

# تخمین میدان فشار از تصاویر PC-MRI از شکل انتگرالی معادلات حاکم با کمک اسپلاینهای جدا ساز میدان

علی پاشائی\* و ناصر فتورائی\*\*

دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۸۶/۲/۲۲ - دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۱۱/۱۲)

**چکیده** - در این تحقیق از روش اجزای مرزی محدود (BEM) برای استخراج توزیع فشار در تصویر دو بعدی جریان خون استفاده شده است. روشهای مرسوم برای تخمین غیرتھاجمی توزیع فشار در میدان جریان قلبی-عروقی از شکل دیفرانسیلی معادلات حاکم استفاده می کنند. در این مقاله محاسبه میدان فشار از داده های سرعت با شکل انتگرالی معادلات حاکم و استفاده از جداسازی ناحیه جریان در تصاویر به کمک یکی از روشهای رایج جداسازی تصاویر یعنی اسپلاین ها گسترش یافته است. این روش جداسازی به خاطر تامین سلولهای تصویر، قسم بندی اجزای مرزی، محاسبه بردار نرمال سطحی و محاسبه دقیق طول اجزای مرزی، سهولتهایی در محاسبات اجزای مرزی فراهم می سازد. شکل انتگرالی معادلات حاکم به تفصیل بحث شده است. برای شرایط تصویر بهینه شده و برای شرایط تکینه ثابتهای انتگرال گیری مربوطه ارائه شدند. ابتدا فشار در نودهای مرزی محاسبه شده و برای تامین مقادیر فشار در نقاط مختلف داخل میدان تصویر مورد استفاده قرار گرفته است. محاسبه توزیع فشار در داخل میدان به صورت یک مرحله پس پردازش با این روش مطرح است. برای ارزیابی دقت این روش نسبت به روشهای رایج محاسباتی، نتایج دو روش حل دیفرانسیلی و حل انتگرالی در یک میدان ریاضی جریان سیال لزج با توزیع فشار مشخص آزمایش شد. بر اساس این مطالعه، BEM برای تخمین مقدار فشار از تصاویر جریان خصوصیات زیر را فراهم می سازد: میدان محاسباتی را از دو بعد به یک بعد کاهش می دهد، امکان محاسبه توزیع فشار در نقاط دلخواه میدان تصویر با درجه تفکیک پذیری بالاتر فراهم می سازد، در برابر همهمه<sup>۱</sup> مقاوم است، ملاحظات کمتری برای بررسی پایداری و سازگاری در آن لازم است، دقیق بوده و ملاحظات شبکه بندی کمتری نیاز دارد

**واژگان کلیدی:** معادله پواسون فشار، تصاویر جریان پزشکی، توزیع فشار، روش اجزای محدود مرزی، تصویرگری تشدید مغناطیسی کنتراست فازی PC-MRI، جداسازی با اسپلاین

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکتری مهندسی پزشکی

# Estimation of PC-MRI Pressure Map Using Integral Form of Governing Equations and Spline Segments

Ali Pashae and Nasser Fotouraee

Faculty of Medical Engineering, Amir-Kabir University of Technology

**Abstract:** In this paper, the boundary-based estimation of pressure distribution in the cardiovascular system is investigated using two dimensional flow images. The conventional methods of non-invasive estimation of pressure distribution in the cardiovascular flow domain use the differential form of governing equations. This study evaluates the advantages of using the integral form of the equations in these calculations. The concepts provided with the Boundary Element Method (BEM) together with the boundary-based image segmentation tools are used to develop a fast calculation method. Boundary-based segmentation provides BEM with domain pixel extraction, boundary meshing, wall normal vector calculation, and accurate calculation of boundary element length. The integral form of the governing equations are reviewed in detail and the analytic value of integral constants at singular points are provided. The pressure data on boundary nodes are calculated to obtain the pressure data at every point in the domain. Therefore, the calculation of domain pressure could be considered as a post-processing procedure, which is an advantage of this approach. Both the differential and integral-based formulations are evaluated using mathematical Couette test flow image whose pressure domain is available. The resulting pressure distributions from both methods will be compared. According to the results obtained from this study, the use of BEM for estimating pressure values from a non-invasive flow image has the following advantages: reduced computational domain from two to one dimension, flexible calculation of pressure data at arbitrary points or at finer spatial resolutions, robustness against noise, less concern for its stability and compatibility, accuracy, and lower meshing attempts.

**Keywords:** Pressure-Poisson equation; Medical flow imaging; Pressure estimation; Boundary Element Method; Computational methods; PC-MRI; Boundary-based segmentation.

## فهرست علائم

فاصله نقطه آزاد $x$ تا جزء روی مرز یا ناحیه	$r$	ثابتها انتگرال گیری	$C$ و $B, A$
فاصله نقطه $i$ از جزء مرزی	$r_i$	بردار تابع میدان سرعت	$b$
فاصله تا موقعیت $(i, j)$ از جزء ناحیه	$r_{ij}$	ضریب جمله آزاد معادله انتگرالی	$c$
تابع اسپلاین	$S$	ضرایب ثابت	$c_1$ و $c_2$
شاخص مستقل	$t$	ضریب ثابت	$c_3$
کرنل تکنیه	$T$	جزء خطی روی مرز جریان	$ds$
بردار میدان سرعت	$u$	جزء سطحی در ناحیه جریان	$dv$
سرعت	$v$	ناحیه جریان	$D$
نقطه دلخواه در میدان تصویر	$x$	مرز جریان	$\partial D$
نقطه دلخواه روی مرز سیال	$y$	تابع حل پایه مسائل اجزای مرزی	$G$
نقطه دلخواه در ناحیه جریان	$z$	اندازه سلول تصویر	$h$
تعداد کل سلول های ناحیه جریان تصویر	$Z$	تعداد کل اجزای مرز	$K$
مولفه های بردار مماس در راستای $x$ و $y$	$x_t$ و $y_t$	جزء خطی روی مرز	$l$
لزجت	$\mu$	طول جزء مرزی	$L$
چگالی سیال	$\rho$	نقطه دلخواه داخل ناحیه جریان	$m$
تابع دلتای دیراک	$\delta$	تعداد نقاط روش استاندارد گوس	$M$

$\tau$	بردار مماس واحد	$\mathbf{n}$	بردار یکه عمود بر مرز سیال با جهت خارج از ناحیه سیال
$\kappa_i$	معیار مشخص کننده موقعیت سلول تصویر	$p$	فشار استاتیکی
	نسبت به اسپلاین	$\hat{p}_i$	فشار تخمین زده شده در گره $i$
$\omega_i$ و $\zeta_i$	موقعیت داخلی متغیر و وزن مربوط به نقطه $i$ از اجزاء مرزی	$p_i$	مقدار فشار واقعی در گره $i$
$\psi$	فاصله عمودی $x$ تا جزء مورد بررسی	$P_{i+1}$ و $P_i$	نقاط کمکی اسپلاین
$\phi$	بردار جواب دستگاه معادلات	$Q_i$	نقاط کمکی اسپلاین
$\Phi$	ماتریس ضرایب دستگاه معادلات		

## ۱- مقدمه

روشهای مختلفی برای تخمین فشار داخل عروق از تصاویر پزشکی ارائه شده است. یکی از این روشها، محاسبه سرعت متوسط در مقطع جریان در دو نقطه و محاسبه اختلاف فشار در آن دو نقطه با استفاده از معادله برنولی می باشد [۵]. با وجود کاربردهای کلینیکی این روش، در تحقیقات جدید، خطای زیادی را برای آن گزارش می کنند [۶]. زیرا فشار یک کمیت اسکالر بوده و در تمام نقاط ناحیه دارای مقدار است. در نتیجه یافتن فشار متوسط مقطعی در جریانهای نوسانی با خطا همراه است. تاکنون برای محاسبه توزیع فشار از روی تصاویر سرعت، تلاشهای مختلفی صورت گرفته است [۷ تا ۱۱]. الگوریتمهای مشخص کننده میدان فشار بر اساس استفاده از تکنیکهای دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) و ایجاد یک سری شبکه‌ها و میدان محاسباتی در ناحیه جریان تصویر توسعه یافته‌اند. این روش سلولهای تصویر به مانند یک جزء از ناحیه شبکه بندی شده در نظر گرفته شده و با گسسته سازی شکل دیفرانسیلی معادلات ناویراستوکس، مقادیر فشار در همان گره‌ها با تشکیل دستگاه معادلات مربوط به هر شبکه محاسبه می شود. معادلات ناویراستوکس برای بیان ناحیه جریان سیال تراکم ناپذیر شامل متغیرهای سرعت و فشار هستند.

