

# کاربرد روش چندشبکه‌ای جبری در حل معادله دیفیوژن دوبعدی

آرش بدیع سیچانی\* و محسن دوازده امامی\*\*  
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۶/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۵/۲۹)

چکیده -

RS

واژگان کلیدی:

## Algebraic Multigrid Methods for Solving Two-Dimensional Diffusion Equation

A.S. Badie and M.D. Emami

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology

**Abstract:** *Abstract: Multigrid methods, such as the Algebraic MultiGrid methods (AMG), are among the most efficient*

\*\* - استادیار

\* - دانشجوی دکتری

methods for solving discrete linear equations resulting from elliptic PDEs. In this paper, some classic AMG techniques are used for solving a typical two dimensional diffusion equation. The present work focuses on different coarsening techniques such as the standard and aggressive coarsening based on the RS algorithm. Results indicate that the standard coarsening technique together with direct interpolation minimizes the CPU-time and the computational work. Regarding the memory requirement, using a variant of aggressive coarsening with direct interpolation minimizes the size of memory usage. In addition, the setup phase time (coarsening process) is minimum in this technique. Nevertheless, the increase in convergence factor results in higher overall time for the solution phase. Analysis of the aspect ratio of the computational cells shows that the convergence rate is affected little by this parameter. However, the coarsening process work and the total CPU-time are slightly increased when cells with high aspect ratios are used for the numerical simulations. Overall, the standard-coarsening method with direct interpolation is found to be appropriate for two-dimensional diffusion problems..

**Keywords:** Algebraic multigrid, AMG, Coarsening, Diffusion, Strong negative coupling, Smoothing.

مجموعه متغیرهای همسایه با متغیر $i$	$N_i$	مؤلفه سطر $i$ و ستون $j$ ماتریس $A_h$	$a_{ij}$
مجموعه متغیرهای میاناب برای متغیر $i$	$P_i$	ماتریس ضرایب شبکه ریز	$A_h$
مجموعه متغیرهای قویاً مؤثر بر متغیر $i$	$S_i$	ماتریس ضرایب شبکه درشت	$A_H$
مجموعه متغیرهایی که متغیر $i$ بر آنها قویاً مؤثر است	$S_i^T$	عدد پیچیدگی اوپراتور	$c_A$
میدان دما	$T$	عدد پیچیدگی شبکه	$c_G$
بردار مجهول شبکه ریز	$u^h$	مجموعه متغیرهای درشت	$C$
مختصات فضایی	$x, y$	مؤلفه $i$ ام از بردار خطا	$e_i$
فاکتور مقایسه برای تعیین همبستگی قوی	$\varepsilon_{str}$	بردار معلوم شبکه ریز	$f^h$
فاکتور مقایسه برای تعیین گرد کردن فرمول میانابی	$\varepsilon_{tr}$	مجموعه متغیرهای ریز	$F$
ضریب همگرایی	$\rho$	پارامتر گسسته‌سازی در جهت‌های $x, y$	$h_x, h_y$
مجموعه متغیرهای مجهول شبکه ریز	$\Omega^h$	عملگر میانابی	$I_H^h$
		عملگر محدودساز	$I_h^H$

## ۱- مقدمه

بالانویس برای بردار و نماد پایین‌نویس برای تانسور به کار می‌رود. نماد  $h$  برای مشخص کردن اجزای مربوط به شبکه ریز به کار می‌رود.

بزرگ بودن ابعاد (مرتب) ماتریس ضرایب، لزوم استفاده از یک حلگر مؤثر را ایجاد می‌کند چرا که استفاده از حلگرهای مستقیم (مثل روش حذفی گوس-جردن) هزینه محاسبات بسیار بالایی به همراه دارد. از طرفی روشهای تکراری ایستا (مثل روش گوس-سایدل) در شبکه‌های بسیار ریز، همگرایی کندی دارند. نرخ پایین همگرایی در روشهای تک شبکه‌ای از آنجا ناشی می‌شود که فرکانسهای پایین خطا توسط روشهای

گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع بیضوی توسط کلیه روشهای گسسته‌سازی، نهایتاً منجر به تشکیل دستگاه معادلات خطی به شکل ماتریسی زیر می‌شود:

$$A_h u^h = f^h \quad (1)$$

در معادله (۱)،  $A_h$  ماتریس ضرایب (تانسور ضریب) بوده که نوعاً تنک و با ابعاد بزرگ است. بردار  $u^h$  شامل مجهولات و بردار معلومی است که معمولاً به شرایط مرزی و جمله‌های چشمه در معادلات دیفرانسیل بستگی دارد. در این معادله نماد

هموارکننده متداول به سادگی حذف نمی‌شوند. ایده اصلی روشهای چند شبکه‌ای آن است که فرکانسهای پایین خطا را به شبکه‌های درشت منتقل کرده و این گروه از خطاها در شبکه‌های درشت حذف شود. در دهه‌های اخیر روشهای چند شبکه‌ای هندسی [۱] و چند شبکه‌ای جبری<sup>۱</sup> (AMG) [۲-۵] به دلیل مؤثر بودنشان در حل این‌گونه مسائل بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. در یک سیکل از روشهای چند شبکه‌ای، دامنه هر کدام از طیفهای فرکانس خطا در مرتبه درشت<sup>۲</sup> (در این مقاله لفظ "مرتبه" - که مناسبتر است - به جای لفظ "شبکه" مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا در روش AMG هیچ شبکه درشت هندسی وجود ندارد.) مربوط به آن طیف کاهش می‌یابد و به این ترتیب کلیه مؤلفه‌های خطا در هر سیکل چند شبکه‌ای کاهش می‌یابند. چند شبکه هندسی کلاسیک در مسائل با هندسه پیچیده [۶] و همچنین در مسائل با تفاوت مرتبه بزرگی ضرایب [۷ و ۸] و یا در مسائل ناهمگن [۹] محدودیتهایی دارد. در برخی موارد کاربران برای مقاصد محاسباتی مورد نظرشان نیاز به حلگرهایی دارند که بتوان از آنها به صورت جعبه سیاه<sup>۳</sup> استفاده کرد [۱۰] (یعنی از ورودی تنها ماتریس ضرایب و بردار معلوم را گرفته و در خروجی بردار جواب را نتیجه دهد) و بتوانند به سادگی آن را به کد الحاق کرده و به کار گیرند. این عوامل باعث افزایش تقاضا برای چند شبکه‌ای جبری شده است. در نوع کلاسیک چند شبکه‌ای جبری مراتب درشت، بدون نیاز به اطلاعات هندسی مسئله و تنها با استفاده از اطلاعات ماتریس ضرایب، به طور خودکار تولید می‌شود. در AMG مراحل درشت‌سازی<sup>۴</sup> (که مرحله نصب<sup>۵</sup> نامیده می‌شود) هزینه محاسباتی زیادی نسبت به نوع هندسی دارد که از محدودیتهای AMG محسوب می‌شود. در عوض به سبب الگوریتم مرحله نصب در AMG این روش نسبت به چند شبکه هندسی قابلیت تطبیق بیشتری دارد. با توجه به کاربردهای موفقیت‌آمیز AMG، تلاشهای بسیاری در جهت تعمیم این الگوریتم به حالات کلی‌تر صورت گرفته است. از جمله می‌توان به تعمیم الگوریتم به اعداد مختلط [۱۱] و تعمیم آن برای طیف

روشهای عددی در مهندسی، سال ۳۰، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۰

گسترده‌تری از ماتریسهای ضرایب [۱۲] اشاره کرد.

هدف این مقاله به کارگیری روش چند شبکه‌ای جبری بر اساس الگوریتم درشت‌سازی RS<sup>۶</sup> [۳ و ۴] و بررسی عملکرد تکنیکهای مختلف درشت‌سازی برای حل مسائل دیفیوژن است. بررسی نتایج نشان خواهد داد که چه انتخابهایی برای حل این نوع مسائل مفید است. در بخش (۲) نظریه چند شبکه‌ای جبری بر اساس الگوریتم RS و انتخابهای مختلف آن تشریح می‌شود. در بخش (۳) مسائل نمونه‌ای توسط کد تدوین شده به ازای پارامترهای مختلف درشت‌سازی حل شده و نتایج به دست آمده تحلیل می‌شود. در نهایت در بخش (۴) نتیجه‌گیری انجام می‌شود.

## ۲- چند شبکه‌ای جبری بر اساس الگوریتم درشت‌سازی RS

در این بخش به طور مختصر مروری بر الگوریتم کلاسیک AMG خواهیم داشت. توضیحات بیشتر در مراجع [۳، ۴ و ۱۳-۱۵] به طور مفصل آورده شده است. از آنجا که اصول چند شبکه‌ای در تمامی روشها یکسان است در اینجا مفاهیم اولیه از قبیل هموارسازی، درشت‌سازی، عملگرهای انتقال و سیکلهای چند شبکه‌ای را دانسته شده فرض می‌کنیم (برای اطلاعات بیشتر به پیوست (الف) و یا مرجع [۱۶] رجوع شود). قبل از شرح مفاهیم مذکور، ابتدا تعریف قطر غالب<sup>۷</sup> و قویاً قطر غالب<sup>۸</sup> را در ماتریس ضرایب بیان می‌کنیم [۱۷]:

- قطر غالب: اگر مجموع اندازه (قدرمطلق) درایه‌های خارج قطر هر سطر ماتریس  $A_n$  کوچکتر از اندازه درایه روی قطر باشد، آن سطر قطر غالب محسوب می‌شود.
- قویاً قطر غالب: اگر مجموع اندازه (قدرمطلق) درایه‌های خارج قطر هر سطر ماتریس  $A_n$  کوچکتر از  $0.5$  اندازه درایه روی قطر باشد، آن سطر قویاً قطر غالب محسوب می‌شود.

### ۲-۱- درشت‌سازی استاندارد

برای سادگی تنها یک مرحله درشت‌سازی را بررسی

از طرفی همین گره  $i$  می‌تواند بر سایر گره‌ها قویاً مؤثر باشد که مجموعه گره‌هایی که گره  $i$  بر آنها قویاً مؤثر است، با  $S_i^T$  نمایش می‌دهیم:

(۴)  $\forall j \in \Omega^h : i \in S_j : \{ S_i^T = \text{بر } j \text{ قویاً مؤثر باشد} \}$   
 که در معادله (۴)،  $\Omega^h$  دامنه تمام اندیس‌های گره‌های مجهول در دستگاه معادلات رابطه (۱) است.

برای درشت‌سازی، به زیر مجموعه‌ای از گره‌های مجهول شبکه ریز (شبکه واقعی حل عددی) نیاز است. این عمل تجزیه درشت و ریز<sup>۹</sup> نامیده می‌شود. تجزیه درشت و ریز در حالت ایدئال باید بهترین دقت را برای انتقال خطا از شبکه درشت به شبکه ریز فراهم آورد.

الگوریتم پیشنهادی روژ-اُشتوبن<sup>۱۰</sup> برای تجزیه درشت و ریز که درشت‌سازی استاندارد<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود، سه مجموعه  $U$  و  $F$  و  $C$  را مورد استفاده قرار می‌دهد. ابتدا همه گره‌ها در  $U$  قرار داده شده و مجموعه‌های  $F$  (گره‌های ریز) و  $C$  (گره‌های درشت) تهی هستند. سپس مراحل زیر انجام می‌شود:

۱. کلیه گره‌هایی که سطر متناظر آنها در ماتریس  $A_h$  قویاً قطر غالب است، از ماتریس  $U$  خارج و به ماتریس  $F$  منتقل می‌شوند.

