

تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی با استفاده از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی

محمداسماعیل گل‌مکانی* و وحید ضیغمی

گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۹/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۰۴/۱۶)

چکیده - در این مقاله، رفتار کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان‌های گوناگون توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. کلیه معادلات حاکم به صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش‌های غیرخطی فون کارمن به دست آمده است. به منظور تعیین بار بحرانی کمانش، بار محوری به صورت نموی به صفحه اعمال می‌گردد و دستگاه معادلات تعادل به کمک روش آزادسازی دینامیکی برای به دست آوردن بار بحرانی کمانش حل می‌شود. مطالعه پارامتری بر روی اثرات کسر حجمی نانولوله‌ها، نوع چیدمان نانولوله‌ها، نسبت عرض به ضخامت و نسبت‌های ابعادی صفحه نانوکامپوزیتی انجام شده است. نتایج بیانگر این است که استفاده از توزیع تابعی به طور قابل توجهی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.

واژگان کلیدی: کمانش، صفحات نانوکامپوزیتی، نانولوله‌های کربنی، روش آزادسازی دینامیکی.

Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plates using Incremental Loading and Dynamic Relaxation Methods

M. E. Golmakani* and V. Zeighami

Department of Mechanical Engineering, Mashhad branch, Islamic Azad University

Abstract: *In this paper, buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) plates is studied in line with the plates thickness. All governing equations are presented incrementally, based on a First-order Shear Deformation Theory (FSDT) of plates and von Karman strain field. In order to find the critical buckling load, the axial load is applied to the plate incrementally and the equilibrium equations are solved by Dynamic Relaxation (DR) method. Parametric study of the effects of volume fraction of Carbon Nanotubes (CNTs), CNTs distribution, plate width-to-thickness ratio and aspect*

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

ratio of nano composite plates is done in detail. The results show that functionally graded distribution of CNTs causes a significant increase of critical buckling load.

Keywords: Buckling, nano composite plates, carbon nanotubes, dynamic relaxation method.

فهرست علائم

کسر حجمی بستر پلیمری	V_m	سفتی های کششی، N/m	$A_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$
کسر حجمی نانولوله های کربنی	V_{CNT}	سفتی های برشی عرضی، N/m	$A_{ij}(i, j = 44, 55)$
کسر حجمی ویژه نانولوله های کربنی	V_{CNT}^*	سفتی های اتصال خمش - کشش، N	$B_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$
کسر جرمی نانولوله های کربنی	w_{CNT}	ضریب میرایی	c
بردار شتاب، سرعت و جابه جایی، $m/s^2, m/s, m$	$\{\ddot{X}\}, \{\dot{X}\}, \{X\}$	سفتی های خمشی، $N.m$	$D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$
تنش نموی	$\delta\sigma$	ضریب الاستیک طولی و عرضی نانوکامپوزیت، N/m^2	E_{11}, E_{22}
تغییر مکان نموی طولی، عرضی و خیز، m	$\delta u, \delta v, \delta w$	ضریب الاستیک طولی، عرضی و برشی نانولوله های کربنی، N/m^2	$E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$
انحناهای صفحه میانی در راستای x و y	$\delta k_{xx}, \delta k_{yy}$	ضریب الاستیک طولی و برشی بستر پلیمری، N/m^2	E_m, G_m
کرنش های صفحه میانی در راستای x و y	$\delta \epsilon_{xx}^0, \delta \epsilon_{yy}^0$	بردار نیروهای خارجی، N	$\{F\}$
کرنش های برشی صفحه میانی	$\delta \gamma_{xy}^0, \delta \gamma_{xz}^0, \delta \gamma_{yz}^0$	ضریب های الاستیک برشی نانوکامپوزیت، N/m^2	G_{12}, G_{23}, G_{13}
ضرایب تأثیر نانولوله های کربنی	$\eta_j (j = 1, 2, 3)$	ضخامت صفحه نانوکامپوزیتی، m	h
ضریب پواسن نانوکامپوزیت، نانولوله های کربنی و بستر	$\nu_{12}, \nu_{12}^{CNT}, \nu_{12}^m$	ضریب تصحیح برشی	k_s
چگالی نانولوله های کربنی، Kg/m^3	ρ^{CNT}	اجزاء ماتریس سفتی، N/m	K_{ij}
چگالی بستر پلیمری، N/m^2 ، Kg/m^3	ρ^{CNT}	ماتریس جرم، میرایی و سفتی، $Kg, Kg/s, N/m$	$[M], [C], [K]$
چرخش حول محور y	ψ_x	بار بی بعد کمانش	P
چرخش حول محور x	ψ_y	درایه های ماتریس سفتی، N/m^2	Q_{ij}
گام زمانی، s	Δt	بردار نیروهای باقی مانده، N	$\{R\}$
		تغییر مکان طولی، عرضی و خیز در صفحه میانی، m	u, v, w

