

# شناسایی سیستمهای خطی بر مبنای پاسخ فرکانسی نویزی آنها

مسعود سبحانی\* و احمدرضا تابش\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

پژوهشکده علوم و تکنولوژی زیردریا، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۱/۱۷ - دریافت نسخه نهایی: ۷۸/۱۱/۲۵)

چکیده - در این مقاله الگوریتم جدیدی برای شناسایی سیستمهای خطی براساس پاسخ فرکانسی آنها ارائه شده است. در این روش، ابتدا با داشتن مقادیر اندازه و فاز تابع انتقال سیستم در تعداد محدودی از فرکانس، یک دستگاه معادله‌های خطی تشکیل می‌شود که چنانچه داده‌ها بدون خطا (نویز اندازه‌گیری) باشند و درجه صورت و مخرج تابع انتقال از پیش مشخص باشد، یک جواب منحصر به فرد و دقیق حاصل می‌شود. در غیر این صورت برای هر درجه انتخابی برای صورت و مخرج، یک تابع انتقال قابل قبول برای آن درجات حاصل می‌شود. در حالتی که داده‌ها دارای نویز اندازه‌گیری (با خطای نسبی بیشینه از پیش مشخصی) باشند، مسئله دارای یک مجموعه جوابهای قابل قبول می‌شود که هر کدام از اعضای آن دارای یک طیف نویزی مجاز است که کاملاً داده‌های مسئله را می‌پوشاند. برای این کار، نخست با تعریف یک تابع هزینه جدید تحت عنوان کمترین مجموع مربعات فاصله در فضای ضرایب و کمینه کردن آن، تابع انتقال گویای اولیه‌ای به دست می‌آید که پاسخ فرکانس آن به طور بهینه از بین نقاط داده شده می‌گذرد. سپس با استفاده از تکنیک برنامه نویسی پویا، اقدام به کاهش اثر نویز داده‌ها کرده به طوری که در هر مرحله تابع انتقال به دست آمده به سمت یکی از توابع انتقال قابل قبول برای سیستم واقعی (بدون نویز) رانده می‌شود. ضمناً، با استفاده از دو مثال، نشان داده شده است که امکان استفاده از این روش برای شناسایی سیستمهای ناپایدار و / یا غیر مینیمم فاز نیز وجود دارد.

## System Identification Based on Frequency Response Noisy Data

M. Sobhani and A. A. Tabesh

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology  
Sub sea Science & Technology Research Center, Isfahan University of Technology

**ABSTRACT-** *In this paper, a new algorithm for system identification based on frequency response is presented. In this method, given a set of magnitudes and phases of the system transfer function in a set of discrete frequencies, a system of linear equations is derived which has a unique and exact solution for the coefficients of the transfer function provided that the data is noise-free and the degrees of the numerator and denominator are selected correctly. If the data is corrupted with (bounded) noise, then the answer is no longer*

\*- استادیار      \*\*- کارشناس ارشد

unique and an acceptable transfer function is one that has a frequency response with a noise bound that covers the noisy data. To find one of these acceptable results, a new performance index is defined as "the least squares distance in the coefficient space". By minimizing this index, an initial transfer function is obtained which passes optimally through the noisy data. Then, using the so-called dynamic programming technique, the noise is reduced in such a way that at each step the resulting transfer function is pushed toward one of the acceptable noise-free systems. An illustrative example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

## ۱- مقدمه

در شناسایی سیستمها هدف آن است که با داشتن خصوصیات دینامیکی سیستم به صورت یک سری از داده‌های ورودی - خروجی در حوزه زمان یا فرکانس، مدلی ریاضی یافت که آن سیستم را به نحو بهینه‌ای تقریب بزند. چنانچه داده‌های سیستم در حوزه زمان باشند (مانند پاسخ زمانی به یک ورودی نویز و یا پله‌ای واحد)، آن گاه مدل ریاضی به دست آمده می‌تواند به صورت معادله‌های دیفرانسیل حالت زمان - پیوسته<sup>۲</sup> و یا معادله‌های تفاضلی حالت زمان - گسسته<sup>۴</sup> باشند. در صورتی که داده‌ها در حوزه فرکانس باشند، مدل ریاضی می‌تواند به صورت تابع انتقال در حوزه S و یا Z باشد. یافتن تابع انتقال با استفاده از اطلاعات پاسخ فرکانسی (اندازه و فاز در یک سری فرکانس) علاوه بر کاربرد آن در تعیین هویت سیستمها، از موضوعات مورد علاقه بسیاری از محققان در طراحی سیستمهای کنترل و یا کاهش درجه تابع سیستمها نیز هست [۱۰، ۱۵ و ۲۱].

اگرچه در مورد روشهای تعیین هویت سیستمها در حوزه زمان مراجع زیادی وجود دارد [۸ و ۱۱] و [۱۹ و ۲۰] و برخی از آن روشها برای ورودیهای پریودیک نیز قابل استفاده‌اند، لیکن تعیین هویت سیستمها در حوزه فرکانسی دارای مزایای زیر نسبت به حوزه زمانی است [۶ و ۹]:

- ۱- دستیابی به دیدی بهتر در مورد دینامیک سیستم هنگامی که سیستم توسط تابع انتقال نمایش داده می‌شود
- ۲- مناسبتر بودن این گونه روشها در طراحی کنترلرهای مقاوم و نیز سهولت برآورد عملکرد سیستم بسته در حوزه فرکانس
- ۳- تعداد کم اطلاعات طیفی مورد نیاز نسبت به تعداد زیاد داده‌های لازم در حوزه زمان.
- ۴- ساده بودن ترکیب داده‌های ناشی از آزمونهای مختلف در محدوده‌های مختلف فرکانسی.

بدین لحاظ، اخیراً توجه بسیاری از محققان به روشهای تعیین هویت سیستمها در حوزه فرکانس جلب شده است [۲ و ۱۲] و [۱۵-۱۷]. نکته مهم در این گونه روشها آن است که طبق فرمول انتگرال بدی [۳] رابطه یک به یکی بین اندازه و فاز هر تابع انتقال گویا و فاز کمینه G(s) در فاصله فرکانسی  $\omega \in [-\infty, \infty]$  به صورت زیر وجود دارد:

$$\angle G(j\omega_1) - \angle G(j0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\ln |G(j\omega)|)}{d\lambda} \ln \left( \coth \left| \frac{\lambda}{2} \right| \right) d\lambda, \quad (1)$$

$$\lambda = \ln(\omega/\omega_1)$$

که در آن  $\omega_1$  هر فرکانس دلخواهی است. بنابراین با تغییر ضرایب صورت و مخرج تابع انتقال G(s) به منظور گذراندن اندازه آن از نزدیکی اندازه پاسخ فرکانسی واقعی سیستم، فاز آن نیز تغییر خواهد کرد. به عبارت دیگر، مسئله تعیین هویت سیستم با استفاده از پاسخ فرکانسی را نمی‌توان به صورت دو مسئله ساده منحنی‌یابی<sup>۵</sup> برای اندازه و فاز به طور مجزا مستقل حل کرد.

نخستین بار لوی [۷] روشی برای تعیین تابع انتقال سیستمها با استفاده از پاسخ فرکانسی آنها ارائه داد. وی با کمینه کردن مربع اندازه خطای وزن دار، مسئله کمینه‌سازی مجموع مربعات خطای<sup>۶</sup> (LSE) غیرخطی را به یک مسئله LSE خطی تبدیل کرد. در آن روش، خطا به صورت اختلاف بین اندازه تابع انتقال تقریبی و واقعی سیستم تعریف شده بود. سپس ساناتانان و کوثرنر [۱۸] روش او را توسعه داده و یک الگوریتم تکرار جدید ارائه کردند. روش آنها بعداً توسط دیلی و لوکیچ [۴] به سیستمهای چندورودی - چندخروجی تسری یافت که در آن فرض بر این بود که چندجمله‌ایهای صورت و مخرج از یک سری چندجمله‌ای متعامد از نوع چیشیف<sup>۷</sup> تشکیل شده‌اند. اسپانوز [۲۱] نیز یک الگوریتم تکرار براساس کمینه سازی نرم  $l_{\infty}$  خطای مذکور ارائه کرد و نتایج بهتری نسبت به روشهای قبلی به

دست آورد.

تعیین تابع انتقال تقریبی سیستمها با استفاده از معیار LSD ارائه شده است. ضمناً در همان بخش الگوریتمی برای کاهش اثر نویز پیشنهاد شده است. بخش (۴)، اختصاص به چند مثال برای نشان دادن توانایی این روش دارد. خلاصه و نتیجه گیری نیز در بخش (۵) آمده است.

## ۲- فرمولبندی مسئله

فرض کنید که پاسخ فرکانسی یک سیستم به صورت یک مجموعه گسسته شامل جفتهای مرتب اندازه و فاز  $V_m = \{(M(\omega_i), \phi(\omega_i)), i=1, 2, \dots, p\}$  متناظر با یک مجموعه از فرکانسهای مجزای  $\Omega = \{\omega_i, i=1, 2, \dots, p\}$  داده شده است. هدف، یافتن تابع انتقال گویایی برای سیستم به صورت:

$$G(s, \alpha, \beta) = \frac{N(s, \alpha)}{D(s, \beta)} = \frac{\alpha_m s^m + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0} \quad (2)$$

است به نحوی که پاسخ فرکانسی  $G(s)$  با تقریب کمینه از نقاط پاسخ فرکانسی واقعی (بدون نویز) سیستم بگذرد. به عبارت دیگر  $|G(j\omega_i)| \approx M(\omega_i)$  و  $\angle G(j\omega_i) \approx \phi(\omega_i)$  برای  $i=1, 2, \dots, p$  در معادله (۲) ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  مجهول اند. توجه شود که این معادله از نظر ضرایب دارای ابهام است زیرا به ازای  $\forall (\rho \neq 0) \in \mathbb{R}$  داریم  $G(s, \alpha, \beta) = G(s, \rho\alpha, \rho\beta)$ . برای رفع این ابهام، فرض می‌کنیم که  $\beta_n = 1$  باشد تا امکان حصول جواب یکتا فراهم شود.

