مدل آسیب دو مقیاسی در تخمین عمر قطعات مکانیکی در خستگی پرچرخه

محمد مشایخی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۶/۲۱– دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۶/۱۹)

چکیده – **اخيراً مدل آسيب دو مقياسي به عنوان يك روش كارا براي تحليل مسايل خستگي پر چرخه ارايه شده است. در اين مدل رفتار ماده در مقياس ميكروسكوپي الاستيك-پلاستيك همراه با آسيب و در مقياس ماكروسكوپي الاستيك ارزيابي مي‌شود. در اين تحقيق، يك الگوريتم عددي مقاوم -كه بتواند ميليونها سيكل بارگذاري را دنبال كند- براي مدل آسيب دو مقياسي پياده‌سازي مي‌شود. براي بهنگام كردن تنشها از يك روش صريح استفاده مي‌شود تا پيش‌بيني زمان شكست براي انواع بارگذاريها از جمله دوره‌اي، اتفاقي، مكانيكي و گرمايي-مكانيكي ميسر شود. يك لوله استوانه‌اي تحت بار خستگي گرمايي-مكانيكي و شافت روتور اصلي يك بالگرد با بارگذاري غير تناسبي به روش آسيب دو مقياسي مورد بررسي و تحليل عمر قرار مي‌گيرد.**

واژگان کلیدی : **مدل آسيب دو مقياسي، خستگي پر چرخه، تخمين عمر، بارگذاري غيرتناسبي**

A Two Scale Damage Model for High Cycle Fatigue Life Prediction of Mechanical Components

M. Mashayekhi

Mechanical Engineering Department, Isfahan University of Technology

Abstract: ***Recently, a three-dimensional two scale damage model has been proposed for high cycle fatigue applications. The model takes into account plasticity and damage at the microscale and the behavior is considered as elastic at the mesoscale. In this paper, a robust numerical algorithm of the two scale damage model has been implemented. The explicit stress update scheme is performed for the model. This model can be used to predict failure for any kind of loading, cycle or random, mechanical,and thermo-mechanical. The cylindrical pipe subjected to complex thermo-mechanical fatigue loading and the helicopter main rotor shaft subjected to non-proportional loading are investigated by the two scale damage model.***

---

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mashayekhi@cc.iut.ac.ir

Keywords: *Two scale damage model,High cycle fatigue, Life prediction, Non-proportional loading.*

۱- مقدمه

قطعات مکانیکی در بارگذاری خستگی پر چرخه مستعد بروز ریزترکها هستند. ارزیابی و پیش‌بینی زمان شروع ترک در این قطعات برای بازدیدهای دوره‌ای و برنامه‌ریزی تعمیر و نگهداری آنها از اهمیت شایانی برخوردار است. در پدیده شکست خستگی پرچرخه که بر اثر تنش تکرار شونده اتفاق می‌افتد و با وقوع ریزترکها آغاز و تحت تاثیر تنشهای نوسانی رشد می‌کند معمولاً مقدار تنش ماکزیمم از استحکام ماده کمتر است. یکی از مهمترین چالشها در تحلیل خستگی تعیین عمر قطعات است چرا که آسیب در خستگی پرچرخه در تنشهایی به مراتب کمتر از تنشهای تسلیم و در مقیاس میکروسکوپی در عیوب و نابجاییهای ماده رخ می‌دهد و حتی هنگامی که آسیب در حال رشد است هیچ نشانه‌ای از شکست دیده نمی‌شود [۱].
از دیدگاه فیزیکی تنشهای نوسانی در محدوده الاستیک باعث القای تنشهایی در مقیاس میکروسکوپی می‌شوند که از تنش تسلیم در مقیاس محلی بیشتر است. زوال انرژی در مقیاس میکروسکوپی بر اثر کرنشهای ریز شکل‌گیری مرزهای دائم لغزش را به همراه دارد. بعد از این مرحله، ترکهای ریز در صفحه‌ای با ماکزیمم تنش برشی رشد می‌کند و از مرز کریستال عبور می‌کند تا سرانجام به یک ترک در مقیاس مزو[۱] ، یا مقیاس مکانیک محیط پیوسته، منجر شود [۱].

مدلهای سنتی در تحلیل مسایل خستگی پرچرخه در بارگذاریهای ترکیبی با محدودیتهای فراوانی روبرو است. به عنوان مثال در مدل مانسون و در نمودارهای وهلر که قانون خستگی به صورت نمودارهای $\sigma_{\max}$ بر حسب N_R برای نسبتهای مختلف تنش بیشینه به کمینه بیان می‌شود قابل تعمیم به حالت سه بعدی نیست چرا که نسبت تنش در حالت سه بعدی قابل تعریف نیست. از طرف دیگر، این مدل هیچ رابطه‌ای بین تنش و کرنش ارایه نمی‌دهد. همچنین این مدل توجیهی برای بارگذاریهایی با تکرار اتفاقی ندارد. یک پیشنهاد قابل تامل در تحلیل خستگی پرچرخه استفاده از مکانیک آسیب است. مدل رشد آسیب در مکانیک آسیب ناظر بر تغییر شکل پلاستیک و افزایش انرژی الاستیک است. از آن‌جا که خستگی پرچرخه در دامنه تنشی کمتر از حد تسلیم اتفاق می‌افتد از این رو فرض شود که پلاستیسیته در مقیاس میکروسکوپی رخ می‌دهد. از برتریهای مهم در مکانیک آسیب در نظر گرفتن تاریخچه بارگذاری و آسیب است.

در دو دهه اخیر، تلاش بسیاری از محققان بر گسترش مکانیک آسیب در زمینه پدیده خستگی معطوف شده است. در اوایل دهه هشتاد لمتر و همکاران تلاش بسیاری کردند تا تحقیقات صورت گرفته در رابطه با تضعیف ساختار ماده و زوال خواص فیزیکی ماده را در چارچوب مدون مکانیک آسیب و به صورت مدلی مدون برای پیش‌بینی شکست ارایه دهند [۲]. از این زمان به بعد مکانیک آسیب پایه بسیاری از تحقیقات قرار گرفت و مدل ارایه شده توسط لمتر مبنای بسیاری از مطالعات و مدلهای ارایه شده برای خستگی قرار گرفت [۳]. در سال ۱۹۹۷ ژیائو و همکاران با تکیه بر مدل رشد آسیب لمتر و تجدید نظر در ضرایب مدل رشد آسیب، رشد آسیب را برحسب تعداد سیکلها بیان کردند و عمر ماده تحت خستگی را به دست آوردند [۴]. بتاچریا و الینگود در سال ۱۹۹۸ با تکیه بر مراحل شکل‌گیری و گسترش ترک در فرایند گسترش آسیب در داخل یک کریستال زمان شکل‌گیری ترکهای در مقیاس مزو را پیش‌بینی کردند. این مدل با تکیه بر مدل آسیب لمتر-چابوش و ترسیم نمودار تنش-کرنش در خستگی، گسترش آسیب را به صورت روابط تفاضلی بر حسب آسیب در قدمهای بارگذاری قبلی بیان می‌کند [۵]. در سال ۲۰۰۰ مومن و همکاران برای یک بارگذاری خستگی پله‌ای با دو دامنه متفاوت، آسیب و زمان وقوع شکست را پیش‌بینی کردند. این مدل بر مبنای آسیب، بحرانی‌ترین نقطه را المانی با بیشترین مقدار رشد آسیب معرفی می‌کند [۶]. در سال ۲۰۰۲ پارک و

همکاران با تکیه بر ساختار داخلی ماده و بـا تقـسیم عمـر مـاده تحت تنش خستگی به سه مرحله‌ی پیدایش ریز ترک ، گسترش آن در داخل یک کریستال و رشـد تـرک در مقیـاس مـزو و بـا رهیافت مفهوم آسیب معادلاتی برای هر یک از مراحل سه گانـه رشد آسیب ارایه کردند و عمر نهایی ماده را به صورت مجموع سیکلها در هر یک از سه مرحله معرفی نمودند [۷].

