تحلیل ارتعاشی تیر دوران‌کننده ترک‌دار با سطح مقطع متغیر با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل

سعید طالبی و علیرضا آریایی*
دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۹/۱۴- دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۵/۰۷)

چکیده - در این مقاله مشخصه‌هاي ارتعاشي یک تیر اویلر- برنولي ترک‌دار در حال دوران با سطح مقطع متغیر با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل بررسي مي‌شود. اثر موقعیت و اندازه ترک، سرعت چرخش و شعاع چرخش تیر در محاسبه فرکانس‌هاي طبیعي و شکل مودها مورد بررسي قرار مي‌گیرد. نتایج عـددي براي تیر دوراني بدون ترک و ترک‌دار اویلر- برنولي با سطح مقطع متغیر به‌دست آمده و با روش‌هاي دیگر مقایسه مي‌شود. مشاهده مي‌شود که دقت روش انتقال دیفرانسیل براي تحلیل ارتعاشي تیرهاي دوراني با سطح مقطع متغیر خصوصاً براي سرعت‌هاي دوراني زیاد، نسبت به روش‌هاي دیگر بیشتر است.

واژگان کلیدی: تیر اویلر- برنولي، روش انتقال دیفرانسیل، تیر دوران‌کننده، ترک، فرکانس طبیعي.

Vibration Analysis of a Cracked Rotating Tapered Cantilever Beam Using Differential Transform Method

S. Talebi and A. Ariaei
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan

Abstract: ***This paper studies the vibration characteristics of a cracked rotating tapered cantilever Euler–Bernoulli beam with linearly varying transverse cross-section using Differential Transform Method (DTM). The effects of the crack location, crack size, rotating speed and hub radius in calculating the natural frequencies and mode shapes of cracked tapered beam by using this method are investigated. Numerical results for a beam with and without crack with variable cross-section are obtained and compared with other methods. It is seen that the accuracy of the differential transform method for the vibration analysis of the beams with variable cross-section is higher than other methods, especially for the case of high rotational speed.***

Keywords: ***Euler-Bernoulli Beam, Differential transform method, Rotating beam, Crack, Natural frequency.***

---

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ariaei @eng.ui.ac.ir

فهرست علائم

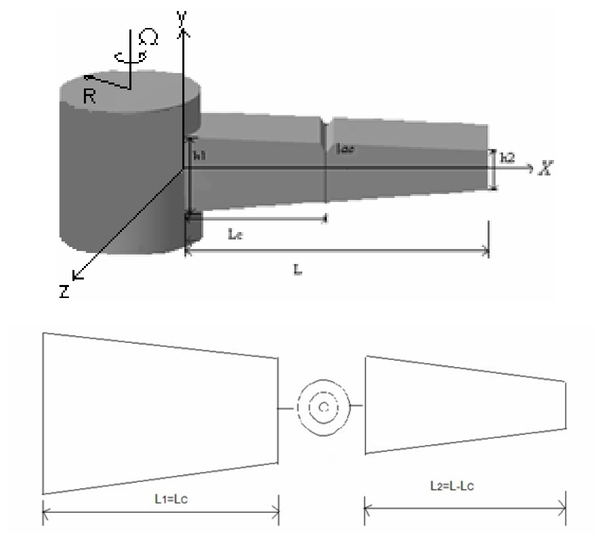
A	مساحت، (مترمربع)	L_C	فاصله ترک تا انتهای ثابت، (متر)
a_c	عمق ترک، (متر)	α	نسبت ارتفاع تیر در ابتدا و انتهای تیر
b	عرض تیر، (متر)	β	ضریبی برای تعیین موقعیت ترک
c	نسبت باریک‌شوندگی	ρ	چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)
E	مدول یانگ، (پاسکال)	γ	سرعت زاویه‌ای بی‌بعد
h	ارتفاع متغیر تیر، (متر)	ω_c	فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار
I	گشتاور دوم سطح، m^4	ω_o	فرکانس طبیعی تیر بدون ترک
L	طول تیر، (متر)		

۱- مقدمه

طراحی و تحلیل سازه‌های مهندسی مانند تیغه‌های روتور هلیکوپتر، تیغه‌های توربین بادی و تیغه‌های ملخک هواپیما توجه زیادی را به رفتار ارتعاشی تیرهای دورانی به خود جلب کرده است که به طور چشم‌گیری با حذف پدیده نامناسب تشدید و هم‌چنین رویکرد کنترل ارتعاشی مناسب، بهبود می‌یابد [۱-۳]. در مقایسه با تحقیقات گسترده‌ای که روی تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی بدون ترک انجام شده است، توجه کمتری به مشخصه‌های ارتعاشی تیرهای ترک‌دار بوده است. این در حالی است که سازه‌های دورانی به دلیل خستگی مداوم یا تغییر شکل‌های ساختاری، به‌راحتی در معرض نقایصی هم‌چون ترک هستند. مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل تیرهای دورانی ترک‌دار بسیار مهم بوده و اخیراً محبوبیت زیادی پیدا کرده‌اند [۴]. این تیرها معمولاً به تیرهای یک بعدی اویلر- برنولی یا تیموشنکو که در معرض نیروی خمشی گریز از مرکز هستند، ساده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل حاکم برای تیرهای با سطح مقطع متغیر، ضرایب متغیری برای تغییرات نیروی گریز از مرکز وهندسه در امتداد طول تیر را در بر می‌گیرد. روش‌های تقریبی متفاوتی برای تحلیل ارتعاشی مسئله‌ی تیر دوران‌کننده مطرح شده است. هودگس و روتکوسکی [۵] روش اجزای محدود مرتبه متغیر را برای به‌دست آوردن خواص ارتعاش آزاد تیر دورانی معرفی کردند. ناگولسواران [۶] ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اویلر- برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله شکل مود و با استفاده از برهم‌نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد. رائو و گوپتا [۷] روش اجزای محدود را برای به‌دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به‌کار بردند. گوندا [۸] یک جزء مرتبه بالاتر را که تابع شکل آن با توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی به‌دست آمده است، پیشنهاد می‌دهد که برای تحلیل دینامیکی تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر مناسب است. سپس، گوندا و گانکولی [۹] فرض کردند که جابه‌جایی عرضی به عنوان یک تابع مرتبه چهار تغییر می‌کند و شکل جدیدی از تابع به‌دست می‌آید که قسمت استاتیکی معادله دیفرانسیل حاکم را ارضا می‌کند. بعداً گوندا [۱۰ و ۱۱] یک روش جدید اجزای محدود را برای تحلیل ارتعاش آزاد میله‌های دوران‌کننده با سرعت بالا ارائه داد که شکل توابع آن ترکیب خطی حل معادله دیفرانسیل استاتیکی حاکم بر یک فنر سخت و یک چندجمله‌ای درجه سه است. بازون [۱۲] مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کرد. همچنین بازون [۱۳] روابط بین فرکانس‌های درون صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای را برحسب ضرایب سات‌ول مورد بحث قرار داد. بازون [۱۴] ارتعاش یک میله دورانی با سطح مقطع متغیر را با روش