همان گونه که در بخش (۱) ذکر شد، برای حل مسئله بالا روشهای مختلفی تاکنون ارائه شده‌اند که همگی مبتنی بر الگوریتمهای تکرارند. وجه مشترک تمامی این روشها در تعریف تابع هزینه‌ای به شکل کلی زیر است:

$$J(s, \alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \Omega) = E^H E, \quad (3)$$

$E = f \left( V_m, N(\alpha, \Omega), D(\beta, \Omega), N(\tilde{\alpha}, \Omega), D(\tilde{\beta}, \Omega) \right)$  که در آن  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  ضرایب به دست آمده از مرحله قبل الگوریتم اند. با تعریف  $H(j\omega_i) \triangleq M(\omega_i) e^{j\phi(\omega_i)}$ ، توابع هزینه مهمی که تاکنون در فضاها  $l_q, q=1, 2, \infty$  پیشنهاد شده‌اند را می‌توان به صورت زیر

ویتفیلد [۲۲] نشان داده است که به علت غیرخطی بودن تابع هزینه، هیچ گونه تضمینی در مورد همگرایی الگوریتم تکرار در روشهای فوق وجود ندارد. ضمناً در هیچ کدام از آنها مسئله مهم وجود نویز اندازه‌گیری و اثر آن بر روی نتایج حاصل در نظر گرفته نشده است. این موضوع که در عمل از اهمیت فراوانی برخوردار است، به تازگی (در دهه نود میلادی) مورد توجه خاص محققان قرار گرفته است. در یک روش، فرض بر آن است که مشخصات نویز اندازه‌گیری (از قبیل متوسط و واریانس) از پیش معلوم است و از تکنیک حداکثر احتمال وقوع<sup>۱</sup> برای بهینه سازی جواب استفاده شده است [۱۴]. در روش دیگر، اندازه نویز را محدود فرض کرده و با استفاده از پارامترهای مارکوف، تابع انتقال تقریبی به دست می‌آید [۵]. بای و رامان [۱] نیز با تخمین جداگانه قسمتهای حقیقی و موهومی تابع انتقال (به جای اندازه و فاز) به الگوریتمی دست یافتند که در مقابل نویز اندازه‌گیری مقاوم است. روشهای اخیر براساس تخمین جداگانه نویز اندازه‌گیری و سپس استفاده از این اطلاعات در تخمین تابع انتقال سیستم هستند [۶ و ۱۳].

در این مقاله روش دیگری براساس تبدیل مسئله تقریب تابع انتقال به یک دستگاه معادله‌های خطی ارائه شده که با حل این دستگاه می‌توان ضرایب مجهول صورت و مخرج تابع انتقال تقریبی سیستم را مستقیماً در حوزه پیوسته  $S$  به دست آورد. این روش از چند نظر با روشهای قبلی تفاوت دارد. اول اینکه در این روش معیار جدید "کمترین مجموع مربعات فاصله (LSD) در فضای پارامتری" به عنوان معیار بهینگی معرفی شده است. دوم اینکه، این تابع معیار برخلاف تابع معیار مشهور LSE دارای یک تعبیر هندسی مناسب نیز هست. سوم اینکه، در صورت عدم وجود نویز اندازه‌گیری، این روش تابع انتقال دقیق سیستم را بدون نیاز به تکرار الگوریتم می‌دهد. و چهارم اینکه، در حالتی که نویز اندازه‌گیری وجود داشته باشد، با استفاده از برنامه نویسی پویا می‌توان در هر مرحله تابع انتقال به دست آمده را به سمت تابع انتقال واقعی (بدون نویز) سیستم راند.

ساختار مقاله به این ترتیب است که صورت مسئله و فرمولبندی آن در بخش (۲) آورده شده است. در بخش (۳) روش

نوشت:

$$J = \min_{\alpha, \beta} \left\| W(j\omega) \left( H(j\omega) - G(j\omega, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \right) \right\|_{1_q}, q = 1, 2, \infty \quad (4)$$

که در آن  $W(j\omega)$  یک تابع وزنی است. از نرم‌های بالا، نرم  $l_2$  بیش از بقیه مورد استفاده قرار گرفته است که تابع هزینه مربوط به آن دارای شکل کلی زیر است:

$$J = \min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^p \left[ W^2(j\omega_i, \alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}) \left| H(j\omega_i) D(j\omega_i, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) - N(j\omega_i, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \right|^2 \right] \quad (5)$$

برای تابع هزینه بالا، توابع وزنی  $W$  مختلفی پیشنهاد شده‌اند، از جمله [۱۵]:

$$W(j\omega_i, \alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}) = 1 / \left| D(j\omega_i, \alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}) \right|^v, \quad v = \text{const.} \in [0, \infty] \quad (6)$$

$$W(j\omega_i, \alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}) = 1 / \left| H(j\omega_i) D(j\omega_i, \alpha^{(k-1)}, \beta^{(k-1)}) \right| \quad (7)$$

در ادامه، روشی برای تعیین هویت سیستمها براساس بهینه سازی یک تابع هزینه جدید ارائه و نشان داده می‌شود که چنانچه داده‌ها شامل خطا (نویز اندازه‌گیری) باشند، می‌توان توسط برنامه نویسی پویا اقدام به کاهش اثر نویز کرد.

### ۳- الگوریتم تعیین هویت سیستمها

در این روش، با تبدیل مسئله تعیین تابع انتقال کسری به یک دستگاه معادله‌های خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول، سعی در یافتن بهترین پاسخ برای این دستگاه می‌شود. برای این کار در معادله (۲) با جایگذاری  $s = j\omega_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, p$  داریم:

$$G(j\omega_i) = \frac{\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega_i)^k}{(j\omega_i)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (j\omega_i)^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

با مساوی قرار دادن  $G(j\omega_i) = H(j\omega_i)$  در معادله (۸) می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega_i)^k - H(j\omega_i) \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (j\omega_i)^k = (j\omega_i)^n H(j\omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

با تعریف بردار ضرایب مجهول

$$x = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{(m+n+1) \times 1} = \mathbb{R}^{r \times 1}$$

معادله (۹) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$Qx = c \quad (10)$$

که در آن

$$c = [(j\omega_1)^n H(j\omega_1), (j\omega_2)^n H(j\omega_2), \dots, (j\omega_p)^n H(j\omega_p)]^T \in \mathbb{R}^{p \times 1}$$

بردار اطلاعات اندازه و فاز در فرکانسهای  $\omega_p, \dots, \omega_2, \omega_1$  و  $Q \in \mathbb{R}^{p \times r}$  یک ماتریس مختلط به صورت زیر است:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & j\omega_1 & \dots & (j\omega_1)^m & -H(j\omega_1) & -j\omega_1 H(j\omega_1) & \dots & -(j\omega_1)^{n-1} H(j\omega_1) \\ 1 & j\omega_2 & \dots & (j\omega_2)^m & -H(j\omega_2) & -j\omega_2 H(j\omega_2) & \dots & -(j\omega_2)^{n-1} H(j\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & j\omega_p & \dots & (j\omega_p)^m & -H(j\omega_p) & -j\omega_p H(j\omega_p) & \dots & -(j\omega_p)^{n-1} H(j\omega_p) \end{bmatrix} \quad (11)$$

برای ساده‌تر شدن تحلیل می‌توان با تفکیک بخشهای حقیقی و مختلط و ادغام آنها، معادله (۱۱) را به یک دستگاه معادله با ضرایب حقیقی تبدیل کرد. برای این منظور، با تعریف  $Q = Q_R + jQ_I$  و  $c = c_R + jc_I$  می‌توان نوشت:

$$(Q_R + jQ_I) x = (c_R + jc_I) \quad (12)$$

با توجه به حقیقی بودن بردار  $x$  و با ترکیب معادله‌هایی که از مساوی قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی معادله (۱۲) به دست می‌آیند، می‌توان آن معادله را به دستگاه معادله‌های زیر با ضرایب حقیقی تبدیل کرد:

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} Q_R \\ Q_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p \times r}, \quad b = \begin{bmatrix} c_R \\ c_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p \times 1} \quad (13)$$

برای حل معادله (۱۳) می‌توان حالتی زیر را در نظر گرفت:

الف - داده‌ها بدون خطا (نویز اندازه‌گیری) هستند و ساختار سیستم از پیش مشخص است: در این حالت درجه صورت ( $m$ ) و مخرج ( $n$ ) تابع انتقال معلوم، ولی پارامترهای سیستم و در نتیجه ضرایب صورت و مخرج تابع انتقال مجهول‌اند. در این صورت چنانچه تعداد فرکانسها ( $p$ ) به گونه‌ای باشد که رابطه  $2p > m + n + 1 = r$

برقرار باشد، می توان با حل تنها  $r$  معادله از  $2p$  معادله مفروض در معادله (۱۳) تابع انتقال سیستم را که پاسخ فرکانسی اش دقیقاً از داده‌های مسئله می‌گذرد، تعیین کرد. از آنجا که دستگاه معادله‌ها در این حالت سازگار است، جواب مسئله منحصر به فرد خواهد بود.

ب - داده‌ها بدون خطا (نویز اندازه‌گیری) هستند اما ساختار سیستم از پیش مشخص نیست: در این حالت  $m$  و  $n$  مجهول‌اند، لذا چنانچه  $m$  و  $n$  را طوری انتخاب کنیم که  $2p > m+n+1=r$  باشد، آن گاه می‌توان با تعریف یک تابع هزینه مناسب، بهترین تابع انتقال تقریبی با درجه مفروض را برای معادله (۱۳) به دست آورد. در اینجا نیز جواب مسئله برای آن درجات  $m$  و  $n$  و نیز تابع هزینه تعریف شده، منحصر به فرد خواهد بود.