لمتر و همکاران در سال ۱۹۹۹ مدل کاملی بر مبنای مکانیک آسیب برای تحلیل شکست در خستگی ارایه کردند کـه بـه نـام مدل آسیب دو مقیاسی شناخته می‌شود. در این مدل، آسـیب در خـستگی پرچرخـه در مقیاسـی کـوچکتر از مقیـاس مکانیـک محیطهای پیوسته رخ می‌دهد. این مدل بر اساس رفتار ریـزه‌ای [۲] به شکل کره، که در داخل یک ساختار ماتریسی [۳] از ماده اسـت، بنا نهاده شده است. معادلات حاکم بر رفتار ماده در داخل ریزه، رفتار الاستیک –پلاستیک همراه با آسـیب اسـت. ایـشان نتـایج خود را به صورت یک مدل رشد آسیب و معـادلات پـیش‌بینـی شکست در خستگی پرچرخـه ارایـه کننـد [۸]. در سـال ۲۰۰۷ دزمورات و همکاران مدلی بر پایه مدل آسیب دو مقیاسی لمتـر ارایه کردند. ایده اصلی ایشان خارج کردن معادلات دیفرانـسیلی رشد آسیب از حالت ضمنی بود که به کمک آن می‌تـوان بـدون اسـتفاده از روش تکـرار نیوتـون–رفـسون، حـل صـریحی از معادلات رشد آسیب به دست آورد. ایشان همچنین توانایی حل مسایل غیر همدما را نیز به مدل آسیب دو مقیاسی لمتـر اضـافه کردند [۹ و ۱۲].

در این تحقیق با ارایه یک الگوریتم عددی کارا بـرای مـدل اصلاح شده آسیب دو مقیاسی، سـعی مـی‌شـود بـرای قطعـات مکانیکی که در بارگذاریهای خستگی ترکیبی قرار دارنـد تعیـین عمر صورت گیرد. در بخش (۲)، مدل آسیب دو مقیاسی معرفی می‌شود و در بخش (۳)، یک الگوریتم کاراً برای انتگـرال‌گیـری از معادلات ساختاری مدل شکست دو مقیاسی ارایه می‌شود. در بخش (۴)، این مدل در تحلیل یک لولـه اسـتوانه‌ای کـه تحـت بارگذاری خستگی فشار داخلی و گرمایی هم‌زمان قـرار گرفتـه است مورد راستی‌آزمایی قرار مـی‌گیـرد. در بخـش (۵)، شـافت روتور پره‌های یک بالگرد که یک نمونه با بارگذاری غیر تناسبی خستگی است تعیین عمر مـی‌شـود و کـارایی ایـن مـدل مـورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مدل آسیب دو مقیاسی

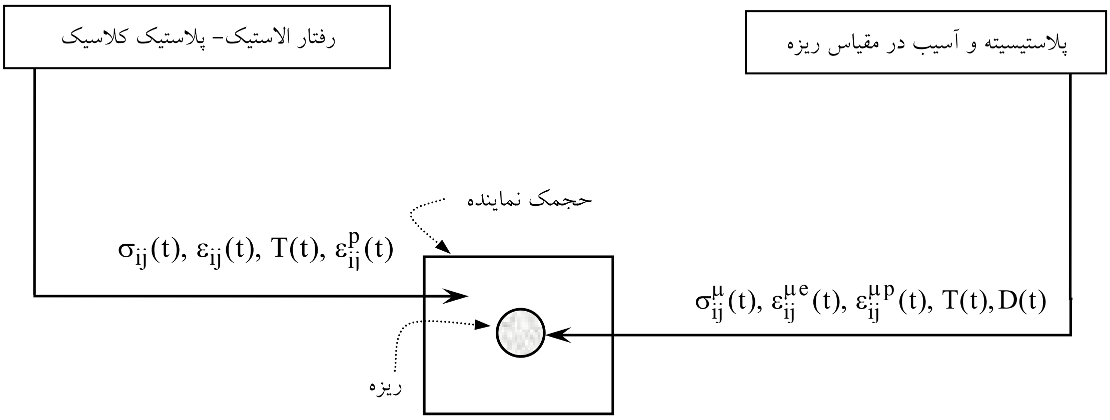
در خـستگی پرچرخـه معمـولاً از تغییـر شـکل پلاسـتیک ماکروسکوپی صرف‌نظر می‌شود و ترکهای اولیه معمـولاً در اثـر تغییر شکلهای پلاستیک محلی به وجود می‌آید. در بیشتر مـوارد در خستگی پرچرخه تنش در مقیاس حجمک نماینده بـه تـنش تسلیم نمی‌رسد از این رو در مقیاس مزو، یعنی مقیاس حجمک نماینده، رفتار ماده الاستیک فرض می‌شود. آسـیب در خـستگی پرچرخه در مقیاسـی کـوچکتر از مقیـاس مـزو رخ مـی‌دهـد و تمرکز اصلی مدل بر روی ناحیه‌ی کوچکی از حجمک نماینـده، یا ریزه، است که در آن ناحیه رفتـار مـاده الاسـتیک- پلاسـتیک همراه با آسیب در نظر گرفته می‌شود.

هرگاه رفتار یک ماده در مقیاس مزو ترد باشد ولی آسیب به صورت محلی در مقیاس میکروسکوپی همراه با رفتار پلاستیک رشد کند، ماده اصطلاحاً شبه ترد گفته می‌شود. به عبارت دیگـر یک حجمک نماینده از واحدهایی به نام ریزه تشکیل شده است و به ساختار ماتریسی که ریزه در آن قرار گرفته اسـت مـاتریس گفته می‌شود. در ماتریس رفتار ماده الاستیک با حد تـسلیم σ_y و حـــد دوام خـــستگی σ_f اســـت و ریـــزه دارای رفتـــار الاستیک –پلاستیک با آستانه پلاستیک σ_y^μ و حد دوام خستگی σ_f^μ است، شکل (۱).

در روش آسیب دو مقیاسی؛ مقیاس مزو و مقیـاس میکـرو، لازم است به کمک یک قانون محلی‌سازی تغییرمکانها از مقیاس مزو به مقیاس میکرو انتقال یابد. یکی از متداولترین این روشها، قانون محلی‌سازی اشلبی است که در روشهای دو مقیاسی از آن سود برده می‌شود [۸].