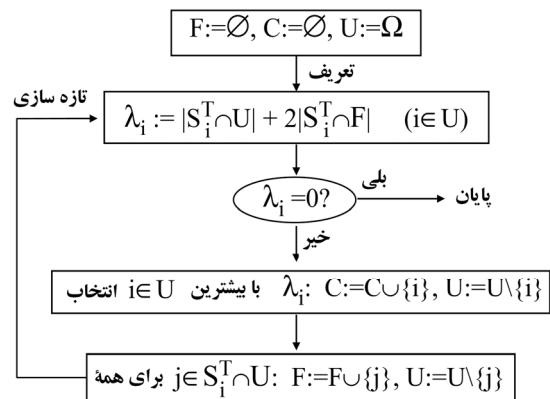
۲. از بین گره‌های باقیمانده در  $U$ ، گره  $k$  که بالاترین اولویت به عنوان گره درشت را دارد، انتخاب و به مجموعه  $C$  منتقل شده و کلیه گره‌هایی که گره  $k$  بر آنها قویاً مؤثر است و هنوز در  $U$  هستند،  $\{ S_k^T \cap U \}$ ، به مجموعه  $F$  منتقل می‌شوند. ملاک اولویت گره درشت پارامتر  $\lambda_k$  است که چنین محاسبه می‌شود:

$$\lambda_i = |S_i^T \cap U| + 2|S_i^T \cap F|$$

۳. مرحله ۲، تا صفر شدن  $\lambda_k$  تکرار شود.

۴. چنانچه در پایان الگوریتم هنوز گره‌هایی در  $U$  باشند، به مجموعه  $F$  اضافه شوند.

در پایان الگوریتم، دو مجموعه  $F$  و  $C$  حاوی گره‌های ریز و درشت هستند. روند الگوریتم فوق در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ - الگوریتم درشت سازی استاندارد<sup>۱۰</sup> [۴]

می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $A_h$  ماتریس با قطر غالب بوده و عناصر قطری آن همگی غیر صفر و مثبت باشند. اجزای مربوط به شبکه درشت را با اندیس  $H$  و شبکه ریز را با اندیس  $h$  نشان می‌دهیم. در مواردی که تشخیص اندیس مربوطه واضح است، به منظور خلاصه نویسی از نوشتن آن خودداری شده است.

سطر  $i$  ام از ماتریس  $A_h$  نمایانگر اثر سایر گره‌ها بر گره  $i$  ام است. علی‌رغم همسایگی فیزیکی برخی گره‌ها با گره  $i$  ام، ممکن است این گره‌ها بر گره  $i$  ام تأثیر نداشته و  $a_{ij}=0$  باشد. لذا مجموعه  $N_i$  را به عنوان مجموعه گره‌های همسایه‌ی مؤثر بر گره  $i$  تعریف می‌کنیم ( $N_i = \{j : a_{ij} \neq 0\}$ ).

از بین گره‌های عضو مجموعه  $N_i$ ، که برای گره  $i$  مشخص شده‌اند، بعضی از آنها اثر بیشتری بر این گره دارند. این گروه را که زیرمجموعه‌ای از  $N_i$  هستند در مجموعه  $S_i$  قرار می‌دهیم:

$$S_i = \{ z \text{ بر } i \text{ قویاً مؤثر باشد} : \forall j \in N_i \} \quad (۲)$$

ملاک انتخاب اعضای مجموعه  $S_i$  این است که نسبت اندازه  $a_{ij}$  به حداکثر اندازه درایه غیر قطر، از کمیت  $\varepsilon_{str}$  بزرگتر باشد [۳]:

$$\frac{|a_{ij}|}{\max_k(a_{ik})} \geq \varepsilon_{str} \quad (۳)$$

که  $\varepsilon_{str}$  یک ضریب ثابت بین صفر و یک است. در کد تدوین شده این مقدار به پیشنهاد مرجع [۳] برابر با ۰/۲۵ در نظر گرفته شده است.

## ۲-۲- درشت‌سازی خشن

الگوریتم دیگری نیز برای درشت‌سازی، تحت عنوان درشت‌سازی خشن<sup>۱۲</sup>، به کار می‌رود. این الگوریتم تعمیمی از درشت‌سازی استاندارد است. در این روش، با توجه به اینکه گره‌هایی با چندین واسطه بر گره مورد بررسی مؤثرند، فرض می‌شود که گره مجاور مؤثر با طول ۱ و گره‌های مؤثر دورتر که با ۱ واسطه به این گره وصل هستند، با طول ۱ باشند. بنابراین مفهوم اتصال قوی با طول بلند چنین تعریف می‌شود: گره  $i$  دارای اتصال قوی با گره  $j$  به طول ۱ است اگر دنباله‌ای از گره‌ها (درحقیقت گره‌های واسطه)  $i_0, i_1, \dots, i_l$  که  $i_0 = i$  و  $i_l = j$  وجود داشته باشد به طوری که برای  $k = 0, 1, 2, \dots, l-1$  داشته باشیم:  $i_{k+1} \in S_{i_k}$ . از طرفی مسیر رسیدن از گره  $i$  به گره  $j$  می‌تواند بیش از یک مسیر باشد. لذا اگر در حالت کلی تعداد این مسیرها را  $p$  بنامیم، به ازای مقادیر  $l \geq 1$  و  $p \geq 1$ ، گره  $i$  دارای اتصال قوی با گره  $j$  است با استفاده از این تعریف معادله (۲) را بازنویسی می‌کنیم:

با توجه به  $(l, p)$ ،  $j$  بر  $i$  قویاً مؤثر باشد

$$S_i^{p,l} = \{j \in \Omega^h : i\} \quad (5)$$

بقیه مراحل مطابق الگوریتم درشت‌سازی استاندارد است.

در کد تدوین شده برای درشت‌سازی خشن حالت‌های  $p=1, l=2$  و  $p=2, l=2$  مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این روش تنها برای نخستین مرحله درشت‌سازی مورد استفاده قرار گرفته و بقیه مراحل به روش استاندارد درشت‌سازی می‌شود. دو حالت مذکور به ترتیب درشت‌سازی  $A_1$  و  $A_2$  نامیده می‌شود. در کد تهیه شده، تکنیک درشت‌سازی خشن بر اساس مطالب بیان شده در نظر گرفته شده است.

## ۲-۳- عملگر میانیابی

پس از آنکه تجزیه درشت و ریز انجام شد عملگر میانیابی<sup>۱۳</sup> را می‌توانیم محاسبه کنیم. وظیفه اصلی عملگر میانیابی انتقال خطا از شبکه درشت به شبکه ریز است. به عبارت دیگر تخمین

مقدار خطا در گره‌های ریز از طریق عملگر میانیابی صورت می‌گیرد.

دو روش متداول برای این منظور وجود دارد: میانیابی مستقیم و میانیابی استاندارد.

این روشها با استفاده از معادله زیر بنا شده‌اند [۵].

$$a_{ii}e_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij}e_j = 0, \quad i \in F \quad (6)$$

که در آن  $e_i$  مؤلفه خطا مربوط به گره  $i$  ام است.

در میانیابی مستقیم مقادیر مربوط به گره‌های شبکه درشت بدون تغییر به گره متناظر ( $i \in C$ ) در شبکه ریز انتقال می‌یابد.

در معادله (۶) هدف محاسبه  $e_i$  است اما با توجه به اینکه پس از درشت‌سازی برخی از مقادیر خطا  $e_j$  (که مربوط به همسایه‌های ریز گره  $i$  می‌شوند) در دسترس نیست لذا مجبور هستیم وزن تأثیرگذاری این مؤلفه‌ها را به سایر گره‌های درشت همسایه منتقل کنیم. بیان ریاضی این فرایند در معادله (۷) ارائه شده است.

$$e_i = \sum_{k \in P_i} \omega_{ik} e_k$$

$$\omega_{ik} = \begin{cases} -\alpha_i a_{ik} / a_{ii} & (k \in P_i^-) \\ -\beta_i a_{ik} / a_{ii} & (k \in P_i^+) \end{cases}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i^-} a_{ij}}{\sum_{j \in P_i^-} a_{ij}}, \quad \beta_i = \frac{\sum_{j \in N_i^+} a_{ij}}{\sum_{j \in P_i^+} a_{ij}}$$

به این ترتیب برای سایر گره‌های ریز ( $i \in F$ ) از معادله فوق استفاده می‌شود. در معادله (۷)  $P_i$  (مجموعه میانیاب) به صورت  $P_i = C \cap S_i$  (مجموعه گره‌های درشت دارای همبستگی قوی با گره  $i$ ) تعریف می‌شود و برای هر مجموعه  $M$  شامل اعداد حقیقی غیر صفر،  $M^+$  به صورت زیر مجموعه‌ای از  $M$  که فقط شامل همه عناصر مثبت  $M$  است تعریف می‌شود و  $M^-$  نیز به طور مشابه فقط شامل همه عناصر منفی  $M$  است. البته معادله (۷) بر مبنای نظریه خطای جبری هموار<sup>۱۴</sup> شده، قابل استنباط است [۵] اما بیان قضایا و فرضیات مورد نیاز آن خارج از حوصله این مقاله است.

در مسائل مورد بررسی این مقاله،  $P_i^+$  تهی است زیرا در مسائل دیفیوژن، همه عناصر غیر قطری  $A_{ij}$  منفی هستند. در این صورت  $\beta_i = 0$  و معادله (۷) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega_{ik} &= -\alpha_i a_{ik} / \tilde{a}_{ii} \quad (k \in P_i) \\ \tilde{a}_{ii} &= a_{ii} + \sum_{j \in N_i^+} a_{ij} \end{aligned} \quad (۸)$$

به هر حال به منظور جامعیت کد برای حل مسائل مختلف، احتمال وجود عناصر مثبت در مجموعه میانیاپ در نظر گرفته شده است.