پ - داده‌ها دارای خطا یا نویز اندازه‌گیری نامعلوم ولی با حداکثر خطای نسبی مشخص‌اند: در این صورت برای هر  $m$  و  $n$  دلخواه، دستگاه معادله‌های (۱۳) ناسازگار بوده و مانند حالت (ب) باید با تعریف یک تابع هزینه مناسب، جوابی تقریبی برای معادله (۱۳) یافت. لازم به ذکر است که در این حالت نزدیک بودن  $\|Ax-b\|$  به صفر لزوماً به معنای نزدیک بودن پاسخ فرکانسی تابع انتقال به دست آمده به پاسخ فرکانسی سیستم واقعی (بدون نویز) نیست و هر چه میزان نویز اندازه‌گیری بیشتر باشد، پاسخی که  $\|Ax-b\|$  را کمینه می‌سازد می‌تواند از پاسخ واقعی (بدون نویز) دورتر شود. از طرف دیگر، در راستای تعیین الگوریتمی که بتوان براساس آن اثر نویز را کاهش داد، استفاده از تابع معیاری که علاوه بر تعیین یک جواب تقریبی بتوان از اندازه آن به عنوان معیاری برای دور یا نزدیک بودن پاسخ به دست آمده از پاسخ یا پاسخهای قابل قبول استفاده کرد، نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ضمناً، هنگامی که خطا یا نویز وارد داده‌های سیستم واقعی می‌شود، می‌توان سیستمهای متعددی در همسایگی سیستم واقعی یافت که به ازای نویزها و خطاهای خاصی (واقع در محدوده مجاز خطای ابزار اندازه‌گیری) همان نتایج را ایجاد کنند که پاسخ اصلی نویزدار ایجاد کرده است. در نتیجه، در اثر وجود خطا، به جای یک جواب با یک مجموعه جوابهای قابل قبول برای مسئله مواجه می‌شویم. بنابراین در تعیین یک جواب مناسب برای معادله (۱۳)، ارائه روشی که معیاری برای نزدیک بودن پاسخ به یکی از اعضای مجموعه جوابهای قابل قبول را دارا باشد از اهمیت بیشتری نسبت به تعیین

خود  $x$  برخوردار است. این مسئله انگیزه‌ای برای استفاده از روش کمترین مجموع مربعات فاصله (LSD) "به جای روش معمول کمترین مجموع مربعات خطا (LSE)" در حل دستگاه ایجاد می‌کند که در زیر توضیح داده می‌شود.

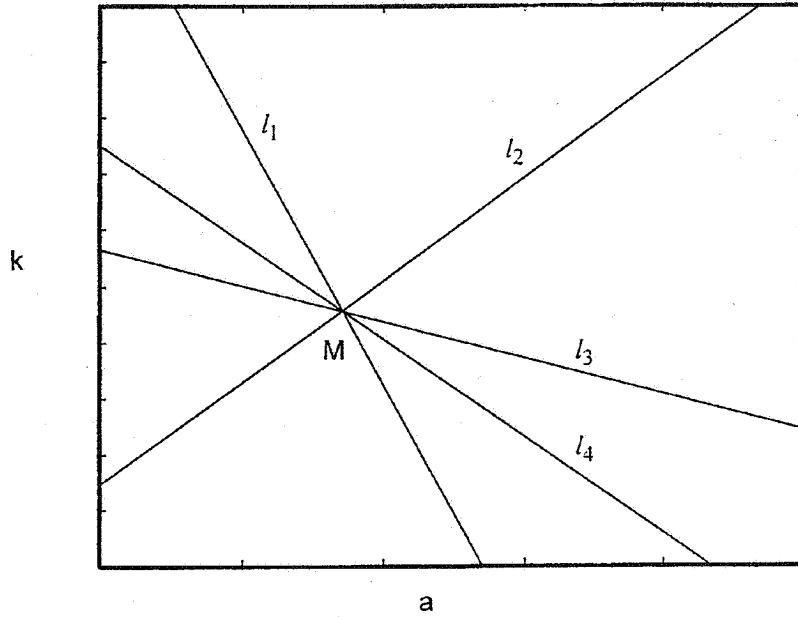
### ۱-۳- روش تقریب کمترین مجموع مربعات فاصله

در این روش، با ارائه یک تغییر هندسی از مسئله خطای اندازه‌گیری، تابع معیار به نحوی انتخاب می‌شود که میزان دور بودن پاسخ تقریبی از مجموعه جواب قابل قبول را مشخص کند. به منظور تبیین ایده این روش، ابتدا مسئله برای یک تابع انتقال درجه یک به صورت  $G(s) = \frac{k}{s+a}$  که دارای فضای ضرایب دویبعدی است، بررسی و سپس با تعمیم آن به فضای چندبعدی، تابع معیار مناسبی تعریف و مسئله در حالت کلی فرمولبندی می‌شود.

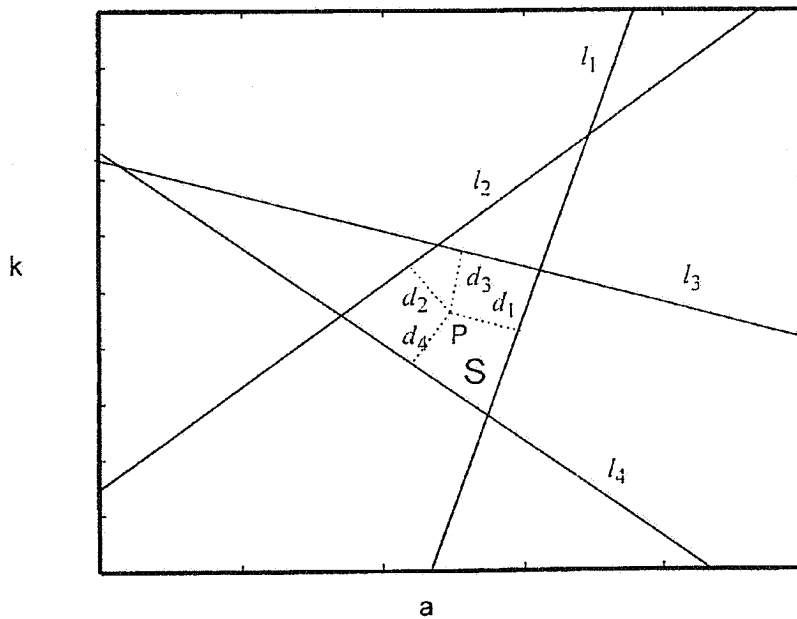
با فرض آنکه اطلاعات دو نقطه از پاسخ فرکانسی سیستم معلوم باشد، با استفاده از معادله (۱۳) معادله چهار خط  $(l_1$  تا  $l_4)$  در فضای ضرایب (صفحه  $a-k$ ) به دست می‌آید، شکل (۱). چنانچه اطلاعات پاسخ ورودی بدون خطا بوده و مربوط به یک سیستم خطی واقعی درجه یک باشند، آن گاه این چهار خط در صفحه  $a-k$  همگی دارای یک نقطه تقاطع مشترک می‌شوند که آن نقطه، مشخص کننده ضرایب تابع انتقال سیستم است، شکل (۱). اما چنانچه در اثر نویز اندازه‌گیری و یا عدم تطابق اطلاعات پاسخ فرکانسی با درجه انتخاب شده برای صورت و مخرج تابع انتقال، چهار معادله خطوط  $l_1$  تا  $l_4$  دارای جواب مشترک نباشند، آن گاه این خطوط در صفحه  $(a-k)$  دارای نقطه تقاطع مشترک نیستند و از تقاطع آنها با یکدیگر یک چندضلعی (محدب یا مقعر) در صفحه ضرایب پدید می‌آید، شکل (۲). به عبارت دیگر نقطه  $M$  در شکل (۱) به سطح  $S$  در شکل (۲) تبدیل می‌شود. بنابراین یک پاسخ مناسب برای حل معادله‌ها را می‌توان نقطه‌ای در نظر گرفت که کمترین فاصله را از مجموعه این خطوط داشته باشد.

با فرض اینکه نقطه  $P$  چنین نقطه‌ای باشد و فاصله آن از خطوط  $l_1$  تا  $l_4$  را به ترتیب  $d_1$  تا  $d_4$  بنامیم، شکل (۲). آن گاه تابع هزینه زیر را می‌توان برای تعیین مختصات نقطه  $P$  تعریف کرد:

$$J(a, k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 d_k^2 \quad (14)$$



شکل ۱- نمایش خطوط در فضای پارامتری (صفحه a-k) در حالت داده‌های بدون نویز



شکل ۲- نمایش خطوط در فضای پارامتری (صفحه a-k) در حالت داده‌های نویزی

صورت زیر در می‌آید:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2p} d_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2p} \left( \frac{\left( \sum_{i=1}^r a_{ki} x_i - b_k \right)^2}{\sum_{i=1}^r a_{ki}^2} \right) \quad (15)$$

که با تعریف  $\Phi_k^T \triangleq [a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kr}]$  (سطر k ام ماتریس A) می‌توان نوشت:

که بایستی آن را کمینه کرد. در حالت کلی، برای یک فضای ضرایب  $r$  بعدی، سطح  $S$  در شکل (۲) به یک فوق صفحه  $1^0$  تبدیل می‌شود. در این صورت، باید فاصله نقطه‌ای به مختصات  $X$  تا این فوق صفحه را جایگزین  $\sum_{k=1}^4 d_k^2$  در معادله (۱۴) کرد. برای این کار چنانچه در معادله (۱۳) درایه‌های ماتریس  $A$  را با  $a_{ij}$  نشان داده و معادله مربوط به سطر  $k$  ام ( $k=1,2,\dots,2p$ ) را به صورت  $\sum_{i=1}^r a_{ki} x_i = b_k$  بنویسیم آن گاه معادله (۱۴) برای حالت کلی به

چنانچه سیستم واقعی خطی ولی با ساختار نامشخص باشد و داده‌ها نیز بدون نویز اندازه‌گیری باشند، آن‌گاه حل معادله (۲۲) بهترین تقریب تابع انتقال را (با درجه صورت و مخارج انتخاب شده برای سیستم) می‌دهد. در صورتی که داده‌ها دارای نویز باشند، از روش زیر می‌توان برای کاهش اثر نویز استفاده کرد.