رفتار ماده در مقیاس مزو به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{1} + \alpha(T - T_{ref})\boldsymbol{1} \qquad (۱)$$



شکل ۱- رفتار حاکم در خستگی پرچرخه برای حجمک نماینده همراه با ریزه

$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$، تانسور کرنش الاستیک، $\boldsymbol{\sigma}$، تانسور تنش کوشی، $\boldsymbol{1}$، تانسور یکه مرتبه دو، E، مدول الاستیسیته، ν، نسبت پواسون، α، ضریب انبساط گرمایی، T_{ref}، دمای مرجع و tr، عملگر مجموع عناصر قطر اصلی تانسور مرتبه دو است. در مقیاس میکروسکوپی رفتار الاستیک–پلاستیک فرض می‌شود و قانون الاستیسیته در این مقیاس میکروسکوپی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}=\frac{1+\nu}{E}\frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mu}}{1-D}-\frac{\nu}{E}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma^{\mu}}{1-D}\boldsymbol{1}+\alpha^{\mu}(T-T_{ref})\boldsymbol{1} \qquad (۲)$$

D، متغیر آسیب و بالانویس μ، بیانگر کمیت مورد نظر در مقیاس میکروسکوپی است. شرط تسلیم در مقیاس میکروسکوپی با کارسختی سینماتیکی خطی، $\boldsymbol{X}^{\mu}$، و با تنش تسلیم، σ^{μ}_{y}، که برابر با حد دوام خستگی، σ^{∞}_{f}، در نظر گرفته می‌شود، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f^{\mu}=\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}-\boldsymbol{X}^{\mu}\right)_{eq}-\sigma^{\infty}_{f} \qquad (۳)$$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$، تانسور تنش مؤثر و عملگر، $(.)_{eq}$، بیانگر تنش معادل فون میزز است. ناحیه الاستیک برای $f^{\mu}<0$ برقرار است. معادلات ساختاری در این مقیاس برابر است با:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}\\
&\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}=\frac{1+\nu}{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}-\frac{1+\nu}{E}\mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}1+\alpha(T-T_{ref})\boldsymbol{1}\\
&\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p}=\frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D}-\boldsymbol{X}^{\mu}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}-\boldsymbol{X}^{\mu})_{eq}}\dot{p}^{\mu} \qquad (۴)\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{X}^{\mu}}{C_y}\right)=\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p}(1-D) \qquad \dot{D}=\left(\frac{Y^{\mu}}{S}\right)^{s}\dot{p}^{\mu}
\end{aligned}$$

p، کرنش پلاستیک انباشته، C_y، مدول پلاستیک، Y، انرژی رهایی آسیب است. بالانویس، ^{D}، نشان دهنده مولفه‌های انحرافی تانسور است یعنی؛ $(.)^{D}=(.)-1/3\,\mathrm{tr}(.)\boldsymbol{1}$.

از آن‌جا که رشد آسیب در تنشهای فشاری- به دلیل اثر بسته شدن ترکها- کمتر از مقدار آن در تنشهای کششی است از این‌رو ضریب بسته شدن ترکها، h، در انرژی رهایی آسیب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
Y^{\mu}=&\frac{1+\nu}{2E}\left[\frac{\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{+}:\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{+}}{(1-D)^2}+h\frac{\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{-}:\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{-}}{(1-hD)^2}\right]\\
&-\frac{\nu}{2E}\left[\frac{\langle\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\rangle^{2}}{(1-D)^2}+h\frac{\langle-\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}\rangle^{2}}{(1-hD)^2}\right]
\end{aligned} \qquad (۵)$$

$\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{+}$ و $\langle\boldsymbol{\sigma}^{\mu}\rangle^{-}$ به ترتیب قسمت مثبت و منفی تانسور تنش را معرفی می‌کنند. تابع $\langle x\rangle$ برابر است با $\langle x\rangle=\max(x,0)$.

معادله آخر از معادله‌های (۴)، قانون رشد آسیب در خستگی پرچرخه – که به نام مدل آسیب لمتر شناخته می‌شود- را نشان می‌دهد و S و s، ضرایب مدل آسیب و وابسته به ماده هستند.

برای محاسبه کرنشها در مقیاس میکروسکوپی از کرنشها در مقیاس مزو می‌توان از قانون محلی‌سازی اصلاح شده اشلبی–کرونکر[۴]، که با دما و آسیب همراه است، استفاده کرد. به کمک قانون محلی‌سازی تانسور کرنش برای ریزه را می‌توان به

صورت زیر به دست آورد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}=\frac{1}{1-bD}\times\left[\varepsilon+\frac{(a-b)D}{3(1-aD)}\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}1+b((1-D)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}-\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right]+\frac{a((1-b)\alpha^{\mu}-\alpha)}{1-aD}(T-T_{ref})\boldsymbol{I} \qquad (۶)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$، تانسور کرنش پلاستیک در مقیاس مزو، و مقادیر a و b برابرند با:

$$a=\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}, \qquad b=\frac{2}{15}\frac{4-5\nu}{1-\nu} \qquad (۷)$$

می‌توان فرایند گسترش آسیب در خستگی پرچرخه و بروز ترک را به می‌توان سه مرحله کلی تقسیم کرد:

الف) میکروپلاستیسیته و به هم پیوستن نابه‌جاییها بدون آسیب یا با مقادیر کم آسیب

ب) رشد آسیب در مقیاس میکروسکوپی $\dot{D}>0$

پ) رسیدن آسیب به مقدار بحرانی D_c در مقیاس ریزه و آغاز ترک در مقیاس مزو

یکی از امتیازات مدل آسیب دو مقیاسی به‌کارگیری آن در بارگذاریهای پیچیده، یعنی بارگذاریهای چند محوره، غیر تناسبی و غیر هم‌دماست و محدودیتهای که در دیگر روشهای متداول برای بارگذاری وجود دارد در این مدل نیست.

۳- الگوریتم انتگرال‌گیری از معادلات ساختاری مدل آسیب دو مقیاسی

هدف از انتگرال‌گیری معادلات ساختاری آن است که با داشتن مجموعه $\boldsymbol{\sigma}^{\mu}_{n}$، $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n}$ و D_n در زمان t_n و با اعمال نمو کرنش $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}-\boldsymbol{\varepsilon}_{n}$، بتوان مجموعه $\boldsymbol{\sigma}^{\mu}_{n+1}$، $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n+1}$ و D_{n+1} را در زمان t_{n+1} محاسبه کرد.

الگوریتم انتگرال‌گیری در آسیب دو مقیاسی را می‌توان به چهار مرحله کلی تقسیم کرد:

الف) حل عددی الاستیک-پلاستیک در مقیاس مزو،

ب) انتقال از مقیاس مزو به مقیاس میکرو با استفاده از قانون محلی‌سازی و حدس الاستیک در مقیاس میکرو،

پ) اصلاح حدس الاستیک با اصلاحیه پلاستیک و آسیب

ت) در نهایت بهنگام کردن مقادیر تنش، آسیب و کرنش پلاستیک خواهد بود.

قدم اول: حل الاستیک-پلاستیک در مقیاس مزو

در این مرحله حل الاستیک-پلاستیک متعارف همراه با کارسختی سینماتیک در مقیاس مزو انجام می‌شود. مراحل این قسمت مشابه انتگرال‌گیری معادلات ساختاری الاستیک-پلاستیک کلاسیک با کارسختی سینماتیک خواهد بود [۱۰]. در پایان این مرحله، مقادیر تنش و کرنش پلاستیک در مقیاس مزو به دست می‌آید.

قدم دوم: انتقال از مقیاس مزو به مقیاس میکرو و حدس الاستیک در مقیاس میکرو

با فرض پیش‌بینی الاستیک برای رفتار ماده در مقیاس میکرو؛ کرنش پلاستیک، کارسختی سینماتیکی، مقدار آسیب ثابت خواهند بود یعنی: $\varepsilon^{\mu p}_{n+1}=\varepsilon^{\mu p}_{n}$، $X_{n+1}=X_n$، $D_{n+1}=D_n$. بنا بر پیش‌بینی الاستیک کرنش کل، کرنش الاستیک و تنش مؤثر در مقیاس میکرو در زمان t_{n+1} برابر است با:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}=\frac{1}{1-bD_n}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}+\frac{(a-b)D_n}{3(1-aD_n)}\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\boldsymbol{I}+b((1-D_n)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n}-\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+1})\right]+\frac{a((1-D_n)\alpha^{\mu}_{n+1}-\alpha_{n+1})}{1-aD_n}(T_{n+1}-T_{ref})\boldsymbol{I} \qquad (۸)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n}+\alpha^{\mu}_{n+1}(T_{n+1}-T_{ref})\boldsymbol{I}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}=\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mu}=(1-D_n)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}$$

دقت کنید پیش‌بینی الاستیک در مقیاس میکرو با معلوم بودن کرنش پلاستیک در مقیاس مزو از قدم اول به دست می‌آید اگر چه در بیشتر خستگیهای پر چرخه از آن صرف‌نظر می‌شود. به

کمک حدس الاستیک می‌توان $\tilde{\sigma}^{\mu}_{n+1}$ را در t_{n+1} به دست آورد و با عدم تغییر کار سختی سینماتیکی، سطح تسلیم نیز قابل محاسبه است در صورتی که $f^{\mu}_{n+1} \leq 0$ ارضا شود پیش‌بینی الاستیک صحیح و خواهیم داشت: $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n}$، $\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n$، $D_{n+1} = D_n$. در غیر این صورت پیش‌بینی الاستیک با شرط سازگاری $f^{\mu}_{n+1} = 0$ تصحیح می‌شود.

