

## تعیین تحلیلی عددنوسلت دردهانه ورودی مجاری

سعید مرتضوی - علی صفررستمی

دانشگاه صنعتی امپدین - دانشکده مکانیک

### مقدمه

مبدل‌های حرارتی عموماً "از تعدادی مجاری جریان تشکیل میشوند که سیال در داخل آنها حرکت میکند. و در واقع ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت جابجایی در طول مجرای جریان تغییر میکنند. ولی طراحان مبدل‌های حرارتی معمولاً "از یک ضریب متوسط استفاده میکنند. در مواردی که نسبت طول مجرا به قطر هیدرولیکی آن بزرگ باشد میتوان جریان را از لحاظ هیدرودینامیکی و حرارتی توسعه یافته فرض نمود و از یک ضریب انتقال حرارت ثابت استفاده نمود. اما چنانچه این نسبت کوچک باشد، تغییرات ضریب انتقال حرارت در طول مجرا بایستی در نظر گرفته شود و خطای ناشی از چشم پوشی از این تغییرات گاهی اوقات قابل ملاحظه خواهد بود. ضمناً "در مبدل‌های حرارتی فشرده (Compact) در بسیاری از موارد بواسطه کوچکی قطر هیدرولیکی مجرا، جریان آرام خواهد بود.

مسئله انتقال حرارت جابجایی برای جریان آرام در دهانه ورودی مجاری با توجه به نوع جریان از نظر توسعه یافته و یا در حال توسعه بودن توسط بسیاری از محققین بطرق مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده شده که خواص فیزیکی سیال، بویژه عدد پرناندل ( $Pr$ ) در شدایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی در دهانه ورودی تاثیر دارد. برای توضیح این مطلب سیالی با عدد پرناندل ( $Pr$ ) نسبتاً زیاد را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه برای این نوع سیال دیفیوژن منتهوم بسیار بیشتر از دیفیوژن حرارت میباشد، سیال از نظر هیدرودینامیکی نسبت به حرارتی در دهانه ورودی بسیار سریع تر توسعه یافته خواهد شد. و توزیع سرعت شکل ثابتی را اختیار خواهد نمود. و بنابراین برای این نوع سیال در قسمت اعظم مجرا، جریان از لحاظ

هیدرودینا میکی توسعه یافته خواهد بود و میتوان اثر جزئی ابتدایی دهانه ورودی را صرف نظر نمود. این نوع جریان (جریان در حال توسعه حرارتی و توسعه یافته هیدرودینا میکی) اولین بار توسط گراتز (Graetz) در سال ۱۸۸۳ برای دهانه ورودی لوله بررسی شده است و به مسئله گراتز معروف است. وی از روش جدا کردن متغیرها (Separation of Variables) برای حل معادله انرژی استفاده کرد. نتیجه بدست آمده بصورت یک سری نامحدود که شامل مقادیر بردارهای مشخصه و ثابتهای میباشند ظاهر میشود. با این روش مسئله فوق برای دهانه ورودی لوله، دو صفحه موازی، مجاری یا مقطع مثلثی و بیضوی و جریان بین دو لوله هم محور حل شده است. [۱]

کاربرد عملی این مسئله در مبدلهای حرارتی مثل کندانسورها و اواپراتورها برای سیالهایی با عدد پیراندل حدوداً "بزرگتر از ۵" میباشد.

اشکال عمده حل سری نامحدود که با این روش بدست میآیند، عدم همگرایی آن در فواصل نزدیک به دهانه ورودی است. مثلاً در  $10^{-4} < x^*$  تعداداً "۱۲۰" جمله از سری مذکور دقت مناسب را بدست نمیدهد. [۱]

برای جریان نارسائی مذکور، لوک (Leveque) حل تقریبی را بروش تشابهی (Similarity Solution) ارائه نموده، که در فواصل نزدیک به دهانه یعنی حدودی که سری گراتز همگرایی لازم را ندارد، جواب بسیار مناسبی را بدست میدهد. [۲].

برای جریان سیالانی با عدد پیراندل حدودی که ویا بیشتر (ونه خیلی زیاد) مثل هوا مسئله قدری پیچیده تر است. در این حالت دیگر فرض توزیع سرعت توسعه یافته مناسب نیست. به عبارت دیگر در دهانه

ورودی مجرا گسترش همزمان سرعت و درجه حرارت وجود دارد و لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی همزمان در حال رشد هستند (Simultaneously Developing Flow). برای حل این مسئله میبایست معادلات دیفرانسیل منتهوم و انرژی را در دهانه ورودی توأماً حل نمود. عبارتی دیگر برای حل معادله انرژی در دهانه ورودی احتیاج به توزیع سرعت در دهانه ورودی است که خود از حل معادله منتهوم در دهانه ورودی بدست می آید.

برای حل معادله منتهوم در دهانه ورودی روشهای متفاوتی وجود دارد. در روش انتگرالی که از معادلات انتگرالی منتهوم و پیوستگی استفاده میشود، توزیع سرعت در لایه مرزی بوسیله یک چند جمله‌ای که تابعی از ضخامت لایه مرزی ( $\delta$ ) میباشد، حدس زده میشود. همچنین از معادله برنولی در روی محور لوله که جریان غیرلزج است استفاده میشود. این روش اولین بار بوسیله Schiller [۳] برای جریان داخل لوله و دو صفحه موازی مورد استفاده قرار گرفت. روش دیگر که به روش خطی کردن معادلات منتهوم است، این است که جمله مربوط به اینرسی در معادله دیفرانسیل منتهوم که غیر خطی است بصورت یک تابعی اختیاری در نظر گرفته میشود که به این ترتیب معادله دیفرانسیل منتهوم بفرم خطی تبدیل میشود.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \beta(x) u^2$$

که در آن  $\beta$  تابعی از  $x$  است. این معادله با شرایط مرزی و اولیه مشخص حل شده و  $\frac{u}{U}$  بصورت تابعی از  $y$  و  $\beta$  بدست می آید. سپس  $\beta$  بصورت ذیل محاسبه میگردد: (a) معادله منتهوم و پیوستگی روی سطح مقطع جریان انتگرال گرفته شده و در هم ادغام میشوند. (b) معادله منتهوم را روی محور لوله نوشته و از (a) کم میکنیم که در نتیجه جمله گرادیان فشار حذف میگردد. (c) با قرار دادن پروفیل سرعت بدست آمده از حل معادله بسبباً رابطه‌ای بین  $\beta$  و  $x$  بدست می آید و نهایتاً "افت فشار از معادله منتهوم روی محور لوله محاسبه میگردد".

این روش اولین باریوسیله Langhaar بکاربرده شده است، [۴]. Sparrow نیز معادله منتوم را به ترتیب زیرخطی نموده است، [۴]:

$$\varepsilon(x) \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda(x) + v \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\}$$

که در آن  $\Lambda(x)$  مربوط به جمله  $g_c \frac{dp}{dx} / \rho$  و جمله دیگر اینرسی است. او گرادیان فشار را از معادله منتوم و معادله انرژی مکانیکی برابر قرار داده و  $\varepsilon(x)$  را از این طریق محاسبه کرده است. این روش خطی کردن برای مجازی که پروفیل سرعت فقط بستگی به یک متغیر دارد مثل لوله، دو صفحه موازی و یا جریان بین دو لوله یکا رزفته است برای حل معادله انرژی دزدهانه و رودی برای جریان در حال توسعه همزمان با توجه به خطی که برای مسئله هیدرودینامیکی دردهانه ورودی در نظر گرفته میشود، از روشهای نیمه عددی و یا کاملاً عددی استفاده شده است. کیز (Kays) که از روش نیمه عددی برای حل معادله انرژی استفاده کرده، توزیع سرعتی را که با استفاده از روی خطی کردن معادله منتوم که توسط Langhaar [۴] بدست آمده در معادله انرژی بکاربرده و سپس توزیع درجه حرارت را از حل معادله انرژی به روش عددی محاسبه کرده است. وی که این عمل را برای سیال با عدد پراتدل  $Pr=0.7$  انجام داده است، [۵]، مولفه سرعت شعاعی را در دهانه ورودی در نظر گرفته است که در نتیجه عدد نوسلت بدست آمده از این روش دارای تقریب اضافی نسبت به روشهای دقیق تر خواهد بود. Goldberg، حل کیز را برای اعداد پراتدل از  $0.5$  تا  $5$  توسعه داده است که نتایج آن در مرجع [۶] موجود میباشد.

Schmitz و Ulrichson حل کیز را با در نظر گرفتن توزیع سرعت محوری بوسیله Langhaar و همچنین مولفه سرعت شعاعی بدست آمده از معادله پیوستگی تکمیل نمودند، [۷]. حل مذکور برای جریان در حال توسعه همزمان به روش Finite Difference برای عدد پراتدل  $0.7$  بدست آمده است. اثر مولفه شعاعی سرعت که در حل کیز در نظر گرفته نشده، فقط در محدوده  $0.04 < x^* < 0.4$  ظاهر میگردد. در این محدوده عدد

نوسلت موضعی بدست آمده توسط آنان کمتر از مقدار بدست آمده توسط کیز می باشد .

در روش کا ملا " عددی توزیع سرعت و درجه حرارت هر دو از خل عددی معادلات ممنثوم و انرژی بدست می آیند . مسئله حرارتی دهانه ورودی با این روش بوسیله Hornbeck [۸] برای لوله و همچنین بوسیله Hwang و Fan [۹] برای دو صفحه موازی حل شده است . نتایج بدست آمده تا کنون برای این نوع جریان به روشهای فوق بصورت نتایج عددی و یا بصورت منحنی بوده و هیچگونه رابطه تحلیلی که مشخصاً عددنوسلت را در دهانه ورودی بصورت تابعی از مختصات محوری مجرا و خواص سیال پیش بینی کند ، بدست نمیدهد .