نظامی، هوا فضا همچنین صنایع خودرو و ورزشی، بسیار مورد استفاده قرار گرفته اند. در این میان بررسی یکی از حساس ترین رفتارهای مکانیکی به نام کمانش از اهمیت بالایی برخوردار است. از آنجا که ماهیت این رفتار به ویژگی های ذاتی ماده مانند

۱- مقدمه

فایبرهای تقویت کننده کامپوزیتها به دلیل نسبت بالای استحکام به چگالی و سختی به چگالی در مقایسه با سایر مواد در سالیان گذشته در صنایع مختلف، به خصوص صنایع هوایی،

استحکام، سفتی و ... مربوط می‌شود، بهبود و ارتقاء این ویژگی‌ها در سازه‌های مورد استفاده در صنایع حساس یکی از اساسی‌ترین زمینه‌های تحقیق و توسعه را شامل می‌شود. مواد کامپوزیتی نوعی از مواد هستند که امکان ارتقاء ویژگی‌های ذاتی ماده را از طریق افزودن فاز تقویت کننده فراهم می‌کنند. بنابراین استفاده از تقویت کننده‌هایی که بیشترین بهبود را در این ویژگی‌ها سبب می‌شوند یکی از اساسی‌ترین زمینه‌های تحقیق مواد کامپوزیتی است تا با حصول خواص بهتر برای مواد کامپوزیتی زمینه برای بهبود رفتارهای مکانیکی آنها فراهم گردد. در این راستا نانولوله‌های کربنی از اواسط دهه ۱۹۸۰ در مسیر شناسایی و توسعه قرار گرفتند [۱ و ۲]. بیشترین مطالعات روی نانولوله‌های کربنی تقویت کننده کامپوزیت‌ها روی خواص مواد آنها متمرکز شده است. این تحقیقات از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و یا مطالعات تجربی انجام شده است و ویژگی‌هایی از جمله ضریب الاستیک، خواص بالستیک و سفتی نانوکامپوزیت‌ها را مورد بررسی قرار داده است [۳-۵]. خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها به‌طور مستقیم به رفتار مکانیکی الیاف تعبیه شده در آن بستگی دارد. جایگزین کردن الیاف با نانولوله‌های کربنی می‌تواند خواص کامپوزیتی از جمله ضریب الاستیسیته و استحکام کششی را بهبود بخشد. به‌طوری‌که در نتایج تئوری و آزمایشگاهی از ضریب الاستیسیته بیشتر از ۱TPa برای نانولوله‌های کربنی (این در حالی است که ضریب الاستیسیته الماس $1/2TPa$ است) و استحکامی در حدود ۱۰۰-۱۰ مرتبه بیشتر از قویترین فولاد در یک کسر جرمی سخن به میان آمده است [۶]. با توجه به خواص مکانیکی، حرارتی و الکترونیکی منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی، مانند ضریب الاستیک بسیار بالا، استحکام کششی، چگالی کم و مقاومت در برابر شکست بالا و فراوری نه چندان پیچیده، نانولوله‌های کربنی را به‌عنوان جایگزین مناسبی برای تقویت کننده‌هایی مانند الیاف کربن، الیاف گرافیت، الیاف شیشه و الیاف کولار^۱ معرفی کرده است تا با اصلاح پلیمرها، به‌منظور کاهش هزینه محصول و وزن

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۵، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۵

