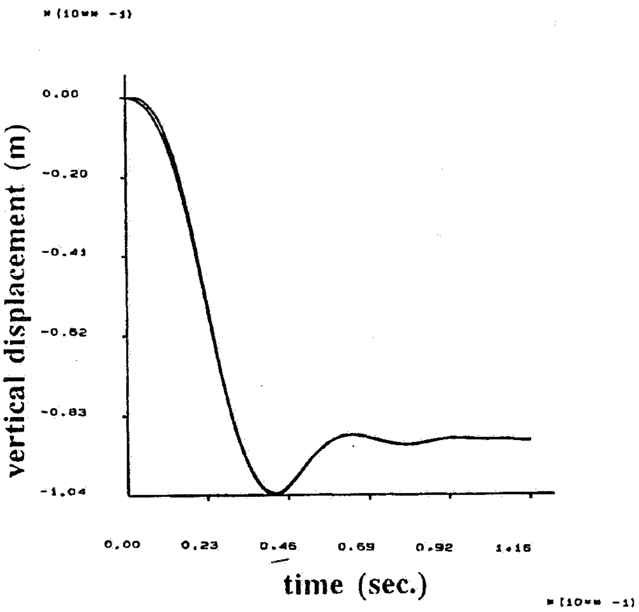
مدول الاستیسیته = $2100\ kg/cm^2$

ممان اینرسی = $1.6667\ cm^4$

سطح مقطع تیر = $20\ cm^2$

طول تیر = 100 cm

برنامهٔ CA2 قادر به تحلیل مسائل اندرکنش خاک و سازه در تغییر شکلهای بزرگ است ولی این مسئله نسبتاً ساده از آن نظر اختیار شده است که جواب دقیق آن در ادبیات علمی وجود دارد [۱۲]. در واقع می‌توان نشان داد که این تیر پس از تغییر شکل، به صورت یک نیم



شکل ۱۵- رکورد تغییرات نشست سر و ته شمع در اثر ضربهٔ چکش

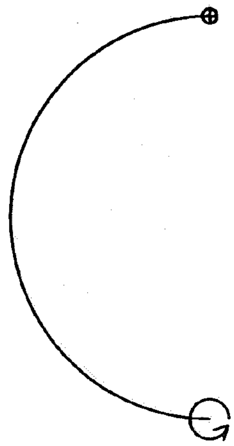
دایره با شعاع:

$$r = \frac{EI}{M}$$

در می‌آید که در آن E مدول الاستیسیته تیر، I ممان اینرسی و M لنگر اعمالی در سر تیر است.

در شکلهای (۱۶) و (۱۷) شرایط مرزی تیر و تیر تغییر شکل یافته نشان داده شده‌اند. در شکل (۱۸) وضعیت تغییر مکان نقاط تیر (در جهت عمودی و افقی) با جواب دقیق مقایسه شده است که مبین صحت نتایج برنامه است.

شکل ۱۶- شرایط مرزی در تیر یکسر گیردار



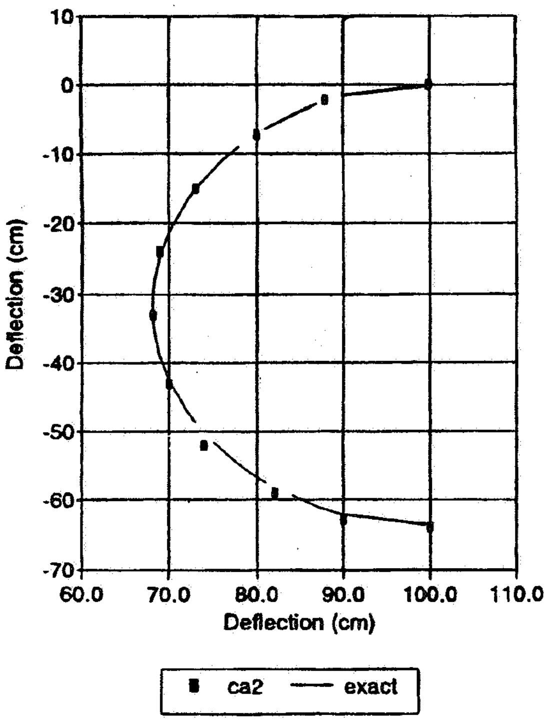
۱۷- شکل تغییر شکل یافتهٔ تیر

مثال (۵):