### ۳-۲- روشی برای کاهش اثر نویز

حل معادله (۲۲)، ضرایب تابع انتقالی را می‌دهد که گرچه پاسخ فرکانسی آن از نزدیکی داده‌های نویزی مسئله می‌گذرد اما طیف نویزی آن لزوماً داده‌های مسئله را نمی‌پوشاند. برای کاهش نویز و به دست آوردن یک تابع انتقال قابل قبول برای سیستم واقعی، چنانچه دقت وسایل اندازه‌گیری (حسگرها) و در نتیجه حداکثر خطای نسبی آنها (e) مشخص باشد (یعنی یک نویز محدود)، آن‌گاه کرانه‌های زیر بر روی اندازه  $\psi(\omega) = |G(j\omega)|$  و فاز  $\vartheta(\omega) = \angle[G(j\omega)]$  بدون نویز سیستم به دست می‌آیند، شکل (۳):

$$\frac{\psi_N(\omega_i)}{1+e} \leq \psi(\omega_i) \leq \frac{\psi_N(\omega_i)}{1-e} \quad i=1,2,\dots,p \quad (23)$$

$$\frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1+e} \leq \vartheta(\omega_i) \leq \frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1-e} \quad i=1,2,\dots,p \quad (24)$$

که  $\psi_N(\omega) = |G(j\omega)|_N$  و  $\vartheta_N(\omega) = \angle[G(j\omega)]_N$  به ترتیب اندازه و فاز نویزی سیستم‌اند. چنانچه تخمین بردار  $x$  بر اساس معادله (۲۲) به نحوی باشد که  $J(x) = 0$  شود، در این صورت  $x$  یک جواب قابل قبول است زیرا صفر بودن اندازه  $J$  به معنای آن است که فوق صفحات در فضای ضرایب دارای نقطه تقاطع مشترک‌اند.

در عمل، با توجه به شکل (۲) و نیز مطالب ارائه شده در بخش قبل، برای تابع معیار  $J$  یک مقدار عددی مثبت به دست می‌آید. به منظور تعیین یک جواب از مجموعه جوابهای قابل قبول بایستی براساس روابط (۲۳) و (۲۴)، مقادیر  $\psi(\omega_i)$  و  $\vartheta(\omega_i)$  را به نحوی انتخاب کرد که  $J$  به سمت صفر میل کند. برای این منظور، داده‌های جدید را می‌توان با استفاده از معادله‌های زیر به صورت تصادفی<sup>۱۱</sup> انتخاب کرد:

$$\hat{\psi}(\omega_i) = \lambda_i \left[ \frac{\psi_N(\omega_i)}{1+e} \right] + (1-\lambda_i) \left[ \frac{\psi_N(\omega_i)}{1-e} \right] \quad (25)$$

$$i=1,2,\dots,p$$

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2p} \frac{(\Phi_k^T x - b_k)^2}{\Phi_k^T \Phi_k} \quad (16)$$

شرط لازم برای کمینه شدن تابع  $J(x)$  این است که  $\frac{\partial J}{\partial x_i} = 0$  به ازای  $i=1,2,\dots,r$  شود. در نتیجه، با محاسبه مشتقات جزئی  $J$  نسبت به  $x_i$ ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{(\Phi_k^T x - b_k)^2}{\Phi_k^T \Phi_k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(\Phi_k^T x - b_k) a_{ki}}{\Phi_k^T \Phi_k} = 0$$

$$i=1,2,\dots,r \quad (17)$$

حال با توجه به تساویهای زیر:

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} \Phi_k^T x}{\Phi_k^T \Phi_k} = \sum_{k=1}^{2p} \left( \frac{a_{ki}}{\Phi_k^T \Phi_k} \sum_{j=1}^r a_{kj} x_j \right) = \sum_{j=1}^r \left( x_j \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} a_{kj}}{\Phi_k^T \Phi_k} \right)$$

$$k=1,2,\dots,r \quad (18)$$

معادله (۱۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^r \left( x_j \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} a_{kj}}{\Phi_k^T \Phi_k} \right) - \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} b_k}{\Phi_k^T \Phi_k} = 0 \quad i=1,2,\dots,r \quad (19)$$

که با تعریف

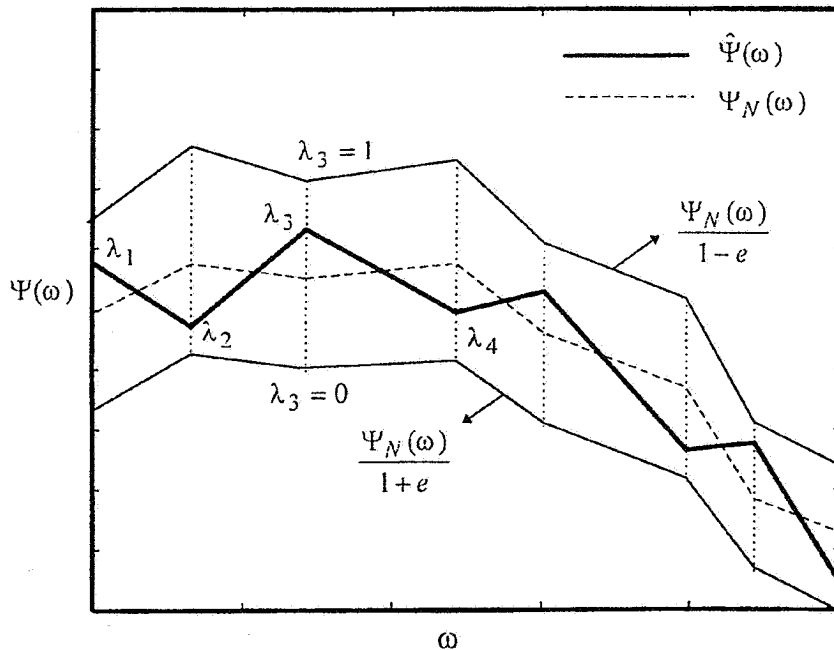
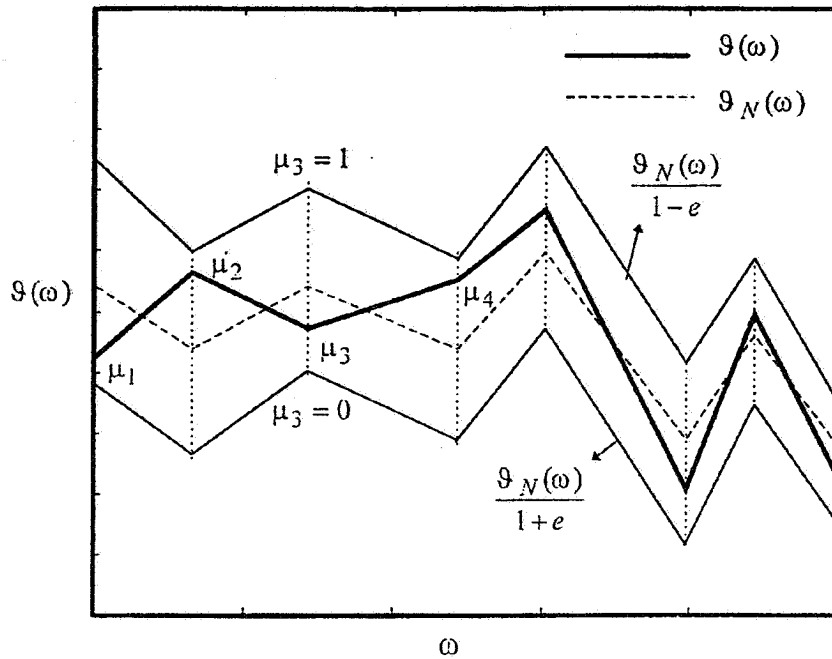
$$g_{ij} \triangleq \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} a_{kj}}{\Phi_k^T \Phi_k} \quad i,j=1,2,\dots,r \quad (20)$$

$$h_i \triangleq \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} b_k}{\Phi_k^T \Phi_k} \quad i=1,2,\dots,r \quad (21)$$

معادله (۱۹) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^r g_{ij} x_j = h_i \quad i=1,2,\dots,r \quad (22)$$

معادله اخیر تشکیل یک دستگاه  $r$  معادله  $r$  مجهول را می‌دهد که به سادگی قابل حل است. از حل این معادله، مختصات  $x_i$  مربوط به نقطه  $P$  در فضای ضرایب به دست می‌آید که کمترین مجموع مربعات فاصله را از فوق صفحه داراست. لازم به ذکر است که



شکل ۳- طیف نویزی داده‌های اندازه و فاز به همراه تابع انتقال واقعی سیستم

$[0,1]$  انتخاب می‌شوند. با جستجوی متوالی بر روی  $\lambda$  و  $\mu$  تعیین  $x$  بر مبنای حل معادله (۲۲) می‌توان تابع انتقالی را یافت که متعلق به مجموعه جوابهای قابل قبول برای داده‌های ورودی باشد. در اینجا، معیار قابل قبول بودن جواب، کاهش  $J$  و میل دادن آن به سمت صفر است.

خلاصه الگوریتم پیشنهادی برای کاهش اثر نویز و تعیین یکی از

$$\hat{\vartheta}(\omega_i) = \mu_i \left[ \frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1+e} \right] + (1-\mu_i) \left[ \frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1-e} \right] \quad (26)$$

$i=1,2,\dots,p$

که در این معادله‌ها،  $\hat{\psi}(\omega)$  و  $\hat{\vartheta}(\omega)$  مقادیر جدید اندازه و فاز و  $\lambda$  و  $\mu$  اعداد تصادفی اند که با تابع چگالی احتمال یکنواخت در فاصله



اعضای مجموعه جوابهای قابل قبول به صورت زیر است:

$$\vartheta(\omega_i) = \mu_i \left( \frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1+e} \right) + (1-\mu_i) \left( \frac{\vartheta_N(\omega_i)}{1-e} \right) \quad (30)$$

$i=1,2,\dots,p$

با مساوی قرار دادن  $\psi(\omega_i)$  با  $\psi_0(\omega_i)$  و  $\vartheta(\omega_i)$  با  $\vartheta_0(\omega_i)$  نتیجه می‌شود:

$$\lambda_i \left( \frac{1+e_i}{1+e} \right) + (1-\lambda_i) \left( \frac{1+e_i}{1+e} \right) = 1 \quad i=1,2,\dots,p \quad (31)$$

$$\mu_i \left( \frac{1+\hat{e}_i}{1+e} \right) + (1-\mu_i) \left( \frac{1+\hat{e}_i}{1+e} \right) = 1 \quad i=1,2,\dots,p \quad (32)$$

و یا

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1-e}{1+e_i} \right) \left( 1 + \frac{e_i}{e} \right) \quad i=1,2,\dots,p \quad (33)$$

$$\mu_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1-e}{1+\hat{e}_i} \right) \left( 1 + \frac{\hat{e}_i}{e} \right) \quad i=1,2,\dots,p \quad (34)$$

که با توجه به اینکه  $e$  حداکثر خطای نسبی است و  $|e_i|$  و  $|e|$  هر دو کوچکتر از یک هستند، می‌توان نتیجه گرفت که  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  و به طور مشابه  $0 \leq \mu_i \leq 1$  خواهد بود. لذا همواره به ازای  $0 \leq \lambda \leq 1$  و  $0 \leq \mu \leq 1$  می‌توان حداقل یک جواب واقعی بر مبنای معادله‌های (۲۵) و (۲۶) یافت. از طرف دیگر، انتخاب تصادفی  $\lambda$  و  $\mu$  در محدوده  $[0,1]$  با تابع چگالی احتمال یکنواخت انجام می‌شود، در نتیجه می‌توان انتظار داشت که با افزایش تعداد مراحل تکرار در مرحله ۵، پاسخ به سمت یکی از پاسخهای قابل قبول میل کند.