در بررسی حاضر ، گسترش همزمان پروفیل سرعت و درجه حرارت در دهانه ورودی جریان بین دو صفحه موازی برای سیال غیر قابل تراکم با خواص فیزیکی ثابت با عدد پیراندل حدود یک و یا بزرگتر از یک مطالعه شده است . روش حل Leveque که برای فواصل نسبتاً کم از دهانه ورودی مناسب می باشد ، برای جریان در حال توسعه همزمان تکمیل شده و سپس رابطه تحلیلی برای عددنوسلت موضعی و عددنوسلت متوسط برای این نوع جریان بدست آمده است . نتیجه بدست آمده برای عددنوسلت به این روش ، تا ناحیه ای که توزیع سرعت توسعه یافته میشود حتی بعد از آن نتیجه نسبتاً دقیقی برای عددنوسلت ارائه میدهد .

همچنین نتیجه بدست آمده برای جریان داخل لوله نیز قابل استفاده خواهد بود ، و با توجه به فرضیات بکار رفته در روش Leveque یعنی صرف نظر کردن از انحنای در فواصل نزدیک به دهانه ، میتوان با تقریب نسبتاً خوب ضریب انتقال حرارت در دهانه ورودی را نیز پیش بینی نمود .

## تجزیه تحلیل

(a) جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی دردهانه ورودی:

همانطور که قبلاً اشاره شد برای  $x^* < 10^{-4}$  تعداد ۱۲۱ جمله از سری گراتزنیز جواب مناسبی برای عدد نوسلت بدست نمیدهد. Leveque در مرجع [۴] این مسئله را با استفاده از تقریب دو صفحه موازی دردهانه ورودی حل نموده است.

Leveque فرض نمود در فواصل خیلی نزدیک به نقطه ای که شرط مرزی حرارتی اعمال میگردد، چون ضخامت لایه مرزی حرارتی بسیار کم است، توزیع سرعت در داخل لایه مرزی حرارتی خطی است. بعبارت دیگر:

$$u = Cy$$

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \mu C$$

$$C = \tau_w / \mu \quad u = \frac{\tau_w}{\mu} y$$

با توجه به پیروقیل سرعت توسعه یافته، تنش برشی و در نتیجه C مقادیر ثابتی هستند. در نتیجه معادله انرژی بصورت زیر درمیآید:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left( \frac{C}{\alpha} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

معادله فوق به روش خطی تشابهی قابل حل است. برای اینکه شرایط روش حل تشابهی ارضاء شود، بایستی یکی از ابعاد سمت بینهایت میل کند. این شرط باین ترتیب اعمال میشود که در فواصل دور از سطح درجه حرارت سیال به درجه حرارت سیال ورودی میرسد. بنابراین شرط تقارن در روی محور عجزا به  $T = T_i$  ناحیه دور از دیواره تبدیل میشود. با این فرضیات Leveque حل زیر را برای دهانه ورودی لوله بدست

آورد:

$$\theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_i} = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\eta \exp(-\sigma^3) d\sigma, \quad \eta = y \left( \frac{C}{9\alpha x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

در رابطه فوق  $\eta$  متغیر تشابه و  $\delta$  یک متغیر dummy است. ما نند حل سری گراتز، جواب Leveque نیز برای توزیع درجه حرارت و عددنوسلت بصورت تابعی از کمیت بدون بعد  $x^*$  بدست میاید. Mcrcer - Worsøe - Schmidt [۱۰]، Newman [۱۱]، حل Leveque را برای مقادیر متوسط (نه خیلی کم)  $x^*$  یعنی حدودی که نه حل گراتز و نه حل Leveque صحیح است، تکمیل نمودند. حل تکمیل شده Leveque

$$\theta(\zeta, \eta) = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \sum_{n=0}^N \zeta^n \theta_n(\eta), \quad \zeta = \left( \frac{9x^*}{y} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\eta = y \left( \frac{C}{9\alpha x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

معادله قبلی در حل Leveque جمله اول این سری است.

(b) جریان در حال توسعه حرارتی و هیپرو دینامیک (Simultaneously Developing Flow):

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که از  $v$  در معادله انرژی صرف نظر شود. در حل (a) پروفیل سرعت توسعه یافته در نظر گرفته شده ولی در اینجا تنش برشی را تابعی از  $x$  در نظر میگیریم و با این عمل در واقع پروفیل سرعت را در حال توسعه فرض میکنیم:

$$u = \frac{\tau_\omega(x)}{\mu} y$$

با اینحال از مولفه سرعت در جهت  $y$  در معادله دیفرانسیل انرژی صرف نظر میکنیم در نتیجه:

$$\frac{\tau_\omega(x)}{\mu\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

با انتخاب متغیر جدید  $s$  به ترتیب زیر فرم معادله انرژی به حالت (a) تبدیل میشود:

$$ds = \frac{\mu \alpha}{\tau_w(x)} dx, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

که از حل این معادله به روش تشابهی توزیع درجه حرارت و عددنوسلت بدست میآید:

$$\theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_1} = \frac{1}{0.893} \int_0^\omega \exp(-\omega^3) d\omega, \quad \omega = \frac{y}{(9s)^{\frac{1}{3}}}$$

$$Nu_x = \frac{x}{0.893} \left( \frac{1}{9s} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = \mu \alpha \int_0^x \frac{dx}{\tau_w(x)}$$

بنابراین با داشتن توزیع تنش برش از هیدرودینامیک مسئله در دهانه ورودی میتوان عددنوسلت را محاسبه نمود.

عددنوسلت در این حالت برخلاف حالت (a) بصورت تابعی از دو متغیر  $x^*$  و عدد پیراندل  $Pr$  بدست میآید. و بنابراین عدد پیراندل  $Pr$  مستقلاً در جواب مسئله اهمیت پیدا میکند. اصولاً برای جریان در حال توسعه همزمان حرارتی و هیدرودینامیکی عددنوسلت تابعی از  $x^*$  و  $Pr$  هر دو میباشد.

(c) جریان در حال توسعه حرارتی و هیدرودینامیکی با فرض  $v \neq 0$  در فواصل نزدیک به دهانه:

این بخش شامل حل نسبتاً "دقیق" معادله انرژی برای جریان سیال آرام، غیر قابل تراکم، خواص فیزیکی ثابت بین دو صفحه موازی میباشد. که البته با صرف نظر کردن از انحنای در فواصل نزدیک به دهانه با تقریب نسبتاً "خوب" برای لوله نیز صادق خواهد بود. در واقع هدف اصلی پیدا کردن عددنوسلت در جریان در حال توسعه همزمان در دهانه ورودی با استفاده از این روش که مولفه سرعت در جهت  $y$  نیز



در معادله انرژی منظور میشود، میباشد. از هدایت طولی و تلفات اصطکاکی، کار جریان و تولید انرژی حرارتی در سیال نیز صرف نظر میشود.

تنها تقریبی که در این بخش بکار برده میشود، خطی گرفتن پروفیل سرعت در فواصل نزدیک به دهانه است. این تقریب با توجه به بررسی‌هایی که روی نتایج بخش (a) و (b) انجام شده است بستنار مناسب است.

Worsøe - Schmidt [۱۵] حل Leveque را با در نظر گرفتن انحنای پروفیل سرعت سهمی تکمیل نموده‌اند. در حالی که Nunge [۱۱] همین کار را با در نظر گرفتن انحنای پروفیل سرعت خطی انجام داده است و نشان داده است تقریب پروفیل سرعت خطی در نزدیکی دیواره بسیار بجا و مناسب است.

معادلات انرژی و پیوستگی برای جریان در حال توسعه همزمان با در نظر گرفتن فرضیات گذشته عبارت است از:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

این معادلات را می‌توان به شکلی تبدیل نمود که بتوان آنرا با روش حل تشابهی حل کرد، (مانند بخش‌های a و b). به همین منظور از تبدیل ون مایز (Von Mises Transformation)، [۱۲] استفاده میشود. در این تبدیل از متغیر  $\psi$  تابع جریان به جای مختصات  $y$  در معادله انرژی استفاده میشود. با بکار بردن این تبدیل  $(x, y \rightarrow x, \psi)$  معادله انرژی بصورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial \psi} & u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} = u \frac{\partial}{\partial \psi} & v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial \psi} \left( u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \quad (2)$$

فرم معادله (۲) شبیه معادله انرژی بدست آمده از روش های (a) و (b) است. با توجه به فرض خطی بودن پروفیل سرعت و با استفاده از معادله پیوستگی  $u$  را بصورت تابعی از تنش برش و  $\psi$  بدست آورده و در رابطه (۲) جایگزین نموده که نهایتاً "معادله زیر حاصل میگردد" [۱۲]:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi^2 \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \quad (3)$$

$$ds = \alpha \left( \frac{2 \tau_{\omega}(x)}{\mu} \right) \frac{1}{2} dx$$

معادله (۳) به روش تشابهی قابل حل است و با انتخاب متغیر تشابه مناسب تبدیل به معادله دیفرانسیل عادی میشود:

$$\eta = \psi \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (4)$$

شرایط مرزی برای معادله (۴) عبارتند از:

$$y=0 \quad , \quad T=T_0 \quad ( \psi=0 \quad , \quad \eta=0 )$$

$$y \rightarrow \infty \quad , \quad T=T_i \quad ( \psi \rightarrow \infty \quad , \quad \eta \rightarrow \infty )$$

$$x=0 \quad , \quad T=T_i \quad ( s=0 \quad , \quad \eta \rightarrow \infty )$$

معادله (۴) با شرایط مرزی فوق قابل حل است. توزیع درجه حرارت بصورت زیر حاصل میشود:

$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = \frac{1}{0.893} \int_0^{\eta} \exp\left(-\frac{3}{\eta}\right) d\eta \quad , \quad \eta = \psi^2 \left( \frac{4}{9s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\psi = \frac{\tau_{\omega}(x)}{\mu} \frac{y^2}{2}$$

$$ds = \alpha \left( \frac{2 \tau_{\omega}(x)}{\mu} \right) \frac{1}{2} dx$$

عددنوسلت موضعی ( $Nu_2$ ) را میتوان با توجه به تعریف و با داشتن توزیع درجه حرارت محاسبه نمود:

$$Nu_2 = \frac{-(\partial T / \partial y)_{y=0}}{T_0 - T_i} d, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{T_i - T_0}{0.893} \left(\frac{\tau_w(x)}{2\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{95}\right)^{\frac{1}{3}}$$

که پس از جایگزازی و خلاصه نمودن:

$$Nu_2 = \frac{d \tau_w^{\frac{1}{2}}(x)}{0.893(9\alpha\mu \int_0^x \tau_w(x)^{\frac{1}{2}} dx)^{\frac{1}{3}}} \quad (5)$$

همانطور که دیده میشود، عددنوسلت موضعی بصورت تابعی از تنش برشی بدست آمده است. با داشتن توزیع تنش برشی از حل مسئله هیدرودینامیکی دردهانه ورودی عددنوسلت موضعی مشخصاً "بصورت تابعی از  $x^*$  و عدد پراوندل دردهانه ورودی بدست خواهد آمد.