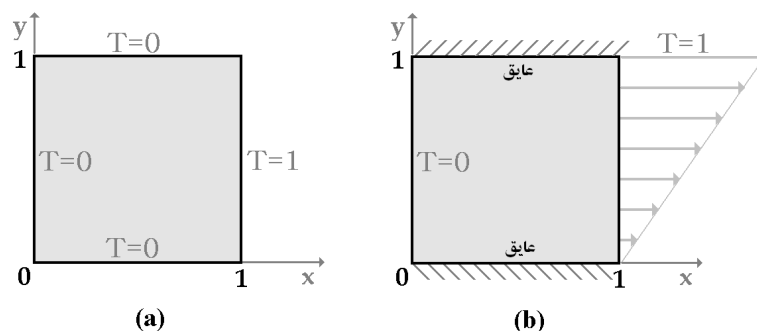
عملگر میانیاپی نه تنها برای انتقال خطا از شبکه درشت به شبکه ریز به کار می‌رود بلکه در تشکیل عملگر محدودساز، معادله (۱۱)، و تشکیل عملگر شبکه درشت نیز نقش اساسی دارد، لذا دقت این عملگر بر روی کارایی چند شبکه‌ای تأثیر بسزایی دارد. یکی از روشهای افزایش دقت میانیاپی استفاده از میانیاپی استاندارد (نسخه اصلاح شده میانیاپی مستقیم) است. در میانیاپی مستقیم برای گره  $i$  تنها از گره‌های موجود در مجموعه  $C$  که دارای ارتباط قوی با گره  $i$  هستند استفاده می‌شود. در میانیاپی استاندارد علاوه بر گره‌های مورد استفاده در میانیاپی به روش مستقیم، آن دسته از گره‌های موجود در مجموعه  $F$  که دارای ارتباط قوی با گره  $i$  هستند نیز به طور غیر مستقیم در میانیاپی نقش دارند. برای این منظور در معادله (۶) هر  $e_j$  که  $j \in F \cap S_i$  به صورت  $e_j \rightarrow -\sum_{k \in N_j} a_{jk} e_k / a_{jj}$  جایگزین می‌شود. به این ترتیب معادلات ریز مربوط به همسایه‌های ریز دارای همبستگی قوی، با معادله مربوط به گره  $i$  ادغام شده و باعث بهبود دقت میانیاپی می‌شود. در این صورت معادله جدید حاصل می‌شود که با جمع‌آوری ضرایب گره‌ها می‌توان آن را به شکل معادله (۶) نوشت. اگر ضرایب جمع‌آوری شده را با بالانویس "مد" نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ii} e_i + \sum_{j \in \hat{N}_i} \hat{a}_{ij} e_j &= 0, \\ \hat{N}_i &= \{j : j \neq i, \hat{a}_{ij} \neq 0\} \end{aligned} \quad (۹)$$

مجموعه میانیاپ در این حالت به صورت  $P_i = C \cap [S_i \cup (\bigcup_{j \in F \cap S_i} S_j)]$  (مجموعه گره‌های درشت دارای همبستگی قوی با گره  $i$  و یا با همسایه ریز  $i$ ) تعریف می‌شود و با جایگزین کردن تمام  $a$ ها با  $\hat{a}$  و  $N_i$  با  $\hat{N}_i$  در معادله‌های (۷) و (۸) فرمول میانیاپی استاندارد به دست می‌آید.

اگر تجزیه درشت و ریز بر اساس الگوریتم درشت‌سازی خشن باشد (و یا در مواردی خاص در درشت‌سازی استاندارد) امکان استفاده از میانیاپی استاندارد و مستقیم تنها برای تعداد محدودی از گره‌ها امکانپذیر است. در این موارد از میانیاپی چندگذر<sup>۱۵</sup> استفاده می‌شود. برای گره‌هایی که میانیاپی به روشهای مذکور امکانپذیر است ( $P_i \neq \emptyset$ ) از معادله (۷) استفاده می‌شود. گره‌هایی که میانیاپی شده‌اند را با  $F^*$  نشان می‌دهیم. سپس برای تمام گره‌های باقیمانده ( $i \in F - F^*$ ) که  $S_i \cap F^* \neq \emptyset$ ، میانیاپی به این طریق انجام می‌شود که در معادله (۶) تمام گره‌های مثل  $j$  که  $j \in S_i \cap F^*$ ، به صورت  $e_j \rightarrow \sum_{k \in P_j} \omega_{jk} e_k$  جایگزین می‌شود. به این ترتیب معادله‌ای مشابه معادله (۹) حاصل می‌شود و فرمول میانیاپی همانند آنچه در میانیاپی استاندارد انجام شد به دست می‌آید. در این حالت مجموعه میانیاپ به صورت  $\bigcup_{j \in S_i \cap F^*} P_j$  تعریف می‌شود.

برای افزایش دقت میانیاپی به خصوص در مواردی که درشت‌سازی خشن انجام می‌شود می‌توان از هموارساز ژاکوبی<sup>۱۶</sup> استفاده کرد. در این حالت ابتدا عملگر میانیاپ به یکی از روشهای مستقیم یا استاندارد محاسبه شده سپس برای هر گره ریز ( $i \in F$ ) در معادله (۶)، همه گره‌های  $F \cap N_i = F_i$ ، به صورت  $e_j \rightarrow \sum_{k \in P_j} \omega_{jk} e_k$  جایگزین می‌شود. (معادله‌ای مشابه معادله (۹) همانند میانیاپی استاندارد حاصل می‌شود). در این حالت مجموعه میانیاپ به صورت  $(C \cap N_i) \cup (\bigcup_{j \in F_i} P_j)$  تعریف می‌شود. میانیاپی به روش فوق میانیاپی ژاکوبی کاملاً هموار شده نامیده می‌شود [۳ و ۴]. البته این فرایند می‌تواند بیش از یکبار



شکل ۲- فضای حل و شرایط مرزی مسئله برای دو حالت مختلف شرایط مرزی (۱) و (۲)

عملگر محدودساز<sup>۱۸</sup> به صورت ترانهاده عملگر میانیاب محاسبه می‌شود:  $I_h^H = (I_h^h)^T$  و سرانجام عملگر شبکه درشت با استفاده از اصل گالرکین محاسبه می‌شود:

$$A_H = I_h^H A_h I_h^h \quad (11)$$

آنچه بیان شد خلاصه‌ای از نظریه مربوط به الگوریتم AMG است. این الگوریتم در کدی به زبان C++ پیاده‌سازی شده است. در این مقاله نتایج عددی، بر مبنای کد مذکور ارائه می‌شود.

### ۳- حل معادله انتقال گرمای دائم دو بعدی به روش AMG

معادله پخش گرما در حالت دائم برای مسائل دو بعدی در دستگاه مختصات کارتزین با فرض ضریب هدایت ایزوتروپیک و عدم وجود چشمه گرمایی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

که در آن  $T$  دما و  $x$  و  $y$  مختصات فضایی‌اند. گسسته‌سازی به روش تفاضل محدود به صورت پنج نقطه استاندارد<sup>۱۹</sup> صورت می‌گیرد. دو حالت برای شرایط مرزی در نظر گرفته شده است. در حالت (۱) همه شرایط مرزی از نوع دیریکله است. در حالت (۲) شرایط مرزی شامل دو شرط نویمن می‌شود. برای گسسته‌سازی در روی دو مرز بالا و پایین در حالت (۲) که شرط عایق بودن را نشان می‌دهد از تقریب مرتبه اول استفاده شده است.

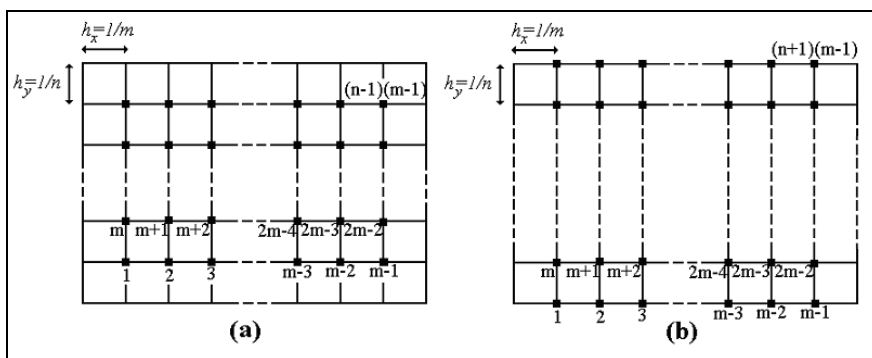
فضای حل و شرایط مرزی مطابق شکل (۲) است. شبکه حل و ترتیب گره‌ها در آن و پارامترهای گسسته‌سازی در شکل (۳) نشان داده شده است.

مورد استفاده قرار گیرد که موجب افزایش دقت میانیابی می‌شود. در برخی موارد به جای آنکه همه گره‌های  $j \in F_i$  به صورت بیان شده جایگزین شود، تنها جایگزینی برای گره‌های  $j$  انجام می‌شود که  $j \in F \cap S_i$  و مجموعه میانیاب به صورت  $(C \cap N_i) \cup (\bigcup_{j \in F \cap S_i} P_j)$  تعریف می‌شود.

استفاده از میانیابی ژاکوبی، به دلیل وجود گره‌های دارای همبستگی غیر مستقیم در مجموعه میانیاب، ممکن است باعث افزایش تعداد اجزای غیر صفر<sup>۱۷</sup> در عملگر میانیاب و در نتیجه افزایش هزینه محاسبات برای تشکیل عملگرها شود. به منظور اجتناب از مشکل مذکور، در فرمول میانیابی، معادله (۷)، ضرایبی که نسبت آنها به بزرگترین ضریب، از فاکتور مقایسه  $\epsilon_{tr}$  (در عمل  $\epsilon_{tr} = 0.2$ ) کوچکتر بوده حذف و ضرایب باقیمانده در عددی ضرب شده به طوری که مجموع آنها نسبت به حالت اولیه عوض نشود. البته در حالتی که ضرایب مثبت و منفی هر دو در فرمول میانیابی وجود دارند برای اصلاح ضرایب به طور جداگانه عمل می‌شود. (در مسائل مورد بررسی این مقاله چنین حالتی وجود ندارد ولی برای عمومیت دادن به کد، الگوریتمهای مربوط به این مورد نیز لحاظ شده است.)

سرانجام عملگر میانیابی با استفاده از روشهای مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e_i^h = (I_h^H e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{if } i \in C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} \omega_{ik}^h e_k^H & \text{if } i \in F^h \end{cases} \quad (10)$$



شکل ۳- شبکه حل و ترتیب گره‌ها و پارامتر گسسته‌سازی برای دو حالت (۱) و (۲)

است). این کمیت معمولاً پس از هر بار تکرار اندکی افزایش می‌یابد اما از کرانی که کوچکتر از ۱ است، تجاوز نمی‌کند. مقدار متوسط ضریب همگرایی با محاسبه میانگین هندسی ضریب همگرایی تکرارهای اول تا  $k$ ام به دست می‌آید [۱۶]. کمیت‌های بی‌بعدی نیز برای تخمین حافظه مورد نیاز برای انجام محاسبات AMG تعریف می‌شود: پیچیدگی شبکه  $c_G$  و پیچیدگی عملگر  $c_A$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c_G = \sum_1 n_1 / n_1 \quad , \quad c_A = \sum_1 m_1 / m_1 \quad (13)$$

در معادله (۱۳)  $n_1$  و  $m_1$  به ترتیب تعداد گره‌ها و تعداد اجزای غیر صفر ماتریس ضرایب مربوط به مرحله (Level)  $l$ ام است.

جدول (۱) و (۲) اجرای برنامه را به ازای انتخاب‌های مختلف مرحله نصب، برای دو مسئله (۱) و (۲) نشان می‌دهد. ابعاد شبکه مورد استفاده  $400 \times 400$  ( $m=400, n=400$ ) است. البته تعداد گره‌های مجهول در مسئله (۲) به علت وجود شرط مرزی نویمن، به نسبت اندکی بیشتر از حالت (۱) است. مشخصات سیستم مورد استفاده به شرح زیر است:

Processor: Intel(R) Pentium(R) 4 CPU 3.40GHz CPUs),  
Memory: 2046MB RAM

اولین نتیجه‌ای که از جدول (۱) حاصل می‌شود ارجحیت روش درشت‌سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم از نظر کمینه بودن زمان اجراست. از نظر میزان حافظه نسبی مورد نیاز که اعداد پیچیدگی آن را نشان می‌دهد، روش درشت‌سازی  $A_1$

گره‌هایی که از شرط دیریشه ناشی شده‌اند از مجهولات حذف شده‌اند.

از آنجا که هدف اصلی این مقاله بررسی تکنیک‌های مختلف مرحله نصب است انتخاب‌های مرحله حل را به یک حالت محدود می‌کنیم:

الف) سیکل مورد استفاده V-Cycle است. سیکل‌های دیگر F-Cycle, W-Cycle [۱۸] هستند.

