

تشخیص لبه با استفاده از تبدیل ویولت مختلط گسسته

حسین ربانی^{*}، منصور وفادوست^{*} و شهره کسای^{**}

گروه فیزیک و مهندسی پزشکی، دانشگاه علوم پزشکی اصفهان

دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۴/۵/۹ - دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۵/۱۱)

چکیده - تحلیل و فهم تصاویر پزشکی، از لحاظ کلینیکی برای تشخیص بیماریها و درمان، همچنین در بینایی ماشین و تشخیص الگو دارای اهمیت است. یکی از مهمترین مباحث در این زمینه، تشخیص مرز اشیا است که غالباً پایه‌ای برای پردازشهای بعدی همچون تشخیص عضو و بافت، بخش بندی تصویر، تحلیل حرکت، اندازه‌گیری پارامترهای فیزیولوژیکی و آناتومیکی و غیره است. گرچه یکی از بهترین روشهای تشخیص لبه استفاده از تبدیل ویولت است، اما تبدیل ویولت معمولی از نقایصی نیز برخوردار است. از جمله نقاط ضعف این تبدیل وابستگی آن به شیفت ورودی و ضعف در تشخیص جهت‌های صحیح در زیرباندهای حاصله در حالت چند بعدی است. تبدیل ویولت مختلط، با استفاده از ویولت مادرمختلط، بر این نقاط ضعف غلبه کرده و در عین حال افزونگی و میزان محاسبات در این تبدیل قابل قبول است. این تبدیل به خصوص برای حالت‌های چند بعدی و برای پردازشهای با دقت بالا از جمله پردازش تصاویر پزشکی، مفید است. در این مقاله پس از اشاره به نقاط ضعف تبدیل ویولت معمولی و معرفی تبدیل ویولت مختلط گسسته و مقایسه خصوصیات این دو تبدیل، از تبدیل ویولت مختلط گسسته برای بهینه‌سازی تصویر و تشخیص لبه تصاویر نویری، استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازیها حاکی از سادگی و کیفیت بالای روش مطرح شده در این مقاله نسبت به دیگر روشها در حوزه ویولت معمولی و یا حوزه تصویر به ویژه برای حالات نویری است.

واژگان کلیدی: پردازش تصویر، تشخیص لبه، تبدیل ویولت مختلط، کاهش نویز

Edge Detection Using Discrete Complex Wavelet Transform

H. Rabbani, M. Vafadoost, and S. Kasaie

Department of Medical Physics and Biomedical Engineering, Isfahan University of Medical Sciences

Faculty of Biomedical Engineering, Amirkabir University of Technology

Department of Computer Engineering, Sharif University of Technology

Abstract: Analysis and interpretation of medical images are of clinical importance for medical diagnosis and treatment while they also have technical implications for computer vision and pattern recognition. In this context, one of the most fundamental

** - دانشیار

* - استادیار

issues is the detection of object boundaries, which is often useful for further processes such as organ/tissue recognition, image registration, motion analysis, measurement of anatomical and physiological parameters, etc. Although one of the best methods of edge detection is based on wavelet transform, the standard wavelet transform has its own shortcomings such as lack of shift invariant and lack of directional selectivity in sub-bands in multidimensional applications. The discrete complex wavelet transform, which is based on complex mother wavelet, not only overcomes these shortcomings but has acceptable redundancy and complexity as well. It is especially useful for multidimensional situations and for high accuracy applications such as medical image processing. In this paper, the shortcomings of ordinary wavelet transform are initially investigated and comparisons are made between the standard wavelet and the complex wavelet. Then, the discrete complex wavelet domain is applied for image enhancement and edge detection of noisy images. The simulation results show that our method exhibits a better performance, especially in noisy cases, as compared with the standard wavelet and spatial methods.

Keywords: Image processing, Edge detection, Complex wavelet transform, Noise reduction.

فهرست علائم

FDCWT	فیلتر تربیعی مزدوج	CQF
PR	مشخص کردن جهتها	DS
RDCWT	تبدیل ویولت گسسته استاندارد	DWT
SI	تبدیل ویولت گسسته مختلط	DCWT
بازسازی کامل		
نامتغیر نسبت به شیف		

۱- مقدمه

تشخیص لبه به عنوان یکی از پردازشهای مورد استفاده در بینایی ماشین به حساب می آید. تا کنون روشهای مختلفی برای تشخیص لبه ارائه شده اند. به عنوان نمونه کنی [۱] نشان داد که بهترین فیلتر برای تشخیص لبه های پله ای، مشتق گوسی است. پس از آن مِلْت [۲] اطلاعات لازم برای تحلیل و تشخیص لبه را بر اساس ماکزیمم محلی اندازه تبدیل ویولت، به دست آورد. بر این اساس کارسن [۳] تشخیص لبه را بر اساس ماکزیمم کردن همبستگی مابین سیگنال لبه و ویولت انجام داد و نشان داد با انتخاب ویولت مناسب بر اساس نوع لبه می توان در حضور نویز عملیات تشخیص لبه را با کیفیت بهتری انجام داد. دیگر روشهای تشخیص لبه نیز طی سالیان متمادی مورد بررسی محققان قرار گرفته اند [۱-۱۰]. نتایج این تحقیقات نشان می دهد که تبدیل ویولت به علت حفظ مولفه های گذرای سیگنال و تصویر همچون پله و شیب در قالب یک نمایش چند وضوحی تصویر، برای تشخیص لبه به خصوص در تصاویر پزشکی عملکرد بسیار مطلوبی دارد. تبدیل ویولت به خصوص در حضور نویز عملکرد بهینه ای در مقایسه با دیگر روشها از خود

نشان می دهد، چراکه می توان قبل از تشخیص لبه و در حوزه ویولت با یک عملگر ساده سطح آستانه عملیات حذف نویز را انجام داد و سپس لبه های تصویر را مشخص کرد. DWT در این زمینه از دو مشکل عمده برخوردار است:

۱- وابسته بودن به شیف سیگنال ورودی موجب می شود یک شیف کوچک در سیگنال ورودی تغییرات بزرگی در توزیع انرژی بین ضرایب DWT در مقیاسهای مختلف ایجاد کند و بنابراین، این تبدیل دارای خاصیت SI نیست.

۲-۲- مشخص کردن جهتها برای خصوصیات قطری به علت جداپذیر و حقیقی بودن فیلترها به خوبی صورت نمی پذیرد. علت اصلی نامطلوب بودن زیرباندها HH حاصله از تبدیل ویولت یک تصویر، مخلوط شدن جهت های $\pm 45^\circ$ است که در اثر استفاده از فیلترهای حقیقی حاصل شده است و بنابر این، این تبدیل در مشخص کردن جهتها چندان کارآمد نیست (دارای خاصیت DS ضعیفی است).

DCWT برای برطرف کردن مشکلات فوق، با استفاده از ویولت مادر مختلط، خصوصیات زیر را ایجاد می کند:

۱- وابسته نبودن تقریبی تبدیل به شیف (خاصیت SI)

۲- مشخص کردن خوب جهت‌ها در حالت دوبعدی (جهت‌های $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$) و چند بعدی (خاصیت DS)

۳- بازسازی کامل (خاصیت PR)

۴- افزونگی قابل قبول که برای حالت m بعدی $1: 2^m$ است.

۵- محاسبات کم از مرتبه N که برای حالت دوبعدی فقط دوبرابر حالت عادی DWT بوده و برای حالت m بعدی 2^m برابر است.

در بخش (۲) به بررسی DCWT با استفاده از یک فیلتر CQF متعامد و تقریباً متقارن پرداخته و خواص SI و DS برای این تبدیل بررسی می‌شود. در بخش (۳) الگوریتم پیشنهاد شده برای تشخیص لبه ارائه و نتایج حاصل از این روش با ویولت معمولی و دیگر روشها مقایسه می‌شود و در نهایت در بخش (۴) جمع‌بندی مباحث و پیشنهادات ارائه شده برای ادامه کار مطرح می‌شود.

۲- تبدیل ویولت مختلط

در این بخش تبدیل ویولت مختلط (DCWT) معرفی شده و خواص مهم این تبدیل (همچون SI و DS) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تبدیل ویولت مختلط علاوه بر استفاده از خود فیلتر از مزدوج آن نیز استفاده می‌شود، لذا در حالت یک‌بعدی افزونگی ۲:۱ خواهد داشت و در حالت m بعدی در هر بعد افزونگی ۲ برابر و لذا در کل افزونگی 2^m برابر می‌شود. در وهله اول این میزان افزونگی قابل قبول به نظر نمی‌رسد، اما میزان فشردگی انرژی این تبدیل در مقایسه با ویولت معمولی به خصوص در حالت‌های چندبعدی بسیار بالاتر بوده به نحوی که جبران کننده این میزان افزونگی است. به عنوان نمونه در مرجع [۲۵] نتایج جالب توجهی در فشردسازی ویدئو با استفاده از DCWT 3-D به دست آمده است. به علاوه خصوصیات دیگر این تبدیل همچون مشخص کردن خوب جهت‌ها در حالت چندبعدی منجر به عدم ایجاد آرتیفکت بصری (همچون آرتیفکت صفحه شطرنجی که در پردازش با ویولت معمولی ایجاد می‌شود) خواهد شد که در پردازش‌های با دقت بالا همچون پردازش تصاویر پزشکی از اهمیت خاصی برخوردار است.

۲-۱- طراحی فیلترهای مختلط با استفاده از جفت‌های هیلبرت

رویه معمول برای اعمال تبدیل ویولت برای سیگنال و تصویر استفاده از بانک فیلتر است، بدین صورت که در مرحله اول با عبور سیگنال ورودی از دو فیلتر پایین گذر $\tilde{h}_0(n)$ و بالاگذر $\tilde{h}_1(n)$ و پس از آن انجام عملیات کاهش نرخ با فاکتور ۲، دو سیگنال $c(n)$ و $d(n)$ با طول نصف سیگنال ورودی تولید می‌شود. در صورتی که خصوصیت PR برقرار باشد، باید بتوان با استفاده از عملیات معکوس، سیگنال اصلی را مجدداً تولید کرد (فیلترهای CQF). شکل (۱-الف)، یک گام از تحلیل و سنتز ویولت یک بعدی را نشان می‌دهد.