قدم سوم: تصحیح پلاستیک و آسیب

برای برگشت بر روی سطح تسلیم همراه با آسیب می‌توان از الگوریتم بازگشتی اویلر سود برد و معادلات (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n+1} \\
&\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}_{n+1} = \frac{1+\nu}{E_{n+1}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1} - \frac{1+\nu}{E_{n+1}}\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1}\boldsymbol{1} \\
&\qquad + \alpha^{\mu}_{n+1}(T_{n+1} - T_{ref})\boldsymbol{1} \\
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} = \frac{3}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D}_{n+1} - \boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1})_{eq}}\Delta p^{\mu} \\
&\frac{\boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1}}{C^{\mu}_{n+1}} - \frac{\boldsymbol{X}^{\mu}_{n}}{C^{\mu}_{n}} = \frac{2}{3}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}(1-D_n) \\
&\Delta D = \left(\frac{Y^{\mu}_{n+1}}{S_{n+1}}\right)^{s_{n+1}}\Delta p^{\mu}
\end{aligned} \tag{۹}$$

با توجه به شرط تسلیم و تغییرات کرنش پلاستیک می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \frac{1-b}{1-bD_n}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \alpha^{\mu}_{n+1}\Delta T\boldsymbol{1} - \frac{1}{1-bD_n}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + \frac{1}{1-bD_n}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} - \frac{(a-b)D_n}{(1-bD_n)(1-aD_n)}\mathrm{tr}\Delta\varepsilon^{\mu}\boldsymbol{1} \\
&\quad + \frac{a((1-D_n)\alpha^{\mu}_{n+1} - \alpha_{n+1})}{1-aD_n}\Delta T\boldsymbol{1} = 0 \\
&f^{\mu}_{n+1} = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D}_{n+1} - \boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1})_{eq} - \sigma^{\infty}_{f\,n+1} = 0
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

دقت کنید که حد دوام خستگی وابسته به دما است: $\sigma^{\infty}_{f\,n+1} = \sigma^{\infty}_{f}(T_{n+1})$. یکی از روشهای حل این دو معادله روش نیوتن رافسون است ولی دزمورات با معرفی دو مجهول این معادلات به صورت کرنش پلاستیک انباشته، $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$، و متغیر جدید $\boldsymbol{s}^{\mu}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1} - \boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1}$، توانست حل بسته‌ای برای این معادلات ارایه دهد [۹].

قدم چهارم: بهنگام نمودن متغیرها

با حل بسته می‌توان متغیرهای مورد نظر را در زمان t_{n+1} به دست آورد:

- عمود بر سطح تسلیم:

$$\boldsymbol{m}^{\mu} = (3/2)\boldsymbol{s}^{\mu D}_{n+1} / \sigma^{\infty}_{f\,n+1}$$

- کرنش پلاستیک:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n} + \boldsymbol{m}^{\mu}\Delta p^{\mu}$$

- کار سختی سینماتیک:

$$\boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1} = (2/3)C_{n+1}(1-D_n)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}_{n+1} + (C_{n+1}/C_n)\boldsymbol{X}^{\mu}_{n}$$

- تنش مؤثر:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1} = \boldsymbol{s}^{\mu}_{n+1} + \boldsymbol{X}^{\mu}_{n+1}$$

- کرنش الاستیک:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}_{n+1} = \boldsymbol{E}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1} + \alpha^{\mu}_{n+1}(T_{n+1} - T_{ref})\boldsymbol{1}$$

- متغیر آسیب:

$$D_{n+1} = D_n + (Y^{\mu}_{n+1}/S_{n+1})^{s_{n+1}}\Delta p^{\mu}$$

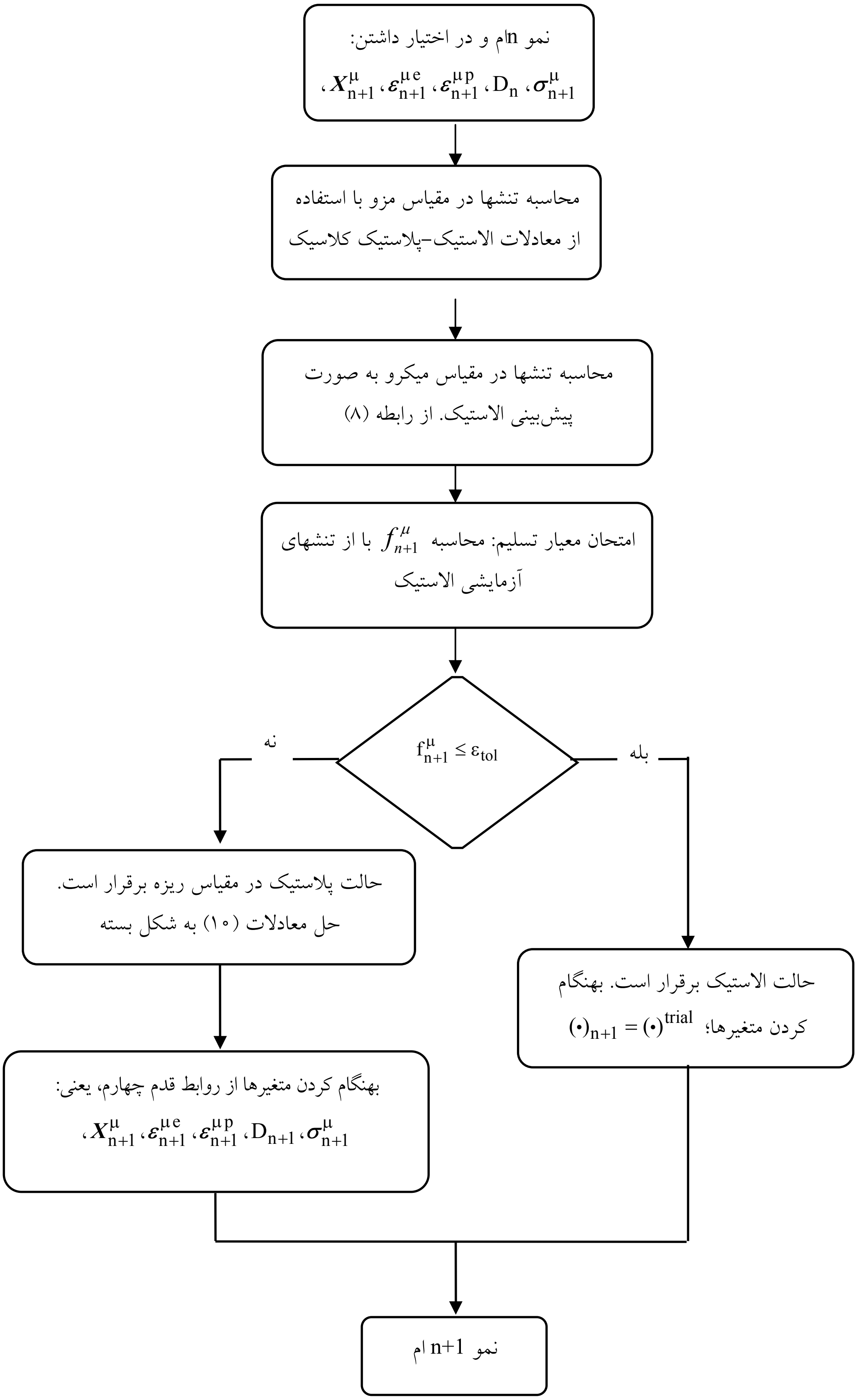
- تانسور تنش:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mu}_{n+1} = (1-D_{n+1})\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu}_{n+1}$$