ب - کاهش اندازه تابع معیار  $J(x)$  لزوماً به معنای نزدیک شدن  $x$  به جواب خاص  $x_M$  نیست زیرا در اثر وجود نویز اندازه‌گیری به جای یک جواب منحصر به فرد با مجموعه‌ای از جوابهای قابل قبول مواجه‌ایم. به عبارت دیگر، در این الگوریتم با کاهش  $J$  به سمت صفر، پاسخ تقریبی  $x$  به سمت یکی از اعضای مجموعه جوابهای قابل قبول سوق داده می‌شود.

ج - تجربه عملی نشان می‌دهد که چنانچه پس از انجام چند مرحله از الگوریتم تکرار، سرعت تغییرات  $J$  کاهش یافت، می‌توان با کاهش اندازه  $e$  کرانه‌های جدیدی را با استفاده از بهترین  $\psi$  و  $\vartheta$  در هر مرحله از الگوریتم به دست آورد و انتخاب  $\psi$  و  $\vartheta$  جدید را بر مبنای این کرانه‌ها انجام داد. با این عمل، امکان انتخاب  $\psi$  و  $\vartheta$  حول بهترین جواب افزایش می‌یابد که در افزایش سرعت تنزل  $J$  مؤثر است. تنها

مرحله ۱- درجه صورت و مخرج تابع انتقال را انتخاب کنید.

مرحله ۲- با استفاده از اطلاعات پاسخ فرکانسی، معادله (۱۳) را تشکیل دهید.

مرحله ۳- با تعیین  $h_i \triangleq \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} b_k}{\Phi_k^T \Phi_k}$  و  $g_{ij} \triangleq \sum_{k=1}^{2p} \frac{a_{ki} a_{kj}}{\Phi_k^T \Phi_k}$  برای

$i, j=1,2,\dots,r$  دستگاه معادله (۲۲) را برای تعیین  $x$  حل کنید. در ضمن، مقدار  $J(x)$  را برای مقایسه با مراحل بعدی محاسبه کنید.

مرحله ۴- براساس حداکثر خطای نسبی  $e$  کرانه‌های (۲۳) و (۲۴) را تشکیل دهید.

مرحله ۵- نقاط تصادفی  $\psi(\omega_i)$  و  $\vartheta(\omega_i)$  را به ازای  $i=1,2,\dots,p$  برای  $\lambda_i, \mu_i \in [0,1]$  با استفاده از معادله‌های (۲۵) و (۲۶) تعیین و در

هر بار یکسری اندازه و فاز جدید به دست آورید. سپس بر مبنای این اطلاعات جدید، از معادله (۲۲) یک جواب جدید به دست آورید.

چنانچه پاسخ جدید دارای  $J(x)$  کمتری نسبت به مرحله قبل بود، آن را به عنوان یک پاسخ مناسبتر (نسبت به مرحله قبل) نگهداشته و مراحل بالا را برای انتخاب جدید  $\psi(\omega_i)$  و  $\vartheta(\omega_i)$  تکرار کنید.

مرحله ۶- مرحله ۵ را تا آنجا تکرار کنید که  $J(x)$  به دست آمده در مرحله ۵ به اندازه دلخواه کوچک شود. در این صورت می‌توان  $x$  به دست آمده را به عنوان تقریب مناسبی از یکی از اعضای مجموعه جوابهای قابل قبول در نظر گرفت.

در استفاده از الگوریتم بالا نکات زیر را باید مدنظر قرار داد:

الف - می‌توان نشان داد که الگوریتم بالا به سمت یک عضو از مجموعه جوابهای قابل قبول سیستم، همگرا خواهد بود. برای این کار، با فرض اینکه  $\psi_0(\omega_i)$  و  $\vartheta_0(\omega_i)$  به ازای  $i=1,2,\dots,p$  مقادیر اندازه و فاز یکی از جوابهای قابل قبول باشند، داریم:

$$\psi_N(\omega_i) = \psi_0(\omega_i) + e_i \psi_0(\omega_i) \quad i=1,2,\dots,p \quad (27)$$

$$\vartheta_N(\omega_i) = \vartheta_0(\omega_i) + \hat{e}_i \vartheta_0(\omega_i) \quad i=1,2,\dots,p \quad (28)$$

که در آن  $e_i$  و  $\hat{e}_i$  اعدادی در محدوده  $[-e, e]$  هستند که  $e$  حداکثر خطای نسبی اندازه‌گیری است. فرض کنید که  $\psi(\omega_i)$  و  $\vartheta(\omega_i)$  انتخاب شده در مرحله ۵ به صورت زیر باشند:

$$\psi(\omega_i) = \lambda_i \left( \frac{\psi_N(\omega_i)}{1+e} \right) + (1-\lambda_i) \left( \frac{\psi_N(\omega_i)}{1-e} \right) \quad (29)$$

$i=1,2,\dots,p$

نکته‌ای که باید مورد توجه قرار داد آن است که کرانه‌های جدید به دست آمده زیر مجموعه‌ای از کرانه‌های اولیه باشند و در غیر این صورت باید با آن کرانه‌ها جایگزین شوند.

د - این الگوریتم با تغییر درایه‌های ماتریس  $A$  و بردار  $b$  در معادله  $Ax=b$  در محدوده مجازی که توسط حداکثر خطای نسبی اندازه‌گیری مشخص می‌شود، سعی در تبدیل آنها به ماتریس  $A_1$  و بردار  $b_1$  دارد به نحوی که دستگاه معادله‌های  $A_1x=b_1$  سازگار شود. چنانچه سیستم واقعی کاملاً خطی باشد و درجه صورت و مخرج تابع انتقال سیستم نیز از قبل معلوم باشد، آن گاه ناسازگار بودن دستگاه معادله  $Ax=b$  تنها در اثر وجود نویز اندازه‌گیری است و در این صورت الگوریتم فوق عمل کاهش نویز را انجام می‌دهد. ولی چنانچه اطلاعاتی از مدل سیستم موجود نباشد و یا سیستم کاملاً خطی نباشد، در این صورت الگوریتم فوق بهترین تقریب خطی با درجه مفروض را ارائه می‌دهد، زیرا با تغییر اندازه و فاز در محدوده مجازی که توسط خطای اندازه‌گیری مشخص می‌شود، نزدیکترین مقادیر اندازه و فاز را به مدل واقعی تعیین کرده و نزدیکترین پاسخ را به آن پاسخ فرکانسی مشخص می‌کند.

ه - در مورد انتخاب محدوده فرکانس نیز بایستی به چند نکته توجه کرد. اولاً آنکه حداکثر فرکانسی که اندازه‌گیری در آن انجام می‌شود  $(\omega_p)$  از ده برابر پهنای باند فرکانسی سیستم کمتر نباشد. به عنوان مثال، برای یک سیستم هیدرولیکی که معمولاً دارای پهنای باند حدود یک هرتز است،  $\omega_p$  بایستی حداقل برابر با  $20\pi$  رادیان بر ثانیه باشد. دوم آنکه هر چه تعداد فرکانسهای انتخابی بیشتر باشد، کارایی الگوریتم در کاهش نویز بیشتر می‌شود، زیرا هر چه تعداد فرکانسها کمتر باشد احتمال یافتن تابع انتقالی که پاسخ فرکانسی آن از داده‌های (نویزی) مسئله بگذرد بیشتر می‌شود، که طبیعتاً با پاسخ واقعی سیستم (بدون نویز) تفاوت دارد و سوم آنکه پیشنهاد می‌شود که فرکانسها در فواصل لگاریتمی یکسان انتخاب شوند تا بتوانند محدوده وسیعی از فرکانسها را پوشش دهند.

و - در بخش ۴ با ارائه دو مثال نشان داده خواهد شد که امکان استفاده از این روش برای شناسایی سیستمهای ناپایدار و / یا غیر کمینه فاز وجود دارد. همچنین همان گونه که قبلاً ذکر شد، برای سیستمهای خطی دارای نامعینی پارامتری نیز می‌توان به راحتی از این روش استفاده کرد. تنها در مورد سیستمهای غیرخطی با توجه به

این که اساساً پاسخ فرکانسی و تابع انتقال مربوط به سیستمهای خطی‌اند، این روش کارایی نداشته و فقط به ارائه مناسبترین تقریب خطی برای سیستم غیرخطی می‌پردازد.

ز - تفاوت اساسی این روش با سایر روشهای شناسایی موجود در آن است که تابع معیار مورد استفاده در این روش دارای یک تعبیر هندسی مناسب است که امکان ایجاد تغییر در داده‌های مسئله را برای کاهش اثر نویز فراهم می‌سازد. در حالی که در سایر روشهای شناسایی، اساس کار بر نزدیک کردن پاسخ به داده‌های اندازه‌گیری شده (که شامل نویز است) قرار دارد.