اجزای محدود بررسی کرد که در آن ماتریس‌های جرم، الاستیک و سختی گریز از مرکز به طور روشنی برحسب نرخ باریک‌شوندگی بیان می‌شود. یو [۱۵] به طور همزمان مشخصه‌های دینامیکی تیغه‌های چرخشی پیش چرخیده با جرم متمرکز را مورد بررسی قرار داد. عطارنژاد و شهبا [۱۶] از توابع جابه‌جایی اصلی به‌دست آمده از حل معادله‌ی دیفرانسیل استاتیکی حرکت صفحه‌ای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر اویلر- برنولی برای تعیین فرمول‌های اجزای محدود استفاده کردند. وینود [۱۷] یک طیف تقریبی را با استفاده از روش اجزای محدود برای دو تابع درون‌یاب دیفرانسیلی به منظور تحلیل ارتعاش آزاد و انتشار امواج تیرهای با سطح مقطع متغیر و یکنواخت معرفی کرد. بانرجی [۱۸] از روش سختی دینامیکی برای مطالعه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر استفاده کرد که در آن ارتفاع یا پهنای تیر به طور خطی در امتداد طول آن تغییر می‌کند. وانگ و ورلی [۱۹] روش سختی دینامیکی را بر مبنای روش فروبنیوس برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به‌کار بردند. کاملاً مشهود است که ترک روی یک تیر، انعطاف موضعی را افزایش و بنابراین خواص دینامیکی تیر مانند فرکانس‌ها و شکل مودها را تغییر می‌دهد. در نتیجه امکان تخمین موقعیت و اندازه ترک برای تیر ترک‌دار وجود دارد. تاثیر ترک به طور گسترده در مقالات بررسی شده است و رویکردهای گوناگونی برای مدل کردن ترک توسعه یافته است. چانگ و چن [۲۰] روش اجزای محدود را برای تحلیل یک تیغه‌ی دورانی ضخیم ترک دار به کار بردند و سپس یک رویکرد موج‌های کوچک فضایی را برای نمایش ترک در این تیغه مطرح کردند. کیم [۲۱] از روش اجزای محدود برای بحث روی تیر کامپوزیتی دورانی با یک ترک عرضی استفاده کرد. کوانگ و هوانگ [۲۲] و هوانگ [۲۳] به ترتیب مکان‌یابی ارتعاشی و پایداری تیغه‌های دورانی با سطح مقطع متغیر و یکنواخت را با بررسی تاثیر مکان ترک با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قرار دادند. مسعود و آل سعید [۲۴] یک مدل ریاضی را از معادلات لاگرانژ به کمک روش مودهای فرضی استخراج کردند و برای توصیف ارتعاش جانبی تیر تیموشنکوی ترک‌دار دورانی به‌کار بردند.

امروزه تیرهای دورانی نایکنواخت به دلیل عملکرد ویژه آنها و رسیدن به توزیع مقاومت و جرم بهتر، کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند [۲۵]. از این‌رو تحلیل ارتعاشی این تیرها اهمیت فراوانی دارد. روش انتقال دیفرانسیل یکی از روش‌های عددی پرکاربرد برای حل معادلات دیفرانسیل این‌گونه تیرهاست. این روش بر مبنای بسط سری تیلور است که اولین بار توسط زهو [۲۶] معرفی شده است. اگر چه این روش براساس بسط سری تیلور است، اما هنوز به طور کلی در مراتب بالاتر تفاوت‌هایی با آن دارد و برای هر نوع سطح مقطع و تغییر شکلی قابل استفاده است. از محاسن روش انتقال دیفرانسیل دقت بالا و حجم محاسبات پایین آن در تحلیل مسایل ارتعاشی است. اوزدمیر و کایا [۲۷] از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای نایکنواخت استفاده کردند. ایشان با مقایسه نتایج این روش با روش اجزای محدود دقت بالای آن را در تعیین فرکانس‌های طبیعی نشان دادند. می [۲۸] روش انتقال دیفرانسیل را برای تحلیل تیرهای چرخشی به‌کار برد. او زمان حل مورد نیاز در این روش را به‌دست آورد و نشان داد در صورت کاربرد این روش به زمان کمی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی نیاز است. سادونگ و همکارانش [۲۹] کاربرد روش انتقال دیفرانسیل را در تیرهای با قیدهای الاستیک میانی بررسی کردند و نشان دادند در این روش می‌توان با حجم محاسبات کم به نتایجی با دقت قابل قبول رسید. در این مقاله با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر باریک‌شونده اویلر- برنولی ترک‌دار تعیین و اثرات نرخ باریک‌شوندگی، سرعت دورانی و شعاع توپی روی فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود. قابل ذکر است که در این مقاله ارتعاشات عرضی تیر دورانی مورد نظر است و از ارتعاشات درون‌صفحه عمود بر



شکل ۱- تیر دورانی ترک دار با سطح مقطع متغیر

محور دوران و پیچشی تیر صرف‌نظر می‌شود.

۲- فرمول‌بندی

یک تیر اویلر- برنولی در حال دوران و دارای ترک با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که شکل (۱) نشان می‌دهد، این تیر به یک توپی با شعاع R متصل است که با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور ثابت می‌چرخد. ارتفاع تیر به طور خطی در طول آن تغییر می‌کند. در تحقیق حاضر تیر دورانی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر به سه جزء در مقطع عرضی ترک تفکیک می‌شود، شکل (۱) را ببینید. در این مقاله از نظریه تیر اویلر- برنولی استفاده شده است و از آنجایی‌که در این نظریه از تغییر شکل برشی صرف‌نظر می‌شود ترک تنها با یک فنر پیچشی مدل می‌شود [۲۰]. این در حالی است که در صورت استفاده از نظریه تیر تیموشنکو باید به جای ترک از دو فنر، یکی خطی و دیگری پیچشی استفاده کرد [۲۴]. وجود ترک تغییری در توزیع جرم در امتداد تیر به وجود نمی‌آورد. نیروهای گریز از مرکزی که در هر مقطع (در هر دو طرف راست و چپ) از اجزای آن اعمال می‌شوند از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_1(X_1)=\int_{X_1}^{L_1}\rho A\Omega^2(R+x)\,dx+\int_{0}^{L_2}\rho A\Omega^2(R+L_1+x)\,dx \qquad (۱)$$

$$T_2(X_2)=\int_{X_2}^{L_2}\rho A\Omega^2(R+L_1+x)\,dx \qquad (۲)$$

در موقعیت ترک رابطه (۳) برقرار است:

$$T_1(x)=T_2(x) \qquad (۳)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$A(x)=A_g\left(1-\frac{cx}{L}\right)^n \qquad (۴)$$

$$I_{ZZ}=I_{Zg}\left(1-\frac{cx}{L}\right)^{n+2} \qquad (۵)$$

$$I_{YY}=I_{Zg}\left(1-\frac{cx}{L}\right)^{n+2} \qquad (۶)$$

که در آن A و I_{YY} و I_{ZZ} به‌ترتیب سطح مقطع عرضی و گشتاور دوم سطح حول محورهای Yو Z هستند. زیرنویس g متناظر با انتهای چپ تیر است که در شکل (۱) نشان داده شده است. نرخ باریک‌شوندگی با ثابت c نشان داده می‌شود که باید از یک کوچکتر باشد، زیرا در غیر این صورت ارتفاع تیر قبل از رسیدن به انتهای آن به صفر می‌رسد. مقادیر ۲ و n=۱ بیشترین حالت کاربردی را در بر می‌گیرد (n=۱ تغییرات خطی سطح و n=۲ تغییرات مرتبه ۲ سطح را در امتداد طول می‌دهد). مقاطع عرضی زیادی را می‌توان با مقادیر n=۱ و n=۲ معرفی کرد. مدول یانگ (E) و چگالی ماده (ρ) ثابت فرض می‌شوند. بر طبق نظریه اویلر- برنولی معادله دیفرانسیل حاکم برای حرکت دورانی تیر به صورت زیر داده می‌شود:

$$\rho A\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_i\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)=P_W \quad , \quad i=1,2 \qquad (۷)$$

که در معادله بالا w_i جابه‌جایی عرضی و P_w نیروی اعمالی بر

واحد طول است. با در نظر گرفتن ارتعاش آزاد تیر، نیروی اعمالی بر واحد طول آن صفر در نظر گرفته می‌شود و معادله (۷) به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\rho A\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_i\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)=0 \quad , \quad i=1,2 \tag{۸}$$

تیر شکل (۱) دارای چهار شرط مرزی در ابتدا و انتهای آن به‌صورت زیر است:

$$w_1=\frac{\partial w_1}{\partial x}=0 \qquad \text{at} \quad x=0 \tag{۹}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}=0 \qquad \text{at} \quad x=L \tag{۱۰}$$