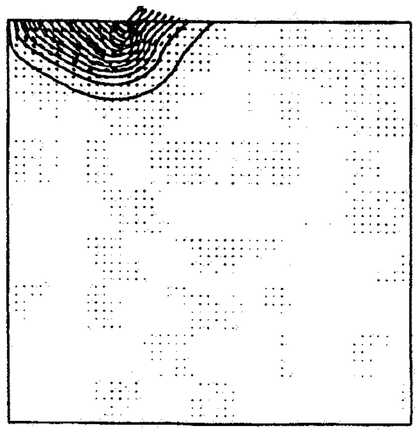
تحلیل مسائل ظرفیت باربری پی‌ها، از مسائل مهم در مهندسی خاک است. در این مثال، یک پی دایره‌ای صلب به شعاع 1.4 m بداخل خاک فشرده می‌شود. خاک را یک محیط الاستیک ـ پلاستیک کامل موهر ـ کولمب با چسبندگی $C=5000\ kg/m^2$ و اصطکاک داخلی صفر فرض می‌کنیم. این مسئله، یک مسئلهٔ شرایط مرزی با تقارن محوری است. پس از فشردگی کامل پی در خاک، تنشهای زیر پی به حالت پایدار در می‌آیند. بردارهای سرعت و کانتورهای مؤلفهٔ افقی سرعت نهایی در خاک که مبین جاری شدن ماده در حوالی محل استقرار پی هستند، در شکل (۱۹) آمده‌اند. برای کنترل صحت عملکرد برنامه، توزیع تنش عمودی در زیر پی (که نسبت به چسبندگی خاک نرمالیزه شده است) در برابر فاصله از مرکز پی (که نسبت به شعاع پی بدون بعد شده) ترسیم شده است، شکل (۲۰). در این شکل، جوابهای به دست آمده از روش انتگرالگیری عددی که در واقع روشی نیمه دقیق است نیز آورده شده‌اند [۱۳] که مبین صحت نتایج برنامه هستند. لازم به توضیح است که در مسئلهٔ حل شده، به علت تقارن، تنها نصف مسئله المان‌بندی شده است.

مثال (۶):

این مثال، صحت تحلیل دینامیکی مسائل با تقارن محوری



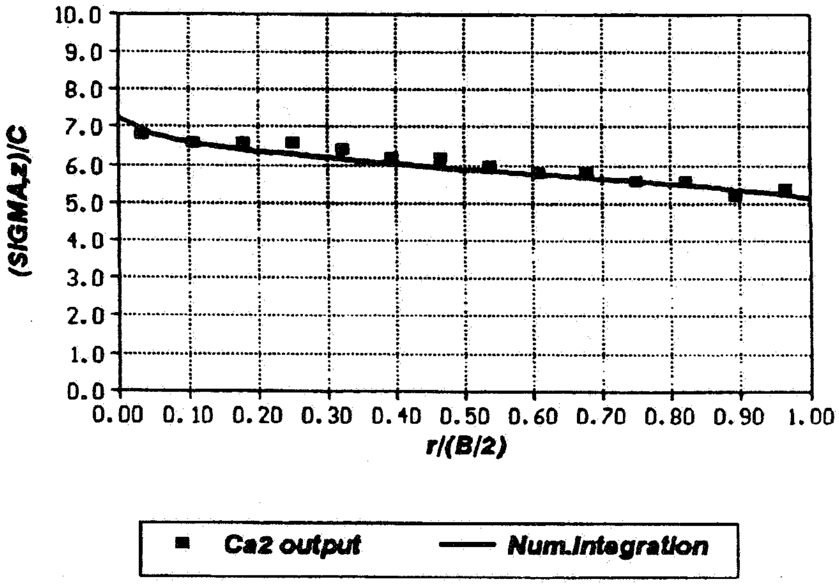
شکل ۱۸- مقایسهٔ جوابهای عددی و تحلیلی شکل تغییرشکل‌یافتهٔ تیر