با انجام موازنه انرژی درجه حرارت متوسط و از آنجا که عددنوسلت موضعی  $Nu_1$  و همچنین عددنوسلت متوسط  $Nu_{1m}$  و  $Nu_{2m}$  محاسبه میشوند، [۵]:

$$\theta_m = 1 - 4 \int_0^{x^*} Nu_2 dx^* \quad (6)$$

$$Nu_1 = \frac{Nu_2}{\theta_m} \quad (7)$$

$$Nu_{2m} = \frac{1}{4x^*} (1 - \theta_m) \quad (8)$$

$$Nu_{1m} = \frac{1}{4x^*} \ln\left(\frac{1}{\theta_m}\right) \quad (9)$$

(d) تنش برشی برای جریان بین دو صفحه موازی:

عددنوسلت در حل اخیر تابعی از تنش برشی دردهانه ورودی است. بنابراین برای بدست آوردن جواب تحلیلی برای عددنوسلت باید

توزیع مناسب برای تنش برشی داشته باشیم که از طرفی از سادگی کافی برخوردار بوده و قابل انتگرال گیری باشد، (چون در رابطه عددنوسلت به انتگرال تنش برشی نیاز است) و از طرف دیگر دقت لازم را نیز دارا باشد. تا جواب مناسبی برای عددنوسلت بدست آید، چون هرچه توزیع تنش برشی دقیقتر باشد، عددنوسلت نیز دقیقتر خواهد بود. این مسئله بعداً "با اعمال توزیع تنش های برشی مختلف روشن خواهد شد.

برای حل مسئله هیدرودینامیکی دردهانه ورودی از روش انتگرالی با بکاربردن معادلات انتگرالی ممنتوم و پیوستگی استفاده میشود. مزیت این روش این است که رابطه تحلیلی و مناسب با دقت خوب برای تنش برشی در دیواره از آن نتیجه میشود. روشهای دیگر مثل خطی کردن معادلات یا روشهای عددی دارای نتیجه تحلیلی برای توزیع سرعت و تنش برشی نیستند.

معادلات انتگرالی ممنتوم و پیوستگی را میتوان با انتخاب حجم معیار دیفرانسیلی در لایه مرزی روی یک سطح و یا با انتگرال گرفتن از معادلات دیفرانسیل لایه مرزی بدست آورد. نتیجه معادله ممنتوم بصورت زیر میباشد:

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d}{dx} (U_1^2 \delta_2) + \delta_1 U_1 \frac{dU_1}{dx} \quad (12a)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{U}{U_1} \left( 1 - \frac{U}{U_1} \right) dy \quad (12b)$$

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{U}{U_1} \right) dy \quad (12c)$$

رابطه دیگری نیز از بقای جرم بین  $U_1$ ،  $\delta$ ،  $\bar{U}$  با گرفتن حجم معیاری دردهانه ورودی بدست میآید:

$$\bar{U}a = \int_0^{\delta} u dy + U_1(a - \delta) \quad (12)$$

$$a \left( 1 - \frac{\bar{U}}{U_1} \right) - \delta_1 = 0$$

سیس برطبق روش Karman - Pohlhausen توزیع سرعت را در داخل لایه مرزی بوسیله یک چندجمله‌ای از  $y$  (مثلاً "درجه دوم یا سوم") که دارای ضرایبی که تابعی از  $x$  هستند بدست می‌آوریم، و ضرایب آنرا با اعمال شرایط مرزی در دیواره مجرا و مرز لایه و معادلات (۱۲) و (۱۳) بدست می‌آوریم. رابطه ساده و معمولی که غالباً "برای توزیع سرعت در لایه مرزی استفاده می‌شود پروفیل سرعت درجه دوم است:

$$u = U_1 \left\{ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right\} \quad 0 < y < \delta \quad (14)$$

که شرایط مرزی زیر را ارضاء میکند:

$$\begin{cases} u=0 & , & y=0 \\ u=U_1 & & y=\delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & & y=\delta \end{cases}$$

اما یک شرط مرزی را که از معادله دیفرانسیل ممنتموم روی دیواره حاصل می‌شود، ارضاء نمی‌کند:

$$\left( y=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

با قراردادن توزیع سرعت از معادله (۱۴) در معادلات (۱۲) و (۱۳) نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{3} \quad \delta_2 = \frac{2}{15} \delta$$

$$(12a) \quad 2\nu \frac{U_1}{\delta} = U_1^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{15} \delta \right) + \frac{2}{15} \delta \left( \frac{9}{2} \right) U_1 \frac{dU_1}{dx}$$

$$(13) \quad \frac{\delta}{a} = 3 \left( 1 - \frac{\bar{U}}{U_1} \right)$$

و نهایتاً "در معادله (۱۲) به جای  $\delta$  از معادله (۱۳) قرار داده می‌شود:

$$dx = \frac{3}{10} \frac{a^2}{\nu} \frac{(U_1 - \bar{U})(9U_1 - 7\bar{U})}{U_1^2} dU_1 \quad (15)$$

فرم بدون بعد معادله (۱۵) عبارت است از:

$$dx^+ = \frac{3}{160} \frac{(U_1^* - 1)(9U_1^* - 7)}{U_1^{*2}} dU_1^* \quad (16)$$

برای جریان توسعه یافته  $U_1^* = 1.5$  (چون  $U_1 = 1.5\bar{U}$ ) است. بایستی متذکر شد که حل حاضر برای تغییرات سرعت بطوریکه نواخت و آرام بسمت پروفیل سرعت توسعه یافته میل نمیکند، زیرا وقتی  $U_1^*$  به سمت ۱.۵ میل میکند،  $\frac{dU_1^*}{dx}$  به سمت صفر میل نمیکند، در فواصل نزدیک به دهانه میتوان از تقریب زیر در معادله (۱۶) استفاده کرد:

$$U_1^{*2} \approx 1, \quad 9U_1^* - 7 \approx 2.$$

$$U_1^* - 1 = \sqrt{\frac{160x^+}{3}} \quad (17)$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله (۱۶) رابطه بین  $x^+$  و  $U_1^*$  بدست می آید:

$$x^+ = \frac{3}{160} (9U_1^* - 16 \ln U_1^* - \frac{7}{U_1^*} - 2) \quad (18)$$

تنش برشی با داشتن پروفیل سرعت و رابطه بین  $\delta$  و  $U_1^*$  بصورت تابعی از  $U_1^*$  محاسبه میشود:

$$\tau_\omega = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 2\mu \frac{U_1}{\delta}, \quad (12) \rightarrow \delta = 3a(1 - \frac{\bar{U}}{U_1}) = 3a(1 - \frac{1}{U_1^*})$$

$$\tau_\omega = \frac{2\mu U_1}{3a(1 - \frac{1}{U_1^*})}, \quad \tau_\omega = \frac{2\mu \bar{U}}{3a} \frac{U_1^{*2}}{(U_1^* - 1)} \quad (19)$$

برای بدست آوردن توزیع تنش برشی بر حسب  $x^+$  میبایست  $U_1^*$  را برابر

حسب  $x^+$  بدست آوریم. اما با توجه به معادله (۱۸) این کار امکان پذیر نیست. بنا بر این معادلات زیر مجموعاً "توزیع تنش برشی را در دهانه ورودی بر حسب  $x^+$  ارائه میدهند:

$$\tau_{\omega} = \frac{2\mu\bar{U}}{3a} \frac{U_1^{*2}}{U_1^* - 1} \quad (20)$$

$$x^+ = \frac{3}{160} \left( 9U_1^* - 16\ln U_1^* - \frac{7}{U_1^*} - 2 \right)$$

ولی اگر از معادله (۱۷) یعنی حل تقریبی برای  $U_1^*$  استفاده شود تنش برشی مستقیماً "بصورت تابعی از  $x^+$  بدست میآید:

$$\tau_{\omega} = \frac{2\mu\bar{U}}{3a} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{160}{3} x^+}\right)^2}{\sqrt{\frac{160}{3} x^+}} \quad (21)$$

که البته این توزیع تنش برشی دقت معادله (۲۰) را دارا نیست:

(e) عددنوسلت برای جریان بین دو صفحه موازی:

رابطه بدست آمده برای عددنوسلت در بخش (c) یعنی معادله (۵) تابع حساسی از تنش برشی بوده و دقت آن بستگی به رابطه توزیع تنش برشی در دهانه ورودی دارد. بنا بر این با توجه به روابط بدست آمده برای توزیع تنش برشی در دهانه ورودی یعنی معادلات (۲۰) و (۲۱)، عددنوسلت مربوطه را محاسبه نموده و سپس با نتایج بدست آمده از روشهای عددی و یا روشهای دیگر که دیگران بدست آورده اند و نتایج آنها بصورت منحنی رسم شده است، مقایسه مینمایم. تابع توزیع تنش برشی از معادله (۲۱) عبارت است:

$$\tau_{\omega} = \frac{8 \mu \bar{U}}{3d} \frac{(1 + \sqrt{\frac{160}{3} x} + 2)}{\sqrt{\frac{160}{3} x} + 1}$$