ب) تعداد تکرار برای پیش هموارسازی و پسا هموارسازی  $2^0$  به ترتیب ۳ و ۲ است.

ج) هموارسازی توسط روش گوس-سایدل  $2^1$  به طور نرمال انجام می‌شود. روش دیگر، هموارسازی متقارن  $2^2$  است.

د) معیار همگرایی، کاهش نُرم باقیمانده به  $10^{-1}$  برابر مقدار اولیه است.

آزمایش‌های عددی انجام شده در این تحقیق نشان داده که انتخاب‌های (الف)، (ب)، و (ج) بهترین انتخاب برای حل مسائل مورد نظر این مقاله است. انتخاب (د) بسته به دقت مورد نیاز برای حل دستگاه، تعیین می‌شود. حدس اولیه برای دما در هر گره اعدادی تصادفی بین ۰ و ۱ است و برای تمامی اجراها از آن استفاده می‌شود.

چند کمیت برای بررسی عملکرد روشها تعریف می‌شود: ضریب همگرایی  $\rho_k$  عبارت است از نسبت نُرم باقیمانده پس از یک تکرار سیکل چند شبکه‌ای به نُرم باقیمانده قبل از تکرار  $\rho_k = \frac{\|r_k\|_2}{\|r_{k-1}\|_2}$  که  $k$  شماره تکرار و  $\|\cdot\|_2$  نرم اقلیدسی



جدول ۱- زمان پردازشگر، تعداد تکرار، کمیتهای پیچیدگی، ضریب همگرایی و ... برای مسئله (۱) بر روی شبکه ۴۰۰×۴۰۰ با ۱۵۹۲۰۱ مجهول

روش درشتساز	روش میانمایی	زمان پردازشگر (ثانیه)			تعداد تکرار	اعداد پیچیدگی		نسبت زمان نصب %	تعداد مراحل درشت	ضریب همگرایی	
		نصب	حل	کل		$c_A$	$c_G$			چرخه پایانی	میانگین
استاندارد	استاندارد	۴/۷۳۵	۱/۵۱۶	۶/۲۵۱	۷	۲/۲۰	۱/۶۷	۷۶	۷	۰/۰۹۱۸	۰/۰۵۷۲
	مستقیم	۳/۴۰۷	۱/۳۱۲	۴/۷۱۹	۶	۲/۲۰	۱/۶۷	۷۲	۷	۰/۰۴۲۵	۰/۰۲۶۰
A <sub>1</sub>	استاندارد	۶/۵۳۱	۱/۷۶۶	۸/۲۹۷	۱۰	۱/۸۰	۱/۲۷	۷۹	۶	۰/۱۸۱۰	۰/۱۱۵۶
	مستقیم	۳/۰۷۸	۵/۸۱۲	۸/۸۹۰	۴۰	۱/۴۵	۱/۳۳	۳۵	۷	۰/۷۱۹۲	۰/۶۰۳۳
A <sub>2</sub>	استاندارد	۷/۱۱۰	۱/۲۳۵	۸/۳۴۵	۷	۱/۵۹	۱/۳۳	۸۵	۶	۰/۰۸۲۷	۰/۰۴۵۱
	مستقیم	۹/۷۹۷	۱/۴۶۹	۱۱/۲۶۶	۹	۱/۵۹	۱/۳۳	۸۷	۶	۰/۱۵۲۰	۰/۱۰۷۱
استاندارد	مستقیم*+FJ1	۷/۷۳۴	۱/۵۴۷	۹/۲۸۱	۶	۲/۸۶	۱/۶۷	۸۳	۶	۰/۰۳۳۰	۰/۰۲۶۰
	مستقیم+PJ1	۷/۱۵۶	۱/۶۱۰	۸/۷۶۶	۶	۲/۸۶	۱/۶۸	۸۲	۷	۰/۰۳۱۱	۰/۰۲۵۳
	مستقیم+PJ2	۸/۶۸۷	۱/۵۶۳	۱۰/۲۵۰	۶	۲/۸۶	۱/۶۷	۸۵	۶	۰/۰۴۱۴	۰/۰۲۹۵

\* FJ1 = ژاکوبی کامل به همراه یک مرحله هموار سازی، PJ1 = ژاکوبی جزئی به همراه یک مرحله هموار سازی، PJ2 = ژاکوبی جزئی به همراه دو مرحله هموار سازی

قابل استنباط است. بدیهی است که کوچک بودن ضریب همگرایی لزوماً موجب کاهش زمان اجرا نمی شود چرا که معمولاً روشهایی که باعث کاهش این ضریب می شوند، همزمان موجب افزایش حجم عملیات لازم چه در مرحله نصب و چه در مرحله حل می شود. این مطلب در مقایسه اعداد جدول در مورد روش درشتساز استاندارد به همراه میانمایی مستقیم و یک مرحله هموار سازی جزئی، با سایر روشها روشن است. تعداد مراتب درشت در کلیه روشها تقریباً ثابت است. لازم به ذکر است که عملیات درشتساز تا مرحله ای که تعداد گره های باقیمانده کمتر از ۴۰ است صورت می گیرد. نکته قابل توجه دیگر آن است که مرحله نصب، بخش عمده ای (حدود ۷۰ درصد) از کل هزینه محاسبات را به خود اختصاص می دهد. این موضوع علت گران بودن AMG را نسبت به نسخه هندسی چند شبکه ای نشان می دهد. البته باید توجه داشت که هزینه محاسبات در مرحله نصب به شدت به نحوه پیاده سازی الگوریتمها بستگی دارد به خصوص آنکه الگوریتمهای این بخش چندان سراسر نیست. (در کد موجود الگوریتمهای این بخش

به همراه میانمایی مستقیم کمترین حجم را نسبت به سایر روشها به خود اختصاص می دهد. به علاوه زمان لازم برای مرحله نصب در این روش کمترین مقدار است. متأسفانه بزرگ بودن ضریب همگرایی در این روش موجب افزایش شدید تعداد تکرار و متعاقباً زمان اجرا در مرحله حل می شود. روش درشتساز A<sub>2</sub> در مرحله حل بهتر از A<sub>1</sub> عمل می کند اما مرحله نصب در این روش پر هزینه تر می شود. روشهای همراه با میانمایی هموار سازی شده (به روش ژاکوبی) علی رغم ضریب هموار سازی بسیار کوچک (که همگرایی در تکرار کم را نتیجه می دهد) در مجموع زمان زیادتری را نسبت به سایر روشها به خود اختصاص می دهند.

با مقایسه سه سطر آخر جدول (۱) مشخص می شود که یک مرحله هموار سازی جزئی برای بهبود ضریب همگرایی کافی است و افزایش تعداد مراحل و یا هموار سازی کامل باعث کوچکتر شدن ضریب همگرایی نمی شود. به علاوه این روشها همانطور که انتظار می رفت باعث افزایش اجزای غیر صفر در عملگرها شده است که این موضوع از بزرگ بودن عدد  $c_G$

جدول ۲- زمان پردازشگر، تعداد تکرار، کمیتهای پیچیدگی، ضریب همگرایی و ... برای مسئله (۲) بر روی شبکه ۴۰۰×۴۰۰ با ۱۵۹۹۹۹ مجهول

روش درشتساز	روش میانبایی	زمان پردازشگر (ثانیه)			تعداد تکرار	اعداد پیچیدگی		نسبت زمان نصب %	تعداد مراحل درشت	ضریب همگرایی	
		نصب	حل	کل		C <sub>A</sub>	C <sub>G</sub>			نصب	حل
استاندارد	استاندارد	۴/۷۶۵	۱/۵۶۳	۶/۳۲۸	۷	۲/۲۰	۱/۶۷	۷۵	۷	۰/۱۰۱۰	۰/۰۵۷۰
	مستقیم	۳/۴۲۲	۱/۹۵۳	۵/۳۷۵	۹	۲/۲۰	۱/۶۷	۶۴	۷	۰/۲۲۶۵	۰/۰۹۵۸
A <sub>1</sub>	استاندارد	۶/۴۸۴	۱/۷۸۱	۸/۲۶۵	۱۰	۱/۸۰	۱/۲۷	۷۸	۶	۰/۱۹۵۱	۰/۱۱۶۲
	مستقیم	۳/۰۹۴	۶/۴۲۲	۹/۵۱۶	۴۲	۱/۴۵	۱/۳۳	۳۳	۷	۰/۷۵۲۸	۰/۶۱۸۸
A <sub>2</sub>	استاندارد	۷/۰۳۱	۱/۴۰۶	۸/۴۳۷	۸	۱/۶۱	۱/۳۴	۸۳	۶	۰/۱۱۳۱	۰/۰۷۰۲
	مستقیم	۹/۸۱۳	۱/۶۵۷	۱۱/۴۷۰	۱۰	۱/۶۰	۱/۳۴	۸۶	۶	۰/۱۸۰۷	۰/۱۱۷۴
استاندارد	مستقیم*+FJ1	۷/۷۵۰	۱/۵۶۳	۹/۳۱۳	۶	۲/۸۶	۱/۶۷	۸۳	۶	۰/۰۳۵۰	۰/۰۲۵۷
	مستقیم+PJ1	۷/۱۵۷	۱/۵۶۳	۸/۷۲۰	۶	۲/۸۶	۱/۶۷	۸۲	۷	۰/۰۳۲۵	۰/۰۲۵۱
	مستقیم+PJ2	۸/۷۵۰	۱/۵۷۸	۱۰/۳۲۸	۶	۲/۸۶	۱/۶۷	۸۵	۶	۰/۰۴۳۴	۰/۰۲۸۶

تا حد زیادی بهینه طراحی شده است).

از مقایسه دو ستون مربوط به ضریب همگرایی معلوم می‌شود که ضریب همگرایی در تکرارهای اولیه معمولاً کوچکتر از تکرارهای بعدی است. در اغلب موارد استفاده از میانبایی استاندارد باعث کاهش ضریب همگرایی می‌شود. تمامی مطالب عنوان شده در مورد مسئله (۲) (که اطلاعات آن در جدول (۲) موجود است نیز صادق است. از مقایسه جداول (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که به طور کلی زمان اجرا برای مسئله (۲) بیشتر از مسئله (۱) است که دلیل این امر پیچیده‌تر بودن شرایط مرزی در مسئله (۲) است.

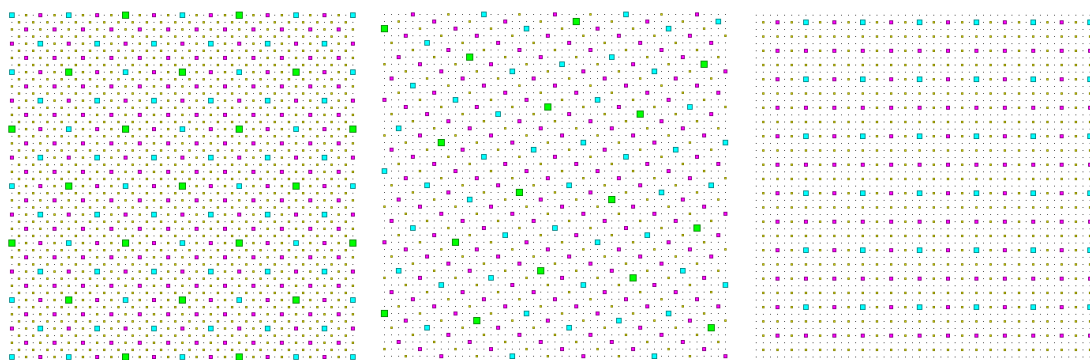
به منظور مقایسه AMG با یک حل کننده متداول، مسئله (۱) توسط یک حل کننده گوس-سایدل نیز حل شد. زمان اجرا در روش گوس-سایدل، ۲۹۱۱ ثانیه (حدوداً ۵۰۰ برابر زمان حل در AMG) و تعداد تکرار ۱۹۷۱۰۰ به دست آمد. این مطلب نشان دهنده توانایی AMG برای حل شبکه‌های ریز (شبکه‌های با تعداد مجهولات زیاد) است.