امروزه، در میان تکنیکهای تصویربرداری برای ثبت داده‌های سرعت جریان، استفاده از سکانسهای کنتراست فازی<sup>۴</sup> در دستگاه‌های تصویرگر تشدید مغناطیسی MRI (PC-MRI) [۱۲] در روشهای مختلفی برای اندازه گیری فشار خون سیستم قلبی-عروقی وجود دارد. عموماً این روشها می توانند به دو نوع اندازه گیری تهاجمی و غیرتهاجمی تقسیم شوند [۱]. در تکنیکهای تهاجمی، رگ برش خورده و در دو نقطه از رگ که اختلاف فشار در آنها مورد نیاز است اندازه گیری انجام می شود. کاتترهای مربوطه فشار میانگین نسبی را در نقاط مختلف طول رگ ارائه می دهند که تفاضل آنها اختلاف فشار دو نقطه را به دست می دهد. عیب روشهای تهاجمی نیاز آنها به برش بافتها برای اندازه گیری فشار است. در مقابل این روشها، تکنیکهای غیرتهاجمی برای اندازه گیری فشار داخل عروق توسعه یافته‌اند. برخی از روشهای اندازه گیری غیرتهاجمی فشار در داخل بدن، به کمک تصویربرداریهای پزشکی فراهم شده‌اند. استفاده از روشهای تصویربرداری فراصوت<sup>۳</sup> [۲]، تصویربرداری تشدید مغناطیسی [۳] و تصویربرداری مقطعی (CT) [۴] در این راستا معمول‌اند. با استفاده از تکنیکهای تصویربرداری امکان اندازه گیری مستقیم فشار در داخل رگها وجود ندارد. به عبارت دیگر تکنیکهای تصویربرداری تنها قادر به اندازه گیری و ثبت تغییرشکلها و یا بردارهای سرعت جریان خون‌اند. لذا ضروری است که یک سری پردازش روی این تصاویر صورت گیرد تا تخمینی از اندازه فشار و یا به صورت دقیقتر تغییرات فشار در جریان خون به دست آید.

به سرعت مورد توجه قرار گرفته‌اند. به کمک این ابزار، توزیع سرعت در محدوده تصویربرداری با دقت مناسبی در قالب تصاویر جریان ثبت و ارائه می‌شوند. امروزه توجه عمومی در تصویربرداریها به این روش معطوف است. ما نیز با توجه به دقت و کاربرد رو به گسترش این روش در تصویربرداریهای جریان، این روند را برای پردازشهای خود برگزیده‌ایم.

تعامل PC-MRI و CFD برای تخمین مشخصه‌های جریان از روی میدان سرعت مورد استقبال قرار گرفته است [۱۳] و [۱۴]. مطالعات بسیاری برای ارزیابی این تعامل بر تخمین فشار و شاخصهای مختلف موثر بر آن صورت گرفته است. نصیرائی مقدم و همکارانش [۱۵] نشان دادند که مشخصه‌های اساسی این نوع تعامل بین تصویربرداری و محاسبات عددی دینامیک سیالات محاسباتی عبارت‌اند از تفکیک‌پذیری فضائی در تصاویر، وجود هممه در تصاویر و عدد بی‌بعد رینولدز جریان. تفکیک‌پذیری فضائی از آنجا دارای اهمیت است که معمولاً حل معادلات دیفرانسیل در میدانهای عددی در بازه خاصی از اندازه شبکه‌ها به جواب دقیق منجر می‌شود [۱۶]. در حالی که در این تعامل، اندازه شبکه از روی دستگاه تصویربرداری مقید می‌شود و محدودیتهای تصویربرداری عموماً مانع اساسی در تغییر اندازه شبکه تا حالت بهینه‌اند. در مواردی به‌خاطر این محدودیتهای حتی نمی‌توان تصاویر با ابعاد شبکه مورد نیاز فراهم ساخت.

وجود هممه، عامل دیگری است که در این محاسبات نقش اساسی بازی می‌کند. معمولاً تمام دستگاههای اندازه‌گیری به‌خاطر محدودیت قطعات و ابزارهایی که در ساختار آنها به‌کار رفته است، نمی‌توانند اندازه واقعی مقادیر را در شبکه‌ها اندازه بگیرند. وجود خطا و یا هممه در تقابل با معادلات دیفرانسیل حاکم، در مواردی بسیار مشکل ساز هستند. با توجه به طبیعت حل دیفرانسیلی معادلات، وجود خطا در داده‌ها ممکن است که تخمینهای نهایی را از مقادیر واقعی دور کند [۱۷]. با افزایش عدد بی‌بعد رینولدز و آشفتگی جریان نیز تخمین دقیق میدان فشار با مشکل روبرو می‌شود [۱۵].

در تحقیق حاضر با الهام از این طبیعت، گامی در جهت ارزیابی

حل معادلات با دیدگاه انتگرالی برداشته شده است. ابتدا روش انتگرالی در حل معادله پواسون فشار توسعه یافته است. سپس معادله با شرایط موجود در پردازش تصاویر پزشکی ترکیب شده و روندی برای محاسبات مربوطه ارائه شده است. در این روند علاوه بر بهبود دقت محاسبات از میزان خطاهای ناشی از توزیع هممه در تصاویر نیز کاسته می‌شود. این مقاله ابتدا به معرفی معادله حاکم برای تخمین میدان فشار پرداخته است. با توجه به نیاز به جداسازی در تصاویر، به تعمیم روش اجزای مرزی به حوزه تصویربرداری پزشکی پرداخته شده است. نحوه محاسبه شاخصها در ادامه مورد بررسی قرار گرفته است. برای ارزیابی قابلیت این روش، یک مدل ریاضی از جریان تراکم‌ناپذیر لزوج دو بعدی مورد مطالعه قرار گرفته و مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست آمده از این روش با روشهای رایج اندازه‌گیری فشار از داده‌های سرعت ارائه شده است. همچنین با افزودن هممه به داده‌های سرعت در این مدل، کارایی هر کدام از این روشها در تولید مناسبتر توزیع فشار مورد مطالعه قرار گرفته است. در انتها مقایسه‌ای بین مشخصات فراهم شده از هر کدام از این روشها به‌عمل آمده است.

## ۲- تعاریف، معادلات و روش عملیاتی

### ۲-۱- معادله حاکم

رایجترین روش برای محاسبه میدان فشار از داده‌های نرخ تغییر شکل، با دیورژانس گرفتن از دو طرف معادلات ناویراستوکس برای سیال تراکم‌ناپذیر حاصل می‌شود [۱۸]. در اینجا از معادله حاصل که به نام معادله پواسون فشار<sup>۵</sup> یا PPE معروف است، به همراه شرط مرزی از نوع نیومن استفاده شده است. این شرط مرزی از این‌رو مورد استفاده قرار گرفته است که مطابق مطالعات گرشو و سانی این شرط مرزی مناسبترین شرط مرزی برای محاسبه فشار است [۱۹]. در نتیجه برای ناحیه جریان  $D$  تصویر و مرز احاطه‌کننده سیال  $\partial D$ ، معادله زیر ارتباط بین بردارهای سرعت میدان و فشار استاتیکی را برقرار می‌سازند:

نقطه  $x$  داشته و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta(x, z) = 0 \quad x \neq z$$

$$\int_D f(z) \delta(x, z) dv(z) = f(x) \quad (6)$$

حل این معادله به جواب زیر می انجامد [۲۰ و ۲۱]:

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r & \text{در دو بعدی} \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{در سه بعدی} \end{cases} \quad (7)$$

در اینجا  $r$  فاصله نقطه  $z$  در ناحیه  $D$  از نقطه  $x$  است. با قرار دادن معادله (۷) در معادله قضیه دوم گرین (۳) و استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک (۶) خواهیم داشت:

$$c(x)p(x) = \int_{\partial D} (G(x, y) \frac{\partial p}{\partial n}(y) - p(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y)) ds(y) - \int_D G(x, z) (\nabla \cdot \mathbf{b}(z)) dv(z) \quad (8)$$

تابع  $G(x, y)$  زمانی مشخص می شود که مختصات نقطه  $x$  مشخص شود. ضرب  $p(x)$  یعنی  $c(x)$  مشخصاً تابعی از موقعیت خود  $x$  است و آن را ضرب جمله آزاد معادله انتگرالی می نامند. مقدار این ضرب از حل انتگرال تکینه عبارت مرزی معادله (۳) حاصل می شود [۲۱]. زمانی که  $x$  داخل ناحیه باشد  $c(x)$  برابر یک بوده و برای نقاط مرزی برابر بخشی از مقدار یک است. مقدار این ضرب برای اجزای صاف مرزی که شامل منحنیهای اسپلاین نیز می شود، تقریباً برابر  $0.5$  خواهد بود [۲۱].

محاسبه توزیع فشار در ناحیه جریان نیازمند محاسبه توزیع فشار در روی اجزای مرزی است. با وجود برخی روشهای محاسبه توامان فشار در ناحیه و روی مرز [۲۲]، در اینجا محاسبه تفکیک شده فشار روی اجزای مرزی و ناحیه، مد نظر قرار گرفته است. بدین ترتیب سهولتهایی در امر پس پردازش تصاویر فراهم می شود. برای نمونه هنگامی که یافتن داده های فشار در نقاط دلخواه در داخل ناحیه جریان (غیر از مرکز سلولهای تصویر) مد نظر باشد و یا در مواردی که تخمین توزیع فشار در تفکیک پذیرهای مختلف مطلوب باشد این روند محاسبه، از مزایایی برخوردار است. لذا در این تحقیق ابتدا محاسبه فشار در اجزای مرزی مد نظر قرار گرفته و سپس

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{b} \quad \text{در ناحیه جریان } D \quad (1)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad \text{شرط مرزی روی دیواره } \partial D$$

معادله (۱) معروف به معادله پواسون فشار (PPE) است. در این معادله  $p$  فشار استاتیکی است که تابع اسکالر پیوسته و دارای مشتق جزئی پیوسته در ناحیه جریان  $D$  است،  $\mathbf{n}$  بردار یکه عمود بر مرز  $\partial D$  با جهت خارج از ناحیه سیال و  $\mathbf{b}$  تابعی برداری از میدان سرعت  $\mathbf{u}$  است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{b} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2)$$

در اینجا  $\mu$  لزجت و  $\rho$  چگالی سیال است. با قرار دادن  $\mathbf{b} = \nabla p$  در معادله (۲)، معادله ناویر استوکس حاصل می شود.