برای پیاده‌سازی الگوریتم عددی مدل آسیب دو مقیاسی یک زیربرنامه در نرم‌افزار ABAQUS، [۱۱] تهیه شده و به روش صریح مطابق شکل (۲) پیاده‌سازی می‌شود. در ادامه برای نشان دادن توانایی و کارایی الگوریتم معرفی شده، دو سازه با بارگذاری خستگی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند.

۴- لوله استوانه‌ای تحت بارگذاری خستگی فشاری و گرمایی

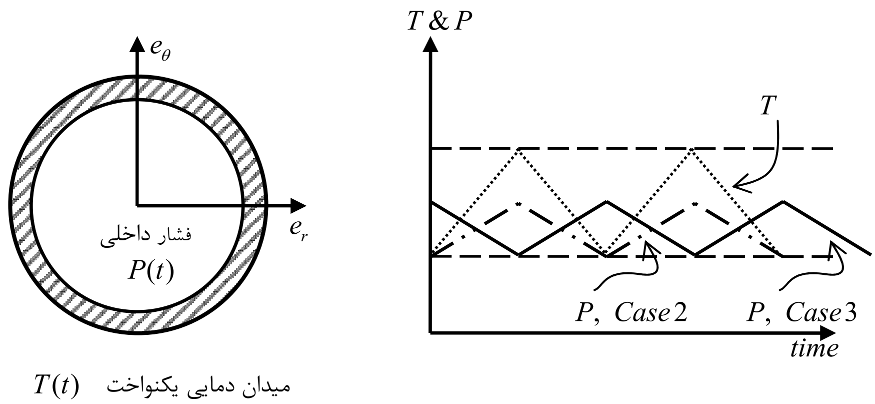
یک لوله استوانه‌ای تحت بارگذاری هم‌زمان گرمایی، $T(t)$، و فشار داخلی متغیر، $P(t)$، قرار گرفته است. لوله از جنس فولاد و مشخصات مکانیکی آن در جدول (۱) آمده است. قطر داخلی لوله ۹/۵ cm و قطر خارجی آن



شکل ۲- الگوریتم زیر برنامه مدل آسیب دو مقیاسی

جدول ۱- خواص مکانیکی لوله استوانه‌ای [۱۲]

پارامتر ماده	مقدار
E	$188000\ \mathrm{MPa}$
ν	0.3
σ_y	$620\ \mathrm{MPa}$
C_y	$1840\ \mathrm{MPa}$
$T_{ref} = (T_{max} - T_{min})/2$	$150\ ^{\circ}\mathrm{C}$
P_{max}	$5\ \mathrm{MPa}$
$\alpha = \alpha_\mu$	$1.76 \times 10^{-5} / ^{\circ}\mathrm{C}$
σ_f	$140\ \mathrm{MPa}$
S	$3.6\ \mathrm{MPa}$
s	1



شکل ۳- میدان گرمایی و فشار داخلی در لوله استوانه‌ای

۱۰/۵ cm است و می‌توان با توجه به نسبت ضخامت به شعاع میانگین لوله، لوله را جدار نازک به شمار آورد [۱۲].

بار حرارتی با فرکانس زمانی f و به صورت خطی بین دو مقدار بیشینه T_{max} و کمینه T_{min} به صورت مثلثی نوسان می‌کند:

$$T(t) = T_{min} + \Delta T.\mathrm{triangle}(f_0 t) \quad (۱۱)$$

ΔT، دامنه دما و برابر اختلاف دمای کمینه و بیشینه است.

سه نوع بارگذاری فشاری نیز به لوله اعمال می‌شود:

الف) بارگذاری فشار ثابت ($P = P_{max}$)

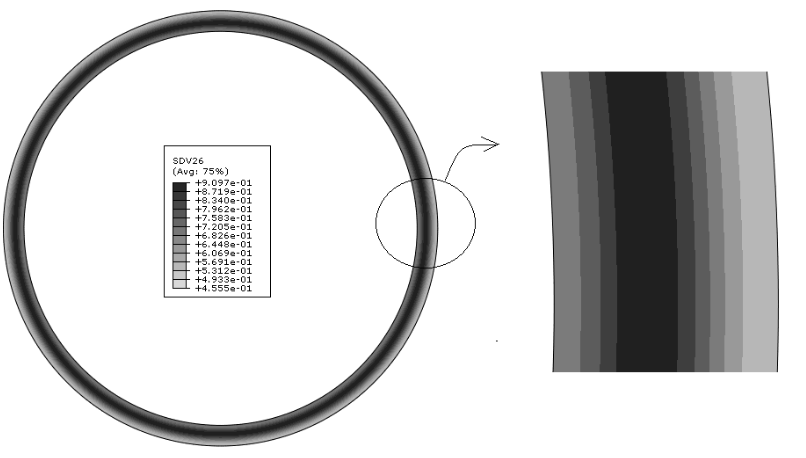
ب) بارگذاری فشاری نوسانی با همان فرکانس بارگذاری گرمایی و هم‌فاز با آن

$T(t) = P_{max} + \Delta P.\ \mathrm{triangle}(f_0 t)$،

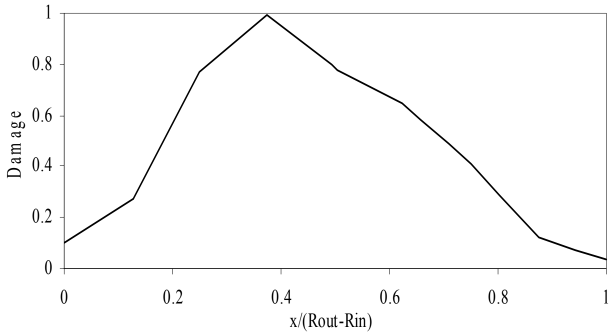
پ) بارگذاری فشاری نوسانی با همان فرکانس بارگذاری گرمایی ولی با اختلاف فاز نصف دوره زمانی $T(t) = P_{max} + \Delta P.\ \mathrm{triangle}(f_0 t - f_0/2)$،

این شرایط بارگذاری در حالت جریان مغشوش سیال در لوله به وجود می‌آید. میدان گرمایی و فشار داخلی در شکل (۳) نشان داده شده است. از آنجا که استوانه جدار نازک است میدان گرمایی در هر لحظه در تمام جسم یکسان است و در نقاط مختلف جسم گرادیان دما وجود ندارد.