شکل ۱۹- بردارهای سرعت و کانتورهای مؤلفهٔ x سرعت در مسئلهٔ فشردن پی در خاک

توسط برنامهٔ CA2 را بررسی می‌کند. یک مغار کروی به شعاع 5.5 m تحت فشار داخلی و ناگهانی 1000 Pa- قرار می‌گیرد. برای آنکه موج ایجاد شده امکان حرکت در محیط بینهایت را داشته باشد، مرزهای خارجی ناحیه مورد تحلیل را آرام فرض می‌کنیم. محیط مورد نظر دارای رفتار الاستیک خطی با خصوصیات مکانیکی زیر است:

[DOR: 20.1001.1.22287698.1379.19.1.10.8]

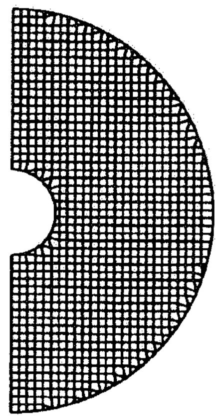


شکل ۲۰- مقایسهٔ نتایج تحلیلی و عددی توزیع تنش نرمال در زیر پی در حالت حدی

در پاسخ ایجاد شده، نوسانات اضافی وجود دارند و بنابراین مرزهای آرام تنها بطور تقریبی قادر به جـذب مـوج ورودی هستند. البته با ریزتر کردن المانهای به کار رفته می‌توان دقت نتایج را بالا برد.

مثال (۷):

یکی از مسائل مهم در تحلیل پایداری شیروانیها، بررسی مقدار جابه‌جایی دائمی آنها در اثر بارهای دینامیکی است. در اثر بار زلزله، ضریب اطمینان بر روی یک سطح لغزش دلخواه به صورت تابعی از زمان تغییر می‌کند. در صورتی که مقدار این ضریب اطمینان در طول وقوع زلزله بزرگتر از یک باشد، مشکلی ایجاد نخواهد شد ولی چنانکه ضریب اطمینان به‌دست آمده در مواقعی کـوچکتر از یک شود، بررسی بیشتری را می‌طلبد. به واقـع کـوچکتر از یک بـودن ضریب اطمینان در حین زلزله، در حالت کلی مؤید آن نیست که یک شیروانی در خطر ریزش است. نکتهٔ مهم آن است که معمولاً مدت زمانی که شیروانی در وضعیت با ضریب اطمینان کـوچکتر از یک قرار دارد آن قدر کوتاه است که جابه جایی دائمی ایجاد شده در گوهٔ لغزش ممکن است ناچیز باشد. برای بررسی این موضوع و اطمینان از کوچک بودن جابه جایی دائمی شیب، معمولاً سـه روش کـلی وجود دارد:



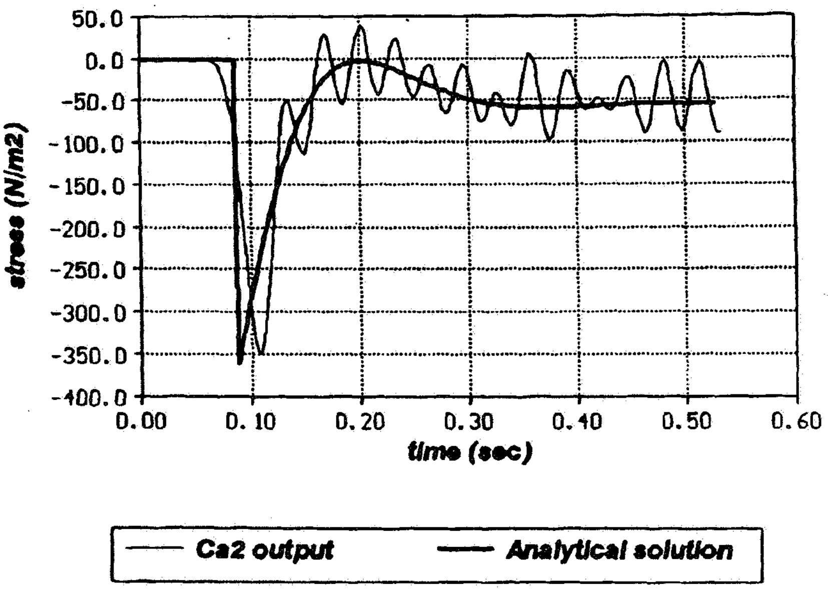
شکل ۲۱- شبکهٔ محاسباتی در تحلیل دینامیکی یک مغار کروی