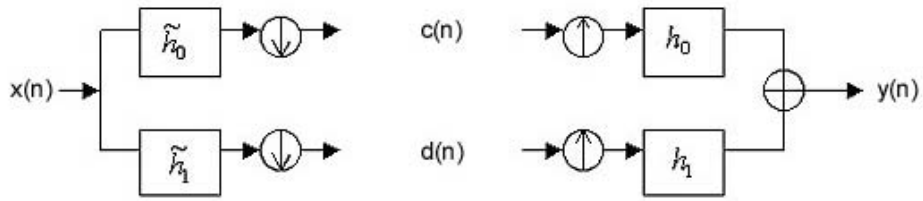
فیلترهای CQF فیلتربانکهایی‌اند که دارای خاصیت PR هستند [۱۱]. برای این فیلترها به طور همزمان خاصیت متعامد و تقارن برقرار نیست [۱۲]. ویولتهای متقارن برای پردازش تصویر به خصوص در لبه‌های تصویر همچنین در کاربردهای پزشکی بسیار مفیدند [۱۳-۱۵]. برای فیلترهای CQF شکل (۱-الف) در صورتی که سیستم ویولت متعامد باشد، فیلتر سنتز زمان معکوس فیلتر تحلیل بوده و روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$\sum \tilde{h}_0(n) = \sqrt{2} \quad (۱)$$

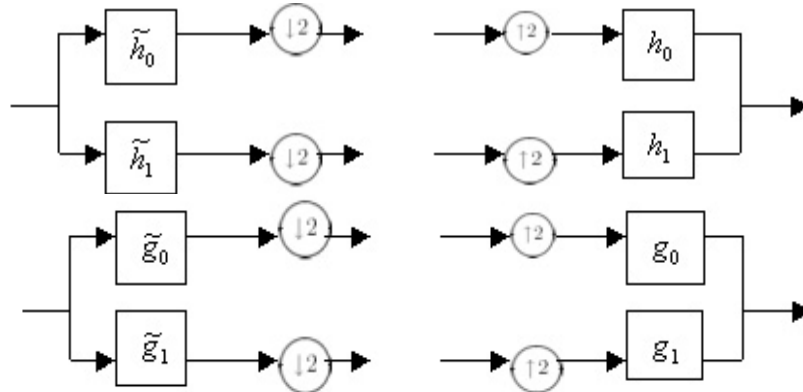
$$\sum \tilde{h}_0(n)\tilde{h}_0(n+2k) = \delta(k) \quad (۲)$$

$$\tilde{h}_1(n) = \pm(-1)^n \tilde{h}_0(N-1-n) \quad (۳)$$

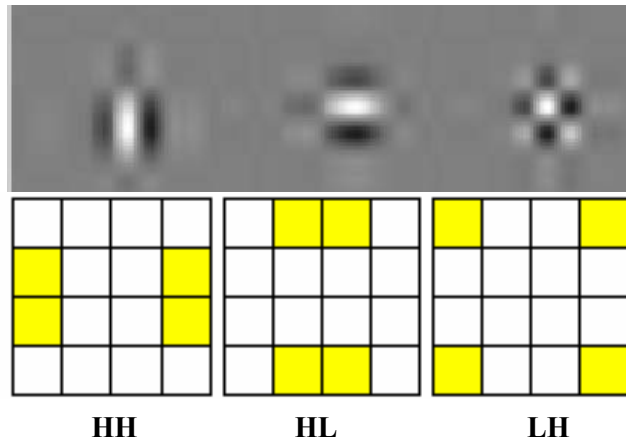
در سیستم متعامد فوق، فیلترهای به دست آمده نمی‌توانند متقارن باشند. در صورتی که طول فیلتر N زوج باشد، روابط (۱) و (۲) در مجموع $N/2$ معادله تولید می‌کنند. به علاوه یکی از معیارهای مورد نظر برای طراحی فیلترهای ویولت، تعداد ممانهای صفر ویولت، (تعداد نقاط صفر تبدیل Z فیلتر در $z=-1$) است [۱۱]. اگر برای این فیلتر K صفر در $z=-1$ گرفته شود، روابط (۱) و (۲) و این شرط در مجموع $N/2+K$ رابطه برای به دست آوردن $\tilde{h}_0(n)$ در اختیار می‌گذارند. بنابراین برای رسیدن به بیشترین تقارن ممکن، می‌توان از $N-(N/2+K)$ درجه آزادی استفاده کرد. به عنوان نمونه در صورتی که N را برابر هشت در نظر گرفته و K برابر یک (رابطه (۱)) انتخاب شود، از روابط (۱) و (۲) در مجموع، پنج رابطه به دست آمده



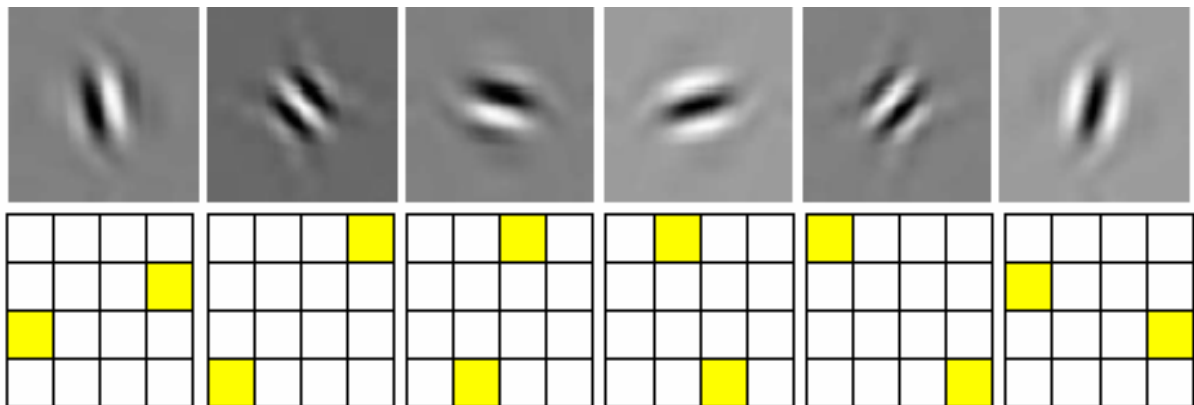
شکل (۱-الف) - یک گام از تحلیل و سنتز ویولت یک بعدی



شکل (۱-ب) - درخت DCWT برای حالت یک بعدی



شکل (۱-ج) - سطر بالا ۳ زیرباند 2D DWT و سطر پایین حوزه پشتیبانی کننده هر ویولت در صفحه دو بعدی فرکانس را نشان می دهد.



شکل (۱-د) - سطر بالا ۶ زیرباند 2D DCWT و سطر پایین حوزه پشتیبانی کننده هر زیرباند در صفحه دو بعدی فرکانس را نشان می دهد.

شکل ۱ - مقایسه DCWT و DWT

و از سه درجه آزادی باقیمانده برای تقارن استفاده می‌شود.

براین اساس می‌توان $\tilde{h}_0(n)$ را بدین صورت در نظر گرفت:

$$\tilde{h}_0 = [a \ b \ c \ c \ b \ a \ d \ e] \quad (4)$$

از مجموع روابط (۱) و (۲) و (۴)، $\tilde{h}_0(n)$ به دست آمده و از رابطه (۳)، $\tilde{h}_1(n)$ به دست می‌آید و در نهایت با استفاده از زمان معکوس بودن فیلترهای سنتز نسبت به فیلترهای تحلیل، به راحتی $h_0(n), h_1(n)$ به دست می‌آید. فیلترهای به دست آمده با روند فوق در جدول (۱) نشان داده شده‌اند.

به طور معمول ایده به کار رفته برای طراحی فیلترهای ویولت مختلط، استفاده از جفت‌های هیلبرت است. یک جفت از فیلترهای هیلبرت برای گام اول و یک جفت دیگر برای گام‌های دیگر به کار می‌رود [۱۶]. در ادامه نشان خواهیم داد که برای تحقق شرایط جفت‌های هیلبرت می‌توان فیلترهای تحلیل درخت اول را زمان معکوس فیلتر تحلیل درخت دوم در نظر گرفت.

در صورتی که از فیلترهای مختلط $\tilde{h}_0(n) + j\tilde{g}_0(n)$ و $\tilde{h}_1(n) + j\tilde{g}_1(n)$ به عنوان فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر تحلیل استفاده شود، مطابق شکل (۱-ب) می‌توان یک درخت برای قسمت حقیقی و یک درخت برای قسمت موهومی به کار برد.

فرض می‌شود $\psi_g(t)$ تبدیل هیلبرت $\psi_h(t)$ باشد یعنی $\psi_g(t) = \mathcal{H}\{\psi_h(t)\}$ لذا به دست می‌آید:

$$\Psi_g(\omega) = \begin{cases} -j\Psi_h(\omega) & \omega > 0 \\ j\Psi_h(\omega) & \omega < 0 \end{cases} \quad (5)$$

در نتیجه:

$$\Psi_h(\omega) + j\Psi_g(\omega) = \begin{cases} 2\Psi_h(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

یعنی حوزه پشتیبانی ویولت مختلط، فرکانسهای منفی را پوشش نمی‌دهد و بنابراین مخلوط شدن جهت‌ها چنانچه در DWT مشاهده شد، صورت نمی‌پذیرد، با توجه به رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$|\Psi_g(\omega)| = |\Psi_h(\omega)| \quad (6)$$

و لذا:

$$|\tilde{H}_0(\omega)| = |\tilde{G}_0(\omega)| \quad (7)$$

و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\tilde{G}_0(\omega) = \tilde{H}_0(\omega)e^{-j\theta(\omega)} \quad (8)$$

به سادگی نشان داده می‌شود برای تحقق جفت‌های هیلبرت با محدودیت‌های ذکر شده برای فیلتر CQF فوق‌الذکر، می‌بایست شرط $\theta(\omega) = \omega/2$ برقرار باشد. این شرط بدین معناست که $\tilde{g}_0(n)$ نسبت به $\tilde{h}_0(n)$ به اندازه نیم نمونه تاخیر دارد.

مشخص است که شرط تاخیر نیم نمونه با یک فیلتر FIR برآورده نمی‌شود و لذا هر چه عبارت $E(z) = \tilde{G}_0(z^2) - \tilde{H}_0(z^2)z^{-1}$ (که معادل وسط باند عبور فیلتر است) دارای صفر بیشتر باشد، شرط بهتر برآورد می‌شود و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\tilde{G}_0(z^2) - \tilde{H}_0(z^2)z^{-1} = Q_e(z)(1-z^{-1})^L \quad (9)$$

چنانچه مشخص است $e^{-j\omega/2}$ یک فیلتر تمام‌گذر است که مطابق قضیه مطرح شده در [۱۴] می‌توان آن را به صورت فیلتر تمام قطب زیر در نظر گرفت:

$$A(z) = \frac{z^{-L}D(1/z)}{D(z)} \quad (10)$$

که در آن

$$D(z) = 1 + \sum_{n=1}^L d(n)z^{-n}$$

$$d(n) = (-1)^n \binom{L}{n} \frac{(\tau-L)_n}{(\tau+1)_n}$$

و عملگر $(.)_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$$

در این صورت فیلتر (۱۰) در اطراف $z=1$ برابر $A(z) \approx z^{-\tau}$ خواهد بود و به طور معادل اطراف $\omega=0$ خواهیم داشت $d(n) \approx e^{-j\omega\tau}$. بر این اساس برای $e^{-j\omega/2}$ کافی است $\tau=0.5$ را برای دست آورده و با توجه به بحث فوق و رابطه (۸) باید رابطه $\frac{G_0(z)}{H_0(z)} = \frac{z^{-L}D(1/z)}{D(z)}$ برقرار باشد، لذا خواهیم داشت:

$$H_0(z) = F(z)D(z) \quad (11)$$

$$G_0(z) = F(z)z^{-L}D(1/z) \quad (12)$$

اگر k بیانگر تعداد ممان‌های صفر ویولت باشد در این صورت $F(z)$ باید به شکل $F(z) = Q_h(z)(1+z^{-1})^k$ باشد. برای فیلتر ذکر شده در بالا که k برابر یک انتخاب شده است، L