## ۲-۲- شکل انتگرالی معادله حاکم

اگر  $G$  یک تابع کمکی اسکالر پیوسته مشتق پذیر و دارای مشتق جزئی پیوسته در ناحیه جریان  $D$  باشد که نسبت به یک نقطه اختیاری ثابت  $x$  تعریف شود، می توان معادله زیر [۲۱] را برای این تابع و تابع فشار  $p$  برای هر نقطه  $z$  در ناحیه جریان  $D$  و روی مرز  $\partial D$  تحت عنوان قضیه دوم گرین نوشت:

$$\int_D (p(z) \nabla^2 G(x, z) - G(x, z) \nabla^2 p(z)) dv(z) = \int_{\partial D} (p(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) - G(x, y) \frac{\partial p}{\partial n}(y)) ds(y) \quad (3)$$

که  $x, z \in D$  و  $y \in \partial D$ . ملاحظه می شود که فشار  $p$  (مجهول) در این معادله در هر دو انتگرال روی مرز و ناحیه جریان ظاهر شده است. چنانچه تابع کمکی  $G$  به صورت زیر تعریف شود:

$$\nabla^2 G(x, z) = 0 \quad (4)$$

جمله فشار  $p(z)$  در انتگرال ناحیه در معادله (۳) حذف می شود.  $G$  را حل پایه شکل انتگرالی معادله حاکم می نامند. حل پایه معادله فشار پواسون که مورد نظر ماست از حل معادله زیر به دست می آید:

$$\nabla^2 G(x, z) + \delta(x, z) = 0 \quad (5)$$

که در آن  $x$  و  $z$  سلولهای تصویر در ناحیه جریان بوده و  $\delta(x, z)$  تابع دلتای دیراک است که نقش یک منبع واحد را در

مقادیر فشار در داخل ناحیه در گام بعدی محاسبه می‌شوند.  $b(z)$  در معادله (۸) با استفاده از معادله (۲) با گسسته‌سازی معادله ناویر استوکس به دست می‌آید. در تمام سلولهای تصویر مقادیر  $\frac{\partial p}{\partial n}$  و  $\frac{\partial G}{\partial n}$  در عبارت دوم و سوم معادله (۸) با استفاده از مفاهیم بخش بعد فراهم خواهد شد.

### ۳-۲- نمایش مرز در تصاویر

عموماً در بحث پردازش تصاویر پزشکی، برای مشخص کردن منطقه مورد بررسی از نقاط دیگر، روشهای مختلفی وجود دارد [۲۳]. یکی از زمینه‌هایی که در جداسازی<sup>۶</sup> منطقه جریان در تصاویر مورد توجه قرار می‌گیرد استفاده از خطوط مشخص کننده مرز است [۲۴]. تکنیکهای مختلفی بر اساس این نوع جداسازی توسعه یافته‌اند. الگوریتم مار<sup>۷</sup> یکی از تکنیکهای مطرح است که بر این پایه با کمینه سازی انرژی خطوط در تصویر عمل می‌کند [۲۵]. این روشها معمولاً بر پایه اسپلاین‌ها گسترش می‌یابند. توابع اسپلاین نقاط مرزی را در قالب یک معادله ریاضی پیوسته و نرم<sup>۸</sup> نمایش می‌دهند لذا این توابع مشتق پذیرند.

در دو جمله انتگرال مرز در معادله (۸) مشتق‌گیری توابع فشار و  $G$  در راستای عمود بر مرز مد نظر است. لذا نیاز به تعیین یک مرز ملایم وجود دارد. در اینجا ایده، استفاده از معادلات اسپلاین جدا کننده مرز برای تامین بردارهای عمود بر سطح است. همچنین به این ترتیب می‌توان تولید اجزای مرزی را نیز به کمک قسمتهای توابع مرزی اسپلاین جدا کننده تولید کرد. برای مثال اگر از تابع پایه بزی<sup>۹</sup> درجه دو برای جداسازی استفاده شده باشد، تابع  $S(t)$  مشخص کننده یک قسم از این منحنی در نقطه  $t \in [0, 1]$  از المان درجه دو به صورت زیر ارائه می‌شود [۲۶]:

$$S(t) = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)Q_1 + t^2 P_{1+1} \quad (9)$$

در این معادله  $P_1$ ،  $Q_1$  و  $P_{1+1}$  نقاط کمکی مشخص کننده منحنی بوده و مشخصه هر قسم محسوب می‌شوند. بدین ترتیب

مماس بر این منحنی در نقاط تشکیل دهنده آن از معادله زیر به دست می‌آید:

$$S_t(t) = -2(1-t)P_1 + 2(1-2t)Q_1 + 2tP_{1+1} \quad (10)$$

این معادله مقادیر  $x_t$  و  $y_t$  مولفه‌های بردار مماس در راستای  $x$  و  $y$  محور مختصات را به دست می‌دهد. بدین ترتیب برای اجزای مرزی در تصویر و اسپلاین، مقادیر بردار مماس واحد  $\tau$  و بردار عمود واحد  $n$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tau := \frac{1}{J}(x_t, y_t), \quad n := (n_x, n_y) = (\tau_y, -\tau_x) \quad (11)$$

در اینجا  $J = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$  است. با استفاده از بردار عمود بر مرز به دست آمده برای کرنل  $\frac{\partial G}{\partial n}$  معادله (۸) در حالت دو بعدی داریم:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y \right) \quad (12)$$

به همین ترتیب برای جمله  $\frac{\partial p}{\partial n}$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \quad (13)$$

که  $\frac{\partial p}{\partial x}$  و  $\frac{\partial p}{\partial y}$  متناظر با مولفه‌های بردار معادله (۲) هستند.

### ۴-۲- شبکه بندی مرز

در اینجا قسمتهای اسپلاینهای استفاده شده در جداسازی میدان تصویر، برای شبکه بندی مرزی در حل انتگرالی معادله (۸) به کار گرفته شده است. بدین ترتیب بخشی از محاسبات برای تشکیل مرز و شبکه بندی تامین می‌شود. از طرفی تخمین بردارهای عمود سطح که در انجام محاسبات انتگرالی مورد نیازند بدین ترتیب حاصل شده است.

در اولین گام برای ارزیابی نتایج روند حاضر برای محاسبه فشار و اجتناب از پیچیدگی و تفصیل معادلات در این مرحله، در اینجا از اجزای با متغیرهای ثابت در محاسبه فشار مرزی استفاده شده است. به این ترتیب مقدار فشار و مشتق آن بر روی این اجزا دارای مقدار ثابتی است. گره‌ها که نماینده نقاطی هستند که مقادیر متغیر بر روی اجزا در آن متمرکز است در مرکز اجزاء واقع است.

## ۵-۲- شبکه بندی ناحیه جریان

حل معادله پواسون نیازمند شبکه بندی میدان نیز هست. می توان با توجه به امکاناتی که تصاویر به دست می دهند فضای هر سلول تصویر را به عنوان یک جزء میدانی در نظر گرفت. از طرفی روشهای جداسازی تصویر که بر اساس تعیین مرز صورت می گیرند (مشابه اسپلاینها) دارای این محدودیت اند که پردازش روی خطوط صورت گرفته و لذا اطلاعاتی از اجزای داخل ناحیه جریان به دست نمی دهند. برای تعیین نقاطی که در داخل اسپلاین مشخص کننده میدان سرعت قرار دارند روند خاصی در این تحقیق در پیش گرفته شده است. در اینجا قصد داریم مشخصه‌ای بیابیم که با محاسبه آن، سلولهای داخل اسپلاین از نقاط خارجی تفکیک شوند. برای این منظور در اینجا از قضیه گوس استفاده شده است. این قضیه بیان می دارد که برای منحنیهای بسته دو بعدی همواره معادله زیر برقرار می باشد:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) ds(y) = \begin{cases} 0 & \text{نقطه } x \text{ خارج از مرز} \\ 1 & \text{نقطه } x \text{ داخل مرز} \end{cases} \quad (14)$$

این معادله نتیجه قضیه دیورژانس است [۲۷]. محاسبه این انتگرال برای نقاط صفحه تصویر با استفاده از شبکه بندی مرزها، بخش (۲-۴) و بردارهای عمود حاصل از پردازش اسپلاینهای جداساز میدان تصویر، بخش (۲-۳) امکان پذیر است. بدین ترتیب فاکتور زیر برای تعیین مقدار انتگرال در نقاط صفحه تصویر نسبت به اجزای مرزی قابل ارائه است:

$$\kappa_i = \sum_{k=1}^K \int_{\partial D_k} \frac{\partial G}{\partial n}(x, k) ds(k) \quad (15)$$

$\kappa_i$  معیار مشخص کننده موقعیت سلول تصویر نسبت به اسپلاین جداساز میدان و  $K$  تعداد کل اجزای مرزی اند. برای محاسبه این انتگرال از معادله (۱۲) استفاده می شود. روش استاندارد گوس را می توان برای حل عددی این انتگرال مشابه آنچه در بخش (۲-۶) ارائه خواهد شد به کار برد. با محاسبه این انتگرال در هر سلول تصویر، به این نقاط عددی نسبت داده می شود. برای نقاط داخل اسپلاین، عدد تخصیص یافته، تقریبی از واحد خواهد بود. برای تشخیص نقاط داخلی از یک برش<sup>۱۰</sup>

در مورد  $\kappa_i$  استفاده می شود. بدین ترتیب سلولهای تصویر در داخل ناحیه جریان تشخیص داده می شوند. با توجه به فاصله بین سلولهای تصویر می توان یک جزء میدانی به مرکز هر یک از این سلولهای تصاویر در داخل ناحیه تشکیل داد.