شرایط پیوستگی در محل ترک عبارت‌اند از :

$$w_1\left(L_C^-,t\right)=w_2\left(L_C^+,t\right) \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\left(L_C^-,t\right)=\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\left(L_C^+,t\right) \tag{۱۲}$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\left(L_C^-,t\right)=\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\left(L_C^+,t\right) \tag{۱۳}$$

که L_C^+ و L_C^- به‌ترتیب مکان‌هایی بلافاصله در بعد و قبل از موقعیت ترک L_C را نشان می‌دهند. علاوه بر این، یک ناپیوستگی در شیب تیر در محل ترک ایجاد می‌شود که می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}\left(L_C^+,t\right)-\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(L_C^-,t\right)=\theta\, L\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\left(L_C^+,t\right) \tag{۱۴}$$

که در آن θ ضریب خمشی بی‌بعد ترک و تابع اندازه آن است که برای ترک دو طرف باز به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$\theta=6\pi a_1^2 f_D\left(a_1\right)\left(\frac{h}{L}\right) \tag{۱۵}$$

در معادله فوق، $a_1=a_c/h$ عمق بی‌بعد شده ترک است که در آن a_c عمق ترک و h ضخامت تیر در محل ترک است. همچنین تابع f_D با معادله زیر داده می‌شود:

$$f_D\left(a_1\right)=0.5335-0.929a_1+3.500a_1^2-3.181a_1^3+5.793a_1^4 \tag{۱۶}$$

و برای ترک یک طرف باز می‌توان نوشت [۳۰]

$$\theta=6\pi a_1^2 f_J\left(a_1\right)\left(\frac{H}{L}\right) \tag{۱۷}$$

که در آن

$$f_J\left(a_1\right)=0.6384-1.035a_1+3.7201a_1^2-5.1773a_1^3+7.553a_1^4-7.332a_1^5+2.4909a_1^6 \tag{۱۸}$$

۳- بی‌بعدسازی پارامترها

پارامترهای بی‌بعد شده برای موقعیت جزء، شعاع توپی و سرعت زاویه‌ای عبارت‌اند از [۳۱]:

$$\xi=\frac{x}{L}, \qquad \delta=\frac{R}{L}, \qquad \gamma^2=\frac{\rho A\Omega^2 L^4}{EI_g} \tag{۱۹}$$

با قرار دادن معادلات (۴) و (۱۹) در معادلات (۱) و (۲)، نیروهای کششی گریز از مرکز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$T_1=T_2=\frac{\rho A\Omega^2 L^2}{c^2(n+1)(n+2)}\begin{bmatrix}\left(1-c\xi^2\right)^{n+1}(1+2c\delta+cn\delta+c\xi+nc\xi)\\-(1-c)^{n+1}(1+2c\delta+cn\delta+c+nc)\end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری عبارت نیروی کششی گریز از مرکز از معادله (۲۰) در معادله (۸) و انتخاب n=۱ داریم :

$$\frac{1}{\gamma^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1-c\xi)^2\frac{d^2 w_i}{d\xi^2}\right]-w_i\lambda^2(1-c\xi)-\frac{1}{6c^2}\frac{d}{d\xi}\times\left\{\left[(1-c\xi)^2(1+3c\delta+2c\xi)-(1-c)^2(1+3c\delta+2c)\right]\frac{dw_i}{d\xi}\right\}=0,\ i=1,2 \tag{۲۱}$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد شده معادله (۱۹)، شرایط مرزی (۹) و (۱۰) به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$w_1=\frac{dw_1}{d\xi}=0 \qquad \text{at} \quad \xi=0 \tag{۲۲}$$

$$\frac{d^2 w_2}{d\xi^2}=\frac{d^3 w_2}{d\xi^3}=0 \qquad \text{at} \quad \xi=1 \tag{۲۳}$$

همچنین با جایگذاری معادله (۱۹) در شرایط پیوستگی (۱۱)

جدول ۱- قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل

تابع اصلی	تابع انتقال
$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$F[k]=G[k]\pm H[k]$
$f(x)=\mu\, g(x)$	$F[k]=\mu\, G[k]$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F[k]=\sum\limits_{k=0}^{\infty} G[k-l]H[l]$
$f(x)=\dfrac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k]=\dfrac{(k+n)!}{k!}G[k+n]$
$f(x)=x^n$	$F[k]=\delta(k-n)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad k\neq n\\ 0 & \text{if} \quad k=n\end{cases}$

تا (۱۴) در محل ترک، معادلات زیر به‌دست می‌آیند

$$w_1=w_2 \qquad \text{at} \quad \xi=\xi_c \tag{۲۴}$$

$$\frac{d^2w_1}{d\xi^2}=\frac{d^2w_2}{d\xi^2} \qquad \text{at} \quad \xi=\xi_c \tag{۲۵}$$

$$\frac{d^3w_1}{d\xi^3}=\frac{d^3w_2}{d\xi^3} \qquad \text{at} \quad \xi=\xi_c \tag{۲۶}$$

$$\frac{dw_2}{d\xi}-\frac{dw_1}{d\xi}=\theta\frac{d^2w_2}{d\xi^2} \qquad \text{at} \quad \xi=\xi_c \tag{۲۷}$$

که در معادلات فوق ξ_c معرف مکان ترک است و با معادله زیر بیان می‌شود:

$$\xi_c=\frac{L_c}{L} \tag{۲۸}$$

۴- روش انتقال دیفرانسیل

در این بخش از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین پاسخ یک تیر اویلر- برنولی دارای ترک استفاده می‌شود. یک تابع $f(x)$ را درنظر بگیرید که در ناحیه D تعریف شده است و نقطه $x=x_0$ می‌تواند معرف هر نقطه در D باشد. هدف تعریف تابع $f(x)$ با سری‌های توانی با مرکزیت نقطه x_0 است. انتقال دیفرانسیل تابع $f(x)$ عبارت است از :

$$F[k]=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=x_0} \tag{۲۹}$$

که در آن تابع $f(x)$ تابع اصلی و $F[k]$ تابع انتقال است. تابع انتقال معکوس به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k F[k] \tag{۳۰}$$

با در نظر گرفتن معادله (۲۹) می‌توان نشان داد که مفهوم انتقال دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج می‌شود. در کاربردهای واقعی، تابع $f(x)$ در معادله (۳۰) با تعداد جملات محدود بیان و این معادله پس از جایگزینی معادله (۲۹) در آن به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=x_0} \tag{۳۱}$$

در معادله فوق m به همگرایی فرکانس‌های طبیعی بستگی دارد. قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی که در این مقاله از آنها استفاده می‌شود به ترتیب در جداول (۱) و (۲) معرفی شده‌اند.