شکلکهای (۴) و (۵) گره‌های انتخاب شده در مراحل درشت‌سازی برای شبکه ۵۰×۵۰ (در روشهای درشت‌سازی مختلف) را نشان می‌دهد. اگر چه روش انتخاب شده برای

میانبایی می‌تواند در الگوی مربوط به انتخاب گره‌ها به طور غیر مستقیم مؤثر باشد اما آزمایش نشان داده که آرایش این الگو بستگی چندانی به روش انتخاب شده برای میانبایی ندارد. لذا میانبایی برای تمامی حالات با روش مستقیم انجام شده است. مطابق شکل (۴) (مربوط به مسئله ۱)، الگوی به دست آمده از روش درشت‌سازی استاندارد مشابه روش درشت‌سازی RBMPS<sup>۲۶</sup> [۱۶] در نسخه هندسی است. در روش A<sub>2</sub> الگوی به دست آمده مشابه روش کلاسیک چند شبکه‌ای هندسی است که در آن شبکه درشت از حذف یکی در میان گره‌های شبکه ریز به دست می‌آید. (در روش A<sub>2</sub> تعداد مراحل درشت‌سازی یکی کمتر از روشهای دیگر است.) در مورد A<sub>1</sub>، الگوی به دست آمده تنک‌تر از روش استاندارد است. در مورد شکل (۵) مربوط به مسئله ۲) تفاوت چندانی در مقایسه با شکل (۴) به چشم نمی‌خورد به جز در درشت‌سازی A<sub>2</sub> که تأثیر شرایط مرزی نوین در مرزهای بالا و پایین مشاهده می‌شود.

نمودارهای (۶)، اثر افزایش گره‌های شبکه بر ضریب همگرایی متوسط، زمان صرف شده برای محاسبه هر مجهول و نسبت زمان اجرای مرحله نصب به زمان اجرای مرحله حل را نشان می‌دهد.

■ مرحله ۴ ■ مرحله ۳ ■ مرحله ۲ ■ مرحله ۱ ■ شبکه ریز

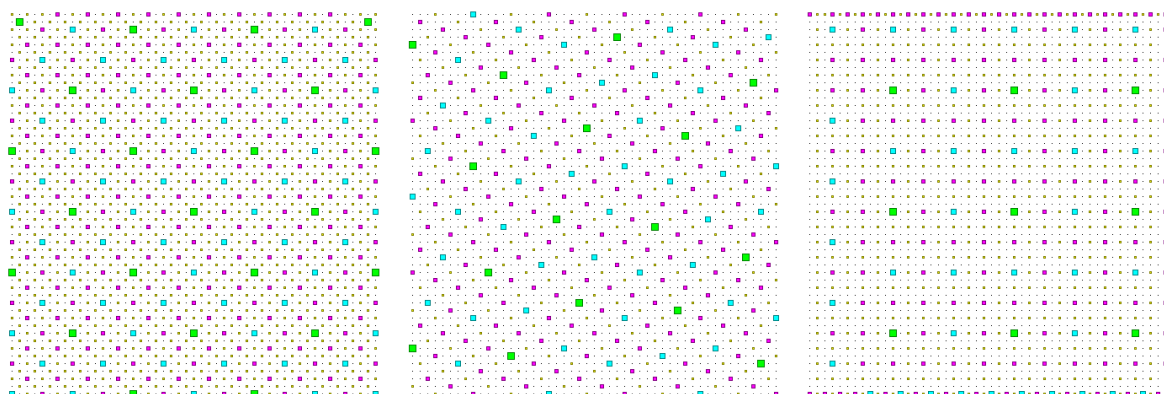


درشت سازی  $A_2$  به همراه میانبایی مستقیم      درشت سازی  $A_1$  به همراه میانبایی مستقیم      درشت سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم

شکل ۴- گره‌های انتخاب شده در مراحل درشت‌سازی، به روشهای مختلف برای مسئله (۱)

(گره‌های انتخاب شده در هر مرحله از فرآیند درشت‌سازی، با یک اندازه مشخص نمایش داده شده است. هر چه مرتبه مربوطه درشت‌تر باشد گره مربوطه نیز با اندازه بزرگتر نمایش داده شده است.)

■ مرحله ۴ ■ مرحله ۳ ■ مرحله ۲ ■ مرحله ۱ ■ شبکه ریز



درشت سازی  $A_2$  به همراه میانبایی مستقیم      درشت سازی  $A_1$  به همراه میانبایی مستقیم      درشت سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم

شکل ۵- گره‌های انتخاب شده در مراحل درشت‌سازی، به روشهای مختلف برای مسئله (۲)

هر مجهول، در تمامی روشها به جز روش درشت‌سازی  $A_2$  به همراه میانبایی استاندارد، عدم وابستگی به ابعاد شبکه مشاهده می‌شود. این موضوع بیانگر آن است که هزینه محاسبات در روش AMG از مرتبه تعداد مجهولات است. مطلب اساسی در مؤثر بودن روشهای چند شبکه‌ای در مقایسه با سایر روشها در نتیجه اخیر خلاصه می‌شود. در مورد استثنای عنوان شده (روش درشت‌سازی  $A_2$  به همراه میانبایی استاندارد) افزایش زمان متوسط صرف شده برای محاسبه هر مجهول، مربوط به مرحله

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ابعاد شبکه تأثیر چندانی در مقدار ضریب همگرایی ندارد که این موضوع به قضیه عدم وابستگی این ضریب به ابعاد شبکه اشاره دارد [۱۶]. در میان این روشها درشت‌سازی  $A_1$  به همراه میانبایی مستقیم نامطلوبترین ضریب همگرایی را دارد. روش درشت‌سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم و یک مرحله هموارسازی جزئی بهترین (کمترین) میزان ضریب همگرایی را در شبکه‌های مختلف دارد. در بررسی زمان متوسط صرف شده برای محاسبه

جدول ۳- زمان پردازشگر، تعداد تکرار، کمیت‌های پیچیدگی، ضریب همگرایی و ... برای مسئله (۱) بر روی شبکه  $200 \times 800$  با  $159001$  مجهول

روش درشت‌سازی	روش میان‌بایی	زمان پردازشگر (ثانیه)			تعداد تکرار	اعداد پیچیدگی		نسبت زمان نصب %	تعداد مراحل درشت	ضریب همگرایی	
		نصب	حل	کل		$c_A$	$c_G$			نصب	حل
استاندارد	استاندارد	۹/۳۴۳	۱/۸۴۴	۱۱/۱۸۷	۷	۳/۰۳	۱/۹۱	۸۴	۸	۰/۰۹۵۹	۰/۰۴۸۴
	مستقیم	۸/۶۰۹	۱/۶۰۹	۱۰/۲۱۸	۶	۳/۰۳	۱/۹۱	۸۴	۸	۰/۰۵۰۸	۰/۰۲۸۰
$A_1$	استاندارد	۸/۶۵۶	۱/۶۴۱	۱۰/۲۹۷	۷	۲/۶۳	۱/۵۷	۸۴	۷	۰/۰۶۴۰	۰/۰۵۲۳
	مستقیم	۶/۸۴۴	۶/۳۴۳	۱۳/۱۸۷	۳۳	۲/۰۹	۱/۶۱	۵۲	۸	۰/۶۴۶۳	۰/۵۳۹۱
$A_2$	استاندارد	۹/۵۳۱	۱/۸۵۹	۱۱/۳۹۰	۷	۳/۰۳	۱/۹۱	۸۴	۸	۰/۰۹۵۹	۰/۰۴۸۴
	مستقیم	۹/۰۳۱	۱/۶۰۷	۱۰/۷۰۳	۶	۳/۰۳	۱/۹۱	۸۴	۸	۰/۰۵۰۹	۰/۰۲۸۰
استاندارد	مستقیم*+FJ1	۱۰/۹۵۳	۱/۶۴۱	۱۲/۵۹۴	۶	۳/۱۶	۱/۹۱	۸۷	۸	۰/۰۵۵۳	۰/۰۲۹۸
	مستقیم+PJ1	۱۰/۰۶۳	۱/۶۴۱	۱۱/۷۰۴	۶	۳/۱۶	۱/۹۱	۸۶	۸	۰/۰۴۸۳	۰/۰۲۷۴
	مستقیم+PJ2	۱۰/۸۹۰	۱/۶۸۸	۱۲/۵۷۸	۶	۳/۱۶	۱/۹۱	۸۷	۸	۰/۰۵۷۵	۰/۰۳۰۶

مقایسه دو جدول (۳) و (۴) با یکدیگر نشان می‌دهد که نتایج برای دو مسئله (۱) و (۲) تقریباً یکسان است و شرایط مرزی اثر عمده‌ای بر عملکرد روشها ندارد. از نظر زمان اجرا روش درشت‌سازی استاندارد به همراه میان‌بایی مستقیم (همانند قبل) کمترین مقدار را در هر دو مسئله به خود اختصاص داده است. از نظر کمینه بودن میزان حافظه مورد نیاز، با توجه به اعداد پیچیدگی، روش درشت‌سازی خشن  $A_1$  به همراه میان‌بایی استاندارد بهترین روش است. زمان اجرای روش درشت‌سازی خشن  $A_1$  به همراه میان‌بایی استاندارد تفاوت محسوسی با روش درشت‌سازی استاندارد به همراه میان‌بایی مستقیم ندارد. بنابراین با توجه به مطلب اخیر می‌توان نتیجه گرفت روش درشت‌سازی خشن  $A_1$  به همراه میان‌بایی استاندارد به صرفه‌ترین روش برای حل این‌گونه مسائل است. به علاوه در این روش زمان اجرای مرحله نصب کوتاهتر از زمان نصب در روش درشت‌سازی استاندارد است.

در مقایسه کمیت‌های مربوط به روش درشت‌سازی استاندارد با روش درشت‌سازی خشن  $A_2$ ، (صرف نظر از کمیت‌های مربوط به زمان اجرا) تشابهی ملاحظه می‌شود. به نظر می‌رسد مراتب درشت در هر دو روش به طور مشابه تشکیل شده باشد.

نصب است. نسبت زمان مرحله نصب به مرحله حل در شبکه  $800 \times 800$  هنگام استفاده از این روش به بیش از ۱۰ برابر می‌رسد که نامطلوب است. در روشهای دیگر این نسبت به ابعاد شبکه بستگی ندارد. نسبت زمان مرحله نصب به مرحله حل در روش  $A_1$  به همراه میان‌بایی مستقیم، کوچکتر از ۱ (حدود یک سوم) است که دلیل آن بزرگ بودن ضریب همگرایی و متعاقباً همگرایی کند و در نتیجه افزایش زمان حل است. در سایر روشها این نسبت در حدود ۳ تا ۴ است.