## ۲-۶- محاسبه فشار روی اجزای مرزی

با فرض مقدار  $G$  و  $\frac{\partial G}{\partial n}$  ثابت در روی هر جزء مرزی  $\partial D_k$ ، معادله (۸) مربوط به هر جزء مرزی  $l$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{1}{2} p(l) + \sum_{k=1}^K p(k) \int_{\partial D_k} \frac{\partial G}{\partial n}(l, y) ds(y) \quad (16)$$

$$= \sum_{k=1}^K \frac{\partial p}{\partial n}(k) \int_{\partial D_k} G(l, y) ds(y) - \sum_{z=1}^Z \nabla \cdot \mathbf{b}(z) \int_D G(l, z) dv(z)$$

جمله آخر در این معادله از انتگرال گیری روی سطح تمام سلولهای تصویر در منطقه جداسازی شده، برای هر نقطه به صورت مستقل به دست می آید. با ترکیب دو عبارت سمت چپ معادله فوق، معادله انتگرالی مربوط به جزء مرزی  $l$  را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

$$\sum_{k=1}^K A(l, k) p(k) = \sum_{k=1}^K B(l, k) \frac{\partial p}{\partial n}(k) - \sum_{z=1}^Z [\nabla \cdot \mathbf{b}(z)] C(l, z) \quad (17)$$

که در آن:

$$A(l, k) = \int_{\partial D_k} \frac{\partial G}{\partial n}(l, y) ds(y) + \frac{1}{2} \delta_{lk},$$

$$y \in \partial D_k \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & l = k & \text{اگر} \\ 0 & l \neq k & \text{اگر} \end{cases} \quad (18)$$

$$B(l, k) = \int_{\partial D_k} G(l, y) ds(y), \quad y \in \partial D_k$$

$$C(l, z) = \int_D G(l, z) dv(z)$$

به منظور دستیابی به معادله کلیتر برای استفاده های بعدی، در اینجا مقادیر انتگرالها در حالت تکینه در معادلات فوق مستتر هستند (ضریب ۵/۰ عبارت فشار  $p(l)$  در  $A(l, k)$  مستتر است). در اینجا  $y$  متعلق به اجزای مرزی و  $z$  اجزای داخل ناحیه اند که در اینجا سلولهای تصویر نقش آنها را بر عهده گرفته اند. تعداد

کل سلولهای تصویر ناحیه سیال برابر Z است.

مقادیر A, B و C در این معادلات به نام ثابتهای انتگرال گیری نامیده شده و مستقل از شرایط مرزی اند. برای حالتی که انتگرال گیری نسبت به خود جزء مرزی I صورت نمی گیرد یافتن این ثابتها با انتگرال گیری عددی قابل حصول است. یکی از روشهای انتگرال گیری پرکاربرد در این زمینه، استفاده از روش استاندارد گوس است [۲۸]. اگر M تعداد نقاط استفاده شده برای حل انتگرال بوده و  $\omega_i$  و  $\zeta_i$  به ترتیب موقعیت داخلی متغیر و وزن مربوط به نقطه i باشند، ثابتها انتگرال گیری به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned} A(l, k) &= \sum_{i=1}^M -\frac{1}{2\pi\omega_i^2} \psi \omega_i \frac{L_k}{2} \\ B(l, k) &= \sum_{i=1}^M -\frac{1}{2\pi} \ln r_i \omega_i \frac{L_k}{2} \\ C(l, k) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M -\frac{1}{2\pi} \ln r_{ij} \omega_i \omega_j \frac{h^2}{4} \end{aligned} \quad (19)$$

که  $r_i$  مقدار  $r$  مربوط به نقطه i از جزء مرزی مورد انتگرال گیری،  $r_{ij}$  فاصله تا موقعیت  $(i, j)$  از جزء داخل ناحیه و  $\psi$  فاصله عمودی x تا جزء مورد بررسی است.  $L_1$  و  $h$  نیز به ترتیب طول جزء مرزی و اندازه سلول تصویراند. معادله (۱۷) دارای تعداد K مجهول فشار در روی اجزای مرزی است. چنانچه برای تمام گره های I مرزی این معادله تکرار شود، K معادله با K مجهول به صورت زیر تولید خواهد شد:

$$\Phi \quad p = \varphi \quad (20)$$

$(K \times K) \quad (K \times 1) \quad (K \times 1)$

دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه خطی است که ماتریس  $\Phi$  در آن نامتقارن و پرتراکم<sup>۱۱</sup> با قطر برابر با ۵/۰ می باشد. بدین ترتیب حل دستگاه معادلات حاکم بد حالت<sup>۱۲</sup> می شود. البته با تدابیر خاصی می توان با دقت خوبی این معادلات را حل کرد [۱۸].

## ۲-۷- محاسبه فشار داخل ناحیه

چنانچه مقادیر فشار بر روی اجزای مرزی به ترتیبی که اشاره شد تعیین شده باشند، می توان از معادله (۸) برای محاسبه مقادیر فشار در داخل ناحیه نیز بهره برد. با استفاده از تقریب

مشابه (جزء ثابت) این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_{k=1}^K \frac{\partial p}{\partial n}(k) \int_{\partial D_k} G(m, y) ds(y) \\ &- \sum_{k=1}^K p(k) \int_{\partial D_k} \frac{\partial G}{\partial n}(m, y) ds(y) \\ &- \sum_{z=1}^Z \nabla \cdot \mathbf{b}(z) \int_D G(m, z) dv(z) \end{aligned} \quad (21)$$

که متغیر m در اینجا یک نقطه دلخواه داخل ناحیه جریان تصویر و  $y \in \partial D_k$  است. مشابه روندی که برای نقاط روی مرز در نظر گرفته شد، در اینجا نیز می توان معادله فوق را بر حسب ثوابت انتگرال گیری به صورت زیر نوشت:

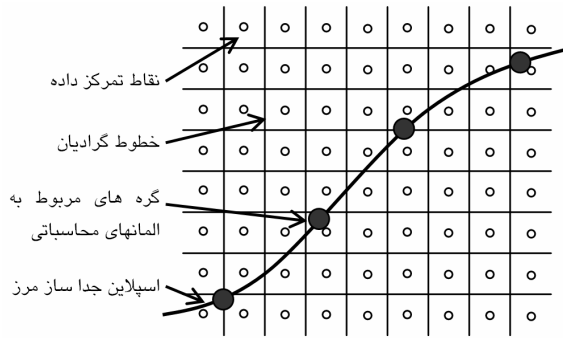
$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_{k=1}^K B(m, k) \frac{\partial p}{\partial n}(k) \\ &- \sum_{k=1}^K A(m, k) p(k) - \sum_{z=1}^Z [\nabla \cdot \mathbf{b}(z)] C(m, z) \end{aligned} \quad (22)$$

ثابت های انتگرال گیری در اینجا نسبت به نقطه ثابت داخلی m که فشار در آن نقطه مورد نظر است محاسبه می شوند. به عبارت دیگر معادلات (۱۹) برقرارند، فقط در اینجا انتگرالها به جای جزء مرزی l، نسبت به جزء میدانی m محاسبه می شوند. در اینجا تنها مجهول معادله، p(m) است. باید توجه کرد که p(k) مقادیر معلوم فشار روی اجزای مرزی اند که از محاسبات قبلی در دست اند. لذا این معادله را به هر تعداد لازم می توان مستقلاً به کار برد. در نتیجه از مزایای این روش امکان محاسبه توزیع جزئیتری از میدان فشار و امکان محاسبه آن در نقاط تکی دلخواه است.

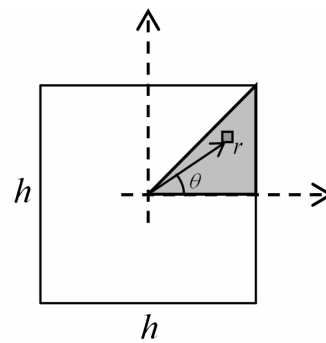
## ۲-۸- محاسبه انتگرالهای تکینه

انتگرالهای تکینه<sup>۱۳</sup> زمانی ظاهر می شوند که انتگرال گیری در اجزای مرزی بر روی خود نقاط I یا انتگرال گیری در اجزای داخل ناحیه بر روی سلول m تصویر صورت می گیرد. در محاسبه مقدار انتگرال A و B در نقاط تکینه مرزی و داخلی، مطابق بحثهای مراجع [۲۰ و ۲۱] عمل شده است. بر این اساس انتگرال A در نقاط تکینه، با فرض مسطح بودن خطوط





شکل ۲- توزیع داده ها، مرز تفکیک، گره های محاسباتی و خطوط گرادیان در مدل سازی تصویر جریان. گره های محاسباتی بر خطوط گرادیان و نقاط داده ای منطبق نیستند



شکل ۱- جزء سلول تصویر در داخل میدان برای حل انتگرال تکینه C

نسبت به  $\theta$  انتگرال می گیریم. با جاگذاری مقادیر انتگرال در آن، معادله زیر برای محاسبه مقدار انتگرال در نقاط تکینه داخل ناحیه حاصل می شود:

$$C(m, m) = -\frac{8h^2}{2\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \ln \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} \right) \quad (26)$$