مدول الاستیسیته = 2×10^7 Pa

جرم مخصوص = 2000 kg/m^3

ضریب پواسون = 0.2

نحوهٔ المان‌بندی محیط در شکل (۲۱) نشان داده شده است. پس از تحلیل مسئله، تغییرات مؤلفهٔ σ_{xx} تنش در المانی که در فاصلهٔ 15 m از مرکز مغار قرار دارد در برابر زمان ترسیم شده است، شـکـل (۲۲) و بـا جـواب دقـیق قـابل مـقایسه است [۱۴]. همچنان که دیده می‌شود موج تقریباً پس از 0.1 sec به محل المان مورد نظر رسیده است. از شکل (۲۲) دیده می‌شود که



شکل ۲۲- مقایسهٔ نتایج تحلیلی و عددی تنش شعاعی

۱- روش نیومارک [۱۵]، ۲- روش اجزای محدود، ۳- روش اجزای مجزا[۵]

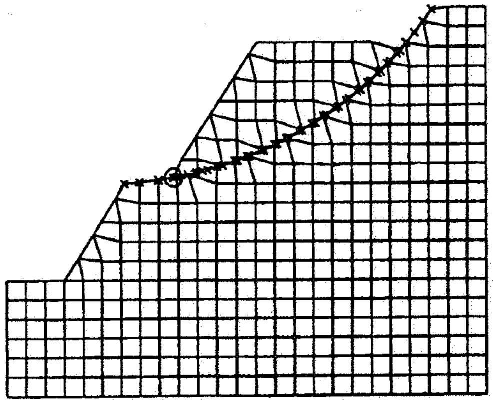
روش نیومارک یک روش کلاسیک برای یافتن جابه جایی دائمی شیبها تحت بارهای دینامیکی است. در این روش، ابتدا شتاب جاری شدن شیب یعنی شتاب معادل افقی که سبب ایجاد تعادل حدی شیب می‌شود به دست می‌آید. سپس شتاب زلزله طراحی با شتاب جاری شدن مقایسه شده و در صورتی که شتاب زلزله بزرگتر از شتاب جاری شدن شیب باشد با انتگرالگیری عددی از اختلاف این دوشتاب، سرعت و سپس جابه جایی دائمی شیب به دست می‌آید. این روش معمولاً منجر به نتایج قابل قبولی می‌شود. البته در صورتی که فرکانس عامل ارتعاش شیب، نزدیک به فرکانس طبیعی شیب باشد، تشدید اتفاق می‌افتد و روش نیومارک معمولاً در مقایسه با روشهای دقیقتر، جوابهای مناسبی را ارائه نمی‌دهد.

روش اجزای محدود غیر خطی روش دیگری برای یافتن جابه جایی دائمی شیبهاست. نقطه ضعف این روش در آن است که در صورتی که میزان جابه جایی ایجاد شده بزرگ باشد، تغییر شکل زیادی در شبکهٔ محاسباتی ایجاد می‌شود و نتایج ممکن است خیلی قابل اتکا نباشد.

روش سوم، واقعیترین روش در میان روشهای تحلیل بالاست که تا حدودی در ارتباط با شیبهای سنگی که دارای سیستم درز مشخص‌اند به کار گرفته شده است ولی این شیوه از تحلیل را می‌توان به ترتیبی که در ادامه این مقاله و مثال حل شده پیشنهاد شده است برای شیبهای خاکی نیز به کار گرفت. ابتدا یک سطح لغزش دلخواه برای شیب خاکی در نظر گرفته می‌شود. این سطح لغزش به واقع شیب مورد تحلیل را به دو قطعهٔ مجزا تقسیم می‌کند به طوری که این دو قطعه از طریق فنرها و لغزنده‌ها با یکدیگر اندرکنش دارند.