جدول ۱- فیلترهای تحلیل سنتز متعامد شبه متقارن

\tilde{h}_0	\tilde{h}_1	h_0	h_1
-۰/۰۸۸۴	-۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۱۲	-۰/۰۸۸۴
۰/۰۸۸۴	۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۱۲	-۰/۰۸۸۴
۰/۶۹۵۹	۰/۰۸۸۴	-۰/۰۸۸۴	۰/۶۹۵۹
۰/۶۹۵۹	۰/۰۸۸۴	۰/۰۸۸۴	-۰/۶۹۵۹
۰/۰۸۸۴	-۰/۶۹۵۹	۰/۶۹۵۹	۰/۰۸۸۴
-۰/۰۸۸۴	۰/۶۹۵۹	۰/۶۹۵۹	۰/۰۸۸۴
۰/۰۱۱۲	-۰/۰۸۸۴	۰/۰۸۸۴	۰/۰۱۱۲
-۰/۰۸۸۴	-۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۱۲	-۰/۰۸۸۴

صورت زیر خواهد بود (فیلترهای تحلیل و سنتز گام اول متفاوت از دیگر گامها انتخاب می‌شوند [۱۸]):

$$\begin{aligned} A(z) &= \tilde{H}_{0f}(z)\tilde{H}_0(z^2)\tilde{H}_0(z^4), \\ B(z) &= \tilde{G}_{0f}(z)\tilde{G}_0(z^2)\tilde{G}_0(z^4), \quad M = 2^3 = 8 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} C(z) &= H_{0f}(z)H_0(z^2)H_0(z^4), \\ D(z) &= G_{0f}(z)G_0(z^2)G_0(z^4) \end{aligned}$$

اگر $W = e^{j2\pi/M}$ با توجه به شکل فوق به دست می‌آید:

$$Y(z) = Y_a(z) + Y_b(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(W^k z) [A(W^k z)C(z) + B(W^k z)D(z)] \quad (15)$$

جمله‌های تداخل شامل مقادیر $k \neq 0$ است، لذا برای داشتن حالت TI باید از جمله‌های تداخل صرف نظر کرد. می‌توان با طراحی مناسب فیلترهای تحلیل و سنتز، شرط فوق را با تقریب خوبی محقق کرد [۱۸]. شکل (۳) پاسخ پله در سطح چهارم برای DWT و DCWT را نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است برای ویولت معمولی انرژی ضرایب در سطوح مختلف با شیف و ورودی کاملاً تغییر می‌کند در حالی که برای ویولت مختلط، انرژی ضرایب تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. علت برقراری تقریبی خاصیت SI برای ویولت مختلط آن است که در عمل نمی‌توان جمله‌های تداخل را به طور کامل برابر صفر کرد، اما می‌توان آنها را با طراحی مناسب به اندازه کافی کوچک کرد. در واقع با توجه به رابطه (۵) انتظار می‌رود حوزه پشتیبانی ویولت مختلط، فرکانسهای منفی را پوشش ندهد و همواره

را برابر N-2 انتخاب و لذا $F(z) = a(1+z^{-1})$ به صورت $F(z) = a(d(n) + d(n-1))$ خواهد بود تا طول $H_0(z)$ در رابطه (۱۱) برابر N شود و بنابراین به دست می‌آید:

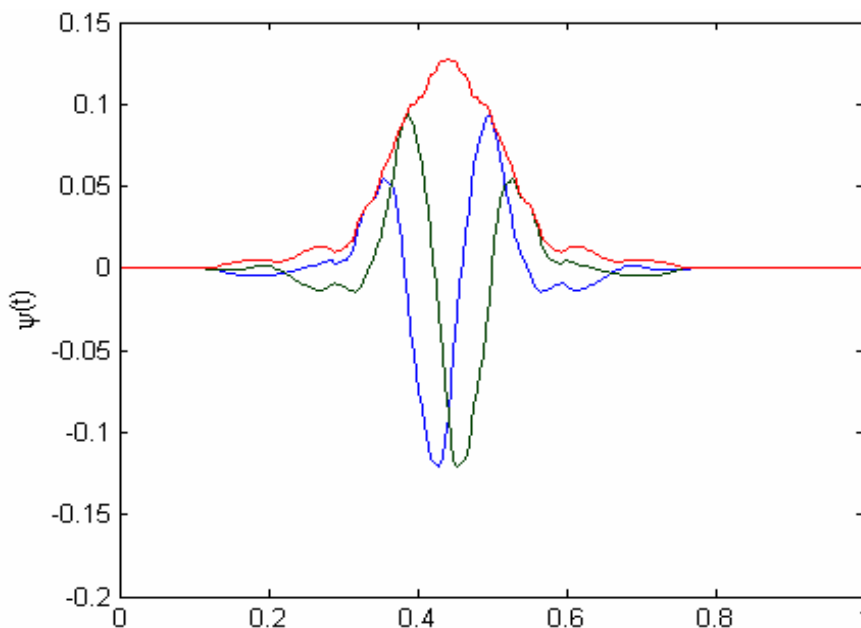
$$\begin{aligned} h_0(n) &= f(n) * d(n) = a(d(n) + d(n-1)) \\ g_0(n) &= f(n) * d(N-2-n) = a(d(N-2-n) + d(N-1-n)) \\ \Rightarrow g_0(n) &= h_0(N-1-n) \end{aligned} \quad (13)$$

یعنی در صورتی که فیلترهای بخش موهومی زمان معکوس فیلترهای بخش حقیقی باشند $|\Psi_h(\omega) + j\Psi_g(\omega)|$ برای فرکانسهای منفی صفر خواهد بود. شکل (۲-الف) جفت‌های تبدیل هیلبرت و ویولت متعامد که با روش فوق به دست آمده است را نشان می‌دهد.

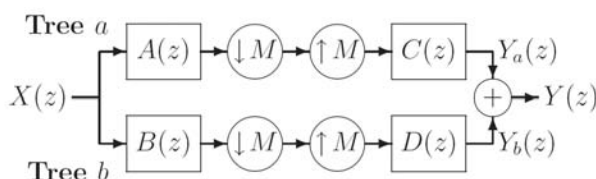
۲-۲- بررسی خاصیت SI تبدیل ویولت مختلط

برای بررسی خصوصیت SI از بازسازی در یک زیرباند استفاده می‌شود. به عنوان مثال فقط با استفاده از ضرایب ویولت (بدون در نظر گرفتن ضرایب مقیاس) در یک سطح (مثلاً فقط سطح ۳) سیگنال بازسازی می‌شود. اگر سیگنال^۴ بازسازی شده از این طریق را y بنامیم و در این سیگنال تداخل وجود نداشته باشد، می‌توان گفت که در این سطح، خصوصیت SI برقرار است چرا که عدم وجود تداخل در زیرباند یک تابع، تبدیل Z یکتا ایجاد می‌کند و لذا پاسخ ضربه، خطی و نامتغیر با زمان (SI) یعنی LTI است.

شکل (۲-ب) قسمتهای تحلیل و سنتز زیر باند ذکر شده را نشان می‌دهد. برای مثال فوق (ضرایب سطح ۳) A, B, C و D به



شکل (۲-الف) - قسمت حقیقی، موهومی و دامنه ویولت مختلط در سطح سوم



شکل (۲-ب) - زیر باندهای حاصل از ضرایب تابع ویولت (یا اسکیلینگ) در سطح m ($M = 2^m$)

شکل ۲- شکل ویولت مختلط و زیرباندهای حاصل در هر زیربانده

با زیرباندهای 2D DWT و حوزه پشتیبانی کننده هر ویولت در صفحه دوبعدی فرکانس را نشان می‌دهد.

برای DCWT فیلترها به صورت مختلط‌اند و بر خلاف DWT که در آن ویولتها جدایی پذیری پذیر بودند $(\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y))$ در اینجا خواهیم داشت:

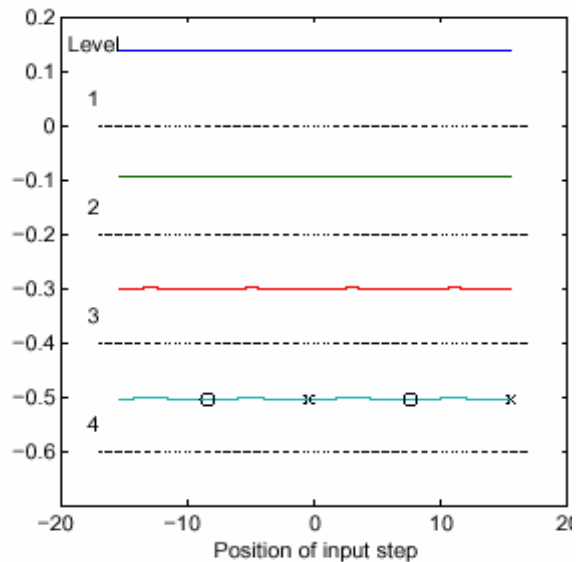
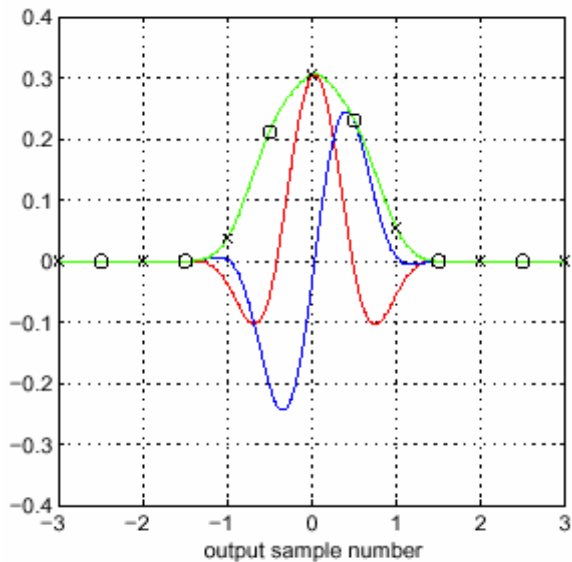
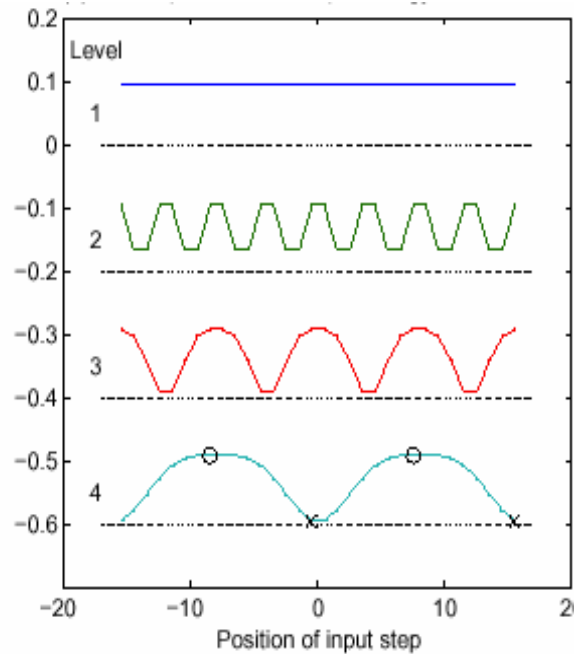
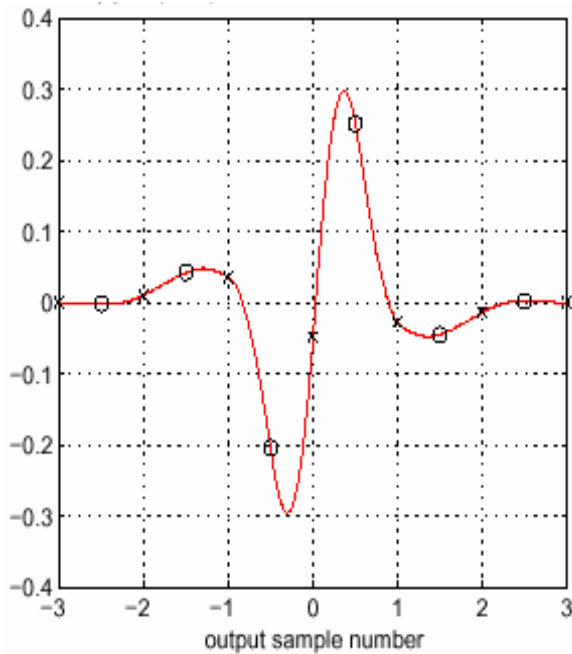
$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \\ &= ((\psi_h(x) + j\psi_g(x))(\psi_h(y) + j\psi_g(y))) \\ &= \psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y) \\ &\quad + j(\psi_h(y)\psi_g(x) + \psi_h(x)\psi_g(y)) \end{aligned} \quad (16)$$