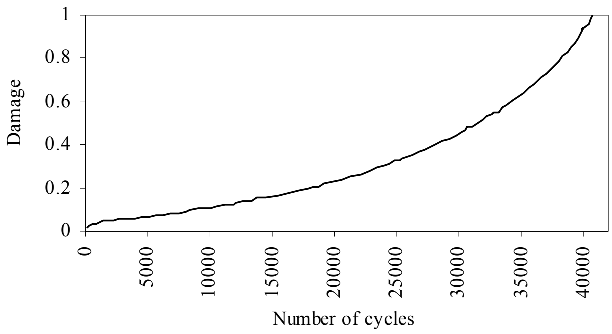
به کمک زیر برنامه مدل آسیب دو مقیاسی در نرم افزار ABAQUS، بر روی این دو سازه تحلیل خستگی انجام گرفت. حل اجزای محدود به روش صریح صورت گرفته و از مقیاس جرمی سود برده شد. از آن‌جا که بارگذاری گرمایی و فشاری



شکل ۴- منحنی رشد آسیب هنگام وقوع آسیب بحرانی در سطح مقطع لوله



شکل ۵- تغییرات آسیب در امتداد ضخامت لوله

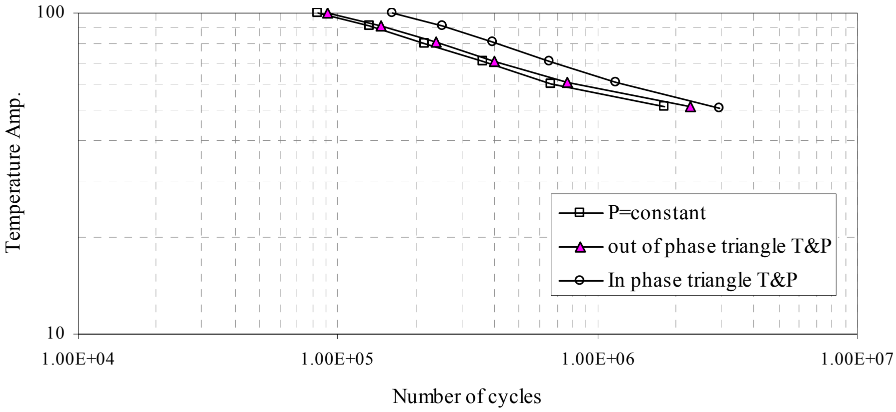


شکل ۶- رشد آسیب در مقطع بحرانی تا لحظه آسیب بحرانی

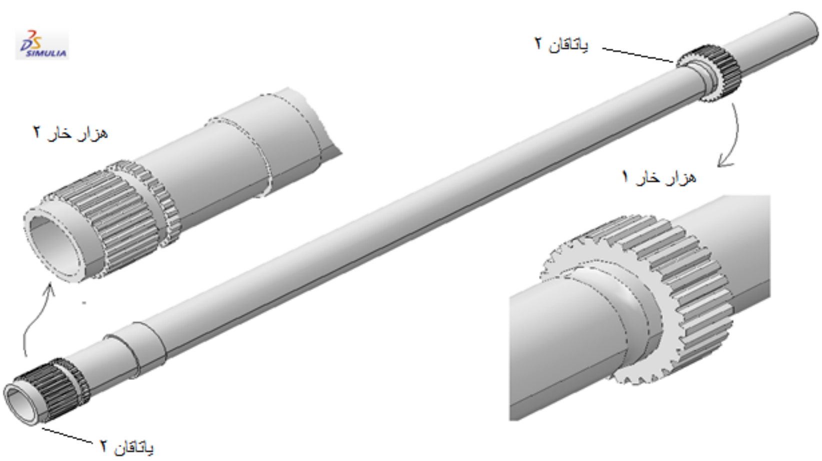
به صورت تابع مثلثی نسبت به زمان اعمال می‌شود تابع مثلث با هشت جمله اول سری فوریه آن تقریب زده شده و ضرایب آن به نرم‌افزار معرفی شده است. جزء مورد استفاده در این تحلیل جزء چهار گره‌ای کرنش صفحه‌ای، CPE4RT، است و ابعاد جزء به گونه‌ای انتخاب شده که اولاً نتایج تحلیل مستقل از اندازه جزء بوده و ثانیاً پرشی در مقدار آسیب حد فاصل شعاع درونی و بیرونی، ضخامت لوله، رخ ندهد. با توجه به محدودیت تعداد گامهای حل، 2.5×10^7، برای نرم افزار ABAQUS تحت windows_32_bit، این تحلیل بر روی windows_64_bit صورت گرفته است.

شکل (۴) منحنی توزیع آسیب هنگام وقوع آسیب بحرانی در سطح مقطع لوله استوانه‌ای را برای بارگذاری هم‌زمان گرمایی مثلثی و فشار ثابت نشان می‌دهد. تغییرات آسیب در امتداد ضخامت لوله هنگام بروز آسیب بحرانی نیز در این حالت در شکل (۵) آمده است. شکلهای (۴) و (۵) نشان می‌دهند در این بارگذاری آسیب بحرانی در نزدیک به نیمه ضخامت اتفاق می‌افتد و محل بروز اولین ترکهای ماکروسکوپی در این ناحیه خواهد بود. علت امر را می‌توان به پارامترهای مؤثر در رشد آسیب؛ تنش سه محوره و کرنش پلاستیک نسبت داد. مطالعه منحنیهای تغییرات این دو پارامتر نشان می‌دهد که آسیب بیشینه در فصل مشترک ناحیه ماکزیمم انرژی رهایی آسیب و ناحیه کرنش پلاستیک معادل اتفاق می‌افتد.

رشد آسیب در مقطع بحرانی تا لحظه بروز آسیب بحرانی در بارگذاری هم‌زمان گرمایی مثلثی و فشار ثابت در شکل (۶) آمده است. در سیکلهای بارگذاری کمتر 3×10^3، کار سختی حاصل از بارگذاری، باعث سخت‌تر شدن رفتار ماده می‌شود. نمودار رشد آسیب در این ناحیه تقریباً نمایی است. پس از این مرحله و اشباع شدن کارسختی، نمودار رشد آسیب حالت خطی



شکل ۷- نمودار پیش‌بینی عمر در لوله استوانه‌ای در سه حالت بارگذاری خستگی



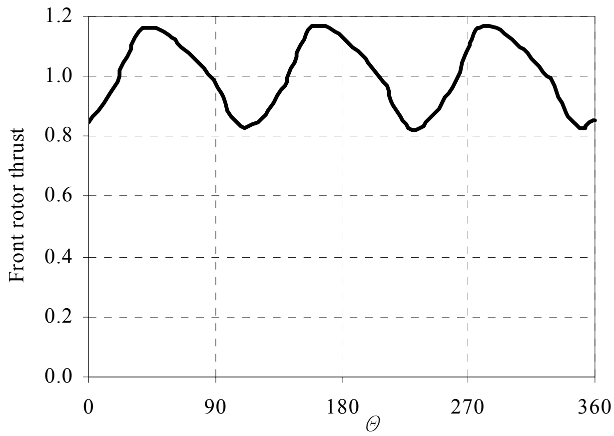
شکل ۸- شافت روتور پره‌های بالگرد

به خود می‌گیرد. این ناحیه، قسمت عمده عمر لوله را تشکیل می‌دهد. پس از این مرحله، نرم شدن ماده آغاز می‌شود. در این قسمت با غلبه نرم‌شدگی بر کار سختی ماده، رشد آسیب سریعتر اتفاق می‌افتد. با اضافه شدن تعدادسیکلها شیب رشد آسیب بیشتر می‌شود تا رسیدن به تقریباً 4×10^4 سیکل، آسیب به مقدار بحرانی، یک خواهد رسید.