عددنوسلت بدست آمده با استفاده از معادله (۵) :

$$Nu_2 = 0.242 \frac{(1 + \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{x} \frac{1}{2})}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{2} \frac{1}{x} \frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}} x^* \frac{-1}{2} \frac{-1}{Pr} \frac{-1}{6} \quad (22)$$

همانطور که از معادله (۲۲) دیده میشود عددنوسلت مشخصاً بصورت تابعی از  $x^*$  و عدد پیراندل بدست آمده است. معادله دیگر برای توزیع تنش برشی رابطه (۲۰) است. اگرچه دقت این رابطه از رابطه قبلی یعنی (۲۱) بیشتر است، اما در این معادله تنش برشی تابعی از  $U_1^*$  است و عددنوسلت نیز بصورت تابعی از  $U_1^*$  بدست میآید. که البته رابطه بین  $U_1^*$  و  $x^+$  مشخص و معلوم است. ابتدا انتگرال زیر را که در رابطه عددنوسلت لازم است، محاسبه میکنیم:

$$I = \int_0^x \tau_{\omega} \frac{1}{2} (x) dx = d \cdot Re \int_0^{U_1^*} \tau_{\omega}(U_1^*) \frac{1}{2} \frac{dx}{dU_1^*} dU_1^*$$

$$\tau_{\omega} = \frac{8 \mu \bar{U}}{3a} \frac{U_1^{*2}}{U_1^* - 1}$$

$$I = d \cdot Re \sqrt{\frac{8 \mu \bar{U}}{3d}} \frac{3}{160} \{ 6(U_1^* - 1)^{\frac{3}{2}} - 14(U_1^* - 1)^{\frac{1}{2}} + 14 \tan^{-1} \sqrt{U_1^* - 1} \}$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله (۵) و خلاصه نمودن، نتیجه نهایی



برای عددنوسلت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$Nu_2 = 2.23 \frac{U_1^* Pr \frac{1}{3}}{(U_1^*-1)^{\frac{1}{2}} \{ 3(U_1^*-1)^{\frac{3}{2}} - 7(U_1^*-1)^{\frac{1}{2}} + 7 \tan^{-1} \sqrt{U_1^*-1} \}^{\frac{1}{3}}}$$

$$x^* = \frac{3}{160 Pr} (9U_1^* - 16 \ln U_1^* - \frac{7}{U_1^*} - 2) \quad (22)$$

معادله (۲۳) با دقت بسیار خوب عددنوسلت را در دهانه ورودی برای جریان در حال توسعه همزمان بدست می‌دهد. اما همانطور که دیده می‌شود، عددنوسلت مستقیماً "بصورت تابعی از  $x^*$  و  $Pr$  بدست نیامده است. این معادله در واقع دقیقترین رابطه تحلیلی برای عددنوسلت با استفاده از روش بخش (c) می‌باشد. برای اینکه عددنوسلت را در معادله (۲۳) بصورت تابعی از  $x^*$  و  $Pr$  بدست آوریم میتوان در نتیجه نهائی برای عددنوسلت که بر حسب تابعی از  $U_1^*$  بدست آمده از رابطه تقریبی (۱۷) استفاده کرد:

$$U_1^* - 1 = \sqrt{\frac{160x^*}{3}} = \sqrt{\frac{160 x^* Pr}{3}}$$

با قرار دادن این رابطه به جای  $U_1^*$  در معادله (۲۳) داریم:

$$Nu_2 = 2.23 \frac{(1 + \xi)^{\frac{1}{3}} Pr \frac{1}{3}}{\xi \{ 3\xi^3 - 7\xi + 7 \tan^{-1} \xi \}^{\frac{1}{3}}}, \quad \xi = \left( \frac{160x^* Pr}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (24)$$

اختلاف در معادله (۲۳) و (۲۴) این است که در معادله (۲۳) از ابتدا رابطه تنش برشی را با معادله (۱۷) تقریب زدیم، ولی در معادله (۲۴) بعد از انتگرال گیری از تنش برشی و در نتیجه نهائی برای عددنوسلت این تقریب را بکار بردیم. معادله (۲۴) از طرفی دارای دقت بسیار خوب است (تقریباً "نزدیک به معادله (۲۳) و از طرفی نین...

عددنوسلت مستقیماً "بصورت تابعی از  $x^*$  و  $Pr$  بدست آمده است. بنا براین نسبت به معادله (۲۳) ارجحیت دارد.

(f) محاسبه  $\theta_m$  و عددنوسلت متوسط :

برای محاسبه عددنوسلت متوسط، ابتدا باید  $\theta_m$  را از معادله (۶) بدست آوریم. انتگرال گیری از عددنوسلت موضعی بجز در مورد معادله (۲۲) بطریق تحلیلی امکان پذیر نیست. بنا براین در مورد معادله (۲۲) با انتگرال گرفتن از آن و محاسبه  $\theta_m$  میتوان برای عددنوسلت متوسط نیز نتیجه تحلیلی بدست آورد. که در واقع نتیجه تحلیلی برای عددنوسلت متوسط بزرگترین مزیت این رابطه نسبت به روابط دیگر است. و البته دقت خوبی را نیز دارا میباشند. در مورد معادله (۲۴) بایستی  $\theta_m$  را با انتگرال گیری عددی از آن بدست آورد.

برای محاسبه  $\theta_m$  از معادله (۲۲) داریم :

$$Nu_2 = 0.242 \frac{(1 + \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^* \frac{1}{2} Pr^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} Pr^{-\frac{1}{6}}}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x^* \frac{1}{2} Pr^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} \quad (22)$$

یا :

$$Nu_2 = \left(\frac{160}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{0.893} \left(\frac{8}{3 \times 36}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1+g) Pr^{\frac{1}{3}}}{g \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} g\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$g = \left(\frac{160}{3} x^* Pr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_m = 1 - 4 \int_0^{x^*} Nu_2 dx^*$$

بعد از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\theta_m = 1 - \frac{3}{20} \left( \frac{160}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{5}{.893} \right) \left( \frac{8}{3 \times 36} \right)^{\frac{1}{3}} Pr^{-\frac{2}{3}} \left\{ 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} g \right)^{\frac{5}{3}} - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} g \right)^{\frac{2}{3}} \right\}$$

یا

$$\theta_m = 1 - 1.3276944 Pr^{-\frac{2}{3}} \{ 3t^5 - t^2 \} \quad (25)$$

که در آن

$$t = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \left( \frac{160}{3} x^* Pr^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

در نتیجه

$$Nu_{1m} = \frac{1}{4x^*} \ln \{ 1 - 1.3276944 Pr^{-\frac{2}{3}} (3t^5 - t^2) \}^{-1} \quad (26a)$$

$$Nu_{2m} = \frac{1}{4x^*} \{ 1.3276944 Pr^{-\frac{2}{3}} (3t^5 - t^2) \} \quad (26b)$$

$$t = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \left( \frac{160}{3} x^* Pr \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

نکته قابل توجه در معادلات (۲۵) و (۲۶) این است که چون در فواصل نزدیک به دهانه مقدار  $\theta_m$  بسیار نزدیک به یک می باشد و از طرفی عدد نوسلت متوسط تابع بسیار حساسی از  $\theta_m$  است ، لذا در محاسبه عدد نوسلت متوسط از معادله (۲۶) ،  $\theta_m$  را میبایست با دقت بسیار زیاد محاسبه نمود .

مراتب فوق را عیناً " میتوان برای پروفیل سرعت درجه سوم به جای پروفیل درجه دو برای توزیع تنش برشی که از حل هیدرودینامیک مسئله بدست می آید تکسرا نمود :

$$u = U_1 \left\{ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right\}$$

در این حالت نیز یکی از شرایط مرزی که از معادله دیفرانسیل ممنتوم روی دیواره حاصل میشود، ارضاء نمیشود. نتیجه حاصله برای عددنوسلت موضعی و متوسط با در نظر گرفتن توزیع سرعت درجه سوم عبارت است از:

$$Nu_2 = 4.7999 \frac{(1+f^4) Pr^{\frac{1}{3}}}{f \left( \frac{122}{3} f^3 - 96f + 96 \tan^{-1} f \right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{و} \quad f = \left( \frac{630}{13} x^* Pr \right)^{\frac{1}{4}} \quad (29)$$

$$\theta_m = 1 - 0.3461043 Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2 (1+f^2) df}{\left( \frac{61}{144} f^3 - f + \tan^{-1} f \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (20)$$

$$Nu_{1m} = \frac{1}{4x^*} \ln \left\{ 1 - 0.3461043 Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2 (1+f^2) df}{\left( \frac{61}{144} f^3 - f + \tan^{-1} f \right)^{\frac{1}{3}}} \right\}^{-1} \quad (21a)$$

$$Nu_{2m} = \frac{1}{4x^*} \left\{ 0.3461043 Pr^{-\frac{2}{3}} \int_0^f \frac{f^2 (1+f^2) df}{\left( \frac{61}{144} f^3 - f + \tan^{-1} f \right)^{\frac{1}{3}}} \right\} \quad (21b)$$

بحث و نتیجه گیری :

عددنوسلت متوسط برای دو صفحه موازی  $(Nu_{1m})$  با استفاده از معادله (۲۶) که بهترین نتیجه را بدست میدهد و بصورت رابطه

تحلیلی می‌باشد. برای اعداد پیراندل 0.7, 10, 50 بصورت تابعی از  $x^*$  در شکل‌های ۱۰ و ۲۰ رسم شده‌اند و همان‌طور که دیده می‌شود تطبیق بسیار خوبی با نتایج عددی که از حل عددی معادلات ممنتوم و انرژی بدست می‌آید و در مرجع [۹] بوسیله Fan و Hwang انجام شده دارد. چون برای عددنوسلت موضعی برای دو صفحه موازی نتیجه‌ای چه بصورت رابطه تحلیلی و چه بصورت ترسیمی موجود نبوده است، معادلات بدست آمده، برای عددنوسلت موضعی یعنی (۲۲)، (۲۴)، (۲۹) برای دو صفحه موازی رسم نشده‌اند. برای جریان در دهانه ورودی لوله عددنوسلت موضعی با استفاده از رابطه (۲۹) که از توزیع سرعت درجه سوم بدست آمده و تطبیق بهتری با نتایج لوله دارد، برای اعستداد پیراندل 0.7, 2, 5 در شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ با نتایج موجود برای لوله در دهانه ورودی مقایسه شده است. البته چون نتایج بدست آمده از حل عددی عددنوسلت موضعی در دهانه ورودی لوله بر اساس  $Nu_1$  بوده است، عددنوسلت موضعی بدست آمده از معادله (۲۹) بر  $\theta_m$  تقسیم شده تا بسا توجه به معادله (۷) عددنوسلت موضعی  $Nu_1$  بدست آید.