بنابراین، حوزه پشتیبانی کننده هر ویولت در صفحه دوبعدی فرکانس با توجه به صفر بودن $|\Psi_h(\omega) + j\Psi_g(\omega)|$ برای فرکانسهای منفی، برای زیر باندهای که از فیلترهای بالا گذر

مقداری برابر صفر داشته باشد، اما عملاً مقدار خروجی فیلتر برای فرکانسهای منفی به صورت نوسانی مقادیر کوچک نزدیک صفر خواهد بود. برای ارزیابی میزان عدم وابستگی به شیفیت می‌توان از نسبت انرژی جمله‌های تداخل ($k \neq 0$) به جمله اصلی برای هر زیربانده استفاده کرد ($k = 0$) که این میزان به طور متوسط برای ویولت مختلط کمتر از ۲۰- دسیبل بوده در حالی که برای ویولت معمولی حدود ۳- دسیبل است [۲۵].

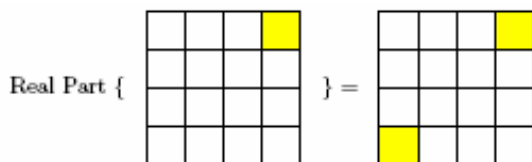
۲-۳- بررسی خاصیت DS تبدیل ویولت مختلط

چنانچه می‌دانیم 2D DWT دارای خاصیت DS ضعیفی است. علت اصلی این موضوع مخلوط شدن جهتها در اثر استفاده از فیلترهای حقیقی است. شکل (۱-ج) ویولتهای متناظر



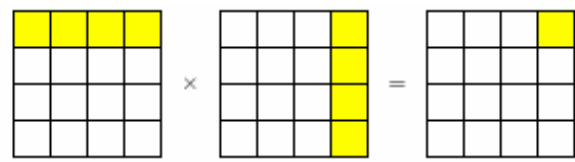
شکل ۳- ردیف اول به ترتیب از چپ به راست پاسخ پله در سطح چهارم DWT، تغییرات انرژی در هر سطح از ضرایب DWT در اثر شیفت ورودی پله و ردیف دوم از چپ به راست پاسخ پله در سطح چهارم DCWT، تغییرات انرژی در هر سطح از ضرایب DCWT در اثر شیفت ورودی پله را نشان می دهد.

در صفحه دو بعدی فرکانس خواهیم داشت:



چنانچه از شکل فوق نیز مشخص است، این زیر بانده زاویه 45° را پشتیبانی کرده و زوایای $\pm 45^\circ$ را مخلوط نمی کند.

استفاده می کند به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین از آنجا که

$$\text{real}\{\psi(x, y)\} = \psi_h(x)\psi_g(x) - \psi_h(y)\psi_g(y)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1,1}(x, y) &= \phi_h(x)\psi_h(y) & \psi_{2,1}(x, y) &= \phi_g(x)\psi_g(y) \\ \psi_{1,2}(x, y) &= \psi_h(x)\phi_h(y) & \psi_{2,2}(x, y) &= \psi_g(x)\phi_g(y) \\ \psi_{1,3}(x, y) &= \psi_h(x)\psi_h(y) & \psi_{2,3}(x, y) &= \psi_g(x)\psi_g(y) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) + \psi_{2,i}(x, y)) \\ \psi_{i+3}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) - \psi_{2,i}(x, y)) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 3$$

شکل (۱-د) شش ویولت حاصله و حوزه پشتیبانی کننده هر یک در صفحه دو بعدی فرکانس را نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است، میزان DS نسبت به 2D DWT بسیار بهتر بوده و زوایای $\pm 15^\circ, \pm 45^\circ, \pm 75^\circ$ در زیر باندها از هم تفکیک شده‌اند. مطابق شکل (۴) هر درخت سه زیرباند (به غیر از زیر باند پایین گذر) تولید می‌کند. زیر باندهای درخت a و b نظیر به نظیر با هم جمع و از هم کم می‌شوند و بنابراین ۶ زیر باند برای بخش حقیقی به دست می‌آید. شکل (۵) زیر باندهای به دست آمده برای تصویر "باربارا" را نشان می‌دهد.

از آنجا که زیر باندهای حاصله توسط 2D DCWT زوایای $\pm 15^\circ, \pm 45^\circ, \pm 75^\circ$ را از هم تفکیک می‌کند، تصاویر حاصله در سطوح مختلف درختهای شکل (۴) نسبت به چرخش نامتغیرند (تصویر فقط با ضرایب حاصل از همه درختها در یک مرحله بازسازی می‌شود) در حالی که به علت مخلوط کردن جهتها در 2D DWT مطابق شکل (۶) این خاصیت برقرار نیست.

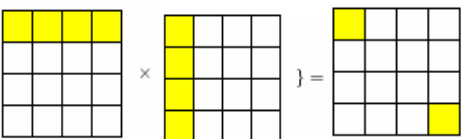
در صورتی که بخش موهومی رابطه (۱۸) هم در نظر گرفته شود، زیرباندهای درخت c و d نیز نظیر به نظیر با هم جمع و از هم کم می‌شوند و لذا ۶ زیرباند نیز برای بخش موهومی به دست می‌آید. بنابراین با استفاده از هر چهار درخت، مطابق شکل (۷) ویولتها هم دارای بخش حقیقی و هم بخش موهومی با خصوصیات مشابه‌اند و بنابراین در بسیاری از موارد استفاده از دو درخت a و b که فقط از بخش حقیقی رابطه (۱۸) استفاده می‌کنند، برای پردازش کفایت می‌کند که آن را RDCWT و حالتی که از هر چهار درخت استفاده شود را FDCWT می‌نامیم.

۳- مشخص کردن لبه‌ها با استفاده از ویولت مختلط

مشخص کردن لبه‌ها در تصاویر از جمله پردازشهای مهم و

چنانچه بخواهیم زاویه $+45^\circ$ را به دست آوریم کافی است یکی از فیلترها را مزدوج کنیم:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= ((\psi_h(x) + j\psi_g(x))(\psi_h(y) + j\psi_g(y))) \\ &= ((\psi_h(x) + j\psi_g(x))(\psi_h(y) - j\psi_g(y))) \\ &= \psi_h(x)\psi_h(y) + \psi_g(x)\psi_g(y) + j(\psi_h(y)\psi_g(x) \\ &\quad - \psi_h(x)\psi_g(y)) \end{aligned} \quad (17)$$

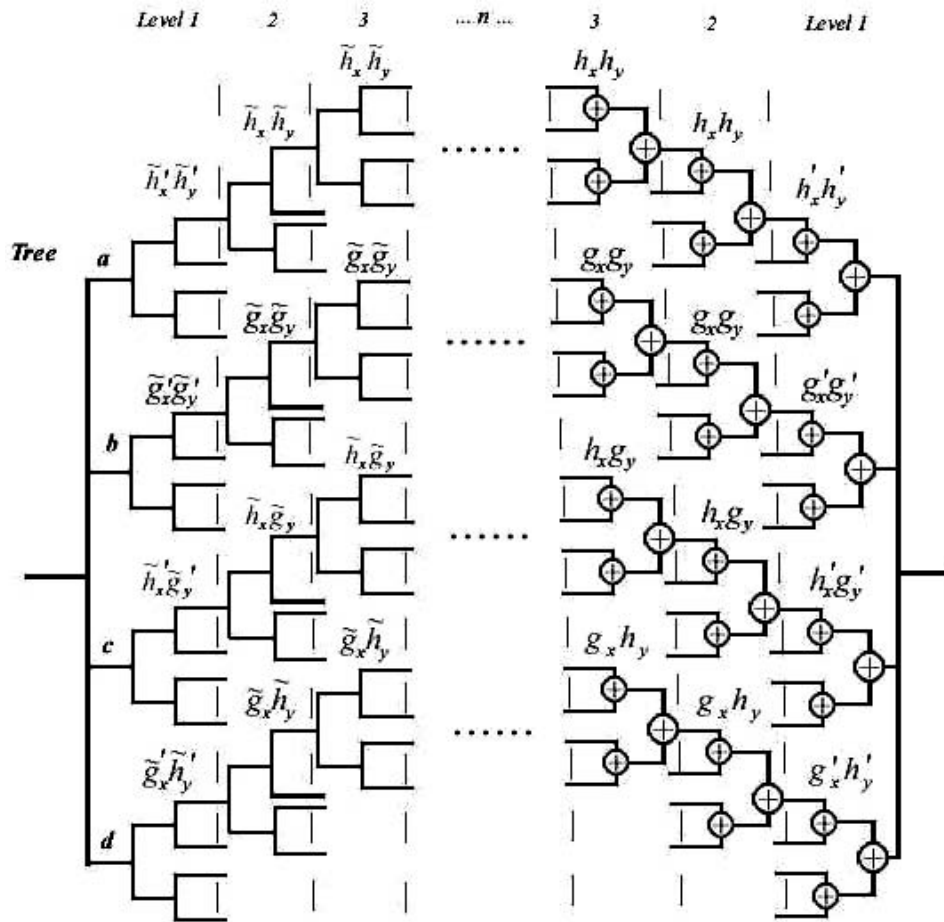
Real Part {  } =

در واقع تبدیل ویولت مختلط دو بعدی (2D DCWT) به چهار درخت نیاز دارد چرا که اگر فیلتر $h+jg$ روی ستونها و سطرها اعمال شود، می‌توان نوشت:

$$(h_x + jg_x)(h_y + jg_y) = (h_x h_y - g_x g_y) + j(h_x g_y + g_x h_y) \quad (18)$$

در جمله اول سمت راست معادله فوق h روی سطر و ستون و در جمله دوم g روی سطر و ستون به عنوان فیلتر اعمال می‌شود که حاصل تفاضل این دو جمله قسمت حقیقی را می‌دهد. اگر قسمت موهومی نیز در نظر گرفته شود، دودرخت دیگر نیز نیاز است، در یکی h روی x و g روی y و در دیگری g روی x و h روی y اعمال می‌شود و در نهایت با یکدیگر جمع می‌شوند. شکل (۴) ساختار تحلیل و سنتز 2D DCWT را نشان می‌دهد.