## ۲-۹- محاسبه گرادیان فشار

از آنجا که گرادیان فشار شرایط مرزی مسئله را تشکیل می دهد، محاسبه دقیق آن در اینجا حائز اهمیت فراوان است. گرادیان فشار در کل ناحیه با محاسبه جمله  $b$  معادله (۲) محاسبه شده و باید پیش از محاسبات معادلات انتگرالی در میدان تصویر تعیین شده باشند. محاسبه این جمله از روشهای گسسته سازی مربوط به دینامیک سیالات محاسباتی در حل معادلات ناویر استوکس موجود است [۱۸]. از طرفی مقادیر محاسبه شده مذکور در نقاط دلخواه از میدان تصویر متمرکز شده اند در حالی که نقاط گرهی اجزای مرز مستقل از این نقاط انتخاب می شوند. شکل (۲) گویای عدم انطباق این نقاط بر داده های تصویر است. در اینجا روشی را برای یافتن مقادیر گرادیان فشار در روی نقاط گرهی مرز مرور خواهیم کرد. در این راستا از مفهوم نظریه توزیع<sup>۱۴</sup> استفاده شده است که پیچیدگی تکینه<sup>۱۵</sup> را به صورت زیر تعریف می کند:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} T(a-x)f(x)dx \quad (27)$$

اسپلاین، در روی مرز مساوی  $h/5$  و در داخل ناحیه برابر با واحد خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$A(1,1) = \frac{1}{2}, \quad A(m,m) = 1 \quad (23)$$

به همین ترتیب مقدار انتگرال B در نقاط تکینه مرزی مطابق مراجع مذکور از معادله زیر به دست آمده است:

$$B(1,1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1} \ln r ds = \frac{L_1}{2\pi} \left( 1 - \ln \frac{L_1}{2} \right) \quad (24)$$

برای محاسبه فشار نقاط داخلی نیز چنانچه مرکز سلول m تصویر بر جزء مرزی l منطبق شده باشد مجدداً مقدار B از معادله فوق حاصل می شود. با توجه به قطبی بودن حدود انتگرال گیری در مقایسه با شکل مربعی سلولهای تصویر، برای یافتن انتگرال تکینه  $C(1,m)$  زمانی که در محاسبه فشار مرز، جزء مرزی l بر جزء داخل ناحیه m منطبق است یا برای محاسبه  $C(m,m)$  در هنگام یافتن فشار نقاط داخل ناحیه، در اینجا انتگرال تکینه روی جزء مربعی ناحیه به صورت شکل (۱) در یک هشتم سطح قطاع در سیستم مختصات استوانه ای محاسبه شده و سپس به کل جزء مربعی تعمیم داده می شود:

$$C(m, m) = -\frac{1}{2\pi} \int_{D_m} \ln r dv = -8 \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{\frac{h}{2\cos\theta}} r \ln r dr d\theta \quad (25)$$

برای محاسبه انتگرال فوق ابتدا نسبت به  $r$  انتگرال می گیریم. سپس با جاگذاری حدود انتگرال و با میل دادن متغیر به سمت صفر مقدار انتگرال نهایی در نقطه  $r=0$  را می یابیم و سپس

تصاویر که بر مبنای حل دینامیک سیالات زیستی (CFD) است مورد بررسی قرار داده و نتایج آن را با مقدار حاصل از این روش مقایسه خواهیم کرد. همین آزمایش با این دو روش وقتی داده‌های ورودی با هممه همراه باشند تکرار شده است. کلیه کدهای به کار رفته در این تحقیق با نرم افزار محاسباتی متلب ویرایش ۷ نوشته شده است.

### ۳-۱- مدل ریاضی میدان جریان مورد آزمون

در این قسمت کارایی کمی روش ارائه شده به کمک یک مدل عددی ناشی از یک میدان داده سرعت با دیورژانس صفر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این ارزیابی از سیستم جریان کوئت<sup>۱۸</sup> استفاده شده است. این سیستم شامل دو استوانه هم مرکز است که فاصله بین آنها با سیال لزج پر شده است. جریان سیال در این سیستم از دوران نسبی یک یا هر دو استوانه ایجاد می‌شود. معادلات ناویر استوکس در این هندسه در محور مختصات استوانه‌ای قابل حل اند [۳۰]. می‌توان نشان داد که میدان سرعت و فشار در این ناحیه از معادله زیر تبعیت می‌کنند:

$$v = c_1 r + c_2 / r \quad (31)$$

$$p = \rho(c_1^2 r^2 - c_2^2 / r^2 + 4c_1 c_2 \ln r) + c_3 \quad (32)$$

در اینجا  $c_1$  و  $c_2$  ثابتهای هستند که از شرایط مرزی به دست می‌آیند. با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای این سیستم با شعاع داخلی ۰/۲ cm و شعاع خارجی ۱ cm، بر طبق محاسبات مقدار این ثوابت به ترتیب برابر ۲- و ۲+ در نظر گرفته شده است.  $c_3$  نیز نمایانگر ثابت انتگرال گیری است که مقدار آن برابر با صفر فرض شده است. بدین ترتیب ما مجهز به میدان سرعت تراکم ناپذیر لزجی شده‌ایم که توزیع فشار در آن مشخص است. با استفاده از داده‌های سرعت فوق می‌توان تصاویر مجازی PC-MRI تولید کرد. شکل (۳-الف) و (ب) مولفه‌های سرعت به دست آمده از معادله (۳۱) را در راستای محورهای  $x$  و  $y$  نمایش می‌دهند. شکل (۳-ج) نیز تصویر مقدار<sup>۱۹</sup> حاصل از این مدل را نمایش می‌دهد.

توزیع فشار به دست آمده در این میدان به نحوی است که

که  $T$  کرنل تکینه و  $f(x)$  جزئی از فضای تابع آزمایش است. از آنجا که کرنلهای نوع دلتا اجزای کلیدی در نظریه تقریب و حل عددی معادلات دیفرانسیل اند، ما در اینجا نیز از کرنلهای تکینه مربوطه استفاده می‌کنیم. برای این تقریب از تابع دلتای روش مرزی مغروق<sup>۱۶</sup> که در سال ۱۹۷۲ توسط پسکین [۲۹] برای مدلسازی جریان خون در قلب به کار رفته است استفاده شده است. تابع دلتای دیراک در این روش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h} (1 + \cos(\frac{\pi x}{2h})) & \text{if } |x| < 2h \\ 0 & \text{if } |x| \geq 2h \end{cases} \quad (28)$$

برای اطلاعات بیشتر از شرایط مورد نیاز برای به دست آوردن این تابع دلتا به مرجع مذکور مراجعه کنید. پشتیبان<sup>۱۷</sup> استفاده شده در این تابع دلتای دیراک، اندازه شبکه  $h$  در نظر گرفته می‌شود. در دو بعد، تابع دلتای دیراک از حاصل ضرب توابع دیراک در دو راستای محور مختصات به دست می‌آید یعنی:

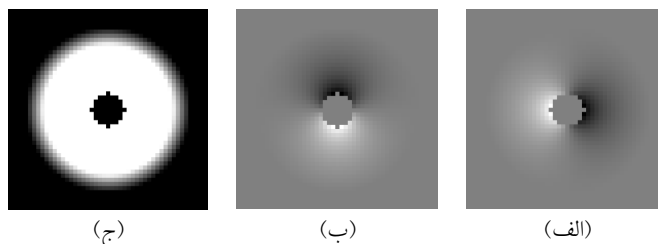
$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2) \quad (29)$$

که در آن  $x_1$  و  $x_2$  مولفه‌های محور مختصات در صفحه دو بعدی تصویرند. بدین ترتیب نقاط اطراف مرز به صورت نقاط لاگرانژی در نظر گرفته شده و انتگرال معادله (۱۷) با جمع عددی جایگزین می‌شود. نقاط روی مرز  $\partial D$  را اگر با  $y$  مشخص کنیم مقدار  $\nabla p(y)$  از معادله زیر محاسبه می‌شود:

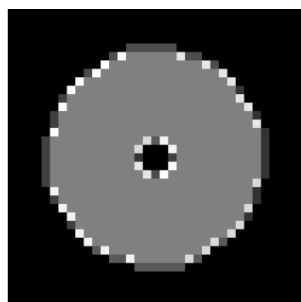
$$\nabla p(y) = \int_x \nabla p(x) \delta(x - y) dx \quad (30)$$

### ۳- ارزیابی روش و نتایج

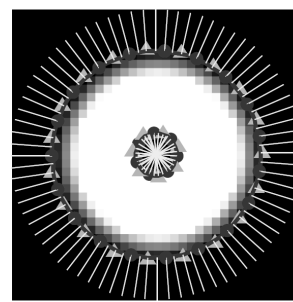
در این تحقیق از یک مدل ریاضی تامین کننده تصاویر شبیه سازی شده PC-MRI برای بررسی صحت معادلات ارائه شده در محاسبه فشار از تصاویر جریان و ارزیابی میزان کارایی این روش استفاده شده است. این مدل ریاضی حاوی مقادیر مشخص بردارهای سرعت و توزیع فشار می‌باشد. در این بخش ابتدا به تبیین مدل ریاضی به کار رفته و نتایج حاصل از شکل انتگرالی معادلات حاکم در تعیین توزیع فشار خواهیم پرداخت. در ادامه یک روش متداول برای محاسبه میدان فشار از روی



شکل ۳- تصاویر PC-MRI شبیه سازی شده از ناحیه جریان کوئت



شکل ۵- تشخیص و جزء بندی نقاط داخل میدان



شکل ۴- جداسازی و محاسبه بردارهای عمود تصویر

اسپلین در نظر گرفته شده است. با ادغام این دو بخش سهولتهایی در محاسبه شاخصهای هندسی، انتگرال گیری کرنلها و همین طور تعیین محل گرهها فراهم می شود. همینطور به کمک معادله (۱۱) بردار عمود واحد در روی این دیواره محاسبه شد. خطوط واحد در شکل (۴) که در راستای عمود بر خط جداساز به سمت خارج از ناحیه جریان قرار دارند، نشان دهنده بردارهای عمود مزبورند. جهت این بردارها نشان دهنده دقت مناسب این روش در محاسبه بردارهای عمود است.