حال با به‌کارگیری روش انتقال دیفرانسیل و اعمال روابط بیان شده در جدول (۱) در معادله (۲۱)، این معادله به ازای $x_0=0$ به شکل زیر در می‌آید :

جدول ۲- قوانین انتقال دیفرانسیل در شرایط مرزی

X=۱		X=۰	
شرط مرزی انتقال	شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال	شرط مرزی اصلی
$\sum_{k=0}^{\infty} F(k)=0$	$f(1)=0$	$F(0)=0$	$f(0)=0$
$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k)=0$	$\frac{df}{dx}(1)=0$	$F(1)=0$	$\frac{df}{dx}(0)=0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k)=0$	$\frac{df}{dx}(1)=0$	$F(2)=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(0)=0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k)=0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1)=0$	$F(3)=0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(0)=0$

$$
\begin{aligned}
&(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W_i[k+4]- \\
&\frac{\gamma^2}{6}(3+6\delta)(k+1)(k+2)W_i[k+2]- \\
&\gamma^2\delta(k+1)^2 W_i[k+1]+ \\
&\left[-\omega^2+\gamma^2 k+\frac{\gamma^2}{2}k(k-1)\right]W_i[k]=0, \quad i=1,2
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

همچنین با اعمال روابط بیان شده در جداول (۱) و(۲) در معادلات (۲۲) تا (۲۷) و در نظر گرفتن $x_0=0$ می‌توان نوشت:

$$W_1[0]=W_1[1]=0 \tag{۳۳}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)W_2[k]=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-2)W_2[k]=0 \tag{۳۴}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_1[k]=\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_2[k] \tag{۳۵}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_1[k] \\
&=\sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_2[k]
\end{aligned}
\tag{۳۶}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2)W_1[k] \\
&=\sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2)W_2[k]
\end{aligned}
\tag{۳۷}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_1)^{k-1} k\left(W_2[k]-W_1[k]\right) \\
&=\theta\sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_2[k]
\end{aligned}
\tag{۳۸}
$$

که در آن $W_i[k]$ تبدیل یافته $w_i(\xi)$، $i=1,2$ است. از طرفی فرض می‌شود:

$$W_1[2]=C_{21} \tag{۳۹}$$

$$W_1[3]=C_{31} \tag{۴۰}$$

$$W_2[0]=C_{02} \tag{۴۱}$$

$$W_2[1]=C_{12} \tag{۴۲}$$

$$W_2[2]=C_{22} \tag{۴۳}$$

$$W_2[3]=C_{32} \tag{۴۴}$$

با جایگذاری معادلات فوق در شرایط مرزی (۳۳-۳۸) برای مقادیر مختلف k، شش معادله برحسب مقادیر مجهول C_{32}، C_{22}، C_{21}، C_{02}، C_{31} و C_{21} به‌دست می‌آید که با استفاده از این معادلات یک ماتریس ۶×۶ از ضرایب مجهولات نتیجه می‌شود. حال برای داشتن جواب غیر بدیهی صفر باید دترمینان این ماتریس ضرایب برابر صفر باشد که در این‌صورت یک معادله بر حسب c، γ، δ و فرکانس‌های طبیعی

جدول ۳- سه فرکانس طبیعی اول تیر دورانی بدون ترک با سطح مقطع متغیر برای سرعت‌های دورانی بی بعد مختلف γ

γ	انتقال دیفرانسیل	اجزای محدود مرسوم NE=۵ (DOF=۱۲)[۸]	گوندا و گانگولی [۹]	وانگ و ورلی [۱۹]
مود اول				
۱	۳/۹۸۶۵	۳/۹۸۶۷	۳/۹۸۶۶	۳/۹۸۶۶
۲	۴/۴۳۶۵	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸
۳	۵/۰۹۲۱	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷
۴	۵/۸۷۸۲	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸
۵	۶/۷۴۳۱	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴
۶	۷/۶۵۵	۷/۶۵۵۲	۷/۶۵۵۱	۷/۶۵۵۱
۷	۸/۵۹۵۷	۸/۵۹۵۷	۸/۵۹۵۶	۸/۵۹۵۶
۸	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۲	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۰
۹	۱۰/۵۲۳۸	۱۰/۵۲۴۴	۱۰/۵۲۳۹	۱۰/۵۲۳۹
۱۰	۱۱/۵۰۰۹	۱۱/۵۰۲۳	۱۱/۵۰۱۵	۱۱/۵۰۱۵
۱۱	۱۲/۴۸۲۸	۱۲/۴۸۵۷	۱۲/۴۸۴۵	۱۲/۴۸۴۵
۱۲	۱۳/۴۶۷۸	۱۳/۴۷۲۹	۱۳/۴۷۱۱	۱۳/۴۷۱۱
مود دوم				
۱	۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۸۲۰	۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۷۴۰
۲	۱۸/۹۳۶۲	۱۸/۹۴۴۲	۱۸/۹۳۶۶	۱۸/۹۳۶۶
۳	۱۹/۶۸۲۳	۱۹/۶۹۰۷	۱۹/۶۸۳۹	۱۹/۶۸۳۹
۴	۲۰/۶۸۳۲	۲۰/۶۹۱۲	۲۰/۶۸۵۲	۲۰/۶۸۵۲
۵	۲۱/۹۰۳۵	۲۱/۹۱۰۵	۲۱/۹۰۵۳	۲۱/۹۰۵۳
۶	۲۳/۳۰۹	۲۳/۳۱۳۸	۲۳/۳۰۹۳	۲۳/۳۰۹۳
۷	۲۴/۸۶۵۳	۲۴/۸۶۸۶	۲۴/۸۶۴۷	۲۴/۸۶۴۷
۸	۲۶/۵۴۴۱	۲۶/۵۴۷۲	۲۶/۵۴۳۷	۲۶/۵۴۳۷
۹	۲۸/۳۱۶۹	۲۸/۳۲۶۱	۲۸/۳۲۲۷	۲۸/۳۲۲۷
۱۰	۳۰/۱۵۶۵	۳۰/۱۸۶۴	۳۰/۱۸۲۷	۳۰/۱۸۲۷
۱۱	۳۲/۰۳۳۵	۳۲/۱۱۲۷	۳۲/۱۰۸۵	۳۲/۱۰۸۵
۱۲	۳۳/۹۱۷۶	۳۴/۰۹۲۹	۳۴/۰۸۷۷	۳۴/۰۸۷۷
مود سوم				
۱	۴۷/۴۱۷۷	۴۷/۵۵۴۸	۴۷/۴۱۷۳	۴۷/۴۱۷۳
۲	۴۷/۸۷۳۱	۴۸/۰۰۶۸	۴۷/۸۷۱۷	۴۷/۸۷۱۶

ادامه جدول ۳

۳	۴۸/۶۲۳۰	۴۸/۷۵۰۴	۴۸/۶۱۹۱	۴۸/۶۱۹۰
۴	۴۹/۶۴۶۱	۴۹/۷۷۲۲	۴۹/۶۴۵۶	۴۹/۶۴۵۶
۵	۵۰/۹۳۱۴	۵۱/۰۵۴۸	۵۰/۹۳۳۸	۵۰/۹۳۳۸
۶	۵۲/۴۶۰۴	۵۲/۵۷۸۲	۵۲/۴۶۳۳	۵۲/۴۶۳۳
۷	۵۴/۲۱۲۹	۵۴/۳۲۱۳	۵۴/۲۱۲۴	۵۴/۲۱۲۴
۸	۵۶/۱۶۵۲	۵۶/۲۶۲۶	۵۶/۱۵۹۵	۵۶/۱۵۹۵
۹	۵۸/۲۹۱۰	۵۸/۳۸۱۳	۵۸/۲۸۳۳	۵۸/۲۸۳۳
۱۰	۶۰/۵۵۵۲	۶۰/۶۵۷۶	۶۰/۵۶۳۹	۶۰/۵۶۳۹
۱۱	۶۲/۹۱۱۲	۶۳/۰۷۳۳	۶۲/۹۸۲۹	۶۲/۹۸۲۹
۱۲	۶۵/۲۹۹۹	۶۵/۶۱۲۱	۶۵/۵۲۳۷	۶۵/۵۲۳۷

بی‌بعد به‌دست می‌آید؛ حال می‌توان برای مقادیر مختلف c، γ و δ، فرکانس‌های بی‌بعد را محاسبه کرد.