چنانچه ذکر شد علاوه بر $h_y + jg_y$ از فیلتر مزدوج آن، $h_y - jg_y$ نیز استفاده می‌شود و از آنجا که $(h_x + jg_x)(h_y - jg_y) = (h_x h_y + g_x g_y) + j(-h_x g_y + g_x h_y)$ در صورتی که فقط بخش حقیقی معادله (۱۸) در نظر گرفته شود (استفاده از دو درخت شکل (۴))، حاصل درخت a و درخت b یک بار با هم جمع و یک بار از هم کم می‌شوند. در این صورت ۶ زیر باند به دست می‌آید، چرا که زیرباندها، حاصل اعمال فیلترهای پایین گذر و بالاگذر روی سطرها و ستونها و با توجه به معادله (۱۷) می‌توان ویولتهای حاصله که هر یک، پایه تشکیل دهنده هر زیر باند است را به صورت زیر به دست آورد:



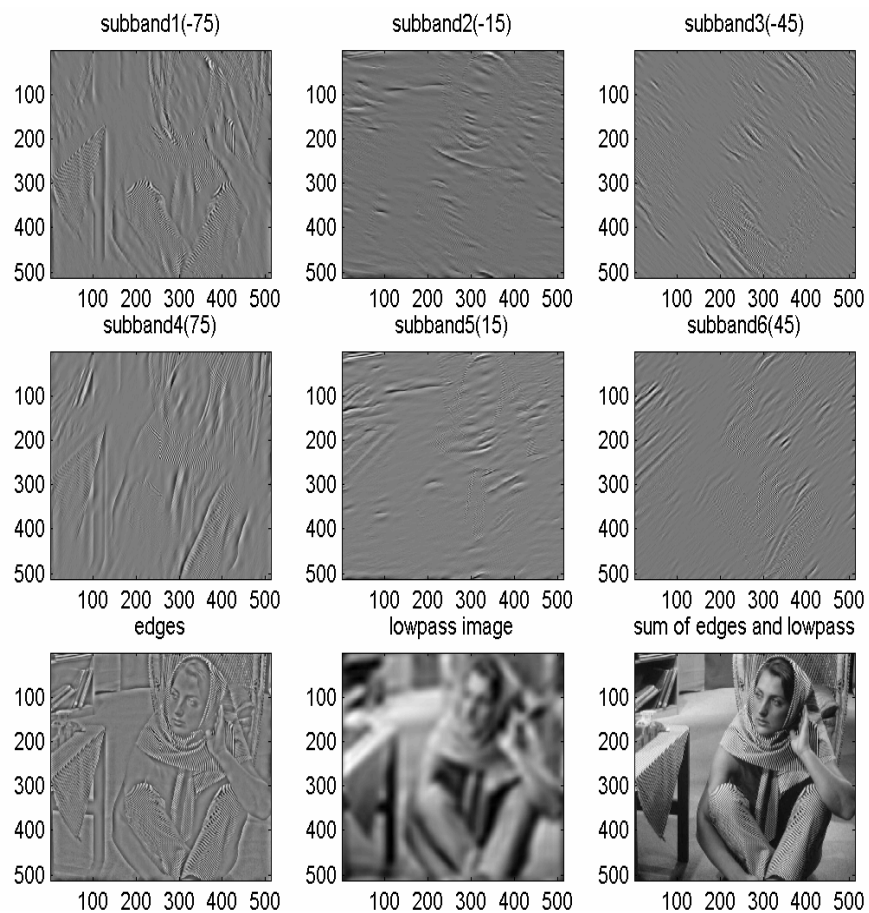
شکل ۴- ساختار 2D DCWT

در تصاویر نویزی می‌شود.

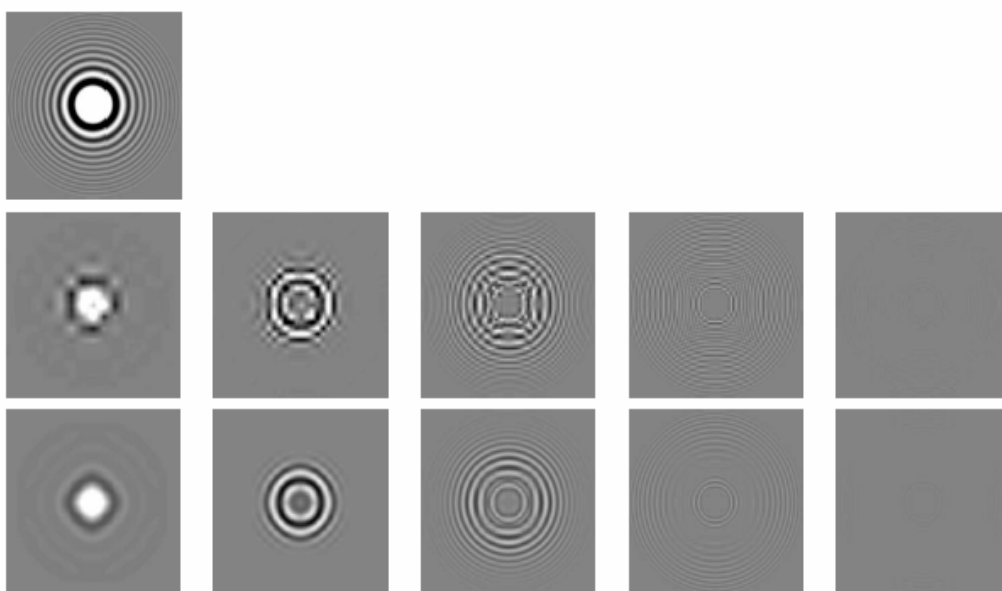
۳-۱- الگوریتم کاهش نویز محلی مبتنی بر روش سطح آستانه نرم

روشهای اولیه کاهش نویز در حوزه ویولت [۱۹ و ۲۰] از تکنیکهای معین و غیرتصادفی برای به دست آوردن تابع سطح آستانه استفاده می‌کند. در سالهای اخیر استفاده از روشهای بیزی برای به دست آوردن تابع سطح آستانه نتایج مناسبتری در عملیات کاهش نویز از خود نشان می‌دهند [۲۱ و ۲۳]. این الگوریتمها به مدل در نظر گرفته شده برای ضرایب ویولت و نوع تخمین زنده به کار رفته وابسته‌اند. در این مقاله ضرایب ویولت به صورت متغیرهای تصادفی لاپلاس ناهمبسته، مشروط به معلوم بودن واریانس مدل می‌شوند. در واقع ضرایب ویولت

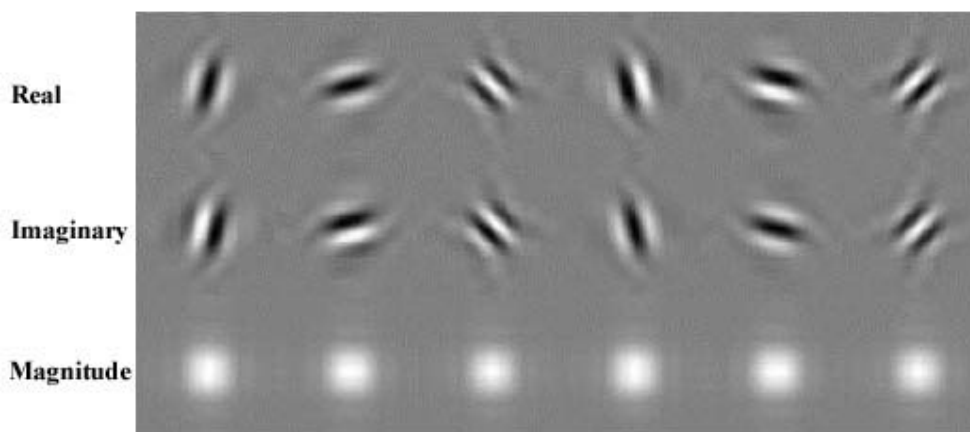
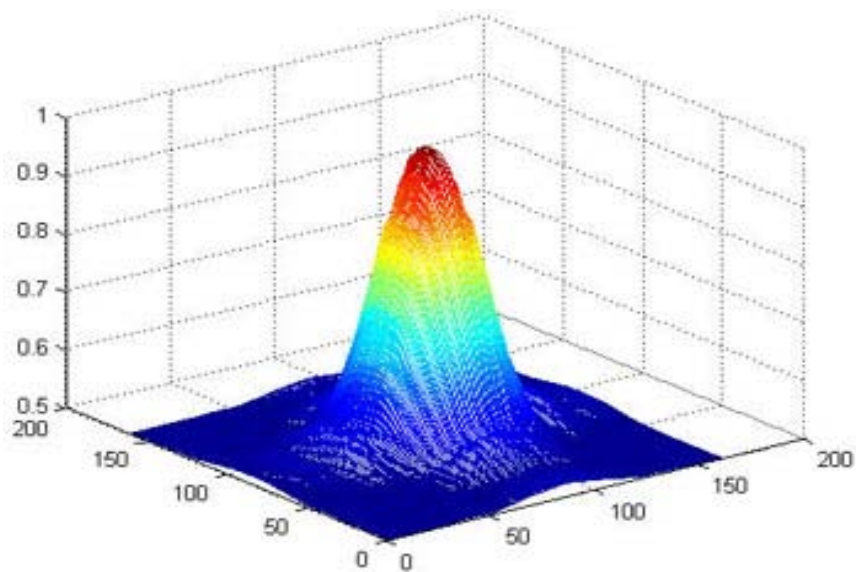
پرکاربرد تصاویر است. در صورتی که قبل از انجام این عملیات بتوان نویز تصویر را حذف کرد، نتایج به طرز قابل توجهی بهبود می‌یابد. چرا که نویز و لبه‌های تصویر هر دو حاوی اطلاعات فرکانس بالا بوده و تشخیص لبه با وجود نویز، منجر به تشخیص اشتباه خواهد شد. روشهای حذف نویز در حوزه ویولت نظیر سطح آستانه سخت و نرم [۱۹ و ۲۰] در صورت وجود خاصیت نامتغیر بودن نسبت به شیفت و چرخش عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند. در این مقاله از روش سطح آستانه سخت و الگوریتم کاهش نویز محلی مبتنی بر روش سطح آستانه نرم استفاده می‌شود [۲۱]. چنانچه در ادامه خواهیم دید، الگوریتم کاهش نویز محلی مبتنی بر روش سطح آستانه نرم توانایی بسیار بهتری از روش سطح آستانه سخت در کاهش نویز از خود نشان می‌دهد که منجر به بهبود نتایج تشخیص لبه



شکل ۵- دو سطر اول ۶ زیر تصویر ایجاد شده و سطر پایین مجموع ۶ زیر باند(لبه‌ها) و حاصل دو زیر تصویر پایین گذر و مجموع آنها را نشان می دهد.