برای شبکه بندی سلولهای تصاویر در داخل میدان جریان نیز مطابق بخش (۲-۵) برای تمام نقاط صفحه تصویر مقدار انتگرال (۱۵) محاسبه و سپس از یک برش برای تعیین نقاط استفاده گردید. شکل (۵) نشان دهنده نتیجه ناشی از این برش است. بخشی از صفحه تصویر که با رنگ غیر سیاه نمایش داده شده است نشان دهنده نقاطی است که با این الگوریتم تشخیص داده شده اند.

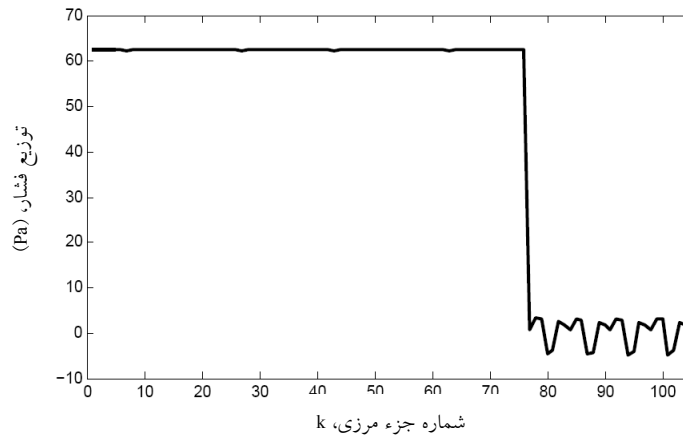
### ۳-۳- توزیع فشار مرزی

تشکیل معادلات (۱۷) و حل دستگاه معادلات (۲۰)، مقادیر فشار بر روی مرز را به دست می دهد. شکل (۶) توزیع فشار

توزیع سرعت موجود در میدان را ارضا می کند. از آنجا که این نتایج ناشی از حل تحلیلی معادلات حاکم اند لذا نتایج به دست آمده از روش جاری و روش CFD به خوبی با این نتایج قابل مقایسه بوده و کارایی هر کدام از این روشها قابل ارزیابی اند.

### ۲-۳- جداسازی، محاسبه عمود و شبکه بندی

در این قسمت بر روی تصاویر شبیه سازی شده PC-MRI جداسازی ناحیه جریان به صورت دستی و با کمک منحنیهای اسپلین بزیر انجام شد. الگوریتم دی-کاستلژانو<sup>۲۰</sup> برای این منظور به کار گرفته شد [۲۶]. معادلات حاکم بر این نوع اسپلین به صورت معادلات (۹) و (۱۰) هستند. لازم به ذکر است که روش حاضر نمونه ای از روشهای جداسازی بر پایه مرز است و می توان به جای جداسازی حاضر، از روشهای جداسازی مشابه دیگر که بر پایه مرز هستند، مانند الگوریتم تخمین سطح<sup>۳۱</sup> [۳۱] یا الگوریتم مار [۲۵] نیز استفاده کرد. شکل (۴) منحنی نهایی ناشی از این جداسازی را نشان می دهد. در این شکل دایره ها و مثلثهای تو پر به ترتیب نمایانگر نقاط تعیین شده اولیه و نقاط کنترلی اند. شبکه بندی این دیواره منطبق بر قسمتهای منحنی



شکل ۶- توزیع فشار بر روی اجزای مرز بر حسب شماره جزء. اجزای شماره ۱ الی ۷۵ مربوط به سطح خارجی اند



شکل ۷- تصویر توزیع فشار حاصل از (الف) روش حاضر و مقایسه آن با (ب) مقدار واقعی

شکل (۷) به دست آمده است. در اینجا توزیع فشار بر روی همان نقاط سلول تصویر صورت گرفته است ولی می توان هر نقطه داخلی دلخواه را نیز مورد محاسبه قرار داد.

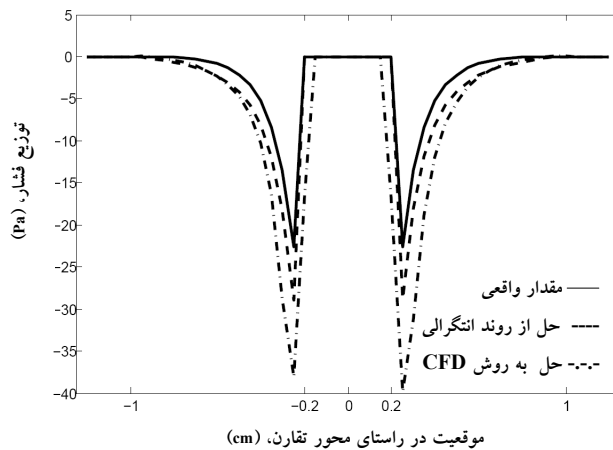
### ۳-۵- مقایسه با حل دیفرانسیلی بر مبنای دینامیک سیالات محاسباتی (CFD)

در این تحقیق به منظور ارزیابی روش انتگرالی توصیف شده، مقایسه‌ای با روش مرسوم محاسبه میدان فشار که از روش تفاضل محدود برای حل معادله پواسون فشار سود می برد صورت گرفته است. در این تکنیک معادله پواسون فشار (۱) به همراه شرط مرزی نیومن که مناسبترین شرط مرزی برای حل این معادله است با روشهای دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) حل می شود. شکل دیفرانسیلی معادله پواسون فشار یک معادله جزئی از درجه دو است که در آن فشار در یک نقطه باید

روی مرز ناشی از این محاسبات برای مدل مورد بررسی را نشان می دهد. مقادیر فشار بر روی دیواره خارجی این مدل مطابق شکل زیر از توزیع یکنواختی برخوردار است. همان طور که از این شکل برای اجزای شماره (۷۵) تا (۱۰۵) (که اجزای روی دیواره داخلی هستند) مشاهده می شود، خطای محاسباتی برای اجزای روی دیواره داخلی مدل جریان بیشتر از مقادیر مرز خارجی است

### ۳-۴- توزیع فشار میدان

محاسبه داده های فشار در نقاط دلخواه داخل میدان با استفاده از معادله (۲۲) صورت می گیرد. این معادله تنها شامل انتگرال گیری روی مقادیر معلوم گرادیان فشار و فشار مرزی است. برای رفع انتگرالهای تکیه مطابق بحثهای پیشین عمل شده و در نهایت توزیع فشار در ناحیه جریان به صورت



شکل ۸- توزیع فشار در محور تقارن مدل جریان کوئت از محاسبات ریاضی معادله (۳۲) (خط پر) با استفاده از حل انتگرالی حاضر (خط چین) و از روشهای متداول دیفرانسیلی (خط نقطه) وقتی داده های اولیه سرعت بدون مهمه‌اند

با روش متداول است.

به منظور فراهم ساختن مقایسه کمی بین نتایج این دو روش با مقادیر واقعی، خطای ناشی از هر یک از این روشها نسبت به مقدار واقعی از روی فاکتور خطای نسبی متوسط زیر محاسبه شد:

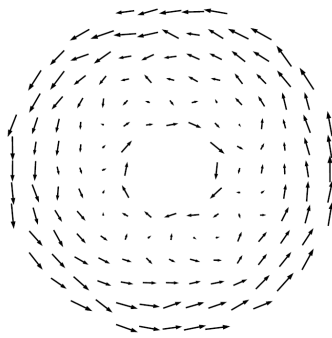
$$\text{خطای نسبی متوسط} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \frac{|p_i - \hat{p}_i|}{|p_i|} \quad (33)$$

در اینجا  $\hat{p}_i$  فشار تخمین زده شده از هر یک از این روشها و  $p_i$  مقدار فشار واقعی در گره  $i$  می‌باشد. بر اساس این فاکتور مشاهده شده است که با استفاده از شکل انتگرالی معادلات، به خطای  $5/6487$  دست یافته شده است در حالی که با روشهای مرسوم به خطای  $8/2715$  دست یافته‌ایم که خطای بیشتری نسبت به روش انتگرالی است.