۵- نتایج عددی

در این قسمت ارتعاش تیر با ترک‌هایی در موقعیت‌های مختلف در نظر گرفته و دقت و همگرایی فرمول‌بندی حاضر بررسی می‌شود. نتایج حاصل از رویکرد مطرح شده در این مقاله با مقادیر موجود در مقالات دیگر که با استفاده از روش‌های دیگر به دست آمده‌اند، مقایسه می‌شود. در ابتدا تیر دورانی بدون ترک با سطح مقطع متغیر و سپس تیر ترک دار بدون سرعت دورانی با سطح مقطع متغیر بررسی می‌شود. دلیل انتخاب این دو مسئله آن است که در کارهای گذشته این دو نوع تیر مطالعه شده‌اند و می‌توان نتایج کار حاضر را با آن‌ها مقایسه و اعتبار فرمول‌بندی حاضر را بررسی کرد. در انتها یک تیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۵-۱- تیرهای دورانی بدون ترک

ابتدا یک تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر با نسبت باریک شوندگی $c=0/5$ بررسی می‌شود که از سمت با سطح مقطع بزرگتر، ثابت (گیردار) است. جرم و سختی فنر در امتداد طول تیر به‌ترتیب $m(x)=\rho A_g(1-0/5\ x/L)$ و $EI(x)=EI_g(1-0/5\ x/L)^3$ در نظر گرفته می‌شود. در جدول (۳) سه فرکانس طبیعی اول میله با سطح مقطع متغیر برای سرعت‌های دورانی بی بعد مختلف γ با نتایج به‌دست آمده در مراجع [۹ و ۱۹] مقایسه شده است. برای تعیین فرکانس‌های طبیعی در مرجع [۹] از تابع مبنای سختی برای حل با روش اجزای محدود و در مرجع [۱۹] از روش سختی دینامیکی بر مبنای حل سری توانی فروبنیوس استفاده شده است. مقایسه نتایج، تطابق خوب جواب‌های حاصل از سه روش را نشان می‌دهد. همچنین در این جدول روش انتقال دیفرانسیل با روش اجزای محدود مرسوم(CFEM) مقایسه شده است که در این روش برای تحلیل تیر دورانی از چندجمله‌ای درجه۳ به عنوان توابع میان‌یاب استفاده می‌کند، که نتایج نشان‌دهنده‌ی دقت همگرایی بیشتری در روش انتقال دیفرانسیل نسبت به CFEM است (در این روش ۵ جزء با ۱۲ درجه آزادی حل شده است). اینک برای بررسی بیشتر دقت روش انتقال دیفرانسیل، مثال دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن یک تیر دورانی یکنواخت و یک تیر دورانی با سطح مقطع متغیر در سرعت‌های بالا مطالعه می‌شود. جرم و سختی انتقالی بر واحد طول تیر برابر با

جدول ۴- چهار فرکانس طبیعی بی بعد تیر بدون ترک با سرعت دورانی بالا

	$\gamma = ۱۰۰$		$\gamma = ۲۰۰$	
شماره مود	انتقال دیفرانسیل	گوندا [۱۱]	انتقال دیفرانسیل	گوندا و گانگولی [۱۰]
مود اول	۱۰۱/۸۱۰۱	۱۰۱/۸۲۳۳	۲۰۱/۰۸۴۱	۲۰۱/۰۵۴۷
مود دوم	۲۱۸/۴۲۴۰	۲۱۸/۴۶۵۵	۴۹۲/۶۸۵۲	۴۹۲/۶۸۴۳
مود سوم	۳۴۰/۳۷۵۱	۳۴۰/۷۶۵۴	۷۸۳/۷۶۸۰	۷۸۳/۷۸۷۹
مود چهارم	۴۷۱/۵۹۵۴	۴۷۱/۶۶۳۰	۱۰۸۶/۲۲۴۳	**N/A**

$A_g \rho\, m(x) = (1-0/8\ x/L)$ و $EI(x) = EI_g(1-0/95\ x/L)$ فرض می‌شود. در جدول (۴) چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده از روش حاضر به‌ترتیب با مقادیر به‌دست آمده در مرجع [۱۰] برای تیر دورانی یکنواخت و مرجع [۱۱] برای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش حاضر نتایج خوبی برای سرعت‌های دورانی بالا ارائه می‌دهد.

۵-۲- تیرهای غیردورانی ترک‌دار

اینک فرض می‌شود تیر از سمت مقطع بزرگتر خود گیردار است. پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر عبارت‌اند از طول تیر L=۲۴۰ mm، ضخامت تیر در انتهای گیردار h_1=۲۰ mm، عمق تیر b=۱۲ mm ، مدول یانگ E=۲۱۰ GPa و چگالی ρ=۷۸۶۰kg/m^3. تحلیل ارتعاشی این تیر قبلاً توسط چودهاری و مایتی [۳۲] انجام شده است. ایشان سه فرکانس طبیعی اول را برای موقعیت‌ها و اندازه‌های مختلف ترک با استفاده از روش اجزای محدود دو بعدی مطالعه کرده‌اند. سه فرکانس طبیعی اول با استفاده از این روش با چهار عبارت بسط و در جدول (۵) نشان داده شده است. نتایج اجزای محدود دو بعدی (2d-FEM) در جدول (۵)، نتایج ارائه شده توسط چودهاری و مایتی است. $\beta = 1-(1-\alpha)L_C/L$ موقعیت ترک را نشان می‌دهد که در آن $\alpha = 1-c$ است (دلیل استفاده از پارامتر α، مقایسه با مقالات دیگر است). اعداد داخل پرانتز در این جدول معرف نسبت فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار به تیر بدون ترک هستند. همان‌طور که در جدول (۵) نشان داده می‌شود برای یک موقعیت ثابت، با افزایش عمق ترک، نسبت فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار به تیر بدون ترک کاهش می‌یابد؛ به عنوان مثال با فرض یک ترک در میانه تیر (α=۰/۶ و β=۰/۸) با افزایش عمق ترک از ۰/۲۸۱ ضخامت تیر به ۰/۵ آن، فرکانس اول تیر ترک‌دار از ۹۸٪ فرکانس اول تیر بدون ترک به ۹۳٪ آن کاهش یافته است. همچنین در این جدول مشاهده می‌شود که میزان کاهش فرکانس با نزدیک شدن ترک به انتهای گیردار تیر بیشتر است.

۵-۳- تیر دورانی ترک‌دار

در این بخش روش حاضر برای تحلیل مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقادیر نسبت باریک‌شوندگی، شعاع توپی و سرعت دورانی بی‌بعد تیر به ترتیب α=۰/۵، R/L=۰ و γ=۱ می‌باشند. فرض می‌شود که نسبت عمق ترک به ضخامت تیر برابر a_c/h=۰/۳ و ترک در موقعیت L_C/L=۰/۴۵ واقع شده است. در بررسی زیر از چهار جمله برای بسط تابع شکل جزء تیر دورانی با سطح مقطع متغیر استفاده شده است. نسبت چهار فرکانس اول تیر دورانی ترک‌دار به فرکانس‌های تیر

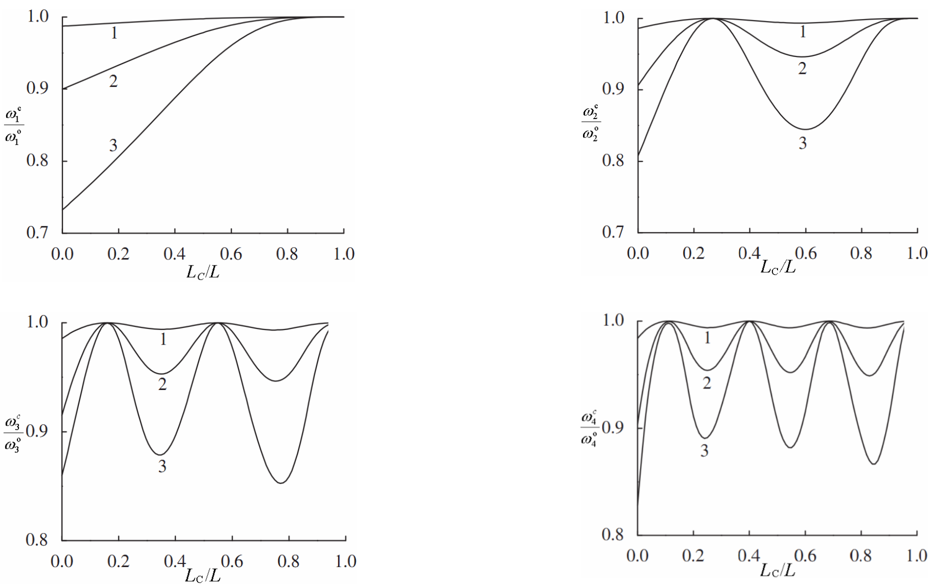
جدول ۵- سه فرکانس طبیعی اول تیر بدون دوران و دارای ترک