شکل ۶- سطر اول تصویر اصلی، سطر دوم و سوم مربوط به 2D DWT و 2D DCWT بوده و به ترتیب از چپ به راست تصویر پایین گذر مقیاس چهارم و تصاویر بالا گذر مقیاس اول تا چهارم را نشان می دهد.



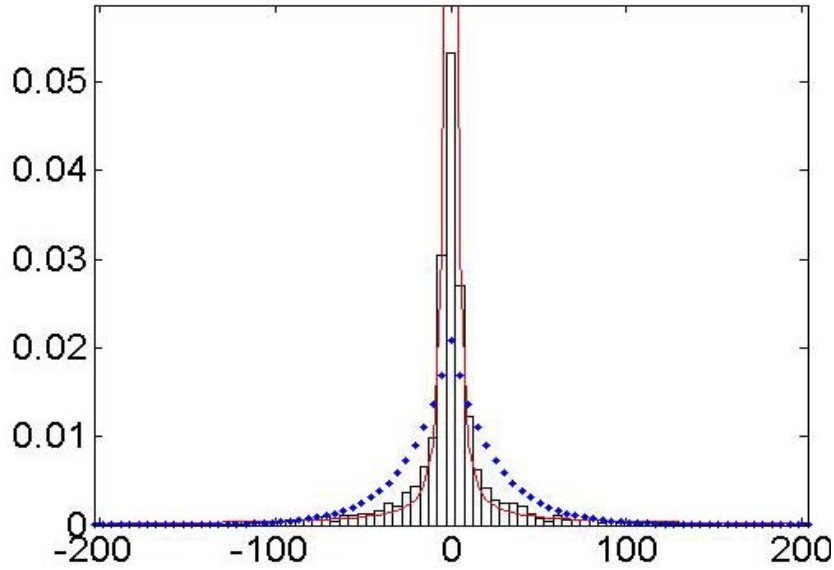
شکل ۷- شکل بالا دامنه ویولت را با استفاده از دستور مش و شکل پایین قسمت حقیقی، قسمت موهومی و دامنه زیرباندهای 2D FDCWT را نشان می‌دهد.

چنانچه تصویر با نویز گوسی جمع شونده با واریانس σ_n^2 خراب شده باشد، در این صورت ضرایب ویولت تصویر نویزی شده در صورت استفاده از ویولت متعامد نرمال به صورت $y(k) = w(k) + n(k)$ خواهد بود که $n(k)$ هنوز نویز گوسی جمع شونده خواهد بود.

با استفاده از تخمین زننده MAP تخمین مناسب $w(k)$ که آن را با $\hat{w}_{MAP}(k)$ نشان می‌دهیم در اثر ماکزیمم کردن تابع چگالی احتمال پسین حاصل می‌شود:

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} p_{w(k)|y(k)}(w(k)|y(k)) \quad (20)$$

در هر زیرباند به صورت متغیرهای تصادفی لاپلاس ناهمبسته مشروط به شکل $p_w(w(k)) = \frac{1}{\sigma(k)\sqrt{2}} \exp(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma(k)}|w(k)|)$ در نظر گرفته می‌شوند که $w(k)$ ضرایب ویولت بدون نویز و $\sigma(k)$ واریانس هر ضریب را نشان می‌دهد. شکل (۸) هیستوگرام یکی از زیرباندهای ویولت و توزیع لاپلاس تطابق یافته با ضرایب این زیرباند و مدل در نظر گرفته شده بر اساس توزیع لاپلاس با واریانس محلی را نشان می‌دهد. چنانچه از شکل مشخص است مدل در نظر گرفته شده در این مقاله تطابق مناسبی با هیستوگرام از خود نشان می‌دهد.



شکل ۸- هیستوگرام ضرایب ویولت در زیرباند HH تصویر Lena ۵۱۲×۵۱۲ در مقیاس سوم به صورت نمودار میله‌ای نشان داده شده است. نقطه چین توزیع لاپلاس مناسب با این ضرایب و خط ممتد توزیع لاپلاس با واریانس محلی را نشان می‌دهد.

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} \left[-\frac{(y(k) - w(k))^2}{2\sigma_n^2} + f(w(k)) \right] \quad (25)$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{y(k) - \hat{w}(k)}{\sigma_n^2} + f'(\hat{w}) = 0 \quad (26)$$

با استفاده از توزیع لاپلاس با واریانس محلی به شکل

$$p_w(w(k)) = \frac{1}{\sigma(k)\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma(k)}|w(k)|\right)$$

ترتیب به صورت $-\log(\sigma\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot |w|$ و $-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \text{sign}(w)$ به دست می‌آیند و بنابراین:

$$y(k) = \hat{w}(y(k)) + \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)} \cdot \text{sign}(\hat{w}(y(k))) \quad (27)$$

در صورتی که $(a)_+ = \begin{cases} 0 & \text{if } a < 0 \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$ رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{w}(y(k)) := \text{soft}(y(k), \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)}) = \text{sign}(y(k)) \cdot \left(|y(k)| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)} \right)_+ \quad (28)$$

عملگر فوق همان تابع سطح آستانه نرم است که مقدار سطح آستانه برای هر ضریب متفاوت است.

بنابراین با استفاده از قانون بیز خواهیم داشت:

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} \frac{p_{y(k)|w(k)}(y(k)|w(k))p_{w(k)}(w(k))}{p_{y(k)}(y(k))} \quad (29)$$

از آنجا که $p_{y(k)}(y(k))$ مستقل از $w(k)$ است، می‌توان در رابطه فوق از مخرج صرف نظر کرد و لذا:

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} [p_{y(k)|w(k)}(y(k)|w(k))p_{w(k)}(w(k))] \quad (22)$$

از آنجا که $y(k) = w(k) + n(k)$ ، تابع چگالی احتمال شرطی $p_{y(k)|w(k)}(y(k)|w(k))$ یک توزیع گوسی با میانگین $w(k)$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} [p_n(y(k) - w(k)) \cdot p_{w(k)}(w(k))] \quad (23)$$

باتعریف $f(w(k)) = \log(p_{w(k)}(w(k)))$ خواهیم داشت:

$$\hat{w}_{MAP}(y(k)) = \arg \max_{w(k)} [\log(p_n(y(k) - w(k))) + f(w(k))] \quad (24)$$

در صورتی که نویز استفاده شده نویز گوسی با تابع توزیع

$$p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

تبدیل می‌گردد:

عملگر سطح آستانه لبه‌های تصویر نمایان می‌شوند اما از کیفیت چندان مطلوبی برخوردار نبوده و لذا از یک الگوریتم نازک‌سازی استفاده می‌شود. بدین منظور در هر سطر یا ستون ماتریس تصویر، ماکزیمم موضعی به دست آمده و بدین صورت صرفاً ماکزیممها برابر یک و مابقی ضرایب برابر صفر قرار داده می‌شود.

۳-۳- جمع‌بندی الگوریتم تشخیص لبه

به طور کلی الگوریتم تشخیص لبه به کار رفته در این مقاله در حوزه DCWT مطابق مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- 2D FDCWT محاسبه می‌شود.

۲- عملیات کاهش نویز بر روی ضرایب انجام می‌پذیرد.

۳- ضرایب زیرباندهای فرکانس بالا که بیانگر جزئیات اصلی تصویر است در هر مرحله تقویت می‌شوند. در این مقاله ضرایب تمامی زیرباندها به جز زیرباند پایین گذر در عدد ۱/۴ ضرب می‌شوند.

۴- همه زیرباندهای پایین گذر آخرین گام برابر صفر قرار داده می‌شود.

۵- معکوس ویولت گرفته شده و دامنه محاسبه می‌شود.

۶- برای به دست آوردن تصویر باینری همه ضرایب کوچکتر از یک سطح آستانه صفر و مابقی یک می‌شود.

۷- برای بهبود تصویر، ماکزیمم موضعی (در هر سطر و هر ستون) یافته شده و نازک‌سازی صورت می‌گیرد.

۸- همه پیکسل‌های کمتر از سطح آستانه صفر و بقیه یک و تصویر بهبود یافته به دست می‌آید.

شکل (۱۰) نمونه‌ای از عملیات تشخیص لبه با الگوریتم تشخیص لبه مطرح شده در این مقاله که در گام مربوط به عملیات کاهش نویز از روش سطح آستانه سخت استفاده می‌کند را نشان می‌دهد. چنانچه از شکل معلوم است به علت خاصیت SI و DS عملکرد الگوریتم ساده فوق در حوزه DCWT بهتر از الگوریتم بر پایه DWT است.