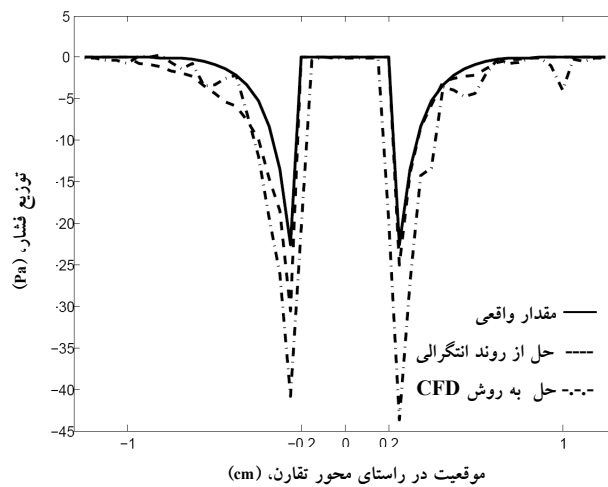
### ۳-۶- مقایسه اثر مهمه

داده‌های سرعت ناشی از تصاویر پزشکی عموماً با مهمه همراه‌اند. از آنجا که استخراج داده‌های فشار از روی داده‌های سرعت از طریق معادلات خطی نیست، لذا رفتار معادله پواسون فشار در مقابل داده‌های سرعت مهمه دار قابل پیش‌بینی نیست. در این بخش از تحقیق برای نشان دادن اثر مهمه بر

به همراه فشار تمام نقاط دیگر محاسبه شود (معادله دیفرانسیل بیضی‌گون است). جزییات تکنیک مورد نیاز برای حل این معادله در مراجع [۸ و ۱۶] ارائه شده است. در اینجا همین روش بر روی ناحیه جریان مورد بررسی اعمال شده است. توزیع متغیرهای سرعت و فشار در گره‌های میدان از نوع متمرکز<sup>۲۲</sup> است [۳۲]. هر کدام از سلولهای تصویر به عنوان یک گره محاسباتی در نظر گرفته شده است. مقدار  $b$  از گسسته‌سازی تقریب میانی<sup>۲۳</sup> که خطای محاسباتی کمتری فراهم می‌سازد استفاده شده است. جزییات بیشتر از نحوه گسسته‌سازی معادلات در مرجع [۳۲] آمده است. برای حل دستگاه معادلات حاصل، از روش  $SOR$ <sup>۲۴</sup> که یک روش تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی است استفاده شده است. معادلات حاکم برای میدان محاسباتی تصویر با سلولهای هم اندازه با اندازه  $h$  برابر با  $0.5 \text{ mm}$  گسسته‌سازی شده است. برای مقایسه، توزیع فشار به دست آمده از دو روش انتگرالی و دیفرانسیلی، در کنار توزیع واقعی میدان فشار از معادله (۳۲) در راستای محور تقارن مدل جریان کوئت رسم شده است. شکل (۸) نمایانگر این توزیع فشار است. مقایسه دیداری منحنیها در این شکل نشان می‌دهد که محاسبه از روی شکل انتگرالی دارای نتایج نزدیکتری به مقدار واقعی در مقایسه



شکل ۹- ناحیه سرعت جریان کوئت با حضور همهمه گوسی سفید



شکل ۱۰- توزیع فشار در محور تقارن مدل جریان کوئت از محاسبات ریاضی معادله (۳۲) (خط پر) با استفاده از حل انتگرالی حاضر (خط چین) و از روشهای متداول دیفرانسیلی (خط نقطه) وقتی داده های اولیه سرعت با همهمه ترکیب شده اند

از هر دو روش نسبت به مقدار واقعی از معادله خطای (۳۳) استفاده شد. محاسبات خطا این مقدار را برای شکل انتگرالی  $36/852^{\circ}$  و برای روش معمول  $48/7766$  به دست داده است. شکل کلی نمودار حاصل هم به خوبی نشان دهنده تاثیر کمتر این روش در تخفیف اثر همهمه میدان سرعت بر محاسبات فشار است. این رفتار به ماهیت انتگرالی این روش مربوط و استفاده از تمام نقاط میدان در محاسبه فشار یک نقطه مربوط می شود.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله ارزیابی مزایای استفاده از شکل انتگرالی معادله پواسون فشار در تخمین توزیع فشار از روی داده های سرعت

دقت تخمینهای حاصل از شکل انتگرالی و شکل رایج محاسبه توزیع فشار، از همهمه های مصنوعی در داده های تصویر PC-MRI استفاده شده است. همهمه گوسی سفید<sup>۲۵</sup> با نسبت سیگنال به همهمه  $SNR=10$  به داده های ناحیه جریان کوئت اضافه شد.  $SNR$  مطابق تعریف برابر نسبت ماکزیمم سرعت به جذر مربع واریانس همهمه است. میدان سرعت ناشی از اعمال این همهمه بر داده های سرعت کوئت به صورت شکل (۹) می باشد.

با انجام محاسبات به کمک شکل انتگرالی فراهم شده در این تحقیق و همچنین با استفاده از الگوریتم بخش (۳-۵) توزیع فشار بر روی محور تقارن ناحیه جریان کوئت به صورت شکل (۱۰) به دست آمده است. در اینجا نیز برای تخمین کمی خطای ناشی

تصاویر PC-MRI مورد توجه قرار گرفته است. برای محاسبه این توزیع، ابزارهای مختلفی در این محاسبات مورد توجه قرار گرفت. استفاده از جداسازهای اسپلاین برای تخمین دامنه جریان، استفاده از قضیه گرین در تخمین سلولهای تصاویر جریان و تخمین داده‌های نقاط دلخواه میدانی به کمک تقریب نظریه توزیع از جمله این ابزارها هستند.

استفاده از جداسازهای فرم اسپلاین از آنجا حائز اهمیت است که این نوع جداسازها طیف عمده‌ای از روشهای جداسازی مرسوم در پردازش تصاویرند. از طرفی ماهیت مرزی این نوع جداسازی و پیوسته بودن تابع حاصل و ماهیت قسمی این اجزا آن را مناسب برای مطالعات حل میدان با کمک قضیه گرین که حل میدان تصویر را به حل در روی خط مرز تخفیف می‌دهد ساخته است. در نتیجه این نوع جداسازها مزایایی در حل مسئله فراهم می‌کنند که از جمله عدم نیاز به تعیین مرز ناحیه سیال، استفاده از قسمهای اسپلاین به عنوان اجزای مرزی، محاسبه دقیق و موثر بردارهای عمود سطحی که در اعمال شرایط مرزی موثرند و امکان محاسبه دقیق فواصل گرهی هستند.

حضور سلولهای تصاویر به‌عنوان اجزای داخل میدان در اینجا حائز اهمیت است. در حل انتگرالی معادله پواسون ما نیاز به اجزای داخل میدان داریم تا جمله حجمی معادله انتگرالی حاصل محاسبه شود. در اینجا حضور سلولها و اندازه مشخص آنها و همچنین امکان محاسبه شاخصهای میدانی در این نقاط راهگشا بوده و اجزای داخل میدان را شکل داده است. در این تحقیق با فرض شبکه بندی میدان توسط سلولهای تصویر، تمامی اطلاعات میدانی تصویر برای محاسبه مقادیر فشار مرزی و در نتیجه محاسبه فشار میدانی به‌کار گرفته شده است.

در ارائه شکل انتگرالی معادلات حاکم سعی شده است تمامی موارد ضروری با جزییات کامل ارائه شود. همچنین مقادیر تحلیلی انتگرالها برای محاسبه در نقاط تکینه ارائه شده‌اند. محاسبه فشار در روی مرز و سپس محاسبه فشار در داخل ناحیه در این راستا مد نظر قرار گرفته است. بدین ترتیب امکان ویژه‌ای برای محاسبات فشار در ناحیه جریان مورد نظر

فراهم می‌شود. امکان تعیین فشار در نقاط تکی و یا در طیف دلخواهی از نقاط از جمله این مزایاست. از طرفی امکان افزایش تفکیک‌پذیری تصویر فشار نیز با این تدبیر امکانپذیر است. به منظور تعیین کمی تأثیر این روش در مقایسه با روش مرسوم حل دیفرانسیلی معادله حاکم، یک مدل ریاضی ناحیه جریان سیال لزج تراکم ناپذیر که میدان فشار آن نیز معلوم است مورد نظر قرار گرفت. مدل ریاضی جریان کوئت از آن جهت که از هندسه پیچیده (دو مرز گرد مجزا و وجود هندسه مربعی سلول تصویر در تقابل با دیواره‌های گرد) برخوردار بوده و توزیع فشار داخلی آن در راستای محورهای مختصات محاسباتی (که در اینجا دکارتی است) نیستند، مورد مطالعه مناسبی را تشکیل می‌دهد. برای هر دو روش حل انتگرالی و دیفرانسیلی، اجزای داخل ناحیه به کمک قضیه گوس مشخص شدند. توزیع پیوسته و ملایم مرز نشان از کارایی بالای این روش در تعیین اجزای میدان دارد. برای مقایسه، محاسبه میدان فشار در دو روش بر روی سلولهای میدان تصویر صورت گرفت. برای ارزیابی کارایی دو روش، توزیع فشار بر روی خط تقارن ناحیه جریان کوئت ناشی از دو روش به‌صورت کیفی و محاسبه خطای نسبی متوسط مقایسه شد. محاسبات مزبور نشان می‌دهند که حل انتگرالی همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد از دقت بالاتری برخوردار است. مقدار خطاها به ترتیب از درجه ۵ و ۸ بودند. دلیل بزرگ بودن رقم خطاها در این محاسبات وجود طیف وسیع سلولهای میدان فشار واقعی در کنار دیواره‌هاست که مقدار نزدیک به صفر دارند و باعث کوچک شدن مخرج در محاسبات خطای متوسط می‌شوند.