حال تحت اثر زلزلهٔ مورد نظر، تحلیل دینامیکی برای محیط ناپیوستهٔ بالا صورت می‌گیرد. بدین‌وسیله، جابه جایی دائمی شیب را می‌توان به دست آورد و با مقدار مجاز طراحی مقایسه کرد. امتیاز این روش در آن است که مد تخریب توسط سیستم انتخاب می‌شود به طوری که در حین تحلیل، یک مد لغزشی ممکن است به چرخشی و یا بالعکس تبدیل شود. ایدهٔ جالب جدیدی که می‌تواند در این زمینه ارائه شود آن است که برای یافتن گوهٔ ناپایداری که بیشترین لغزش را به دست دهد می‌توان سطوح لغزش متفاوتی را فرض کرد تا سطح لغزشی که بیشترین جابه جایی را دارد یافته شود. باید توجه داشت که این سطح لغزش بحرانی از دیدگاه سینماتیکی، ممکن است در حالت کلی بر سطح لغزش با کوچکترین ضریب اطمینان استاتیکی منطبق نباشد. به عبارت دیگر می‌توان دو سطح

[DOR: 20.1001.1.22287698.1379.19.1.10.8]



شکل ۲۳- شبکهٔ عددی در تحلیل لغزشی دائمی یک شیب خاکی

بحرانی برای یک شیب تصور کرد که یکی از آنها از روشهای تعادل حدی و دیگری از روشهای حرکتی به دست می‌آید.

از آنجا که در برنامهٔ CA2، امکان ایجاد سطوح درز غیر مستوی وجود دارد، در مثال آخر به تحلیل یک شیب خاکی تحت اثر زلزله و یافتن جابه جایی آن به شیوهٔ بحث شدهٔ بالا می‌پردازیم. شبکهٔ محاسباتی، به همراه سطح درز غیر مستوی آن، در شکل (۲۳) نشان داده شده است.

خصوصیات مکانیکی خاک که برای سادگی دارای رفتار الاستیک فرض شده است به قرار زیر است:

مدول الاستیسیته خاک = 10^8 Pa

چگالی = $2000\ kg/m^3$

ضریب پواسون = 0.2

برای درز، خصوصیات زیر فرض می‌شوند:

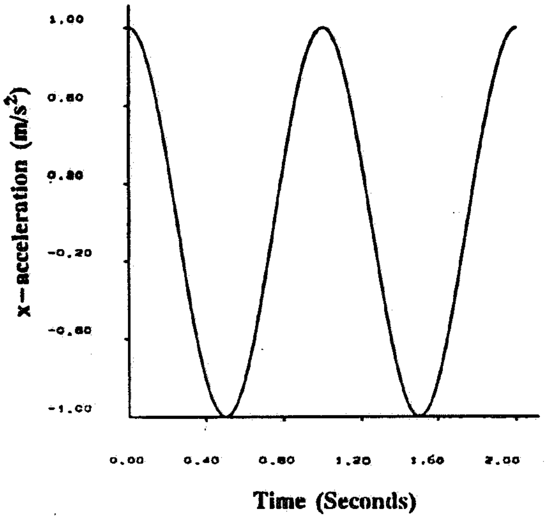
سختی برشی = سختی نرمال = 10^6 Pa/m

چسبندگی = 0

زاویه اصطکاک = $40°$

مقاومت کششی = 0

ابتدا اجازه داده می‌شود که این سیستم تحت وزن خود به حالت تعادل استاتیکی برسد. حال یک رکورد شتاب کسینوسی مطابق شکل (۲۴) به قسمت تحتانی سیستم، به صورت برشی اعمال می‌شود. مرزهای محیط آزاد در دو طرف شیب ایجاد می‌شوند تا حرکت ارتعاشی محیط بی‌نهایت اطراف شیب را مدل نمایند، در غیراین صورت جوابهای به دست آمده قابل اتکا نخواهند بود.