توزیع دقیق تنش برشی (معادله ۲۰) با توزیع تقریبی تنش برشی (معادله ۲۱) در دهانه ورودی در شکل ۷ با یکدیگر مقایسه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجه بدست آمده از معادله (۲۱) بسیار نزدیک به نتایج حاصله از توزیع دقیق بوده و تا حدودی که جریان توسعه یافته می‌شود ( $U_1^* = 1.5$ ) از تقریب نسبتاً خوبی برخوردار است. البته از توزیع تنش برشی تقریبی یعنی معادله (۲۱) در معادله (۲۲) استفاده شده است.

خلاصه نتایج بدست آمده برای عددنوسلت موضعی  $Nu_2$  با توجه به تقریب‌های بکار رفته، از جمله در توزیع سرعت و تنش برشی و همچنین حدودی از  $Pr^*$  که قابل استفاده هستند، در جدول (۱) مندرج شده است. همان‌طور که در منحنی‌های رسم شده برای اعدادنوسلت متوسط بر حسب  $x^*$  دیده می‌شود، برای جریان در حال توسعه همزمان، برای هر عدد پیراندلی یک منحنی جداگانه وجود دارد. برخلاف جریان در حال

توسعه حرارتی و توسعه یافته هیدرودینا میکی با پروفیل سرعت سهمی که تنها یک منحنی برای عددنوسلت بر حسب  $x^*$  بدست میآید، و برای تمام اعداد پیراندل صادق خواهد بود. برای هر عدد پیراندل مشخص عددنوسلت برای جریان در حال توسعه همزمان بیشتر از مقدار آن برای جریان در حال توسعه حرارتی و توسعه یافته هیدرودینا میکی می باشد (البته برای مقادیر ثابت  $Re$  و  $x/a$ ) چون مقادیر سرعت در نزدیکی دیواره برای پروفیل سرعت در حال توسعه بیشتر از پروفیل سرعت سهمی است.

انتظار می رود که در فواصل نسبتاً "زیاد" دهانه ورودی اثر توسعه نیافته بودن پروفیل سرعت روی عددنوسلت بدست آمده از جریان در حال توسعه همزمان با نتایج پروفیل توسعه یافته مطابقت خواهند داشت. ولی عملاً "در یک طول مشخصی اختلاف در عددنوسلت ناچیز میشود و از آن به بعد یکی خواهند شد. در نتیجه بدست آمده برای عددنوسلت در بخش (c) نیز این مسئله مشخص است. در معادله (۵) اگر تنش برشی مقدار ثابتی قرار داده شود، همان نتیجه بخش (a) بدست خواهد آمد. به عبارت دیگر وقتی توزیع سرعت توسعه یافته نشود، تنش برشی نیز مقدار ثابتی خواهد بود، که در نتیجه همان نتایج پروفیل توسعه یافته بدست میآید، اما توزیع تنش برشی که در بخش (c) مورد استفاده قرار گرفته (معادله ۲۵) به سمت مقدار ثابتی میل نمیکنند. بنابراین عددنوسلت متوسط محاسبه شده در بخش (c) با دور شدن دهانه ورودی به سمت حالت حدی یعنی جواب بخش (a) میل نخواهد کرد و با زیاد شدن فاصله خطای معادله افزایش مییابد. بطور خلاصه، با توجه به منحنی های رسم شده در شکل های ۱ و ۲ و رابطه بدست آمده برای عددنوسلت از روش بخش (c) تا حدودی که توزیع سرعت توسعه یافته میشود و حتی برای فواصل بعد از آن جواب مناسبی ارائه میدهد.

البته اشکال فوق الذکر در مورد روشهای دیگر ارائه شده برای حل مسئله جریان در حال توسعه همزمان در دهانه ورودی وجود دارد. در مرجع [۱۴] که از روش انتگرالی این مسئله حل شده و نتایج آن با بصورت حل

عددی معادلات مربوطه میباشد، نیز به این اشکال توجه شده است و راه حلی که برای رفع این اشکال در این مرجع پیشنهاد شده است، استفاده از منحنی های مناسب (Paired Curves) به ترتیبی که نتایج بدست آمده از حل جریان در حال توسعه همزمان را به نتایج پروفیل سرعت سهمی پیوند دهد، میباشد.

تاثير عدد پیراندل روی عددنوسلت را میتوان با مقایسه دو منحنی با اعداد پیراندل مختلف مشاهده نمود. برای یک  $\frac{x/d}{Re}$  معین سیالی که دارای عدد پیراندل بیشتری است، عددنوسلت بزرگتری را نیز خواهد داشت. این نتیجه از روابط تحلیلی که برای عددنوسلت موضعی بدست آمده نیز مشهود است. عددنوسلت برای یک مقدار ثابت  $\frac{x/d}{Re}$  با عدد پیراندل افزایش مییابد. چون عددنوسلت با رشد لایه مرزی حرارتی کاهش مییابد و در نتیجه لایه مرزی حرارتی به معنای عدد پیراندل کوچکتر است.

با توجه به شکل های ۲ و ۳، معادله (۲۶) نتیجه نسبتاً دقیقی در مقایسه با نتایج عددی حاصله از حل معادلات انرژی و ممنتوم برای دو صفحه موازی در دهانه ورودی ارائه میدهد، چون معادله (۲۶) مشخماً عددنوسلت متوسط را بصورت رابطه تحلیلی بر حسب خصوصیات سیال و مختصات محوری مجرا بدست میدهد، میتوان براحتی با داشتن طول مجرا، ضریب انتقال حرارت متوسط و آنجا میزان انتقال حرارت را در دهانه ورودی مجاری محاسبه نمود.

البته با یستی در نظر داشت که در روش Leveque پروفیل سرعت را در فواصل نزدیک به دهانه خطی فرض کردیم که این فرض در فواصل نزدیک به دهانه برای سیالات با عدد پیراندل حدود یک و یا بزرگتر آن فرض بسیار خوبی است. ولی اگر عدد پیراندل خیلی کوچکتر از یک باشد، (مثلاً برای فلزات مذاب) چون ارتفاع لایه مرزی حرارتی نسبت به لایه مرزی هیدرودینامیکی خیلی بیشتر میشود، (دیفیوژن ممنتوم بسیار کمتر از دیفیوژن حرارت است)، لذا در قسمت اعظم لایه مرزی حرارتی توزیع سرعت یکنواخت (Slug Flow) خواهد بود و بنا بر این

فرض توزیع سرعت خطی فرض مناسبی نمیباشد. بنا براین بررسی حاضر برای اعداد پیراندل حدود یک و یا نزدیک به یک مثل هوا و یا بیشتر مناسب خواهد بود. و هرچه عدد پیراندل کوچکتر شود، خطای آن افزایش مییابد.

عدد نوسلت موضعی بدست آمده از معادله (۲۹) در شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ با مقدار موجود در مرجع ۱ برای دهانه ورودی لوله مقایسه شده است. که نشان میدهد با صرف نظر کردن از انحنای در فواصل نزدیک به دهانه میتوان از نتیجه بدست آمده در این مقاله برای دهانه ورودی لوله با تقریب خوب استفاده کرد. معادله انرژی یعنی معادله (۱) از معادله کلی انرژی برای سیال با خواص فیزیکی ثابت، بدون تلفات اصطکاکی و همچنین صرف نظر کردن از هدایت طولی یعنی جمله  $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  در مقابل هدایت عرضی بدست آمده است. برای سیالانی که دارای عدد پیراندل خیلی کم هستند مثل فلزات مذاب، چون سریعاً از لحاظ حرارتی توسعه یافته میشوند، و یا به عبارت دیگر تغییرات درجه حرارت در یک طول بسیار کمی از مجرای اتفاق میافتد، این جمله اهمیت پیدا میکند چون شرط  $\Delta \ll x$  دیگر صادق نخواهد بود. و بنا بر این دیفیوژن حرارت در جهت  $x$  نیز مقدار قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت. در حالتی با یستی یا دآورشده که رابطه تحلیلی تقریبی بدست آمده برای عدد نوسلت موضعی و نوسلت متوسط برای جریان در حال توسعه حرارتی و هیدرودینامیکی مزیت بزرگ بررسی حاضر نسبت به روشهای دیگر است. چون تا بحال هیچکدام از نتایج موجود برای این نوع جریان به رابطه تحلیلی برای عدد نوسلت نرسیده است.