برای بررسی دقیقتر اثر گام دوم (کاهش نویز) در عملیات

واریانس $\sigma(k)$ با استفاده از همسایه‌های محلی $y(k)$ که در یک پنجره مربعی به مرکز $y(k)$ در اطراف آن قرار گرفته‌اند تخمین زده می‌شود. بر این اساس با استفاده از تخمین زنده تجربی واریانس می‌توان واریانس ضرایب نویزی ویولت که آن را با $\sigma_y^2(k)$ نشان می‌دهیم در یک همسایگی با اندازه M را به صورت زیر تخمین زد:

$$\hat{\sigma}_y^2(k) = \frac{1}{M} \sum_{j \in N(k)} y^2(j) \quad (29)$$

با فرض ناهمبستگی نویز از سیگنال واریانس ضرایب نویزی مجموع واریانس ضرایب بدون نویز و واریانس نویز است و بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}(k) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j \in N(k)} y^2(j) - \sigma_n^2} \quad (30)$$

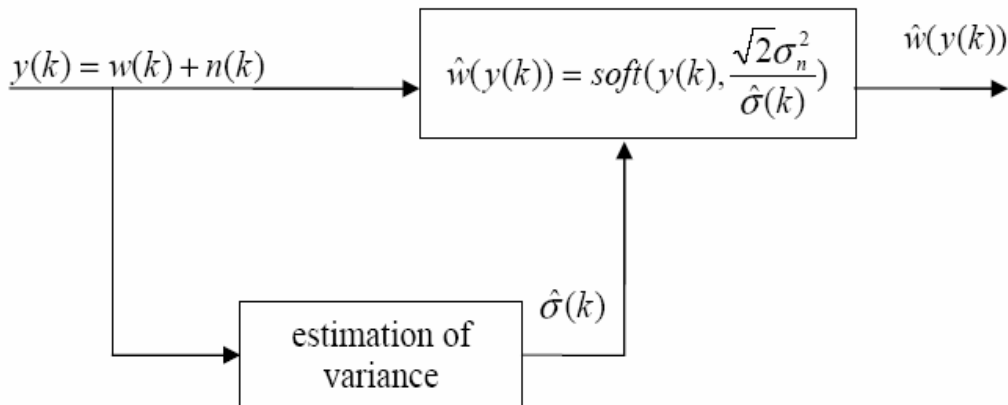
در صورتی که مقدار واریانس نویز نیز در دسترس نباشد با استفاده از تخمین زنده میانه [۱۶] به فرم زیر می‌توان $\hat{\sigma}_n^2$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\sigma_n^2 = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745}, \quad y_i \in \text{subband HH in finest scale} \quad (31)$$

بنابراین به طور خلاصه الگوریتم کاهش نویز پیشنهادی مطابق شکل (۹) در دو گام انجام می‌گیرد. در گام نخست یک تخمین مناسب از واریانس هر ضریب نویزی ویولت بر اساس داده‌های نویزی مشاهده شده در همسایگی هر ضریب زده می‌شود و در گام دوم واریانس تخمین زده شده برای عملگر سطح آستانه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳-۲- الگوریتم نازک‌سازی

پس از آنکه نویز تصویر در حوزه ویولت کاهش داده شد، ضرایب زیرباندهای فرکانس بالا که بیانگر جزئیات اصلی تصویر است در یک عدد بزرگتر از یک ضرب شده و در هر مرحله تقویت می‌شوند و ضرایب زیرباندهای پایین گذر برابر صفر قرار داده شده و در نهایت عملیات معکوس ویولت انجام می‌پذیرد. گرچه پس از باینری کردن تصویر حاصله با یک



شکل ۹- نمودار جعبه‌ای عملیات کاهش نویز با استفاده از توزیع لاپلاس با واریانس محلی

- روش عبور از صفر که لبه‌ها را با جستجوی نقاط عبور از صفر پس از فیلتر کردن تصویر به دست می‌آورد.
- روش کُنی که لبه‌ها را با جستجوی ماکزیمم محلی گرادیان تصویر به دست می‌آورد. بدین منظور گرادیان با به کار بردن مشتق یک فیلتر گوسی به دست می‌آید. در این روش از دو سطح آستانه برای تشخیص لبه‌های قوی و ضعیف استفاده می‌شود. لبه‌های ضعیف صرفاً وقتی که به لبه‌های قوی متصل شوند به عنوان لبه مشخص می‌شوند.
- روش لاپلاس گوسی که لبه‌ها را با جستجوی نقاط عبور از صفر پس از عبور تصویر از فیلتر لاپلاس گوسی به دست می‌آورد.

شکل (۱۲) لبه‌های تصویر نویزی در نظر گرفته در شکل قبل، که با روشهای فوق‌الذکر مشخص شده‌اند را نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است این روشها به علت حضور نویز عملکرد قابل قبولی از خود نشان نمی‌دهند.

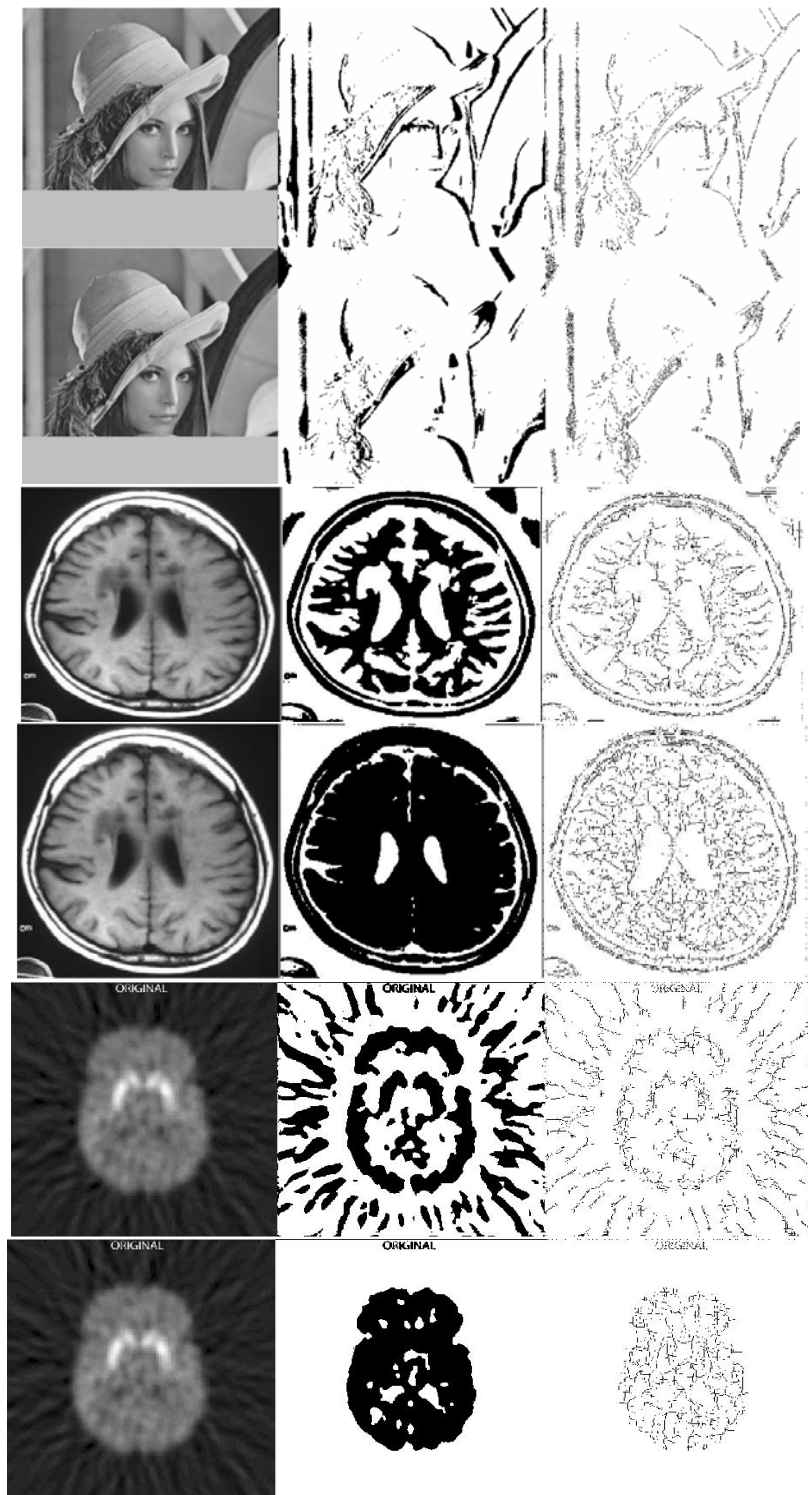
۴- جمع‌بندی و پیشنهادات

در این مقاله پس از بیان نقاط ضعف تبدیل ویولت معمولی به معرفی تبدیل ویولت مختلط پرداخته و نشان داده شد که این تبدیل دارای خصوصیات جالبی از جمله عدم وابستگی به شیفت ورودی و مشخص کردن زوایای $\pm 15^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 75^\circ$ در زیرباندهای خود است. با استفاده از این تبدیل عملیات

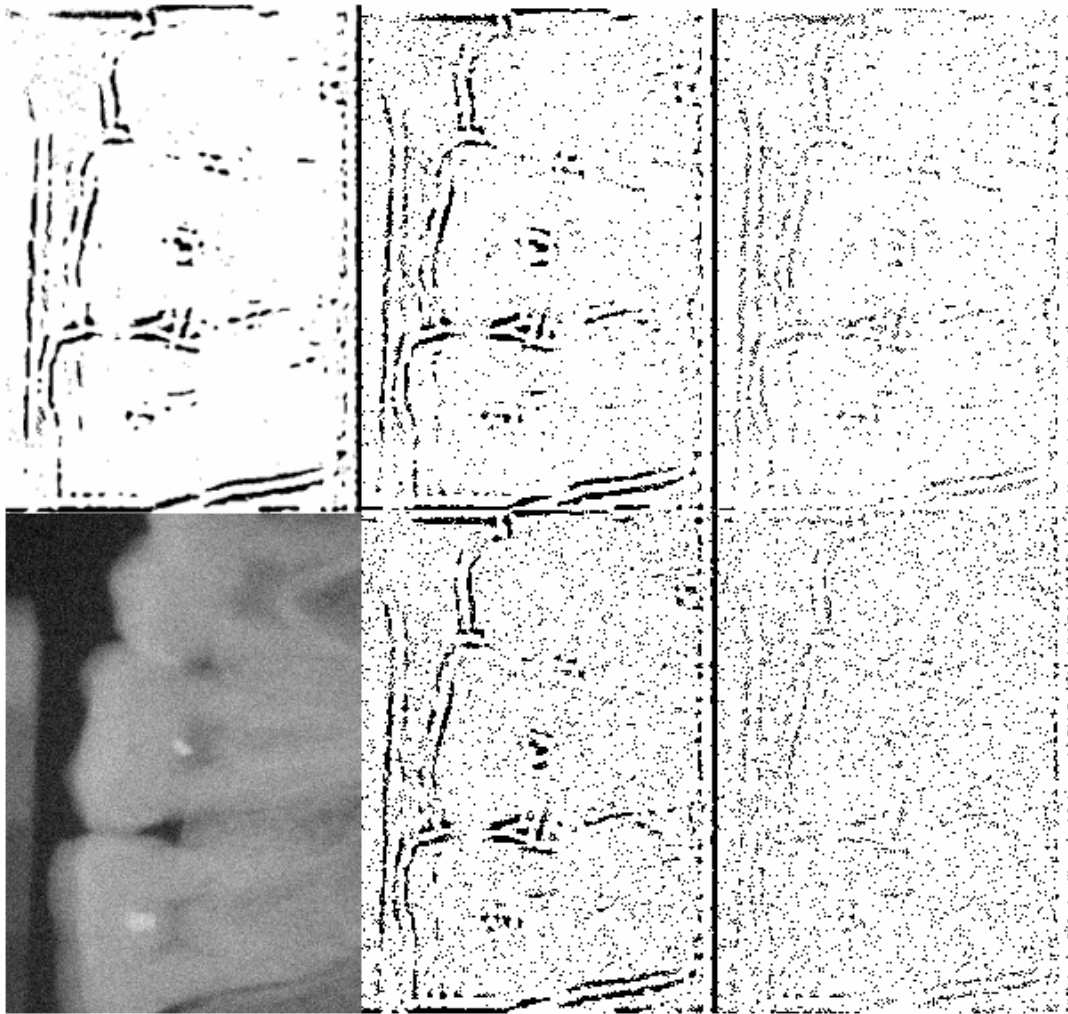
تشخیص لبه تصاویر نویزی، لبه‌های مشخص شده یک تصویر نویزی در حوزه DCWT که از روشهای سطح آستانه سخت به دست آمده است با الگوریتم کاهش نویز محلی مطروحه در بخش (۱-۳) مقایسه شده‌اند. چنانچه از شکل (۱۱) مشخص است، از آنجا که الگوریتم بخش (۱-۳) عملکرد بسیار بهتری از روش سطح آستانه سخت دارد، نتایج تشخیص لبه مبتنی بر این روش بهتر از روش مبتنی بر سطح آستانه سخت است. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که می‌توان با انجام برخی تغییرات نتایج متفاوتی به دست آورد. به عنوان نمونه چنانچه در شکل نشان داده شده است با تلفیق روشهای سطح آستانه سخت و الگوریتم کاهش نویز بخش (۱-۳)، نقاط نویزی کمتری به عنوان لبه مشخص شده‌اند. اما این روش ممکن است اطلاعات مفیدی از لبه‌های اصلی تصویر را نیز حذف کند.