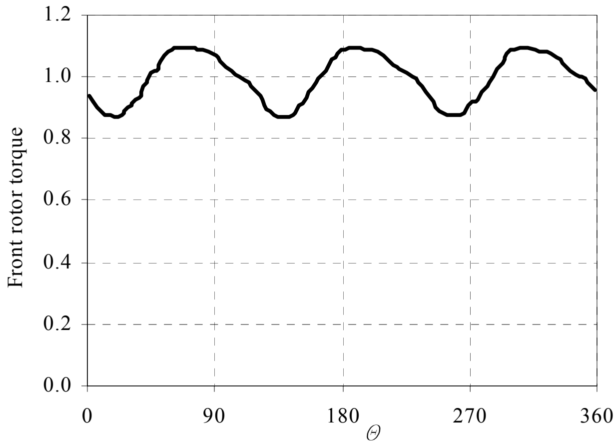
شکل (۷) نمودار عمر ماده نسبت به تغییرات دما برای سه حالت بارگذاری را نشان می‌دهد. شکل (۷) نشان می‌دهد تعداد سیکلهای بارگذاری تا رسیدن به شکست ماکروسکوپی به هم‌فاز/یا عدم هم‌فاز بودن میدان گرمایی و فشار داخلی وابسته است. در حالتی که میدان گرمایی و فشار داخلی هم‌فاز نیستند، عمر کمتری برای لوله استوانه‌ای پیش‌بینی شده است. به عبارت دیگر، در حالت بارگذاری هم‌فاز، تنشهای گرمایی و مکانیکی می‌توانند بعضی از اثرات یکدیگر را خنثی کنند و رشد آسیب را به تأخیر اندازند.

۵- شافت روتور پره‌های بالگرد تحت بارگذاری خستگی

یکی از کاربردهای مدل آسیب دو مقیاسی، تخمین عمر در بارگذاریهای غیرتناسبی است. در این مثال، کاربرد این مدل در تخمین عمر شافت روتور اصلی یک بالگرد مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به غیرتناسبی بودن بارگذاری در این شافت روشهای محدودی در تعیین عمر این سازه قابل استفاده‌اند. شکل (۸) شافت روتور که دارای دو هزارخار و دو یاتاقان است را نشان می‌دهد. شافت توان انتقالی را توسط هزارخار (۱) دریافت و از هزارخار (۲) به کمک هاب به



الف) تغییرات نیروی تراست



ب) تغییرات گشتاور اعمال شده به شافت

شکل ۹- تغییرات نیروی تراست و گشتاور اعمال شده به شافت [۱۳].

جدول ۲- مشخصات مکانیکی شافت اصلی بالگرد

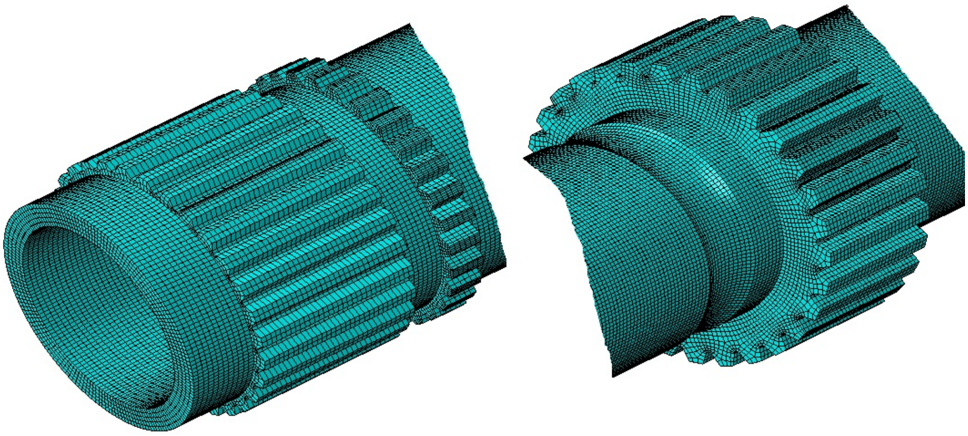
پارامتر ماده	مقدار
E	210000 MPa
ν	0.29
σ_y	1240 MPa
C_y	1700 MPa
$\alpha = \alpha_\mu$	1.76×10^{-5} / °C
σ_f	300 MPa
S	3.4303 MPa
S	1.1013
D_{cr}	0.4

پره‌های روتور منتقل می‌کند. بین دو قسمت هزارخار (۲)، شیاری برای قرار گرفتن رینگ تراست تعبیه شده که نیروی تراست را تحمل می‌کند. یاتاقان (۱)، یک رولربرینگ مخروطی است که نیروی محوری شافت را مهار می‌کند. حداکثر قطر شافت ۲/۷۴ اینچ در محل هزارخار (۱) و طول آن ۴۷/۸۵ اینچ است [۱۳].

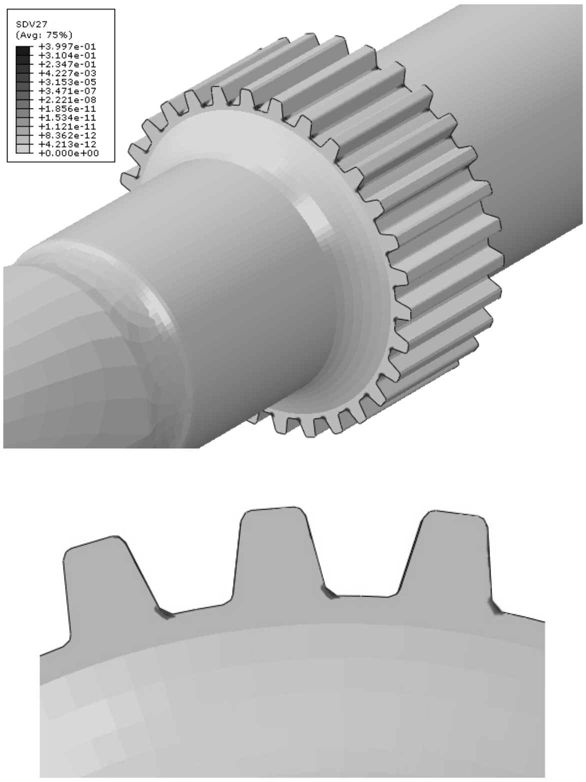
با توجه به نوع اتصال هاب، گشتاوری توسط نیروی "برا"ی پره‌ها به شافت منتقل نمی‌شود و از طرف دیگر نیروی "پسا"ی روتور در مقایسه با تراست ناچیز است. از این رو، نیروهای مؤثر بر شافت، نیروی تراست روتور اصلی و گشتاور پیچشی است. تغییرات نیروی تراست و گشتاور پیچشی در شکل (۹) نشان داده شده است.

شافت از جنس فولاد AISI/SAE 4340 و مشخصات مکانیکی آن در جدول (۲) آمده است. برای مدل اجزای محدود، از اجزای مکعبی هشت گره‌ای استفاده شده است، شکل (۱۰).