شکل ۲۴- رکورد شتاب برشی اعمالی در قسمت تحتانی شیب خاکی

شتاب اعمالی در قسمت تحتانی سیستم و محیط آزاد اطراف آن، برای مدت دو ثانیه اعمال می‌شود ولی تحلیل برای مدت 4.7 sec ادامه می‌یابد. به علت به کارگیری میرایی ریلی در مدل به کار گرفته شده، سیستم پس از 4.7 sec به تعادل می‌رسد و لغزش بلوک، ادامه نمی‌یابد. از شکل (۲۵) دیده می‌شود که بلوک لغزنده، دارای مقداری لغزش دائمی است. این حقیقت با مشاهده تغییرات مؤلفهٔ x جابه جایی گرهٔ فوقانی در بلوک لغزنده با زمان کاملاً مشهود است، شکل (۲۶). در واقع گرهٔ فوقانی بلوک لغزنده دارای جابه جایی افقی و دائمی به مقدار 1.76 m است.

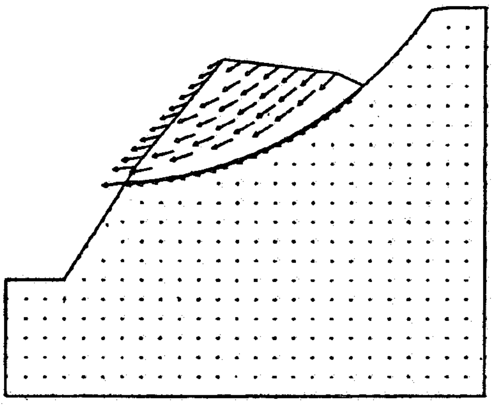
۷- نتیجه گیری

مدل کردن عددی، وسیله‌ای مناسب برای بررسی و تحلیل مکانیکی مسائل مرتبط با ژئومکانیک است. این موضوع به‌خصوص با توجه به فراوانی و قیمت نسبتاً مناسب رایانه‌های شخصی بیشتر جلب توجه می‌کند. برنامهٔ رایانه‌ای CA2، برنامه‌ای است که براساس روش تفاضل محدود صریح نوشته شده است و قادر به تحلیل محیطهای پیوسته و ناپیوسته در وضعیتهای استاتیکی و دینامیکی است. در این مقاله ضمن بررسی بعضی از روابط ریاضی و عددی مرتبط با این برنامه، حل چند مثال کاربردی ارائه شده است. تحلیل این گونه مسائل در مقایسه با روشهای آزمایشگاهی و مدلهای فیزیکی باعث می‌شود تا با مخارج کمتر و سرعت بیشتر بتوان رفتار سیستمهای ژئوتکنیکی پیچیده را

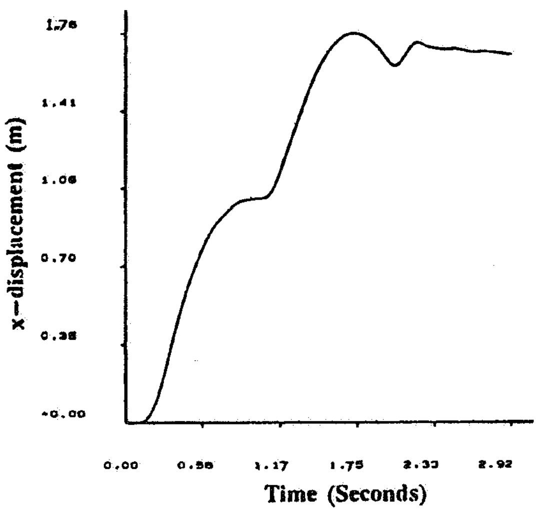
مدلسازی و پیش‌بینی کرد و در امر پایداری سازه‌های خاکی و سنگی با دقت بالاتر و بیشتری به نتیجه‌گیری و ارزیابی اقدام کرد.