ترک		روش	فرکانس‌های طبیعی (هرتز)		
β	a_c/h		مود اول	مود دوم	مود سوم
α=۰/۲					
صفر		انتقال دیفرانسیل	۳۵۴/۱۱	۱۲۹۹/۶۴	۳۰۴۶/۵
		اجزای محدود دوبعدی	۳۵۱/۶۲	۱۲۷۱/۵۰	۲۹۲۵/۳
۰/۵	۰/۲۸۸	انتقال دیفرانسیل	۳۵۰/۶۳(۰/۹۹)	۱۲۵۳/۴۱(۰/۹۶)	۳۰۴۳/۹(۱/۰۰)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۴۸/۳۶(۰/۹۹)	۱۲۳۰/۰(۰/۹۷)	۲۹۲۳/۰(۱/۰۰)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳۴۱/۸۵(۰/۹۷)	۱۱۵۶/۳۷(۰/۸۹)	۳۰۳۸/۵۶(۱/۰۰)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۳۸/۹۳(۰/۹۶)	۱۱۳۲/۱(۰/۸۹)	۲۹۱۶/۸(۱/۰۰)
۰/۶	۰/۲۹۲	انتقال دیفرانسیل	۳۴۶/۶۳(۰/۹۸)	۱۲۶۹/۶۳(۰/۹۸)	۲۹۸۶/۰۷(۰/۹۸)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۴۴/۳۸(۰/۹۸)	۱۲۴۲/۱(۰/۹۸)	۲۸۶۲/۷(۰/۹۸)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳۲۹/۰۶(۰/۹۳)	۱۲۰۹/۰۳(۰/۹۳)	۲۸۷۸/۵۳(۰/۹۴)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۲۶/۲۳(۰/۹۳)	۱۱۸۱/۶(۰/۹۳)	۲۷۵۳/۸(۰/۹۴)
۰/۹۵	۰/۳۹۹	انتقال دیفرانسیل	۳۰۸/۲۱(۰/۸۷)	۱۱۸۱/۱۶(۰/۹۱)	۲۸۷۰/۶(۰/۹۴)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۷/۳۴(۰/۸۷)	۱۱۵۶/۱(۰/۹۱)	۲۷۵۱/۷(۰/۹۴)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۲۸۳/۵۷(۰/۸۰)	۱۱۳۴/۷۸(۰/۸۷)	۲۸۱۴/۸۳(۰/۹۲)
		اجزای محدود دوبعدی	۲۸۰/۱۷(۰/۸۰)	۱۱۰۶/۸(۰/۸۷)	۲۶۹۰/۹(۰/۹۲)
α=۰/۴					
صفر		انتقال دیفرانسیل	۳۲۴/۳۴	۱۴۴۲/۰۰	۳۶۳۰/۲۰
		اجزای محدود دوبعدی	۳۲۲/۸۳	۱۴۱۵/۳۶	۳۴۸۶/۹۰
۰/۶	۰/۳۰۶	انتقال دیفرانسیل	۳۲۲/۰۲(۰/۹۹)	۱۳۷۵/۲(۰/۹۵)	۳۵۳۴/۸۸(۰/۹۷)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۲۰/۶۳(۰/۹۹)	۱۳۴۹/۳(۰/۹۵)	۳۳۷۳/۲(۰/۹۷)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳۱۷/۰۱(۰/۹۸)	۱۲۵۷/۳۲(۰/۸۷)	۳۳۹۷/۲۴(۰/۹۳۵)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۱۵/۳۵(۰/۹۸)	۱۲۲۹/۱(۰/۸۷)	۳۲۲۴/۲(۰/۹۳)
۰/۷	۰/۳۰۴	انتقال دیفرانسیل	۳۱۶/۹۹(۰/۹۸)	۱۳۸۴/۴۹(۰/۹۶)	۳۵۸۸/۱۸(۰/۹۹)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۱۵/۹۳(۰/۹۸)	۱۳۵۷/۱(۰/۹۶)	۳۴۲۴/۲(۰/۹۸)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳۰۱/۸۵(۰/۹۳)	۱۲۸۸/۳۶(۰/۸۹)	۳۵۲۲/۷۹(۰/۹۷)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۰/۱۴(۰/۹۳)	۱۲۵۹/۰(۰/۸۹)	۳۳۵۸/۲(۰/۹۶)
۰/۸	۰/۳	انتقال دیفرانسیل	۳۱۰/۰۱(۰/۹۶)	۱۴۳۶/۸۲(۱/۰۰)	۳۴۷۷/۰۸(۰/۹۶)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۹/۱۷(۰/۹۶)	۱۴۰۴/۳(۰/۹۹)	۳۳۱۸/۴(۰/۹۵)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۲۸۲/۵۲(۰/۸۷)	۱۴۲۷/۴۹(۰/۹۹)	۳۲۳۹/۸(۰/۸۹)
α =۰/۶		اجزای محدود دوبعدی	۲۸۰/۶۸(۰/۸۷)	۱۳۹۴/۰(۰/۹۸)	۳۰۷۰/۲(۰/۸۸)