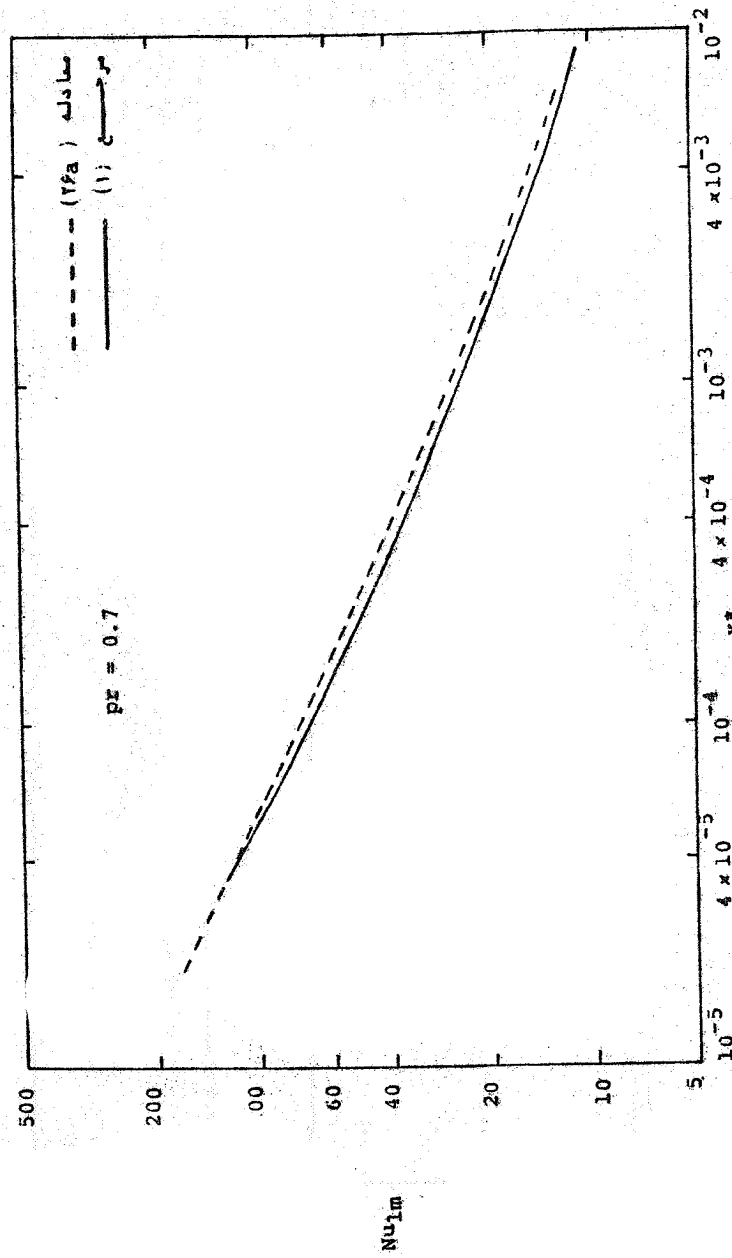


جدول شماره ۱ - خلاصه فرمولها با شرایط مربوطه

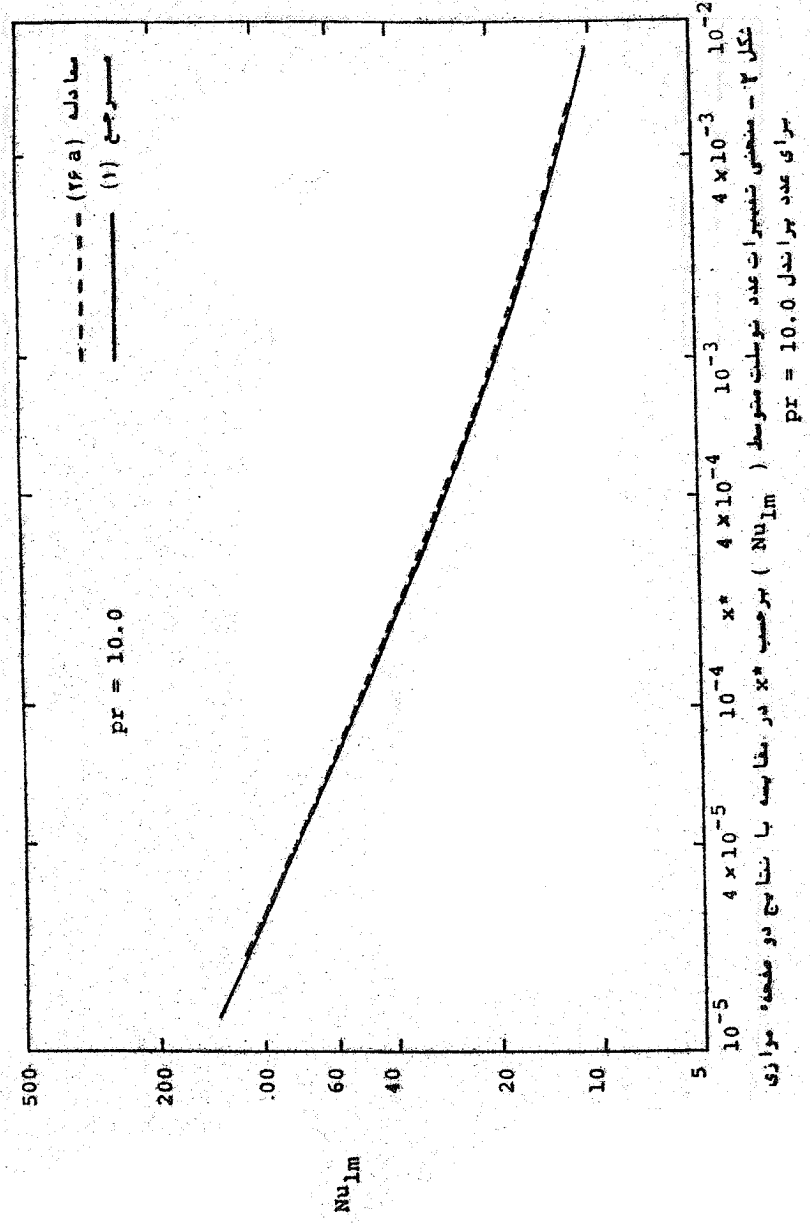
سی	مسئله مربوط	توزیع سرعت و فشار برشی	تغییرات با ارتفاع	مقادیر مورد استفاده
(۲۱)	$M_{u2} = 0.242 \left( 1 + \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{6}{Pr}$ $\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} x \frac{1}{2}$	$\tau_u = \frac{8 \mu \bar{U}}{3d} \left( 1 + \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{3}} x \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$ <p>توزیع سرعت: درجه دوم</p>	از تقریب $D_2^4 = 1 + \frac{\sqrt{160}}{3} x$ <p>مستقیماً در خروجی فشار برشی استفاده شده است.</p>	مقادیر مورد استفاده عدد متوسط متوسط تقریبی صورت‌های یک‌تکاملی برای حسب $x^m$ به دست می‌آید درمقا به با نتایج دوطبقه موازی برای عدد متوسط متوسط نتیجه: بسیار خوبی می‌باشد. $Pr \geq 0.7$ $x^m < 0.01$
(۲۲)	$Nu_2 = 4.7999 \frac{1}{(1 + \epsilon^2) Pr^{\frac{1}{3}}}$ $\epsilon = \frac{122}{3} \epsilon^3 - 96\epsilon + 96\epsilon \tanh \epsilon$ $\epsilon = \left( \frac{630}{13} x^m Pr \right)^{\frac{1}{4}}$	$\tau_u = \frac{9 \mu \bar{U}}{4d} \frac{U_1^2}{U_1^m - 1}$ <p>توزیع سرعت: درجه سوم</p>	همان‌طور که در بخش از توزیع تنش برشی در رابطه با فشار برشی متوسط از تقریب $D_2^4 - 1 = \sqrt{\frac{630x^m}{13}}$ استفاده شده است.	درمقا به با نتایج اولیه برای تقریب نهایی خوبی است هرچه عدد برای انداز $Pr$ بیشتر باشد دقت مقادیر افزایش می‌یابد. $Pr \geq 0.7$ $x^m < 0.003$

تعیین تحلیلی عددی نوسانت ...

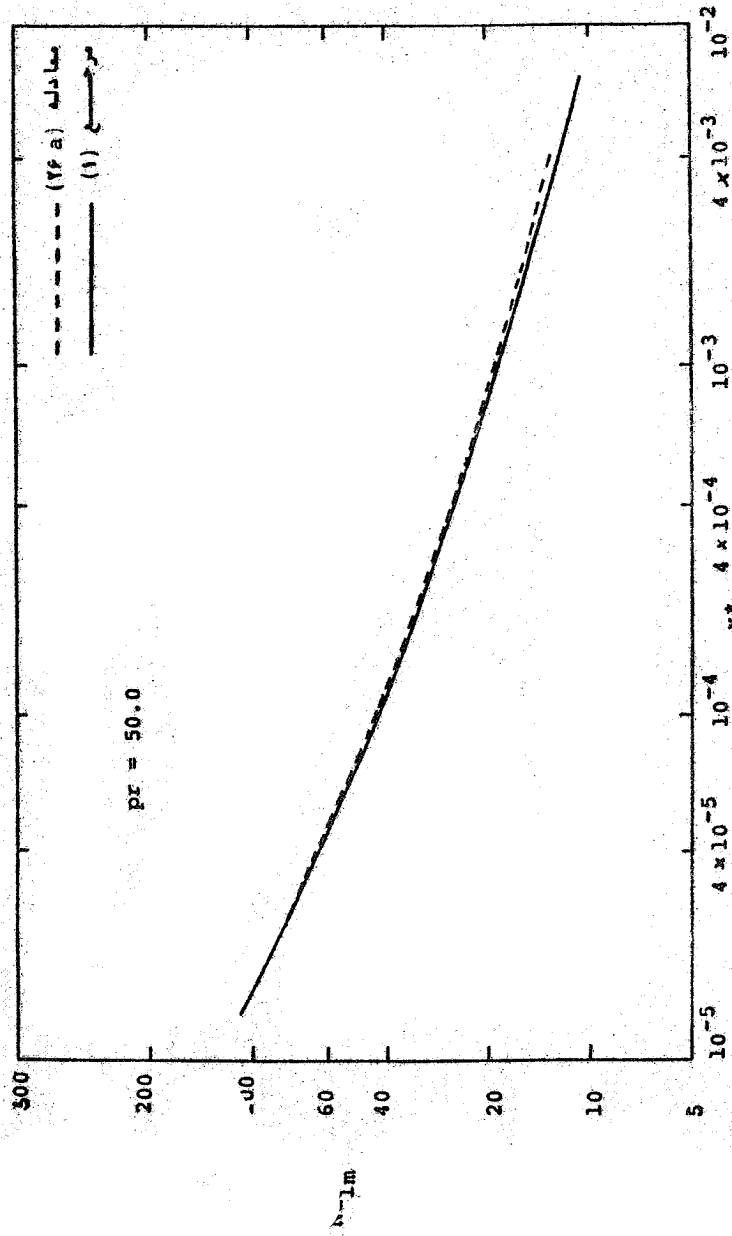
استقلال



شکل ۲ - مقایسه نتایج عدد نوسلت مدل (خط چین) با نتایج تجربی (خط صاف) برای عدد پراوندل  $Pr = 0.7$