یکی دیگر از دلایل گرایش به حل انتگرالی میدان فشار در این تحقیق (علاوه بر خطای محاسباتی) در پیش‌بینی پاسخ این نوع حل به وجود همهمه در ناحیه سرعت بوده است. با توجه به ماهیت این نوع حل در استفاده از تمام نقاط میدان در یافتن شاخص در یک نقطه، انتظار می‌رفت این روش حل توام با کاهش اثرات همهمه بر توزیع فشار میدان باشد. نتایج اعمال همهمه‌های مصنوعی بر ناحیه سرعت و حل به دو روش

### جدول ۱- خطای توزیع فشار در تعداد اجزای مرزی مختلف

۱۵۲	۱۶۰	۱۷۶	۱۸۴	تعداد اجزای مرزی
۵/۴۶۲۸	۵/۵۱۰۵	۵/۶۴۸۷	۵/۵۱۷۰	مقدار خطای نسبی متوسط

حساسیت به مراتب کمتری به همهمه مشاهده می‌شود. تحقیق حاضر نشان می‌دهد در بازه خاصی از تعداد اجزای مرزی، تغییرات عمده در دقت محاسبات توزیع فشار مشاهده نشده و هر تعداد جزء مرزی متعلق به این بازه قابل استفاده است. جدول (۱) تغییرات خطای نسبی متوسط را بر حسب تعداد اجزای مرزی متعلق به این بازه نشان می‌دهد. در اینجا لزوم یافتن فاکتور مناسبی که مشخص کننده بازه مذکور برای تشخیص تعداد اجزای مورد نیاز باشد ضروری به نظر می‌رسد.

انتگرالی و دیفرانسیلی مبین این پیش‌بینی است. در شکل دیداری توزیع فشار نوسانات کمتری نسبت به حل دیفرانسیلی در نتایج حل انتگرالی مشاهده می‌شود. مقایسه کمی خطا نیز مبین این اثر است.

این بررسیها نشان می‌دهند برای استخراج توزیع فشار از روی تصاویر پزشکی، وقتی از جداسازی مرزی (بر مبنای اسپلاینهای جدا کننده ناحیه) استفاده شود، حل انتگرالی معادله پواسون فشار مزایایی در پی دارد. در این حالت توزیع فشار با دقت بالاتر و

### واژه‌نامه

- |                              |                              |                                     |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. splines                   | 10. threshold                | 19. magnitude image                 |
| 2. noise                     | 11. populated                | 20. de-Casteljau                    |
| 3. ultrasound                | 12. Ill-posed                | 21. level set                       |
| 4. phase-contrast            | 13. singular integrals       | 22. collocated                      |
| 5. pressure poisson equation | 14. distribution theory      | 23. two point central approximation |
| 6. segmentation              | 15. singular convolution     | 24. successive over relaxation      |
| 7. snake                     | 16. immersed boundary method | 25. white gaussian noise            |
| 8. smooth                    | 17. support                  |                                     |
| 9. Bezier                    | 18. Couette                  |                                     |

### مراجع

- Smiseth, O. A., Steine, K., Sandbæk, G., Stugaard, M., and Gjølberg, T., "Mechanics of Intraventricular Filling: Study of LV Early Diastolic Pressure Gradients and Flow Velocities," *American Physiological Society*, Vol. 275, PP. H1062-9, 1998.
- Routh, H. F., "Doppler Ultrasound; the Ability to Measure and Image Blood Flow," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, Nov/Dec, PP. 31-40, 1996.
- Pettigrew, R. I., Oshinski, J. N., Chatzimavroudis, G., and Dixon, W. T., "MRI Techniques for Cardiovascular Imaging," *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 10, PP. 590-601, 1999.
- Song, S. M., and Leahy, R. M., "Computation of 3-D Velocity Fields from 3-D CINE CT Images of a Human Heart," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 10, No. 3, PP. 295-306, 1991.
- Ebbers, T., Wigstrom, L., Bolger, A., Engvall, J., and Karlsson, M., "Estimation of Relative Cardiovascular Pressures Using Time-Resolved Three-Dimensional Phase-Contrast MRI," *Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 45, PP. 872-879, 2001.
- Oshinski, J. N., Parks, W. J., Markou, C. P., Bergman, H. L., Larson, B. E., Ku, D. N., Mukundan, S., and Pettigrew, R. I. Jr., "Improved Measurement of Pressure Gradients in Aortic Coarctation by Magnetic Resonance Imaging," *Journal of the American College of Cardiology*, Vol. 28, No. 7, PP. 1818-1826, 1996.
- Urchuk, S. N., Fremes, S. E., and Plewes, D. B., "In Vivo Validation of MR Pulse Pressure Measurement in an Aortic Flow Model: Preliminary Results," *Magnetic Resonance in Medicine*, Vol. 38, PP. 215-223, 1997.



8. Song, S. M., Leahy, R. M., Boyd, D. P., Brundage, B. H., and Napel, S., "Determining Cardiac Velocity Fields and Intraventricular Pressure Distribution from a Sequence of Ultrafast CT Cardiac Images," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol. 13, No. 2, PP. 386-397, 1994.
9. Yang, G. Z., Kilner, P. J., Wood, N. B., Underwood, S. R., and Firmin, D. N., "Computation of Flow Pressure Fields from Magnetic Resonance Velocity Mapping," *Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 36, PP. 520-526, 1996.
10. Tasu, J. P., Mousseaux, E., Delouche, A., Oddou, C., Jolivet, O., and Bittoun, J., "Estimation of Pressure Gradients in Pulsatile Flow from Magnetic Resonance Acceleration Measurement," *Magnetic Resonance in Medicine*, Vol. 44, PP. 66-72, 2000.
11. Tyszka, J. M., Laidlaw, D. H., Asa, J. W., and Silverman, J. M., "Three-Dimensional, Time-Resolved (4D) Relative Pressure Mapping Using Magnetic Resonance Imaging," *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 12, PP. 321-329, 2000.
12. Pelc, N. J., Herfkens, R. J., Shimakawa, A., and Enzmann, D. R., "Phase Contrast Cine Magnetic Resonance Imaging," *Magn. Reson. Q.*, Vol. 7, PP. 229-254, 1991.
13. Saber, N. R., Wood, N. B., Gosman, A. D., Merrifield, R. D., Yang, G. Z., Charrier, C. L., Gatehouse, P. D., and Firmin, D. N., "Progress Towards Patient-Specific Computational Flow Modeling of the Left Heart via Combination of Magnetic Resonance Imaging with Computational Fluid Dynamics," *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 31, PP. 42-52, 2003.
14. Marshall, I., Zhao, S., Papatheanasopoulou, P., Hoskins, P., and Xu, X.Y., "MRI and CFD Studies of Pulsatile Flow in Healthy and Stenosed Carotid Bifurcation Models," *Journal of Biomechanics*, Vol. 37, PP. 679-687, 2004.
15. Nasiraei-Moghaddam, A., Behrens, G., Fatourae, N., Agarwal, R., Choi, E. T., and Amini, A. A., "Factors Affecting the Accuracy of Pressure Measurements in Vascular Stenoses from Phase-Contrast MRI," *Magnetic Resonance in Medicine*, Vol. 52, PP. 300-309, 2004.
16. Pashae, A., Shooshtari, P., and Fatourae N., "Pressure Map Extraction from Velocity Images and Effect of Image Resolution," the 7<sup>th</sup> *International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, France, March 22-25, 2006.
17. Pashae, A., Shooshtari, P., and Fatourae, N., "Measurement of Intravascular Pressure Distributions Using Velocity Images," 12<sup>th</sup> *International Conference on BioMedical Engineering*, Singapore, December 7-10, 2005.
18. Ferziger, J. H., and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3<sup>rd</sup> ed., New York: Springer-Verlag, 2002.
19. Gresho, P. M., and Sani, R. L., "On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, PP. 1111-1145, 1987.
20. Paris, F., and Canas, J., *Boundary Element Method, Fundamentals and Applications*, Oxford Science Publications, 1997.
21. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
22. Ingher, M. S., Mammoli, A. A., and Brown, M. J., "A Comparison of Domain Integral Evaluation techniques for Boundary Element Methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 52, PP. 417-432, 2001.
23. Gonzalez, R. C., and Woods, R. E., *Digital Image Processing*, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1993.
24. Luo, S., and Zhong, Y., "Extraction of Brain Vessels from Magnetic Resonance Angiographic Images: Concise Literature Review, Challenges, and Proposals," in *Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference*, Shanghai, China, September 1-4, 2005.
25. Kass, M., Witkin, A., and Terzopoulos, D., "Snakes: Active Contour Models," *Int. J. Computer Vision*, Vol. 1, PP. 321-331, 1987.
26. Cohen, E., Riesenfeld, R.F., and Elber, G., *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*, A K Peters Ltd, 2001.
27. Wylie, C.R., and Barrett, L.C., *Advanced Engineering Mathematics*, 6<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, Inc., 1995.
28. Gerald, C. F., and Wheatley, P. O., *Applied Numerical Analysis*, 6<sup>th</sup> ed., Addison Wesley Longman, Inc., 1999.
29. Peskin, C. S., "The immersed boundary method," *Acta Numerica*, PP. 1-39, 2002.
30. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*. 2<sup>nd</sup> ed, Pergamon Press plc, 1987.
31. Wang, K. C., "Level Set Methods for Computational Prototyping with Application to Hemodynamic Modeling." In: *Electrical Engineering*. 2001, Stanford University: Stanford, CA: Stanford University, 2001.
32. Abdallah, S., "Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary conditions Using a Non-Staggered Grid I," *Journal of Computational Physics*, Vol. 70, PP. 182-192, 1987.