دو مسئله (۱) و (۲) با استفاده از شبکه‌هایی که پارامتر گسسته‌سازی آن در هر دو جهت برابر بود ( $h_x = h_y$ )، مورد بررسی قرار گرفتند. اکنون عملکرد روش AMG در مورد شبکه‌هایی که پارامتر گسسته‌سازی آن در یک جهت چند برابر جهت دیگر است<sup>۳۷</sup> (و یا در روش گسسته‌سازی حجم محدود وقتی که نسبت ابعاد المان بزرگ است) بررسی می‌شود. برای این منظور شبکه‌ای به ابعاد  $800 \times 200$  ( $m=800$ ,  $n=200$ ) در نظر گرفته می‌شود. تعداد مجهولات این شبکه حدوداً برابر با تعداد مجهولات در شبکه  $400 \times 400$  است. جداول (۳) و (۴) اجرای برنامه را به ازای انتخابهای مختلف مرحله نصب، برای دو مسئله (۱) و (۲) نشان می‌دهد.

جدول ۴- زمان پردازشگر، تعداد تکرار، کمیتهای پیچیدگی، ضریب همگرایی و ... برای مسئله (۲) بر روی شبکه ۸۰۰×۲۰۰ با ۱۶۰۵۹۹ مجهول

روش درشتسازی	روش میانمایی	زمان پردازشگر (ثانیه)			تعداد تکرار	اعداد پیچیدگی		نسبت زمان نصب %	تعداد مراحل درشت	ضریب همگرایی	
		نصب	حل	کل		$c_A$	$c_G$			نصب	حل
استاندارد	استاندارد	۹/۰۶۳	۱/۸۴۳	۱۰/۹۰۶	۷	۳/۰۲	۱/۹۱	۸۳	۸	۰/۰۹۹۹	۰/۰۴۳۷
	مستقیم	۸/۱۲۵	۱/۵۹۴	۹/۷۱۹	۶	۳/۰۲	۱/۹۱	۸۴	۸	۰/۱۰۱۹	۰/۰۳۲۲
A <sub>1</sub>	استاندارد	۸/۳۹۱	۱/۵۹۳	۹/۹۸۴	۷	۲/۶۲	۱/۵۷	۸۴	۷	۰/۰۶۲۷	۰/۰۵۱۹
	مستقیم	۶/۸۹۱	۶/۵۱۵	۱۳/۴۰۶	۳۴	۲/۰۸	۱/۶۰	۵۱	۸	۰/۶۵۵۸	۰/۵۴۵۹
A <sub>2</sub>	استاندارد	۹/۵۶۲	۱/۸۲۸	۱۱/۳۹۰	۷	۳/۰۲	۱/۹۰	۸۴	۸	۰/۰۹۹۹	۰/۰۴۳۷
	مستقیم	۸/۵۹۴	۱/۶۰۹	۱۰/۲۰۳	۶	۳/۰۲	۱/۹۰	۸۴	۸	۰/۱۰۱۹	۰/۰۳۲۲
استاندارد	مستقیم*+FJ1	۱۱/۰۱۶	۱/۶۴۱	۱۲/۶۵۷	۶	۳/۱۵	۱/۹۱	۸۷	۸	۰/۰۲۸۲	۰/۰۲۰۵
	مستقیم+PJ1	۱۰/۰۷۸	۱/۶۵۷	۱۱/۷۳۵	۶	۳/۱۵	۱/۹۱	۸۶	۸	۰/۰۳۰۷	۰/۰۲۱۳
	مستقیم+PJ2	۱۰/۹۳۷	۱/۶۸۸	۱۲/۶۲۵	۶	۳/۱۵	۱/۹۱	۸۷	۸	۰/۰۴۶۰	۰/۰۲۴۶

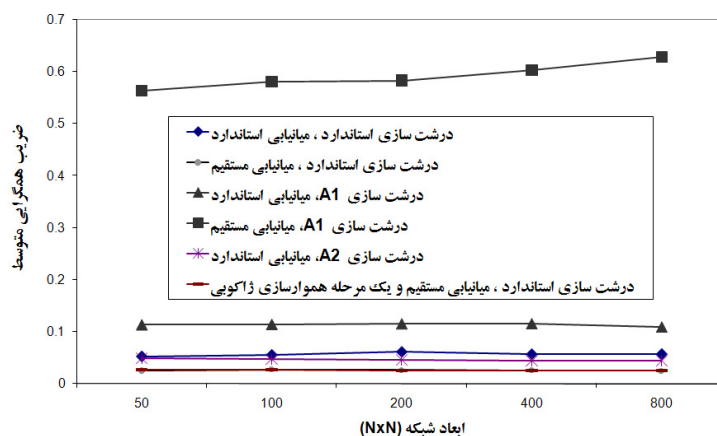
شبکه و عملگر نیز بیشتر است. بنابراین AMG در این گونه مسائل به حافظه بیشتری نیاز دارد. تعداد مراحل درشتسازی در مقایسه با تعداد مراحل درشتسازی در شبکه ۴۰۰×۴۰۰ یک یا دو مرحله بیشتر است که خود یکی از عوامل افزایش حجم حافظه مورد نیاز است. در بررسی مقادیر مربوط به ضریب همگرایی و تعداد تکرار، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با مقادیر متناظرشان در جدول (۱) و (۲) (شبکه ۴۰۰×۴۰۰) مشاهده نمی‌شود. این موضوع نشان دهنده همگرایی خوب AMG صرف نظر از نسبت  $h_y/h_x$  است.

شکل (۷) آرایش گره‌های انتخاب شده در مراحل درشتسازی برای شبکه ۱۰۰×۲۵ (در روشهای درشتسازی مختلف) را برای مسئله (۲) نشان می‌دهد. مطابق شکل (۷)، در روش درشتسازی استاندارد، درشتسازی در جهتی که تراکم تعداد گره‌ها بیشتر بوده صورت گرفته است (جهت افقی) و این روند آنقدر ادامه یافته تا تراکم سلولها در هر جهت یکسان شود. در حقیقت این عمل تطابق دادن شبکه‌های درشت با فیزیک ایزوتروپیک<sup>۲۸</sup> مسئله است و AMG این کار را به طور خودکار انجام می‌دهد. در مورد روش درشتسازی خشن A<sub>1</sub> تعداد مراحل درشتسازی یک مرحله کمتر از روش استاندارد است.

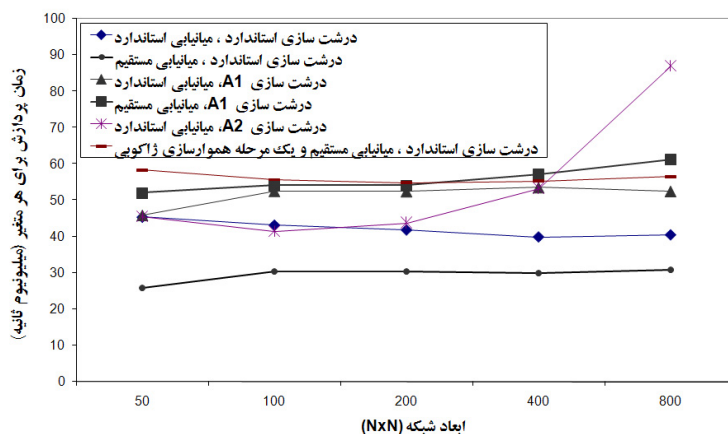
علت این پدیده در ادامه بررسی می‌شود. هر گره مجهول (صرف نظر از گره‌های مجاور مرز) تنها با گره‌های واقع در سمت چپ و راست خود ارتباط قوی دارد به این ترتیب جهت‌های دارای ارتباط قوی تنها در امتداد افقی قرار دارند. در این شرایط با پیگیری الگوریتم روش استاندارد و روش A<sub>2</sub> معلوم می‌شود که هر دو روش گره‌های مشابهی را به عنوان گره‌های دارای ارتباط قوی با گره دلخواه  $i$  معرفی می‌کنند. به عبارت دیگر  $S_i = S_i^{2,2}$ . بنابراین اولین مرحله درشتسازی (که عامل تفاوت دو روش مذکور در حالت کلی است) در این شرایط یکسان انجام می‌گیرد لذا این دو روش به طور یکسان عمل می‌کنند. البته مدت زمان اجرا در دو الگوریتم متفاوت است چرا که الگوریتم درشتسازی خشن A<sub>2</sub> پیچیده‌تر بوده و هزینه محاسبات بیشتری نسبت به روش استاندارد به همراه دارد. سایر مطالب بیان شده در مورد شبکه ۴۰۰×۴۰۰ کم و بیش به طور مشابه برای حالت ۸۰۰×۲۰۰ نیز صادق است.

از مقایسه اعداد جداول (۳) و (۴) با اعداد جداول (۱) و (۲) که مربوط به شبکه ۴۰۰×۴۰۰ است نتیجه‌گیری می‌شود که مرحله نصب در این موارد (مواردی که نسبت طول به عرض احجام کنترل زیاد است) طولانی‌تر است. به علاوه اعداد پیچیدگی

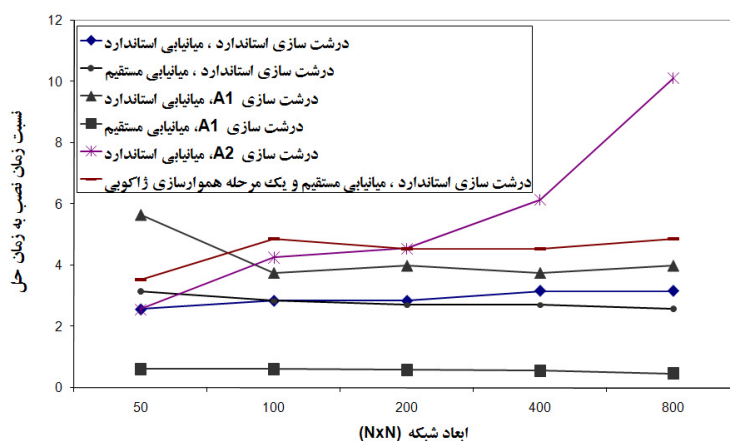
ضریب همگرایی متوسط بر حسب ابعاد شبکه



زمان پردازش برای هر متغیر بر حسب ابعاد شبکه

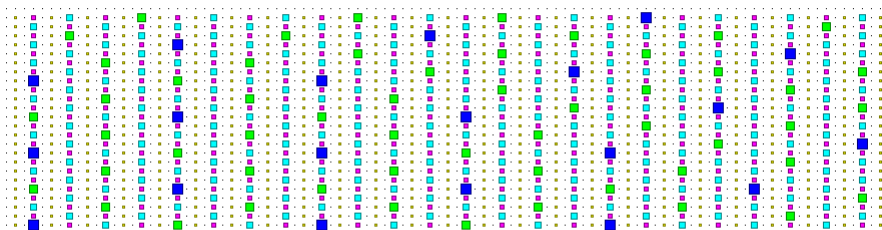


نسبت زمان نصب به زمان حل بر حسب ابعاد شبکه

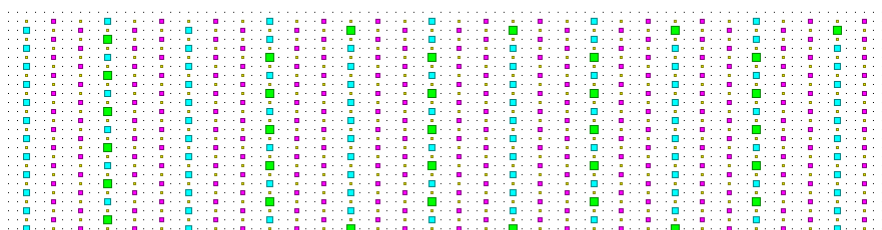


شکل ۶- اثر افزایش گره‌های شبکه بر ضریب همگرایی متوسط، زمان صرف شده برای محاسبه هر مجهول و نسبت زمان اجرای مرحله نصب به زمان اجرای مرحله حل در مورد مسئله (۱) (منظور از اعداد ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ... در محور افقی به ترتیب شبکه‌های ۵۰×۵۰، ۱۰۰×۱۰۰، ۲۰۰×۲۰۰، ... است).