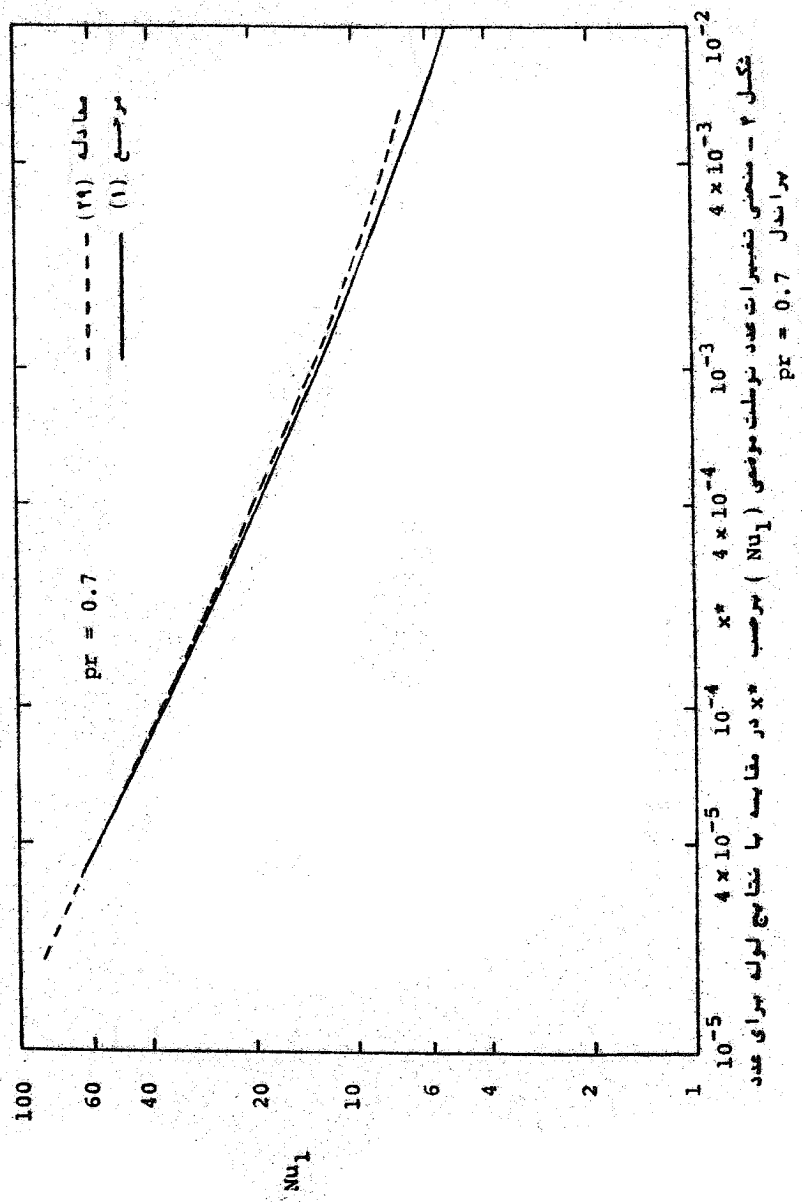


استقلال

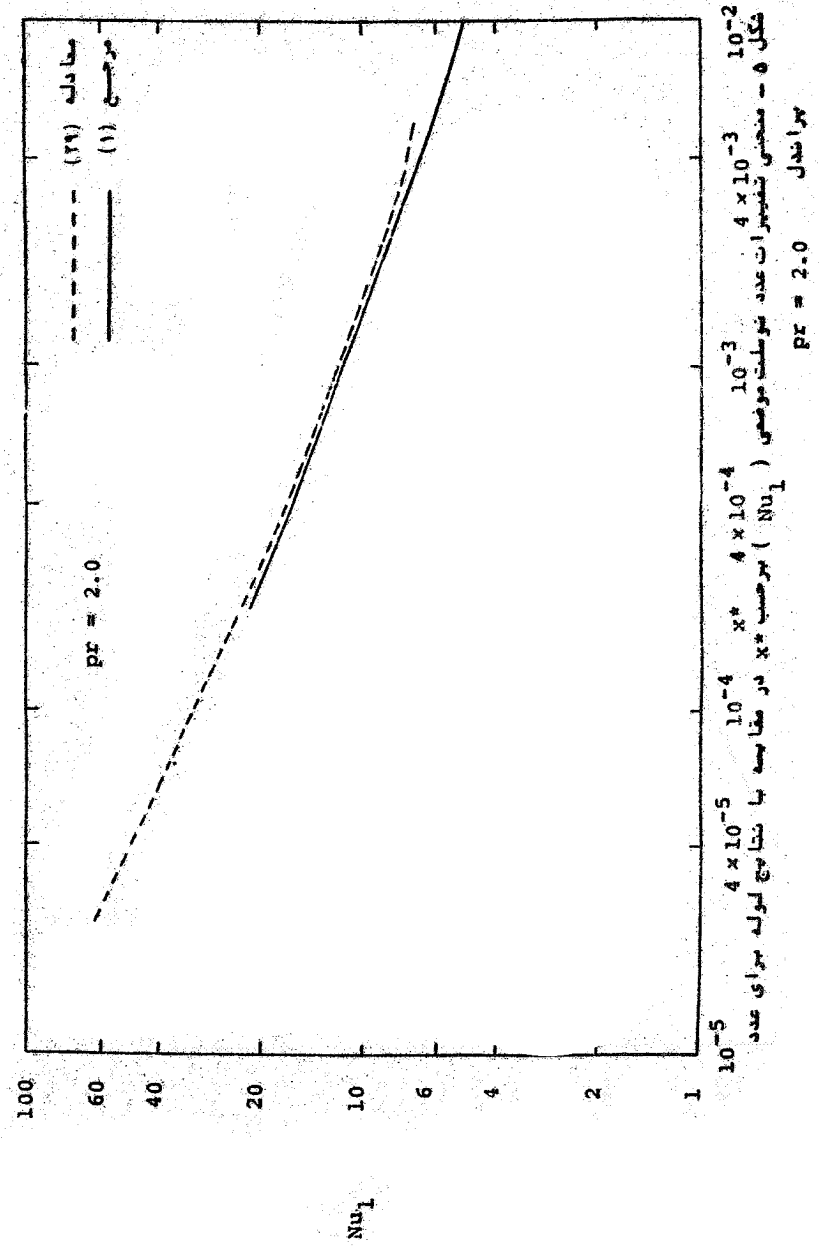


شکل ۳ - مقایسه نتایج دو معادله با نتایج تجربی در مقادیر مختلف  $x^*$  برای عدد پرانند  $Pr = 50.0$

تعیین تحلیلی عدد نوسلت ...