در انتهای مقاله، یک روش جدید برای یافتن جابه جایی دائمی شیبهای خاکی تحت اثر بار زلزله پیشنهاد شده است. از طریق به کارگیری روش ارائه شده، می‌توان با جستجو در میان سطوح دایره‌ای دلخواه، سطح لغزش بحرانی را که بیشترین جابه جایی تحت یک زلزله به خصوص را دارد به دست آورد. این سطح بحرانی سینماتیکی، لزوماً بر سطح لغزش بحرانی استاتیکی که از روشهای تعادل حدی به دست می‌آید انطباق ندارد. از آنجا که برنامهٔ CA2، یکی از معدود برنامه‌های رایانه‌ای است که قادر به ایجاد سطوح لغزش غیر مستوی است، تحقیقات بعدی در این زمینه را می‌توان به کمک این برنامه ادامه داد.

لازم به توضیح است که همچنانکه در ابتدای مقاله آمده است برنامهٔ رایانه‌ای ارائه شده قادر به تحلیل کلاسهای متنوعی از مسائل است که بیان مثال و مقایسه با نتایج موجود در ادبیات علمی برای تمام این موارد در قالب این مقاله امکانپذیر نیست و بنابراین تنها شمه‌ای از تواناییهای برنامه در این مختصر ارائه شده است.



شکل ۲۵- شکل تغییر شکل یافته و بردارهای جابه جایی در زمان ۴/۷۱ ثانیه



شکل ۲۶- تغییرات جابه جایی افقی بلوک لغزنده در برابر زمان

واژه نامه

1. Continuum analysis, 2-dimensional
2. traction stress
3. explicit finite difference
4. lumped mass
5. distinct element method

مراجع

1. Cundall, P. and Board, M., "A Microcomputer Program for Modelling Large-Strain Plasticity Problems," Numerical Methods in Geomechanics (Innsbruck), Swoboda(ed.), Balkema, pp. 2101-2108, 1988.

۲. فخیمی، ا.ع. "تئوری و راهنمای نرم‌افزار CA2 ـ گونه 2.00"، مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن ـ تهران ـ ایران ـ ۱۳۷۶.

3. Nagtegaal, J. C., Parks, D. M., and Rice, J. R., "On Numerically Accurate Finite Element Solutions in Fully - Plastic Range," *Comp. Meth. in Appl. Mech. & Eng.*, Vol. 4, pp. 153-177, 1974.

4. Marti, J., and Cundall, P., "Mixed Discretization Procedure for Accurate Solution of Plasticity Problems," *Int. J. Num. and Anal. Methods in Geomechanics*, Vol. 6, pp. 129-139, 1982.

5. Bazant, Z.P., "Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete," *ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. EM2,

pp. 331-344, 1976.

6. Bazant, Z.P. (Edt), *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Report by ACI Committee 446, Elsevier Applied Science, pp. 5-140, 1992.
7. Bazant, Z.P., and Pijaudier-Cabot, G., "Non-local Continuum Damage, Localization Instability and Convergence," *Journal of Applied Mech.*, Vol. 55, pp. 287-293, 1988.
8. Vermeer, P.A., and De Borst, R., "Non-Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock," *Heron*, Vol. 29, No. 30, 1984.
9. Fakhimi, A.A., "Numerical Modeling of Jointed Media," *Proceedings of 4th International Conference on Civil Eng.*, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, Vol. II, pp. 130-136, 1997.
10. Mabsout, E.M., Reese, L.C., and Tassoulas, L., "Study of Pile Driving by Finite Element Method," *Journol of Geotechnical Engineering*, Vol. 121, No. 7, 1995.
11. Lysmer, J., and Kuhlemeyer, "Finite Dynamic Model for Infinite Media," *J. Eng. Mech.*, 95 (EM4), pp. 859-877, 1969.
12. Saje, M., and Srpcic, S., "Large Deformation of In-Plane Beam," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 21, pp. 1181-1195, 1985.
13. Chen Wai-Fah, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
14. Achenbach, J.D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1987.
15. Newmark, N. M., "Effects of Earthquakes on Dams and Embankments," *Geotechnique*, Vol. 15, pp. 135-160, 1964.