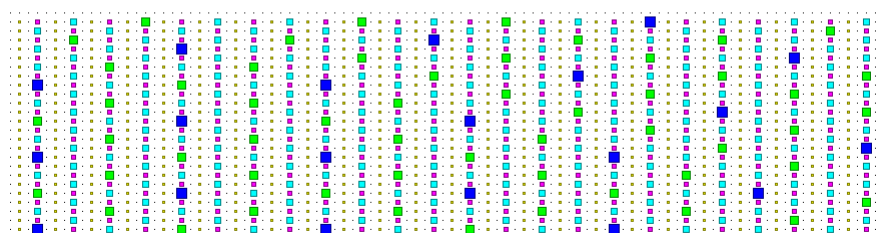
■ مرحله ۵ ■ مرحله ۴ ■ مرحله ۳ ■ مرحله ۲ ■ مرحله ۱ ■ شبکه ریز



درشت سازی استاندارد به همراه میانمایی استاندارد



درشت سازی خشن A<sub>1</sub> به همراه میانمایی استاندارد



درشت سازی خشن A<sub>2</sub> به همراه میانمایی استاندارد

شکل ۷- مراحل درشت سازی برای شبکه ۱۰۰×۲۵ (در روشهای درشت سازی مختلف) برای مسئله (۲)

جدول ۵- اثر نسبی روشهای مختلف برای تشکیل اجزای چندشبکه‌ای بر حافظه، زمان پردازشگر در مرحله نصب و نرخ همگرایی

(علامت "+" به معنای افزایش و علامت "-" به معنای کاهش است.)

	روش درشت سازی			روش میانمایی		
	استاندارد	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	استاندارد	مستقیم	ژاکوبی
حافظه مورد نیاز	++	-	++	+	-	+++
زمان مرحله نصب	+	--	+	+	-	+++
نرخ همگرایی	+	-	+	++	+	++

دو روش درشت سازی استاندارد و A<sub>2</sub>، مجموعه گره‌های دارای ارتباط قوی در اولین مرحله درشت سازی یکسان بوده لذا فرایند درشت سازی در این دو روش به طور مشابه صورت می‌گیرد. جدول (۵) خلاصه نتایج حاصل در این مقاله را به طور فشرده بیان می‌کند.

انطباق شبکه‌های درشت با فیزیک ایزوتروپیک مسئله نیز به خوبی صورت گرفته است. آرایش گره‌های انتخاب شده در مراحل درشت سازی روش A<sub>2</sub>، همان گونه که انتظار می‌رفت، کاملاً مشابه روش استاندارد است. علت این پدیده نیز - همانطور که در حالت شبکه همگن عنوان شد آن است که در

#### ۴- نتیجه گیری

نتایج به دست آمده در این تحقیق نشان می‌دهد که روش چندشبکه‌ای جبری در مسایل دیفیوژن با انواع شرایط مرزی، از کارایی بسیار خوبی برخوردار است. نتایج نشان می‌دهد که روش درشت‌سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم از نظر زمان اجرا بهترین انتخاب در این نوع مسائل است. از نظر میزان حافظه نسبی مورد نیاز که اعداد پیچیدگی آن را نشان می‌دهد، روش درشت‌سازی  $A_1$  به همراه میانبایی مستقیم کمترین حجم را نسبت به سایر روشها به خود اختصاص می‌دهد. به علاوه زمان لازم برای مرحله نصب در این روش کمترین مقدار است. متأسفانه بزرگ بودن ضریب همگرایی در این روش موجب افزایش شدید تعداد تکرار و متعاقباً زمان اجرا در مرحله حل می‌شود. روش درشت‌سازی  $A_2$  در مرحله حل بهتر از  $A_1$  عمل می‌کند اما مرحله نصب در این روش پرهزینه‌تر می‌شود. نتایج موید این نکته است که یک مرحله هموارسازی جزئی برای بهبود ضریب همگرایی کافی است و افزایش تعداد مراحل و یا هموارسازی کامل باعث کوچکتر شدن ضریب همگرایی نمی‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که مرحله نصب، بخش عمده‌ای (حدود ۷۰ درصد) از کل هزینه محاسبات را به خود اختصاص می‌دهد. این موضوع علت گران بودن AMG را نسبت به نسخه هندسی چند شبکه‌ای را نشان می‌دهد.

نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که نسبت طول به عرض احجام کنترل محاسباتی بر نرخ همگرایی اثر محسوسی ندارد اما اندکی باعث افزایش هزینه محاسبات در مرحله نصب و افزایش زمان کل اجرا می‌شود.

در مسائلی که نسبت ابعاد احجام کنترل با فیزیک مسئله متناسب نیستند، روش درشت‌سازی خشن  $A_1$  به همراه میانبایی مستقیم، با توجه به کاهش حافظه مورد نیاز و در عین حال همگرایی مطلوب، توصیه می‌شود. در سایر موارد درشت‌سازی استاندارد به همراه میانبایی مستقیم می‌تواند به عنوان گزینه پیش فرض مورد انتخاب قرار گیرد.

#### پیوست - مروری بر روش چندشبکه‌ای

در روشهای تکراری ابتدا یک حدس تقریبی برای بردار جواب معادله (پ-۱) در نظر گرفته می‌شود. سپس در فرایندی این حدس بهبود می‌یابد. فرض کنید یک حدس برای جواب در تکرار  $k$  ام را با  $u^{(k)}$  نشان دهیم در این صورت باقیمانده متناظر با آن تکرار ( $r^{(k)}$ ) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r^{(k)} = f - Au^{(k)} \quad (\text{پ-۱})$$

اکنون اگر بخواهیم اصلاحی مانند  $e^{(k)}$  را (که خطا نامیده می‌شود) به  $u^{(k)}$  اضافه کنیم تا جواب حاصل شود باید داشته باشیم:

$$e^{(k)} = u - u^{(k)} \quad (\text{پ-۲})$$

اگر دو طرف معادله اخیر را در  $A$  ضرب کنیم و مقدار  $Au$  را از معادله (۱) قرار دهیم با استفاده از معادله (پ-۱) خواهیم داشت:

$$Ae = r \quad (\text{پ-۳})$$

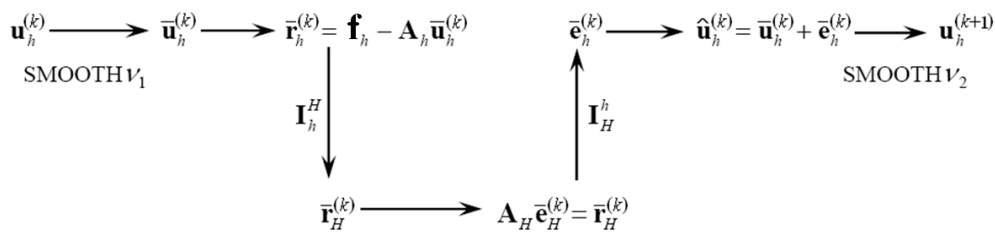
به این ترتیب رابطه بین خطا و باقیمانده مشخص می‌شود. این رابطه از اهمیت ویژه‌ای در روشهای تکراری برخوردار است. حل این دستگاه معادل با حل معادله (۱) است. اما در یک روش تکراری نیازی نیست که این دستگاه به طور دقیق حل شود. در عوض مقدار خطا تقریب زده می‌شود. روشهای هموار کننده (مانند گوس-سایدل) که برای حل معادله (پ-۳) مورد استفاده قرار می‌گیرند در حذف مؤلفه‌های فرکانس پایین خطا ناکارآمدند. اکنون سؤال اصلی چگونگی حذف مؤلفه‌های فرکانس پایین خطا است. ایده روش دوشبکه‌ای آن است که دستگاه معادلات (پ-۳) را با دستگاه معادلات به دست آمده از یک شبکه با تعداد گره کمتر تقریب بزینم. سپس با حل این دستگاه جدید بتوانیم جواب دستگاه معادلات (پ-۳) را به طور تقریبی به دست آوریم. شکل (پ-۱) مراحل سیکل دوشبکه‌ای را نشان می‌دهد.

اگر بخواهیم مراحل شکل (پ-۱) را خلاصه کنیم خواهیم داشت:

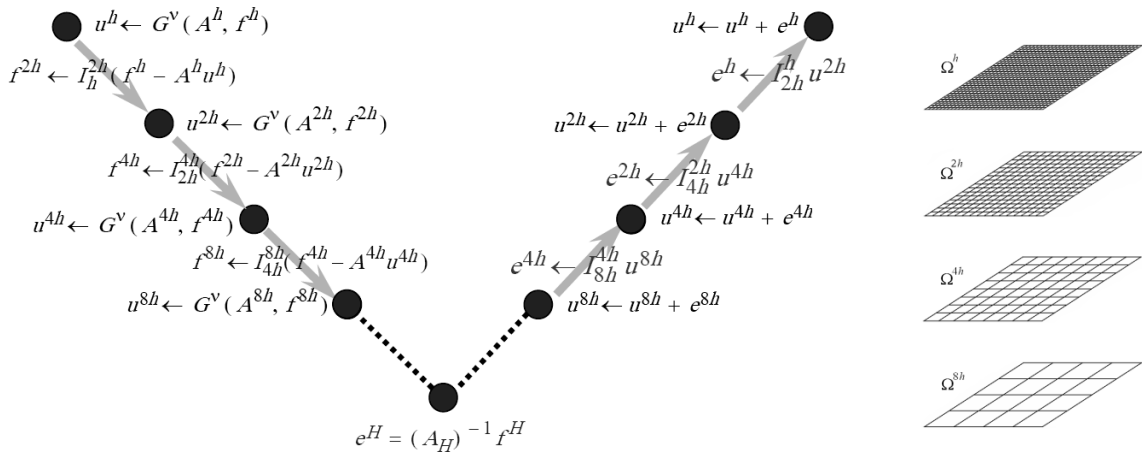
۱- با داشتن حدس  $u^{(k)}$  تعداد  $\nu_1$  تکرار توسط یک روش هموار کننده روی جواب انجام می‌دهیم.

۲- بردار باقیمانده را محاسبه می‌کنیم، معادله (پ-۱).





شکل پ-۱- مراحل سیکل دو شبکه‌ای (مقصود از اندیس  $H$ ، اجزای مربوط به شبکه درشت است).



شکل پ-۲- نمونه‌هایی از توالی شبکه‌های درشت و مراحل سیکل چندشبکه‌ای  $V(v, 0)$  (عملگر  $G^v$ ، مرحله هموارسازی بر روی  $u$  انجام می‌دهد).

تصحیحات در شبکه ریز نیاز است. اگر چه این دستگاه معادلات شامل تعداد کمتری متغیر مجهول (کمتر از نصف تعداد مجهولات شبکه ریز) است اما هنوز استفاده از روش مستقیم برای حل این دستگاه ممکن است مقرون به صرفه نباشد. بنابراین به یک روش تقریبی برای حل این دستگاه نیاز است. یک ایده جالب آن است که از یک روش دو شبکه‌ای دیگر برای حل دستگاه مذکور استفاده شود. در این صورت به یک سیکل سه شبکه‌ای خواهیم رسید. این فرایند را می‌توان تعمیم داد و آن را به طور بازگشتی برای حل معادلات تصحیحات تا چندین مرحله اعمال کرد تا تعداد متغیرهای باقیمانده در درشت‌ترین سطح به اندازه کافی کم شود. در این صورت می‌توان معادلات تصحیحات متناظر با درشت‌ترین شبکه را توسط یک حل کننده مستقیم به طور دقیق حل کرد. اعمال یک مرحله از چنین فرایندی سیکل چندشبکه‌ای نامیده می‌شود.