منحنی توزیع آسیب در هزارخار (۱) در لحظه وقوع آسیب بحرانی در شکل (۱۱) و منحنی رشد آسیب در مقطع بحرانی - پای دندانه هزارخار (۱) در شکل (۱۲) نشان داده



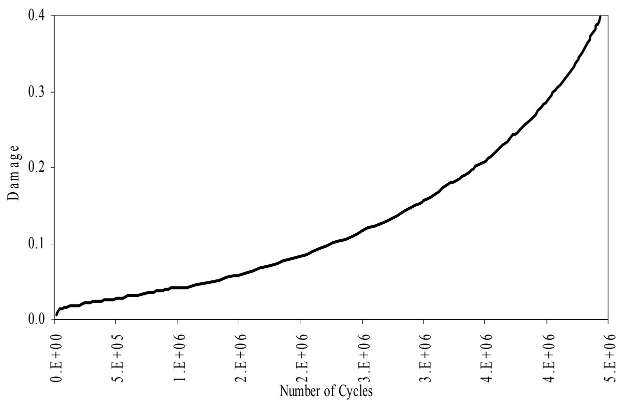
شکل ۱۰- مدل اجزای محدود شافت اصلی بالگرد



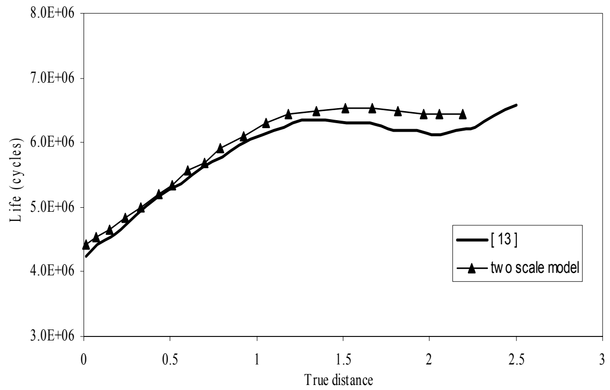
شکل ۱۱- منحنی توزیع آسیب در هزارخار (۱) در لحظه آسیب بحرانی

شده است. شکل (۱۲) نشان می‌دهد آسیب در پای دندانه هزارخار (۱) در ۴/۴۵ میلیون سیکل به مقدار بحرانی ۰/۴ می‌رسد. می‌توان منحنی رشد آسیب را به سه مرحله زمانی تقسیم کرد. در مرحله اول، تا حدود یک میلیون سیکل، کار سختی ماده افزایش می‌یابد. پس از آن، تا حدود ۳/۵ میلیون سیکل، کار سختی ماده اشباع می‌شود و در مرحله پایانی، نرم شدگی حاصل از رشد آسیب به وجود می‌آید تا بروز آسیب بحرانی این مرحله ادامه می‌یابد.

باقری [۱۳] با استفاده از معیار صفحه بحرانی فیندلی عمر شافت در محل نقطه بحرانی، گره‌ای در ریشه دندانه هزارخار، برای بحرانی‌ترین مانور بالگرد ۲۵۰ ساعت پرواز معادل۴/۳ میلیون سیکل به دست آورده است که نزدیک به مقدار محاسبه



شکل ۱۲- رشد آسیب در مقطع بحرانی تا لحظه آسیب بحرانی



شکل ۱۳- مقایسه نتایج مدل آسیب دو مقیاسی و نتایج [۱۳] برای تعیین عمر در نقطه بحرانی

شده در این تحقیق است.

پس از بروز آسیب بحرانی می‌توان رشد ترک ماکروسکوپی را نیز بررسی کرد. برای این هدف می‌توان خواص مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته را در المانی که آسیب بحرانی در آن اتفاق افتاده، تا نزدیک به صفر کاهش داد و توانایی المان را برای تحمل تنش به حداقل رساند. در این تحقیق، در زیر برنامه آسیب در نقطه بروز آسیب بحرانی، مدول الاستیسیته تا ۰/۱ درصد آن کاهش یافته و عمر تا رسیدن دومین نقطه به آسیب بحرانی-که در نزدیکی نقطه اول آسیب بحرانی واقع است- محاسبه می‌شود. این فرایند تا رسیدن ترک به طول مجاز ادامه می‌یابد. نتایج رشد ترک به روش فوق به همراه نتایج باقری [۱۳] در شکل (۱۳) آمده است. تطابق قابل قبول نتایج صحت کاربرد مدل آسیب دو مقیاسی را در رشد ترک نشان می‌دهد. از آن‌جا که در این مدل آسیب تنها در صورتی رشد می‌کند که اندازه تنش معادل بیش از σ_f^∞ گردد از این رو به واسطه این محدودیت تعیین عمر برای فواصل بیشتر از ۲/۲ mm (در این مسئله) به این روش میسر نیست.

۶- نتیجه‌گیری

مدل آسیب دو مقیاسی، یک مدل ساختاری کارا برای پیش‌بینی آسیب در خستگی پرچرخه به حساب می‌آید. این مدل امکان پیش‌بینی وقوع ریزترکها در خستگی با بارگذاریهای ترمومکانیکی پیچیده را فراهم می‌سازد. در این تحقیق، مدل آسیب دو مقیاسی به کمک یک زیر برنامه در نرم‌افزار ABAQUS پیاده‌سازی شد. پایداری الگوریتم عددی ارایه شده این امکان را فراهم کرد تا نرم‌افزار بتواند میلیونها سیکل بارگذاری را دنبال کند.

مدل آسیب دو مقیاسی توانست رفتار یک لوله استوانه‌ای تحت بارگذاریهای خستگی غیرتناسبی را به خوبی پیش‌بینی کند و تعداد سیکل بارگذاری را تا رسیدن به آسیب بحرانی و محل بروز آسیب بحرانی را به خوبی پیش‌بینی کند. مدل آسیب دو مقیاسی قادر است عمر یک سازه را تحت بارهای پیچیده تکرار شونده را با دقت قابل توجهی پیش‌بینی کند. عمر پیش‌بینی شده شافت روتور اصلی بالگرد تحت بارگذاری هم‌زمان خستگی تراست و گشتاوری پیچشی توسط مدل آسیب دو مقیاسی با دقت قابل قبولی با روش معیار صفحه بحرانی فیندلی تطابق دارد. تطابق نتایج این مدل با دیگر روشهای موجود، دقت و کارایی مدل آسیب دو مقیاسی را نشان می‌دهد.

واژه نامه

1. mesoscale
2. inclusion
3. matrix
4. eshelby–kröner localization law

مراجع

1. Doudard, C., Calloch, S., Cugy, P., Galtier A., and Hild, F., “A Probabilistic Two-Scale Model for High Cycle Fatigue Life Predictions,” *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 28, pp. 279-288, 2005.
2. Lemaitre J., *A Course on Damage Mechanics*, First Edition, Springe-Verlag, 1992.
3. Lemaitre, J., and Desmorat R., *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*, 380 pages , Springer, First Edition, 2005.
4. Xiao, Y. C., Li, S., and Gao, Z., “A Continuum Damage Mechanics Model for High Cycle Fatigue,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 20 (7), pp. 503-508, 1998.
5. Bhattacharya, B., and Ellingwood, B., “Continuum Damage Mechanics Analysis of Fatigue Crack Initiation,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 20 (9), pp. 631-639, 1998.
6. Momen, R., Zhang X., and Cui D., “Fatigue Life Prediction of 3-D Problems by Damage Mechanics with Two-Block Loading,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 24 (1), pp. 29-37, 2002.
7. Park J., Park S., and Lee C., “A Microstructural Model for the Prediction of High Cycle,” *Scripta Materialia*, Vol. 47 (4), pp. 225-229, 2002.
8. Lemaitre J., Sermage J., and Desmorat R., “A Two Scale Damage Concept Applied to Fatigue,” *International Journal of Fracture*, Vol. 97, pp. 67-81, 1999.
9. Seyedi, M., Desmorat, R., and Sermage, J., “A Two Scale Model for Thermo-Mechanical High Cycle Fatigue Failure,” European Conference on Fracture ECF 15, Advanced Fracture Mechanics for Life and Safety, Stockholm, Sweden, 2004.
10. Simo, J. C. and Hughes, T. J., *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.
11. Habbitt Karlsson, Sorensen Inc., ABAQUS User’s Manual Version 6.8. Providence, RI, USA, 2008.
12. Desmorat R., Kane A., Seyedi M., and Sermage J., “Two Scale Damage Model and Related Numerical Issues for Thermomechanical High Cycle Fatigue,” *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 26, pp. 909-935, 2007.

۱۳. باقر نوری م.، تخمین عمر کارکرد شافت اصلی بالگرد، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان،۱۳۸۹.