#### ۴- مثال

فرض کنید که تابع انتقال واقعی یک سیستم به صورت زیر باشد

$$G(s) = \frac{5(s+0.8)}{s^2 + 0.8s + 4} = \frac{5(s+0.8)}{s+0.4 \pm j1.96} \quad (35)$$

پاسخ فرکانسی سیستم بالا را برای ۲۰ فرکانس که با فاصله لگاریتمی مساوی در بازه  $[0.001, 10]$  رادیان بر ثانیه قرار دارند، به دست آورده و از آن به عنوان داده‌های بدون نویز استفاده می‌کنیم، جدول (۱). نتایج حاصل از حل معادله (۲۲) برای درجات مختلف صورت و مخرج در جدول (۲) داده شده‌اند. با توجه به این جدول مشخص می‌شود که چنانچه درجات انتخابی صحیح باشند، جواب دقیق حاصل می‌شود. ضمناً چنانچه درجات بالاتری انتخاب شود به نحوی که اختلاف درجه صورت و مخرج همچنان صحیح انتخاب شده باشد، تعدادی صفر و قطب اضافی به دست می‌آید که دقیقاً یکدیگر را حذف می‌کنند (سطر دوم جدول ۲). پاسخ فرکانسی جوابها در این دو حالت در شکل (۴) آورده شده است. و بالاخره چنانچه درجات انتخابی نامناسب باشند، جواب حاصل غیردقیق خواهد بود، (سطر سوم جدول ۲ و نیز شکل ۵).

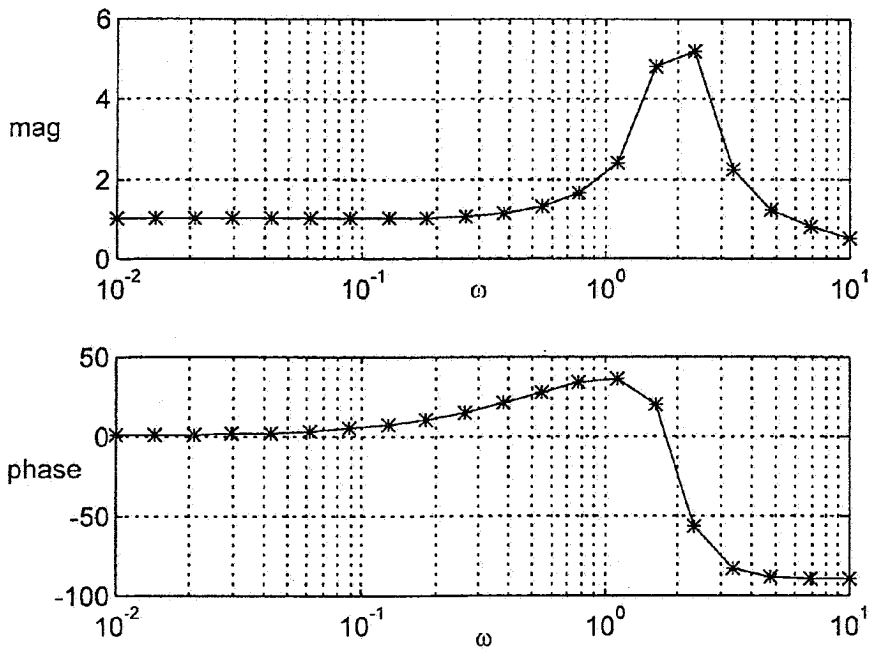
حال داده‌های مسئله را با نویزی با حداکثر خطای نسبی  $\pm 5\%$  آورده می‌سازیم، دو ستون آخر جدول (۱). نتایج حاصل از کاربرد الگوریتم پیشنهادی برای درجات مختلف صورت و مخرج در جدول (۳) داده شده‌اند. با توجه به این جدول مشخص می‌شود که چنانچه درجات انتخابی صحیح باشند، جوابی حاصل می‌شود که طیف نویزی پاسخ فرکانسی آن داده‌های مسئله را کاملاً می‌پوشاند،

جدول ۱- داده‌های مسئله

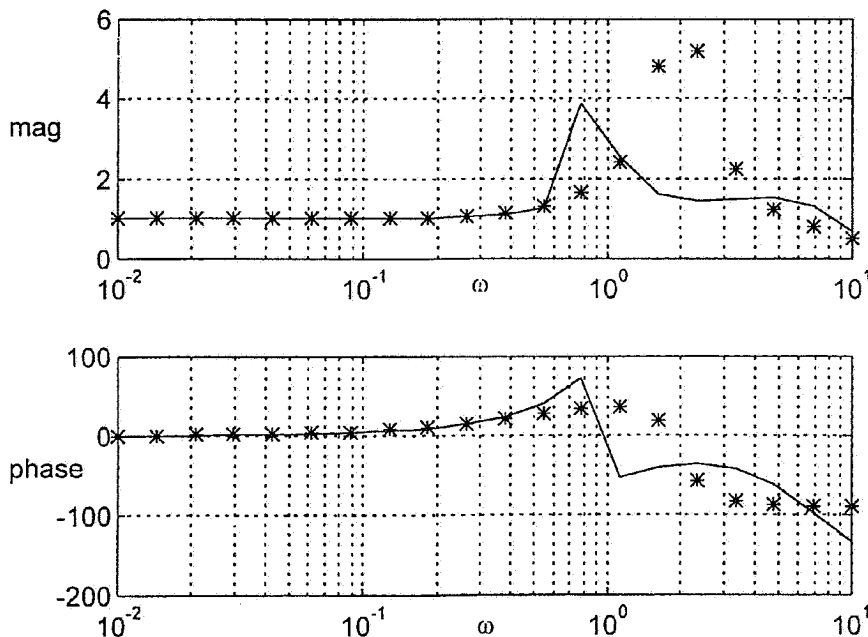
پاسخ فرکانسی بدون نویز		پاسخ فرکانسی نویزدار		فرکانس
اندازه $\Psi(\omega)$	فاز $\vartheta(\omega)$	اندازه $\Psi_N(\omega)$	فاز $\vartheta_N(\omega)$	$\omega$
1.0001e+000	6.0157e-001	9.9882e-001	5.8419e-001	1.0000e-002
1.0002e+000	8.6526e-001	9.9705e-001	8.6451e-001	1.4384e-002
1.0004e+000	1.2445e+000	9.5053e-001	1.2528e+000	2.0691e-002
1.0009e+000	1.7895e+000	9.9652e-001	1.7252e+000	2.9764e-002
1.0019e+000	2.5725e+000	9.7271e-001	2.4554e+000	4.2813e-002
1.0038e+000	3.6957e+000	1.0507e+000	3.7289e+000	6.1585e-002
1.0079e+000	5.3018e+000	9.9471e-001	5.4038e+000	8.8587e-002
1.0164e-000	7.5845e+000	1.0362e+000	7.3355e+000	1.2743e-001
1.0339e+000	1.0788e+001	1.0611e+000	1.0639e+001	1.8330e-001
1.0700e+000	1.5169e+001	1.0525e+000	1.4643e+001	2.6367e-001
1.1444e+000	2.0866e+001	1.1378e+000	2.0296e+001	3.7927e-001
1.2987e+000	2.7569e+001	1.3343e+000	2.7511e+001	5.4556e-001
1.6280e+000	3.3939e+001	1.6937e+000	3.5392e+001	7.8476e-001
2.4092e+000	3.6344e+001	2.3827e+000	3.5159e+001	1.1288e+000
4.8062e+000	2.0156e+001	4.9200e+000	2.0656e+001	1.6238e+000
5.2118e+000	-5.6825e+001	5.4635e+000	-5.4760e+001	2.3357e+000
2.2230e+000	-8.3150e+001	2.1562e+000	-8.6038e+001	3.3598e+000
1.2408e+000	-8.8104e+001	1.2884e+000	-8.7105e+001	4.8329e+000
7.8316e-001	-8.9414e+001	7.5789e-001	-8.9332e+001	6.9519e+000
5.2069e-001	-8.9810e+001	5.1622e-001	-8.8761e+001	1.0000e+001

جدول ۲- نتایج برای سیستم  $\frac{5(s+0.8)}{(s+0.4 \pm j1.95)}$  در حالت داده‌های بدون نویز

تابع انتقال به دست آمده	درجه صورت و مخرج
$\frac{5s + 4}{s^2 + 0.8s + 4} = \frac{5(s + 0.8)}{(s + 0.4 \pm j1.95)}$	$m=1, n=2$
$\frac{5s^2 - 10.95s - 11.96}{s^3 - 2.19s^2 + 1.6s - 11.96} = \frac{5(s + 0.8)(s - 2.99)}{(s + 0.4 \pm j1.96)(s - 2.99)}$	$m=2, n=3$
$\frac{58s^2 + 37.7s + 36.6}{s^4 + 6.55s^3 + 46.9s^2 + 6.85s + 35.8} = \frac{58(s + 0.32 \pm j0.72)}{(s + 0.02 \pm j0.88)(s + 3.25 \pm j5.93)}$	$m=2, n=4$



شکل ۴- پاسخ فرکانسی برای  $n=2$  و  $m=1$  و نیز  $n=3$  و  $m=2$  در حالت داده‌های بدون نویز



شکل ۵- پاسخ فرکانسی برای  $n=4$  و  $m=2$  در حالت داده‌های بدون نویز

کارایی روش پیشنهادی در مورد سیستم‌های غیرکمیته فاز و یا ناپایدار هنگامی که داده‌ها نویزی هستند، از جدول (۴) مشخص می‌شود. پاسخ فرکانسی جوابها همراه با طیف نویزی آنها در شکل‌های (۷) و (۸) داده شده‌اند که معلوم می‌سازند که جوابهای به دست آمده قابل قبول‌اند.