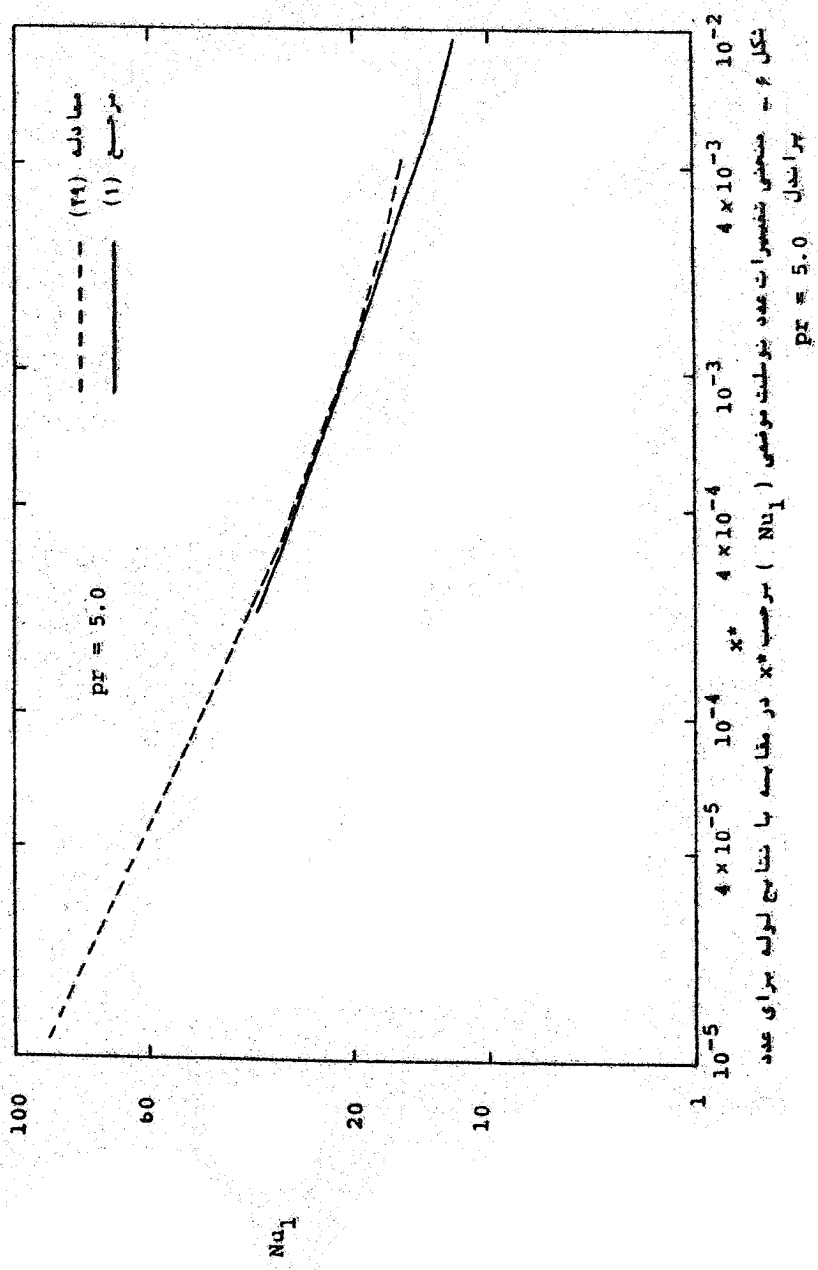


استقلال

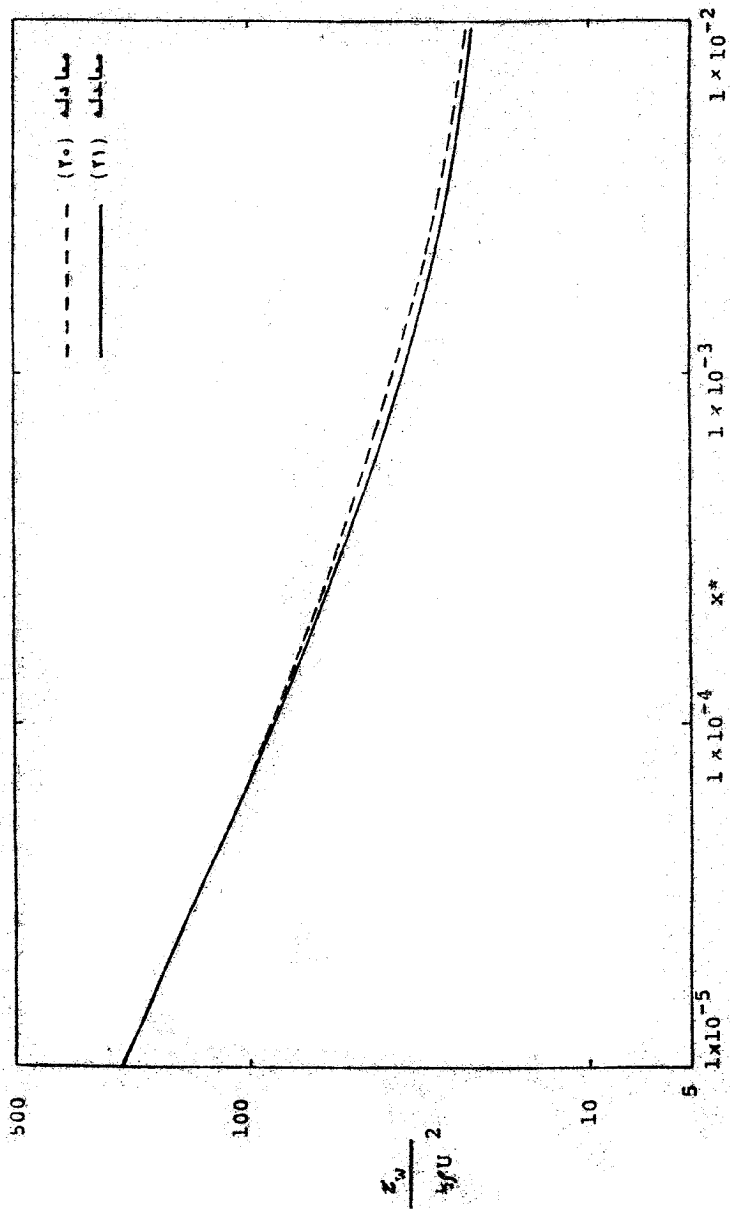


شکل ۵ - منحنی تغییرات عدد نوسلت موضعی ( $Nu_L$ ) بر حسب  $x^*$  در مقایسه با نتایج لوله برای عدد پرانندل  $Pr = 2.0$

تغییر تحلیلی عدد نویسی ...



www.iut.ac.ir



شکل ۷ - منحنی تغییرات تنش برشی بدون بعد، بر حسب  $x^*$  در دهانه ورودی برای دو منحنی موازی



فهرست علائم

علائم	تعریف
$a$	نصف فاصله بین دو صفحه موازی
$C_p$	حرارت مخصوص در فشار ثابت
$d = 4a$	قطر هیدرولیکی
$f = \left( \frac{630}{13} \times Pr \right)^{\frac{1}{4}}$	پارا متر بدون بعد مورد استفاده در معادلات ۲۹ و ۳۰
$\dot{m} = \rho \bar{U} 2a$	دبی جرمی سیال عبورکننده از مجرا
$Nu_{x,T} = \frac{hx}{k}$	عددنوسلت موضعی بر اساس شرط مرزی درجه حرارت سطح ثابت
$Nu_1 = \frac{h_1 d}{k} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}  _{y=0} d}{(T_0 - T_m) k}$	عددنوسلت موضعی بر مبنای اختلاف درجه حرارت سطح و متوسط سیال
$Nu_2 = \frac{h_2 d}{k} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y}  _{y=0} d}{(T_0 - T_1) k}$	عددنوسلت موضعی بر مبنای اختلاف درجه حرارت سطح و سیال ورودی
$Nu_{1m} = \frac{\int_0^x Nu_1 dx}{x}$	عددنوسلت متوسط بر مبنای $Nu_1$
$Nu_{2m} = \frac{\int_0^x Nu_2 dx}{x}$	عددنوسلت متوسط بر مبنای $Nu_2$
$P$	توزیع فشار در دهانه ورودی
$Pr = \frac{v}{\alpha}$	عدد پیراندل
$Re = \frac{\bar{U} d}{\nu}$	عدد رینولدز بر مبنای قطر هیدرولیکی
$Re_x = \frac{\bar{U} x}{\nu}$	عدد رینولدز بر مبنای فاصله از دهانه

## استقلال

$T$	مربوط به شرط مرزی درجه حرارت سطح ثابت
$T_f$	درجه حرارت موضعی سیال
$T_m$	درجه حرارت متوسط سیال
$T_0$	درجه حرارت دیواره مجرا
$T_i$	درجه حرارت سیال واردشونده در دهانه ورودی
$t = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \left( \frac{160 x^* Pr}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$	پارا متر بدون بعد مورد استفاده در معادلات (۱۲a) و (۱۲b)
$\bar{U}$	سرعت متوسط سیال
$U_1$	سرعت سیال در هسته غیر لزوج
$U_1^* = \frac{U_1}{\bar{U}}$	سرعت بدون بعد در هسته غیر لزوج
$U$	سرعت جریان آزاد برای صفحه مسطح
$u$	مولفه سرعت در جهت $x$
$v$	مولفه سرعت در جهت $y$
$x^+ = \frac{x/d}{Re}$	کمیت بدون بعدی از فاصله محوری
$x^* = \frac{x/d}{Re Pr}$	کمیت بدون بعدی از فاصله در جهت محور مجرا (عکس عدد گراتز)
$\alpha = k/pcp$	ضریب پخش حرارت
$\Gamma$	تابع گاما
$\Delta$	ارتفاع لایه مرزی حرارتی
$\delta$	ارتفاع لایه مرزی هیدرودینامیکی
$\delta_1$	ضخامت جابجایی
$\delta_2$	ضخامت ممنتموم

تعیین تحلیلی عددنوسلت ...

متغییرتسا به

لزجت سینماتیکی سیال

پا را متریدون بعدموردا ستفا ده  
درمعا دلات (۲۴)

تابع جریان

$$\xi = \left( \frac{160 \times \text{Pr}}{3} \right)^{\frac{1}{4}}$$

## مراجعه

۱۳. سیدسعید مرتضوی "بدست آوردن عددنوسلت در دهانه ورودی". تز فوق لیسانس، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۶۶.

1. Shah, R.K., London. A. L., Advances in Heat Transfer: Laminar Flow Forced Convection in Ducts. Academic Press, Inc., 1978.
2. Newman, J., "Extension of the Leveque solution" J. Heat Transfer 91, pp177-178, 1969.
3. Goldstein, S., Modern Developements in Fluid Dynamics. Dover Publications Inc., 1965.
4. Knudsen, J. G., Katz, D. L., Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill, Inc., 1958.
5. Kays, W. M., Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, Inc., 1966.
6. Rohsenow, W. M. Choi, H. T., Heat, Mass and Momentum Transfer. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1961.
7. Ulrichson, D. L., Schmitz, R. A. "Laminar - flow heat transfer in the entrance region of circular tubes," J. Heat Mass Transfer vol.8, pp253-258, 1965.

- 8 . Hornbeck, R. W., "An all - numerical method for heat transfer in the inlet of a tube," Am. Soc. Mech. Eng., Pap.65-WA/HT - 36, 1965
- 9 . Hwang, C. L., Fan, L. T., "Finite difference analysis of forced- Convection heat transfer in entrance region of a Flat rectangular duct," Appl. Sci. Res., Sect. A13 ,401-422, 1967.
10. Worsøe, P. W., Schmidt, E., "Heat Transfer in the thermal entrance region of circular tubes and annular passages with fully developed laminar flow," Int. J. Heat Mass Transfer, vol.10, pp541-551, Pergamon Press Ltd., 1967.
11. Nunge, R. J., Porta, E. W., Bentley, R, "A correlation of local Nusselt Number for laminar flow heat transfer," in annuli," Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp927-931, Pergamon Press Ltd, 1970.
12. Eckert, E. R. G., Drake, R. M., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw- Hill, Inc. 1972.
14. Sparrow, E. M., "Analysis of Laminar Forced Convection Heat Transfer in Entrance Region of Flat Ractangular Ducts," National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 3331, 1954.