شکل (پ-۲) الگوریتم این فرایند را به طور شماتیک

۳- باقیمانده را توسط عملگر محدودساز به شبکه درشت منتقل می‌کنیم.

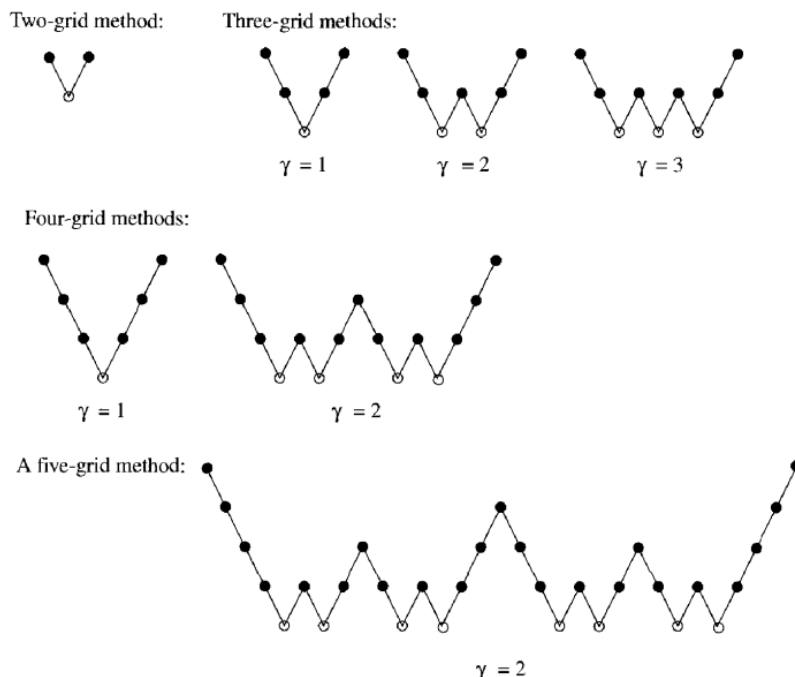
۴- با حل دقیق معادله باقیمانده در شبکه درشت مقدار تصحیحات را به دست می‌آوریم.

۵- مقدار تصحیحات را توسط عملگر میانابایی به شبکه ریز منتقل می‌کنیم.

۶- تصحیحات را به جواب در شبکه ریز اضافه می‌کنیم، معادله (پ-۲).

۷- با داشتن جواب اصلاح شده،  $v_2$  تکرار هموار کننده دیگر انجام می‌دهیم. سرانجام حدس اولیه به صورت  $u^{(k+1)}$  اصلاح می‌شود.

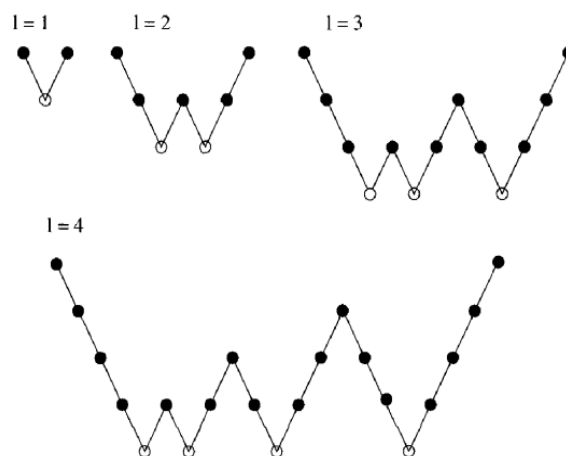
مراحل (۲) تا (۶) اصلاح با شبکه درشت<sup>۲۹</sup> نامیده می‌شود. در این الگوریتم  $v_1$  و  $v_2$  به ترتیب تعداد تکرار پیش هموارسازی و پس‌هموارسازی است. مرحله (۴) روش دو شبکه‌ای، به حل دستگاه معادلات شبکه درشت به منظور به دست آوردن



شکل پ-۳- ساختار سیکلهای چندشبهه‌ای به ازای اندیسهای گردش متفاوت

روی آخرین تقریب جواب صورت می‌گیرد در حالی که در سایر مراحل درشت، هموارسازی بر روی حدس اولیه صفر انجام می‌شود. در سیکل  $V$  حل تقریبی معادله تصحیحات در شبکه ریز، با اعمال یک سیکل دو شبکه‌ای صورت می‌گیرد. می‌توان در حل معادلات تصحیحات دقت بیشتری صرف کرد و به جای اعمال یک مرحله سیکل دو شبکه‌ای، از  $\gamma$  بار اعمال سیکل دو شبکه‌ای استفاده کرد.  $\gamma$  اندیس گردش<sup>۳۰</sup> نامیده می‌شود. برای  $\gamma=1$  همان روش قبل (سیکل  $V$ ) به دست می‌آید و برای  $\gamma=2$ ، سیکل به دست آمده  $W$  نامیده می‌شود.

شکل (پ-۳) سیکلهای چندشبهه‌ای را به ازای اندیسهای گردش مختلف نشان می‌دهد. سیکلهای چندشبهه‌ای می‌توانند اشکال دیگری نیز داشته باشند به ویژه مقدار اندیس گردش می‌تواند در هر شبکه متفاوت باشد. از جمله این نوع سیکلها می‌توان به سیکل  $F$  اشاره کرد که در شکل (پ-۴) ساختار آن نمایش داده شده است. در شکلهای (پ-۳) و (پ-۴) مقصود از نماد  $(l)$  محدودسازی باقیمانده به شبکه درشتتر و نماد  $(/)$  میانابایی تصحیحات به شبکه ریزتر است. همچنین نماد  $(\bullet)$  به معنی هموارسازی و نماد  $(\circ)$  به معنی حل مستقیم در شبکه مربوطه است.



شکل پ-۴- ساختار سیکل  $F$   $(l)$  نماینده تعداد شبکه‌های

درشت است.)

نمایش می‌دهد. در این شکل اندیسهای  $h$ ،  $2h$ ،  $4h$  و ... به ترتیب مربوط به شبکه ریز، شبکه درشت با پارامتر گسسته‌سازی  $2h$ ، شبکه درشت با پارامتر گسسته‌سازی  $4h$  و ... است. تعداد مراحل پیش هموارسازی  $(\nu_1)$  و پسا هموارسازی  $(\nu_2)$  معمولاً در شبکه‌های مختلف، ثابت در نظر گرفته می‌شود. این سیکل  $V$  شکل به اختصار  $V(\nu_1, \nu_2)$  نامیده می‌شود. توجه شود که هموارسازی در شبکه ریز بر

- |                                     |                                |  |
|-------------------------------------|--------------------------------|--|
| 1. algebraic multigrid              | 12. aggressive coarsening      | 23. convergence factor                 |
| 2. coarse levels                    | 13. interpolation              | 24. grid complexity                    |
| 3. black-box                        | 14. algebraically smooth error | 25. operator complexity                |
| 4. coarsening                       | 15. multi-pass interpolation   | 26. red-black multigrid poisson solver |
| 5. setup phase                      | 16. jacobi-relaxation          | 27. high aspect ratio                  |
| 6. Ruge-Stüben coarsening process   | 17. non-zero-elements          | 28. isotropic                          |
| 7. diagonally dominate              | 18. restriction                | 29. coarse grid correction (CGC)       |
| 8. $i$ strongly $n$ -coupled to $j$ | 19. standard 5-point stencil   | 30. cycle Index                        |
| 9. C/F splitting                    | 20. pre and post-smoothing     |  |
| 10. Ruge-Stüben                     | 21. Gauss-Seidel               |  |
| 11. standard coarsening             | 22. symmetric smoothing        |  |

## مراجع

- Hackbusch, W. "Multi-grid Methods and Applications," Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- Brandt, A. McCormick, and S.F. Ruge, J. "Algebraic Multigrid (AMG) for Automatic Multigrid Solution with Application to Geodetic Computations," Institute for Computational Studies, POB 1852, Fort Collins, Colorado, 1982.
- Stuben, K., "Algebraic Multigrid (AMG): An Introduction with Applications", GMD Report 53, March 1999.
- Ruge, J.W., and Stuben, K. "Algebraic Multigrid (AMG)", in: S.F. McCormick(Ed.), "Multigrid Methods", Frontiers in Applied Mathematics, Vol. 5, SIAM, Philadelphia, 1986.
- Brandt, A. "Algebraic Multigrid Theory the Symmetric Case", *Appl. Math. Comput.* Vol. 19, pp. 23-56, 1986.
- Wesseling, P. and Oosterlee, C.W. "Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics," *Comput. Appl. Math.* Vol. 128, pp. 311-334, 2001.
- Wan, W.L., "Interface Preserving Coarsening Multigrid for Elliptic Problems with Highly Discontinuous Coefficients," *Numer. Linear Algebra Appl.* Vol. 7, pp. 727-741, 2000.
- Alcoue, R.E. Brandt, A. Dendy, J.E. and Painter, J.W., "The Multi-Grid Method for the Diffusion Equation with Strongly Discontinuous Coefficients," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* Vol. 2, pp. 430-454, 1981.
- Schaffer, S. "A Semi-Coarsening Multigrid Method for Elliptic Partial Differential Equations with Highly Discontinuous and Anisotropic Coefficients", *SIAM J. Sci. Comput.* 20, No. 1, pp. 228-242, 1998.
- Dendy Jr., J.E. "Black Box Multigrid," *J. Comput. Phys.* Vol. 48, pp. 366-386, 1982.
- MacLachlan, S.P., and Oosterlee, C.W. "Algebraic Multigrid Solvers for Complex-Valued Matrices", *SIAM J. Scientific Computing* Vol. 30, pp. 1548-1571, 2008.
- Brannick, J. Brezina, M. MacLachlan, S. Manteuffel, T. McCormick, S. and Ruge, J. "An Energy-Based AMG Coarsening Strategy", *Numer. Linear Algebra. Appl.* Vol. 13, pp. 133-148, 2006.
- Stuben, K. "Algebraic Multigrid (AMG): Experience and Comparisons", *Appl. Math. Comput.* Vol. 13, pp. 419-452, 1983.
- Stuben, K. "A Review of Algebraic Multigrid", GMD Report 69, 1999.
- Ruge, J.W. Stuben, K. "Efficient Solution of Finite Difference and Finite Element Equations by Algebraic Multigrid (AMG)", in: D.J. Paddon, H. Holstein (Eds.), "Multigrid Methods for Integral and Differential Equations," The Institute of Mathematics and its Applications Conference Series, New Series Vol. 3, Clarendon Press, Oxford, pp. 169-212, 1985.
- Trottenberg, U. Oosterlee, C.W. Schuller, A. *MULTIGRID*, Academic press, New York, 2001.
- Golub, G.H. Van Loan, C.F. *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 3rd Edition, 1996.
- Brandt, A. "Multigrid Techniques: 1984 Guide with Application to Fluid Dynamics," GMD-Studie Nr. 85, Sankt Augustin, West Germany, 1984.