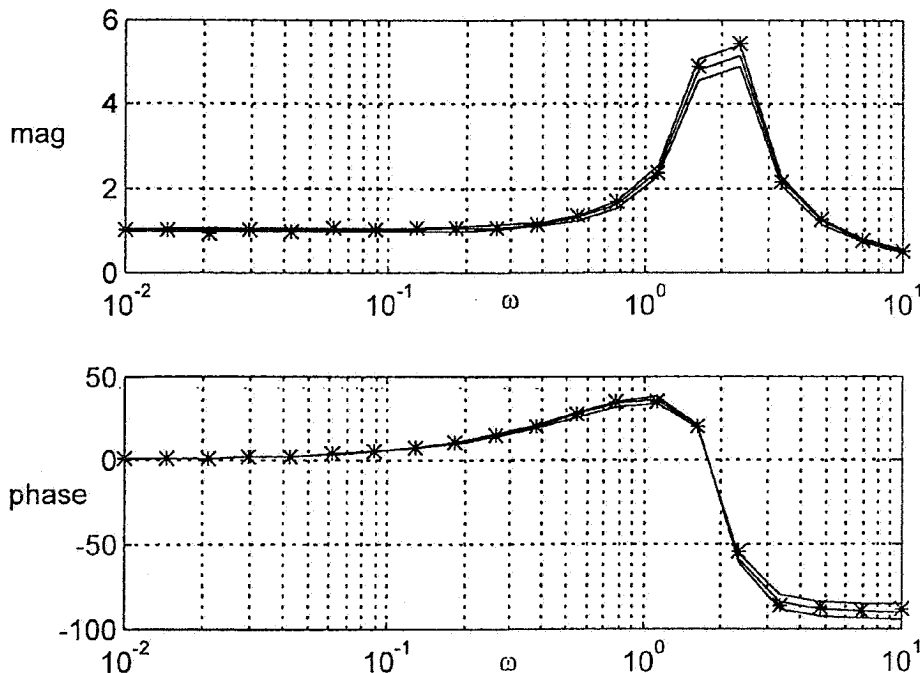
شکل (۶). و باز هم چنانچه درجات بالاتری انتخاب شود به نحوی که اختلاف درجه صورت و مخرج همچنان صحیح انتخاب شده باشد، تعدادی صفر و قطب اضافی به دست می‌آید که دقیقاً یکدیگر را حذف می‌کنند و نتیجه نهایی آن قابل قبول است (کاملاً شبیه به شکل ۶). و بالاخره چنانچه درجات انتخابی نامناسب باشند، جواب حاصل غیردقیق خواهد بود (سطر سوم جدول ۳).

جدول ۳- نتایج برای سیستم  $\frac{5(s+0.8)}{(s+0.4 \pm j1.95)}$  در حالت داده‌های نویزی

درجه صورت و مخرج	تابع انتقال به دست آمده
$m=1, n=2$	$\frac{4.9s + 3.98}{s^2 + 0.78s + 3.97} = \frac{4.9(s + 0.81)}{(s + 0.39 \pm j1.95)}$
$m=2, n=3$	$\frac{4.98s^2 + 2.46s - 1.19}{s^3 + 0.5s^2 + 3.76s - 1.19} = \frac{4.98(s + 0.79)(s - 0.3)}{(s + 0.4 \pm j1.96)(s - 0.299)}$
$m=2, n=4$	$\frac{-507s^2 - 274.2s + 110.6}{s^4 - 102.7s^3 + 44.5s^2 - 389.3s + 110.6} = \frac{-507(s + 0.32 \pm j0.72)}{(s + 0.37 \pm j1.96)(s - 0.27)(s - 103.2)}$

جدول ۴- نتایج برای سیستم‌های غیرکمینه فاز و یا ناپایدار در حالت داده‌های نویزی

نوع سیستم و درجه صورت و مخرج	تابع انتقال نمونه برداری شده (با نویز)	تابع انتقال به دست آمده
$m=1, n=2$ سیستم غیرکمینه فاز	$\frac{-5(s+0.8)}{(s+0.4 \pm j1.96)}$	$\frac{-5.11(s+0.78)}{(s+0.38 \pm j1.97)}$
$m=1, n=2$ سیستم ناپایدار	$\frac{5(s+0.8)}{(s-0.4 \pm j1.95)}$	$\frac{5.05(s+0.808)}{(s-0.38 \pm j1.96)}$



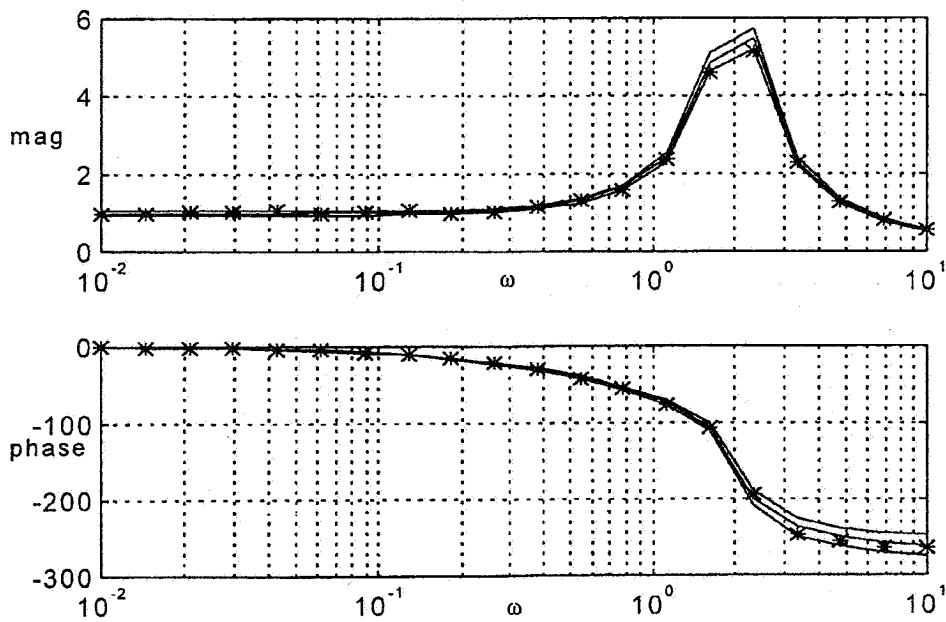
شکل ۶- پاسخ فرکانسی (با طیف نویز آن) برای  $m=1$  و  $n=2$  و نیز  $m=2$  و  $n=3$  در حالت داده‌های نویزی

حالت برای بررسی اثر وجود مودهای فرکانس بالا، سیستم زیر را (۳۶)

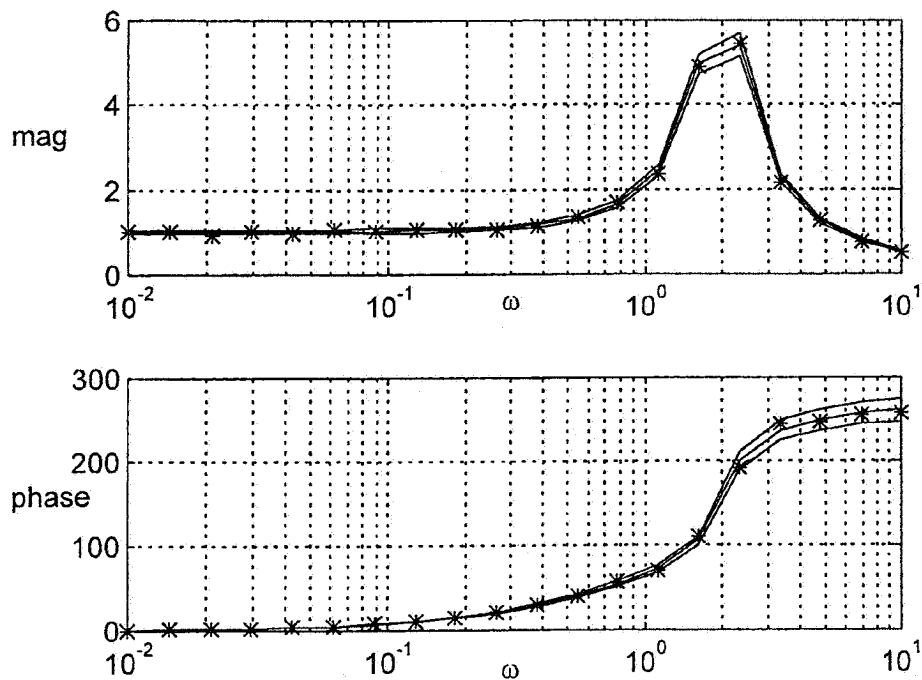
در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{5(s+0.8)}{s^2 + 0.8s + 4} \times \frac{2500}{s^2 + 30s + 2500} =$$

$$\frac{5(s+0.8)}{s + 0.4 \pm j1.96} \times \frac{2500}{s^2 + 15 \pm j47.7}$$



شکل ۷- پاسخ فرکانسی (با طیف نویزی آن) برای سیستم غیر کمینه فاز با داده‌های نویزی



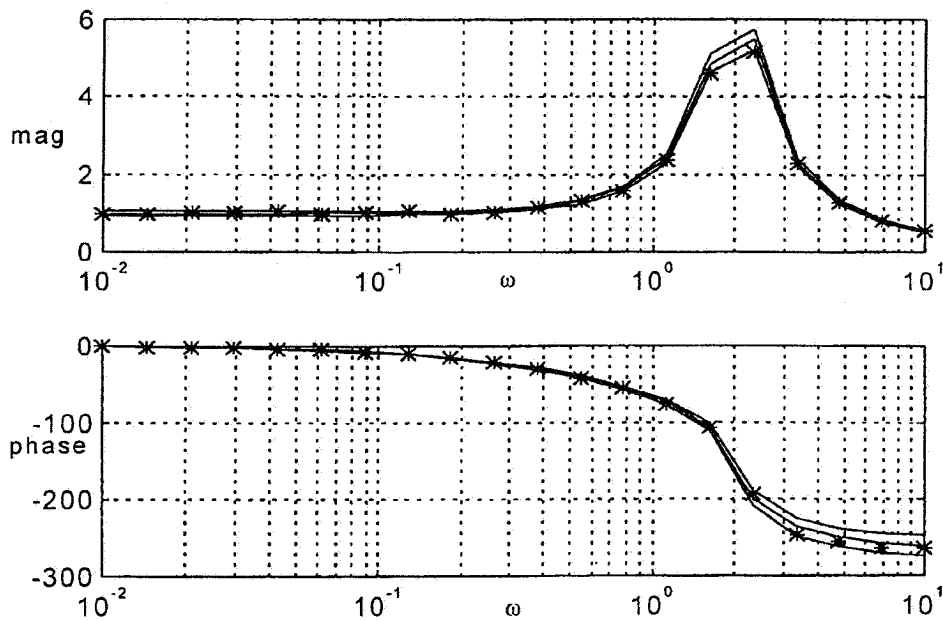
شکل ۸- پاسخ فرکانسی (با طیف نویزی آن) برای سیستم ناپایدار با داده‌های نویزی