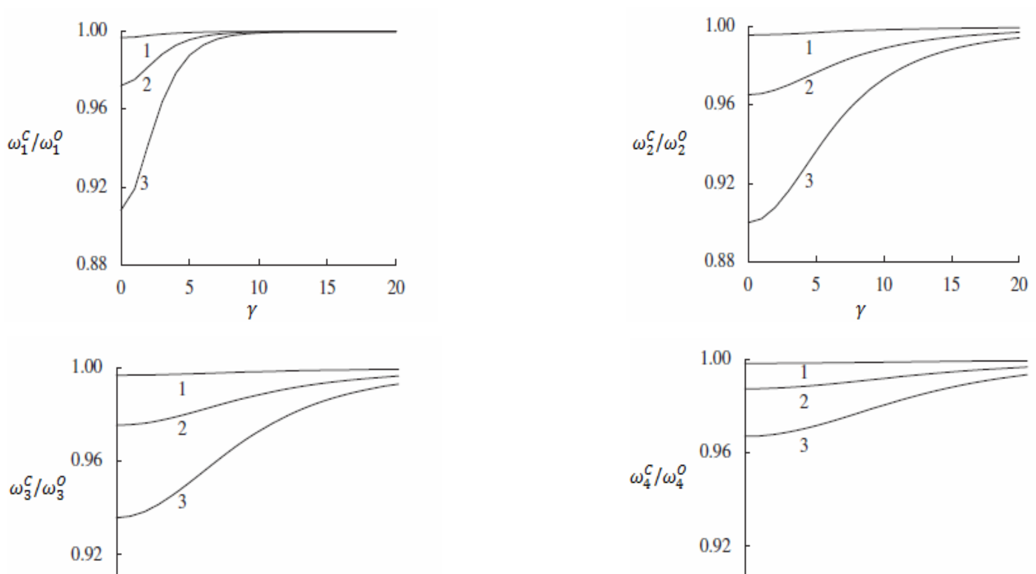
ادامه جدول ۵

صفر		انتقال دیفرانسیل	۳۰۸/۰۷	۱۵۷۶/۰۱	۴۱۵۲/۰۴
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۶/۸۵	۱۵۳۸/۱۳	۳۹۳۵/۱۷
۰/۶۵	۰/۲۵۹	انتقال دیفرانسیل	۳۰۸/۰۴(۱/۰۰)	۱۵۷۱/۸۳(۱/۰۰)	۴۰۹۷/۸۷(۰/۹۹)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۶/۸۱(۱/۰۰)	۱۵۳۴/۳(۱/۰۰)	۳۸۸۹/۰(۰/۹۹)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳۰۷/۸۹(۱/۰۰)	۱۵۵۶/۳۷(۰/۹۹)	۳۸۹۷/۲۲(۰/۹۴)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۶/۶۵(۱/۰۰)	۱۵۱۸/۵(۰/۹۹)	۳۶۸۸/۹(۰/۹۴)
۰/۷۵	۰/۲۷۵	انتقال دیفرانسیل	۳۰۵/۸۷(۰/۹۹)	۱۵۰۳/۳۳(۰/۹۵)	۴۰۶۹/۰۴(۰/۹۸)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۴/۶۲(۰/۹۹)	۱۴۶۷/۵(۰/۹۵)	۳۸۳۵/۶(۰/۹۷)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۲۹۹/۳۹(۰/۹۷)	۱۳۳۶/۵(۰/۸۵)	۳۹۱۰/۶۸(۰/۹۴)
		اجزای محدود دوبعدی	۲۹۷/۹۵(۰/۹۷)	۱۳۰۰/۵(۰/۸۵)	۳۶۶۸/۵(۰/۹۳)
۰/۸	۰/۲۸۱	انتقال دیفرانسیل	۳۰۲/۴۸(۰/۹۸)	۱۵۰۴/۶۵(۰/۹۵۵)	۴۱۳۶/۲۱(۱/۰۰)
		اجزای محدود دوبعدی	۳۰۱/۶۳(۰/۹۸)	۱۴۷۰/۳(۰/۹۶)	۳۹۰۳/۵(۰/۹۹)
	۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۲۸۷/۸۲(۰/۹۳)	۱۳۶۰/۳۳(۰/۸۶)	۴۱۰۵/۱۷(۰/۹۹)
		اجزای محدود دوبعدی	۲۸۶/۴۵(۰/۹۳)	۱۳۲۴/۸(۰/۸۶)	۳۸۷۱/۰(۰/۹۸)

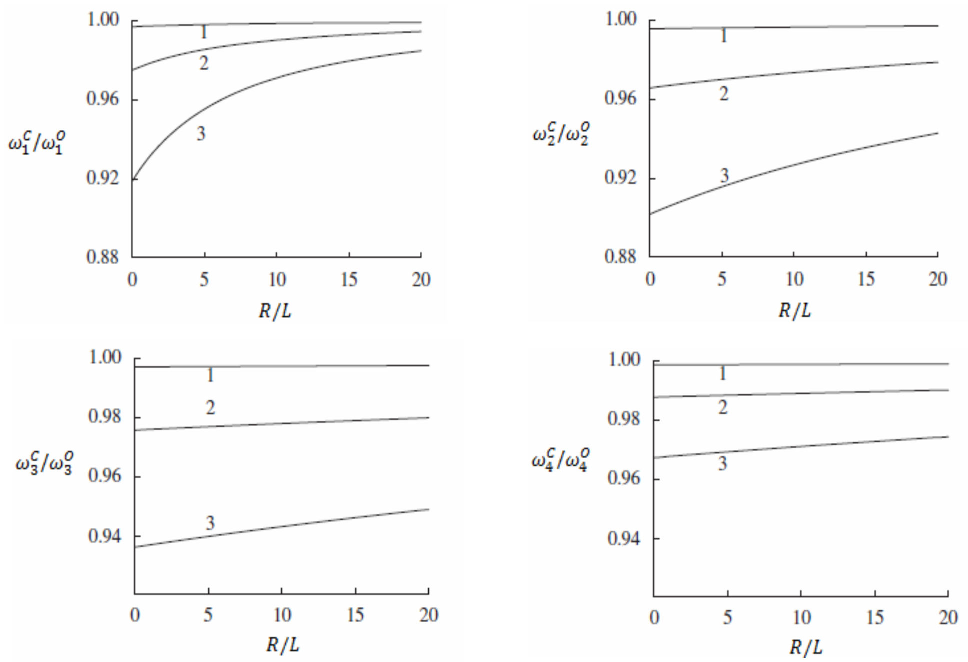
دورانی بدون ترک برای موقعیت‌ها و اندازه‌های مختلف ترک، سرعت‌های دورانی و شعاع‌های توپی گوناگون محاسبه و اثرات آنها روی چهار فرکانس اول در شکل‌های(۲) تا (۴) نشان داده می‌شود. در شکل (۲) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش اندازه ترک، چهار فرکانس اول کاهش می‌یابد به جز زمانی که ترک در گره‌های ارتعاشی مود مورد بررسی قرار دارد. همچنین دیده می‌شود که برای یک تیر دورانی با اندازه ترک ثابت، با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد، فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر به‌صورت یکنواخت کاهش می‌یابد، ولی کاهش یا افزایش فرکانس طبیعی مودهای بالاتر به ترتیب به دور شدن و یا نزدیک شدن به گره‌های ارتعاشی مود مورد نظر بستگی دارد. در شکل (۳) اثر سرعت دورانی بی‌بعد γ روی فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر نشان داده شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دورانی از تأثیر ترک در کاهش فرکانس‌های طبیعی کاسته می‌شود؛ به‌عبارت دیگر با افزایش سرعت دورانی، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک دار به فرکانس‌های تیر بدون ترک نزدیک می‌شود. شکل (۴) نیز اثر شعاع توپی روی فرکانس‌های طبیعی تیر نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش شعاع توپی R منجر به نزدیک شدن مقادیر فرکانس‌های تیر دارای ترک به تیر بدون ترک می‌شود، به‌عبارت دیگر با افزایش شعاع توپی اثر ترک کاهش می‌یابد. چهار شکل مود اول این نوع تیر برای حالت $L_C/L=۰/۴۵$ در شکل (۵) نشان داده شده است. با افزایش اندازه ترک شکل مود تیر تغییر می‌کند، به‌عبارت دیگر یک اغتشاش محلی به تدریج روی شکل مود در محل ترک اتفاق می‌افتد؛ هر چند هنگامی که اندازه ترک خیلی کوچک است، اغتشاش روی شکل مود قابل تشخیص نیست. در شکل‌های (۲) تا (۵)، اعداد ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات ۰/۳و ۰/۲، $a_c/h=۰/۱$ و در شکل (۵) صفر بیانگر حالت بدون ترک است.



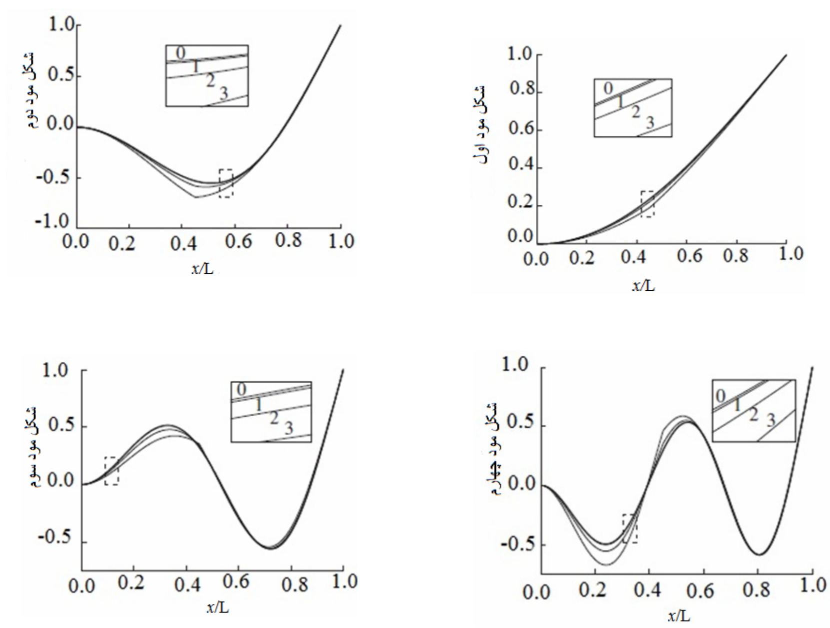
شکل ۲- اثر موقعیت و اندازه ترک روی چهار فرکانس طبیعی اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر (۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲و ۰/۳)



شکل ۳- اثر سرعت زاویه‌ای بی بعد $\gamma = \Omega L^2 \sqrt{\rho A_g / EI_g}$ روی چهار فرکانس طبیعی اول برای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر با موقعیت ترک $L_C/L=$ ۰/۴۵ (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲و ۰/۳)



شکل ۴- اثر نسبت شعاع توپی روی چهار فرکانس طبیعی اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر و موقعیت ترک ۰/۴۵ =L_C/L
(۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰/۱، ۰/۲و ۰/۳)



شکل۵- چهار شکل مود اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر برای حالت بدون ترک و ترک دار در موقعیت
۰/۴۵ =L_C/L (۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات a_c/h برابر با ۰، ۰/۱، ۰/۲و ۰/۳)

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر مورد استفاده قرار گرفت. در ابتدا معادلات تیر با سطح مقطع متغیر به‌صورت بی‌بعد شده به‌دست آمد و سپس از روش انتقال دیفرانسیل معادله انتقال استخراج شد. در ادامه تیر دورانی بدون ترک مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد روش انتقال دیفرانسیل به‌خصوص در سرعت‌های بالا نسبت به روش‌های دیگر از دقت بالاتری برخوردار است. سپس تیر ترک‌دار مورد بررسی قرار گرفت و برای مقادیر مختلف موقعیت و اندازه ترک، شعاع توپی و سرعت دورانی تیر، فرکانس‌های طبیعی آن تعیین شد؛ مشاهده شد که با افزایش اندازه ترک، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

از طرفی با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد از مقدار فرکانس طبیعی اول کاسته می‌شود، ولی کاهش یا افزایش فرکانس طبیعی مودهای بالاتر به‌ترتیب به دور شدن و یا نزدیک شدن به گره‌های ارتعاشی مود مورد بررسی بستگی دارد. همچنین دیده شد که در صورت افزایش سرعت دورانی و شعاع توپی تأثیر ترک کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار به فرکانس‌های تیر بدون ترک نزدیک می‌شوند. روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی دارای ترک و با سطح مقطع متغیر از دقت بالایی برخوردار است و می‌تواند یکی از روش‌های حل پرکاربرد برای تحلیل این نوع تیرها و یا مسائل مشابه باشد.

مراجع

1. Wei, K., Meng, G., Zhou, S., and Liu, J., "Vibration Control of Variable speed/Acceleration Rotating Beams using Smart Materials", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 4-5, pp. 1150–1158, 2006.
2. Lin, S. M., "PD Control of a Rotating Smart beam with an Elastic Root", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 312, No. 1-2, pp. 109–124, 2008.
3. Yang, J. B., Jiang, L. J., and Chen, D. C., "Dynamic Modeling and Control of a Rotating Euler–Bernoulli beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 274, No. 3-5, pp. 863-875, 2004.
4. Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F. M., Shunk D. D., Stinemates, D. W., and Nadler, B. R., "A Review of Structural Health Monitor in Literature", 1996–2001, Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS, 2003.
5. Hodges, D. H., and Rutkowski M. J., "Free Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable Order Finite Element Method", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 19, pp. 1459–1466, 1981.
6. Naguleswaran, S., "Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Euler-Bernoulli Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, No. 5, pp. 613-624, 1994.
7. Rao, S. S., and Gupta, R. S., "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 103-124, 2001.
8. Gunda, J. B., Singh, A. P., Chhabra, p. S., and Ganguli, R., "Free Vibration Analysis of Rotating Tapered Blades using Fourier-p Super Element", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, pp. 243–257, 2007.
9. Gunda, J. B., and Ganguli, R., "New Rational Interpolation Functions for finite Element Analysis of Rotating Beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 578-588, 2008.
10. Gunda, J. B., and Ganguli, R., "Stiff-String Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 245021-245025, 2008.
11. Gunda, J. B., and Gupta, R. K., and Ganguli, R., "Hybrid Stiff-String Polynomial Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams", *Computers and Structures*, Vol. 87, No. 3-5, pp. 254–265, 2009.
12. Bazoune, A., Khulief, Y. A., and Stephen, N. G., "Further Results for Modal Characteristics of Rotating Tapered Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 3, pp. 157-174, 1999.
13. Bazoune, A., "Relationship Between Softening and Stiffening Effects in Terms of South Well Coefficients", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 287, No. 4-5, pp. 1027–1030, 2005.
14. Bazoune, A., "Effect of Tapering on Natural Frequencies of Rotating Beams", *Shock and Vibration*, Vol. 14, pp. 169–179, 2007.
15. Yoo, H. H., Kwak, J. Y., and Chung, J., "Vibration Analysis of Rotating Pre-Twisted Blades with a Concentrated Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 5, pp. 891-908, 2001.

16. Attarnejad, R., and Shahba, A., "Basic Displacement Functions for Centrifugally Stiffened Tapered Beams", *Communications in Numerical Methods in Engineering* (issue 10).doi:10.1002/cnm.1365, 2010.
17. Vinod, K. G., Gopalakrishnan, S., and Ganguli, R., "Free Vibration and Wave Propagation Analysis of Uniform and Tapered Rotating Beams Using Spectrally Formulated Finite Elements", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 18-19, pp. 5875-5893, 2007.
18. Banerjee, J. R., Su, H., and Jackson, D. R., "Free Vibration of Rotating Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 4-5, pp. 1034–1054, 2006.
19. Wang, G., and Wereley, N. M., "Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers", *American in Statute Journal of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 42, No. 1-2, pp. 2429-2437, 2004.
20. Chang, C. C., and Chen, L. W., "Damage Detection of Cracked Thick Rotating Blades by a Spatial Wave Let Based Approach", *Applied Acoustics*, Vol. 65, No. 11, pp. 1095–1111, 2004.
21. Kim, S. S., and Kim, J. H., "Rotating Composite Beam with a Breathing Crack", *Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 83–90, 2003.
22. Kuang, J. H., and Huang, B. W., "The Effect of Blade Cracks on Mode Localization in Rotating Bladed Disks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 1, pp. 85–103, 1999.
23. Huang, B. W., "Effect of Number of Blades and Distribution of Cracks on Vibration Localization in a Cracked Pre-Twisted Blade System", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, No. 1, pp. 1–10, 2006.
24. Masoud, A. A., and Al-Said, S., "A New Algorithm for Crack Localization in a Rotating Timoshenko Beam", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, pp. 1541–1561, 2009.
25. Yoo, H. H., Cho, J. E., and Chung, J., "Modal Analysis and Shape Optimization of Rotating Cantilever Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 1-2, pp. 223–241, 2006.
26. .Zhou, J. K., *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Wuhan, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
27. Ozdemir, O. O., and Kaya M. O., "Flap Wise Bending Vibration Analysis of a Rotating Tapered Cantilever Bernoulli-Euler Beam by Differential Transform Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, 2006, pp. 413–420, 2006.
28. Mei, C., "Application of Differential Transformation Technique to Free Vibration Analysis of a Centrifugally Stiffened Beam", *Computers and Structures*, Vol. 86, pp. 1280–1284, 2008.
29. Suddoung, K., and Charoensuk J. and Wattanasakulpong N., "Application of the Differential Transformation Method to Vibration Analysis of Stepped Beams with Elastically Constrained Ends", *Journal of Vibration and Control*, DOI: 10.1177/1077546312456581.
30. .Lin, H. P., "Direct and Inverse Methods on Free Vibration Analysis of Simply Supported Beams with a Crack", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 427–436, 2004.
31. Zhou, D., and Cheung, Y. K., "The Free Vibration of a Type of Tapered Beam", *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 188, No. 1-3, pp. 203–216, 2000.
32. Chaudhari, T. D., and Maiti, S. K., "Modeling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 4, pp. 425-445, 1999.