الگوریتم ارائه شده در این مقاله با دیگر روشهای مرسوم تشخیص لبه نیز مقایسه شده است. این روشها عبارتند از [۲۴]:

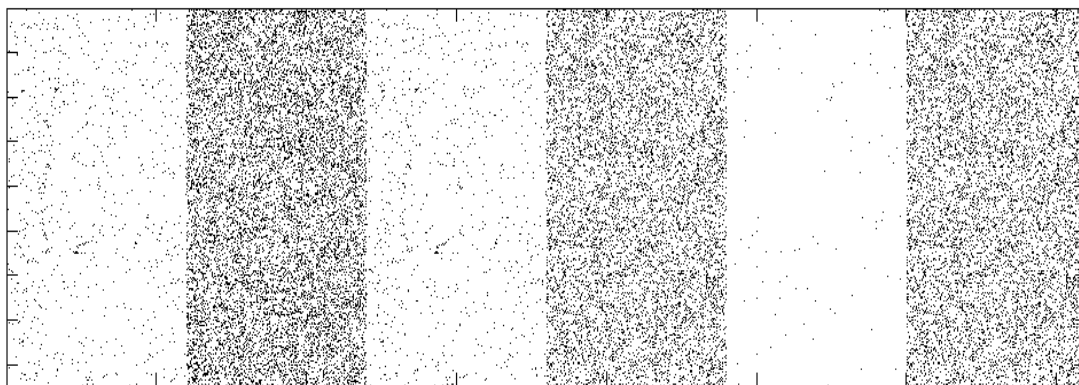
- روش سبیل که با استفاده از تقریب سبیل، نقطه‌هایی را که گرادیان در آن ماکزیمم است به عنوان لبه انتخاب می‌کند.
- روش پیریوت که با استفاده از تقریب پیریوت، نقطه‌هایی را که گرادیان در آن ماکزیمم است به عنوان لبه انتخاب می‌کند.
- روش ربرترز که با استفاده از تقریب ربرترز نقطه‌هایی را که گرادیان در آن ماکزیمم است به عنوان لبه انتخاب می‌کند.



شکل ۱۰- سطر اول، سوم و پنجم مربوط به FDCWT و سطر دوم، چهارم و ششم مربوط به DWT بوده و ستونها از سمت چپ تصویر اصلی، لبه‌های تصویر بدون نازک‌سازی و لبه‌های تصویر که با نازک‌سازی (گام ۷) به دست آمده‌اند را نمایش می‌دهند. تصاویر سطر اول و دوم مربوط به "لنا"، تصاویر سطر سوم و چهارم مربوط به تصویر MRI بدون نویز و تصاویر سطر سوم و چهارم مربوط به یک تصویر PET نویزی است.



شکل ۱۱- تشخیص لبه در حوزه DCWT با استفاده از روش کاهش نویز سطح آستانه سخت + الگوریتم کاهش نویز محلی مطروحه در بخش (۱-۳)، تشخیص لبه در حوزه DCWT با استفاده از الگوریتم کاهش نویز محلی مطروحه در بخش (۱-۳)، تشخیص لبه در حوزه DCWT با استفاده از الگوریتم کاهش نویز محلی مطروحه در بخش (۱-۳) پس از عملیات نازک سازی، تشخیص لبه در حوزه DCWT با استفاده از روش کاهش نویز سطح آستانه سخت پس از عملیات نازک سازی، تشخیص لبه در حوزه DCWT با استفاده از روش کاهش نویز سطح آستانه سخت، تصویر نویزی با واریانس 10^{-1} .



شکل ۱۲- لبه‌های تصویر نویزی در نظر گرفته در شکل قبل که با روشهای مختلف به دست آمده‌اند. به ترتیب از چپ به راست: روش سبیل، روش پیریوت، روش ربرترز، روش عبور از صفر، روش کنی و روش لاپلاس گوسی.

بهتری حاصل کرده و هم فاقد آرتیفکتهای صفحه‌شطرنجی ناشی از ویولت معمولی است.

به علاوه تبدیل ویولت مختلط بر خلاف تبدیل ویولت معمولی در حالت سه بعدی انرژی را در جهت‌ها و سرعت‌های مختلف متمرکز می‌کند و بنابراین ابزار مفیدی برای پردازش سیگنالهای چندبعدی همچون تصاویر ویدئویی و حجم‌های پزشکی است. بر این اساس این تبدیل به عنوان ابزار مناسبی برای پردازش‌های با بعد بالا پیشنهاد می‌شود. به عنوان نمونه حذف نویز از داده‌های سه بعدی پزشکی و استخراج ویژگی از آن با استفاده از این تبدیل پیشنهاد می‌شود.

تشخیص لبه انجام گرفت که در مقایسه با ویولت معمولی و دیگر روشها نتایج بهتر و دقیقتری حاصل شد.

به نظر می‌رسد استفاده از این تبدیل برای پردازش‌های با دقت بالا همچون پردازش تصاویر پزشکی بسیار مفید باشد. چرا که تبدیل ویولت معمولی گرچه برای حالت یک بعدی و پردازش سیگنال دارای عملکرد بسیار خوبی است، اما در حالت دوبعدی و برای پردازش تصویر ایجاد آرتیفکتهای بصری می‌کند که در برخی موارد موجب تفسیرهای غلط در تصویر می‌شود. بر همین اساس نتایج پردازش تصویر با تبدیل ویولت مختلط بهتر از ویولت معمولی خواهد بود. به عنوان نمونه نتایج اولیه حذف نویز از تصاویر با استفاده از این تبدیل هم SNR

مراجع

1. Canny, J., "A Computational Approach to Edge Detection," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 679-698, 1986.
2. Mallat S., and Zhong, S., "Characterization of Signals from Multiscale Edges," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 14, No.7, pp. 710-732, 1992.
3. Fung C., and Shi P., "Design of Compactly Supported Wavelet to Match Singularities in Medical Images," Tech.Rep. Department of EEE, Hong Kong University.
4. Marr, D., and Hildreth E., "Theory of Edge Detection," *Proceedings of the Royal Society of London Series B, Biological Sciences*, Vol. 207, issue 1167, 1980.
5. Mallat, S., "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, pp. 674-693, 1989.
6. Petrou, M., and Kittler, J., "Optimal Edge Detectors for Ramp Edges," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, pp. 483-491, 1991.
7. Karrakchou M., and Li, W., "Optimal Ramp Edge Detection by Orthogonal Wavelet Transform," *IEEE ISCAS*, pp. 967-970, 1992.
8. Zhao, Y., Guiand W., and Chen, Z., "Edge Detection Based on Multi-Structure Elements Morphology," *IEEE WCICA*, pp. 9795 – 9798, 2006.
9. Wu, J., Yin, Z. P., and Xiong, Y., "The Fast Multilevel Fuzzy Edge Detection of Blurry Images," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, No. 5, pp. 344-347, 2007.
10. Law, M.W.K., and Chung, A.C.S., "Weighted Local Variance-Based Edge Detection and Its Application to Vascular Segmentation in Magnetic Resonance Angiography," *IEEE Trans. on Medical Imaging*, Vol. 26, no. 9, pp. 1224 – 1241, 2007.
11. Burrus, C., Gopinath, R., and Guo, H., *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, 1997.
12. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
13. Chagas, A., DaSilva, E., and Nadal, J., "ECG Data Compression Using Wavelets," *Computers in Cardiology*, pp. 423-426, 2000.
14. Joonmi, O. and Woolley, S., "Reversible Wavelet Compression for Digital Angiograms," *Proc. of the Int. Conf. of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society*, Vol. 3, pp. 1442-1445, 1998.
15. Sun, M., and Sciabassi, R., "Precise Determination of Starting Time of Epileptic Seizures Using Subdural EEG and Wavelet Transforms," *Proc. IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 257-260, 1998.
16. Magarey, J., and Kingsbury, N., "Motion Estimation Using a Complex Wavelet," Tech. Rep. CUED/ F-INFENG/TR.226, Cambridge University Engineering Department, Aug. 1995.
17. Thiran, J., "Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 659-664, 1971.
18. Kingsbury, N., "The Dual-Tree Complex Wavelet Transform: A New Technique for Shift Invariance And Directional Filters," *Proc. 8th IEEE DSP Workshop, Bryc Canyon*, 1998.

19. Donoho, D., "De-Noising by Soft Thresholding," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 41, pp. 613-627, 1995.
20. Kingsbury, N., "The Dual-Tree Complex Wavelet Transform; a New Efficient Tool for Image Restoration and Enhancement," *Proc. EUSIPCO 98, Rhodes*, 1998.
21. Rabbani, H., and Vafadoost M., "Noise Reduction Based on a Local Laplace Pdf in Complex Wavelet Domain," *Proc. 4th Iranian Conference of Machine Vision and Image Processing, Mashad*, 2007.
22. Pizurica, A., and Philips, W., "Estimating the probability of the Presence of a Signal of Interest in Multiresolution Single and Multiband Image Denoising," *IEEE Trans. on Image processing*, Vol. 15, No. 3, pp. 654665, 2006.
23. Luisier, F., and Blu, T., Unser M., "A New SURE Approach to Image Denoising: Interscale Orthonormal Wavelet Thresholding," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 16, no. 3, pp. 593-606, 2007.
24. Gonzales, R. C., and Richard, E. W., *Digital Image Processing*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.
25. Wang, B., Wang Y., Selesnick I., and Vetro A., "Video Coding Using 3D Dual-Tree Wavelet Transform," *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, Vol. 2007, Article ID 42761, 15 pages, 2007.
26. Kingsbury, N. G., "Complex Wavelets for Shift Invariant Analysis and Filtering of Signals," *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 10, No. 3, pp. 234-253, 2007.