شناسایی کنیم جواب غیردقیق حاصل می‌شود (سطر دوم جدول ۵) زیرا فرکانس طبیعی مود اضافی 50 rad/sec است که خارج از محدوده فرکانس نمونه برداری است. اما چنانچه محدوده فرکانس نمونه برداری را به [0.001, 1000] رادیان بر ثانیه افزایش دهیم، کلیه مودها شناسایی شده و جواب قابل قبول حاصل می‌شود (سطر

که کسر اول را می‌توان مودهای مورد نظر برای شناسایی و کسر دوم را مودهای فرکانس بالا در نظر گرفت. نتیجه کاربرد الگوریتم برای حالت‌های مختلف، بدین شرح است. چنانچه فقط بخواهیم دو مود اول را شناسایی کنیم، یک جواب قابل قبول به دست می‌آید (سطر اول جدول ۵ و شکل ۹). اما چنانچه بخواهیم تمامی مودها را

جدول ۵- نتایج برای سیستم  $\frac{12500(s+0.8)}{(s+0.4 \pm j1.95)(s+15 \pm j47.7)}$  در حالت داده‌های نویزی

محدوده فرکانس	درجه صورت و مخرج	تابع انتقال به دست آمده
$\omega \in [0.01, 10]$	$m=1, n=2$	$\frac{4.92(s+0.84)}{(s+0.33 \pm j1.99)}$
$\omega \in [0.01, 10]$	$m=1, n=4$	$\frac{77.07(s+0.94)}{(s+2.69 \pm j5.34)(s-0.07 \pm j1.43)}$
$\omega \in [0.01, 1000]$	$m=1, n=2$	$\frac{1.72(s+12.67)}{(s-13.48)(s-1.31)}$
$\omega \in [0.01, 1000]$	$m=1, n=4$	$\frac{12644(s+0.79)}{(s+0.37 \pm j1.98)(s+18.4 \pm j46.05)}$



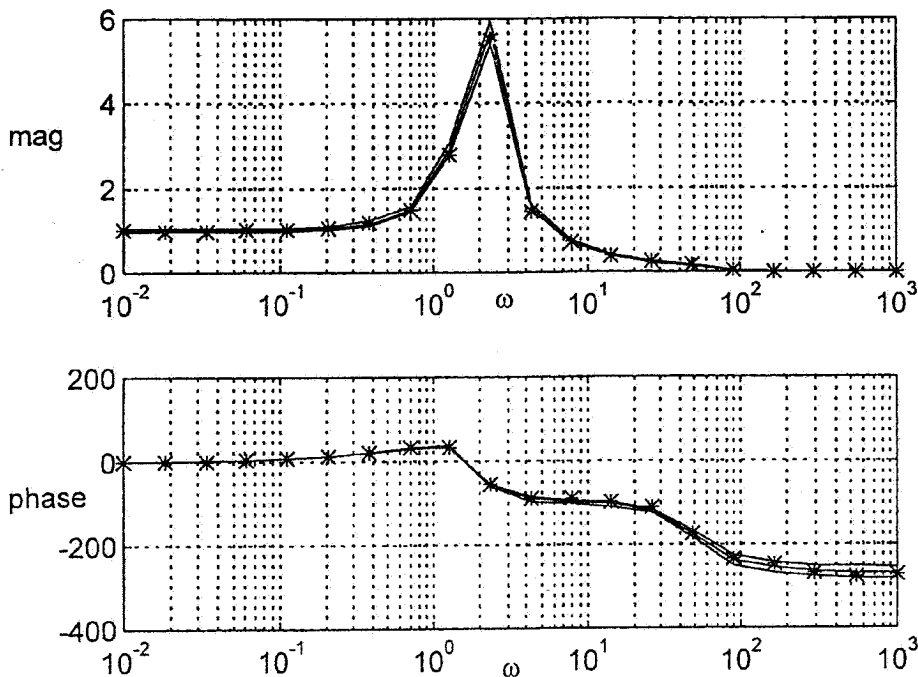
شکل ۹- پاسخ فرکانسی (با طیف نویزی آن) برای سیستم با مود فرکانس بالا و داده‌های نویزی ( $n=2, m=1$ )

سیستم (مقادیر اندازه و فاز در تعداد محدودی از فرکانس)، یک دستگاه معادله‌های خطی تشکیل می‌شود که چنانچه داده‌ها بدون خطا (نویز اندازه‌گیری) باشند و درجه صورت و مخرج تابع انتقال سیستم از پیش معلوم باشد، یک جواب دقیق و منحصر به فرد حاصل می‌شود. در غیر این صورت، با تعریف یک تابع هزینه جدید تحت عنوان کمترین مجموع مربعات فاصله در فضای ضرایب (LSD) و کمینه کردن آن، می‌توان برای هر درجه صورت و مخرج دلخواه، تابع انتقال قابل قبولی را ارائه کرد. در حالتی که داده‌ها دارای نویز اندازه‌گیری (از نوع محدود) باشند، مسئله دارای

چهارم جدول ۵ و شکل ۱۰). حال آنکه برای شناسایی تنها دو مود اول جواب غیردقیق به دست می‌آید (سطر سوم جدول ۵). علت آن است که مودهای فرکانس بالا در محدوده فرکانس جدید نمونه‌برداری قرار دارند.

#### ۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

الگوریتم جدیدی برای شناسایی سیستمهای خطی (اعم از پایدار یا ناپایدار و کمینه فاز یا غیر کمینه فاز) براساس پاسخ فرکانسی آنها ارائه شد. در این روش، ابتدا با داشتن پاسخ فرکانسی



شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی (با طیف نویزی آن) برای سیستم با مود فرکانس بالا و داده‌های نویزی ( $n=4, m=1$ )

از تکنیک برنامه‌نویسی پویا، الگوریتمی ارائه شد که با آن می‌توان اثر نویز داده‌ها را کاهش داد، به طوری که در هر مرحله، تابع انتقال به دست آمده به سمت یکی از توابع انتقال قابل قبول برای سیستم واقعی (بدون نویز) رانده می‌شود. کارایی این روش نیز با استفاده از چند مثال نشان داده شد.

یک مجموعه جوابهای قابل قبول برای سیستم واقعی (بدون نویز) می‌شود. هر کدام از این توابع انتقال قابل قبول دارای یک پاسخ فرکانسی است که طیف نویزی آن داده‌های مسئله را کاملاً می‌پوشاند. برای یافتن یکی از این جوابها، نخست با کمینه کردن تابع هزینه LSD یک تابع انتقال اولیه یافت می‌شود که پاسخ فرکانسی آن به نحو بهینه‌ای از بین داده‌ها می‌گذرد. سپس با استفاده

#### واژه نامه

1. identification
2. dynamic programming
3. continuous-time state-space differential equations
4. discrete-time state-space difference equations
5. curve fitting
6. least squares error
7. Chebyshev
8. maximum likelihood
9. least squares distance
10. hyper-plane
11. random

#### مراجع

1. Bai, E. W., and Raman, S., "A Linear Interpolatory Algorithm for Robust System Identification with Corrupted Measurement Data," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 38, No. 8, pp. 1236- 1241, 1993.
2. Bayard, D. S., and You, Y., *Frequency Domain Identification*, Springer Verlag, 1994.
3. Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, 1945.
4. Dailey, R. L., and Lukich, M. S., "MIMO Transfer Function Curve Fitting Using Chebyshev Polynomials," *SIAM 35th Anniv. Meet.*, Denver, Co, 1987.
5. Gu, G., and Misra, P., "Identification of Linear



- Time-Invariant Systems from Frequency Response Data Corrupted by Bounded Noise," *IEE Proc.*, Part D, Vol. 139, No. 2, pp. 135-140, 1992.
6. Guillaume, P., Pintelon, R., and Schoukens, J., "Robust Parametric Transfer Function Estimation Using Complex Logarithmic Frequency Response Data," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 40, No. 7, pp. 1180-1190, 1995.
  7. Levi, E. C., "Complex Curve Fitting," *IRE Trans. on Auto. Cont.*, Vol. 4, pp. 37-44, 1959.
  8. Ljung, L., *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, 1987.
  9. McKelvey, T., Akcay, H., and Ljung, L., "Subspaced-Based Multivariable System Identification from Frequency Response Data," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 41, No. 7, pp. 960-976, 1996.
  10. Milanese, M., and Norton, J., *Bounding Approach to System Identification*, Plenum Press, NW., 1996.
  11. Norton, J. P., *An Introduction to Identification*, Academic Press, NY., 1986.
  12. Partington, J. R., *Interpolation, Identification and Sampling*, Oxford Univ. Press, 1997.
  13. Pintelon, R., Guillaume, P., and Schoukens, J., "Measurement of Noise (cross) Power Spectra for Frequency Domain System Identification Purposes: Large Scale Results," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, Vol. 45, No. 1, pp. 12-21, 1996.
  14. Pintelon R., and Schoukens, J., "Robust Identification of Transfer Functions in the s- and z-Domains," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 39, No. 4, pp. 565-573, 1990.
  15. Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., Schoukens, J., and Van Hamme, H., "Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency Domain - A Survey," *IEEE Trans. Auto Cont.*, Vol. 39, No.11, pp. 2245-2260, 1994.
  16. Rolain, Y., "Generating Starting Values for Frequency Domain Transfer Function Estimation," *IFAC World Conf.*, San Fransisco, CA, Vol. J, pp. 173-177, 1996.
  17. Rolain, Y., Pintelon, R., Xu, K. Q., and Vold, H., "Best Conditioned Parametric Identification of Transfer Function Models in the Frequency Domain," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 40, No. 11, pp. 1954-1960, 1995.
  18. Sanathanan, C. K., and Koerner, J., "Transfer Function Synthesis as a Ratio of Two Complex Polynomials," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 8, pp. 56-58, 1963.
  19. Soderstrom, T., and Stoica, P., *System Identification*, Prentice Hall, NJ., 1989.
  20. Sorenson, H. W., *Parameter Estimation: Principles and Problems*, Marcel Dekker, NY., 1980.
  21. Spanos, J. T., and Mingori, D. L., "Newtonian Algorithms for Fitting Transfer Functions to Frequency Response Measurements," *AIAA Jour. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 1, pp. 34-39, 1993.
  22. Whitfield, A. H., "Asymptotic Behavior of Transfer Function Synthesis Methods," *Int'l Jour. of Control*, Vol. 45, pp. 1083-1092, 1987.