سازه و همچنین افزایش کارایی، در صنایع هوا فضا، خودرو، نفت، ورزشی، الکترونیک و ... مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین از دهه گذشته تحقیقات بر روی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار شده است. بیشتر کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی کسر حجمی بسیار پایینی از نانولوله‌ها را دارا هستند [۴ و ۶]. تحقیقات آزمایشگاهی و تئوری گوناگون نشان داده است که اضافه کردن مقدار کمی از نانولوله‌های کربنی می‌تواند خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کامپوزیت‌های پلیمری را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش دهد [۴، ۷، ۸ و ۹]. با توجه به بهبود خواص ایجاد شده بسیاری از محققین به بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند. سال ۲۰۱۲ صیفوری و لیاقت [۱۰] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته به بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره بر روی یک نانوتیر اویلر برنولی پرداختند. خمش و کمانش یک تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره^۲ توسط ودینت چاروا و ژانگ [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته شد. مواد تابعی یک نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی هستند که جزئیات میکروساختاری آنها از طریق توزیع غیریکنواخت فاز تقویت کننده تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان مفهوم مواد تابعی را در مدل‌سازی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی گنجانند تا استفاده مؤثرتری از نانولوله‌های کربنی شود. شن [۱۲] در سال ۲۰۰۹ رفتار خمش غیرخطی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی را مطالعه کرد. شن و همکارانش [۱۳-۱۸] بین سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ کمانش حرارتی، پاسخ پس از کمانش و ارتعاش غیرخطی صفحات و پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد بررسی قرار دادند. آنها متوجه شدند که تقویت کننده‌های نانولوله‌ای کربنی با توزیع تابعی می‌توانند دمای بحرانی کمانش و همچنین استحکام پاسخ پس از کمانش ساختارهای صفحه/پوسته تحت بار مکانیکی را افزایش دهد.

غیرخطی فون کارمن به دست آمده است. سپس دستگاه معادلات تعادل غیرخطی کوپل به کمک روش انرژی به صورت نموی به دست آمده و به کمک ترکیب روش های آزادسازی دینامیکی و اختلاف محدود برای به دست آوردن بار بحرانی کماتش حل شده است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- هندسه و خواص صفحات کامپوزیتی تقویت شده با

نانولوله های کربنی

هندسه مورد بررسی برای کماتش صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی با چهار نوع توزیع مختلف نانولوله ها و چیدمان های گوناگون بارگذاری صفحه ای، با طول b ، عرض a و ضخامت h ، در شکل (۱) مشاهده می شود. بستر تقویت شده همسان گرد است. خواص مواد از طریق قانون اختلاط ساده تخمین زده می شوند. طبق قانون اختلاط ساده ضریب الاستیسیته و ضریب برشی با روابط زیر بیان می شوند [۱۲]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3)$$

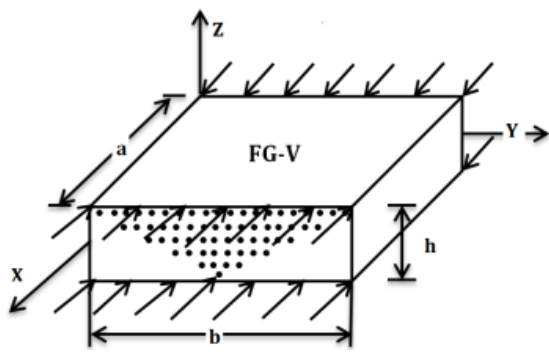
در روابط بالا E_{11}^{CNT} ، E_{22}^{CNT} و G_{12}^{CNT} به ترتیب ضریب الاستیسیته، ضریب برشی نانولوله های کربنی می باشند و همچنین E_m و G_m ضریب های الاستیسیته و برشی بستر هستند. η_j ($j=1,2,3$) ضرایب تأثیر نانولوله های کربنی نامیده می شوند، و از طریق تطبیق ضریب های الاستیسیته به دست آمده برای نانو کامپوزیت از طریق شبیه سازی دینامیک مولکولی با نتایج به دست آمده از قانون اختلاط، به دست می آیند. V_{CNT} و V_m به ترتیب کسر حجمی نانولوله های کربنی و بستر هستند:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (4)$$

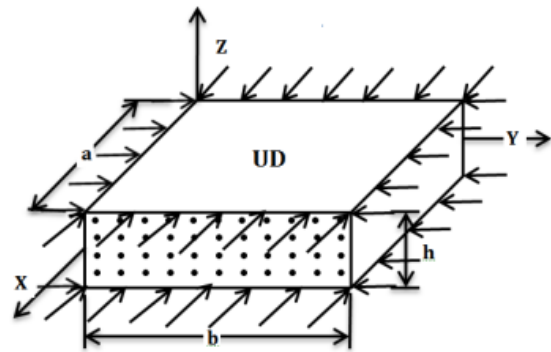
کسر حجمی نانولوله های کربنی با توجه به چهار نوع توزیع

ژوو همکارانش [۱۹] خمش خطی و ارتعاش آزاد صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. سبحانی عراق و هدایتی [۲۰] ارتعاش آزاد خطی پنل های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی تابعی را براساس روش اشلیبی - موری - تاناکا مطالعه کردند. یاس و حشمتی [۲۱] یک تحلیل دینامیکی از تیرهای نانوکامپوزیتی تحت تأثیر بار متحرک ارائه کردند. وانگ و شن [۲۲] پاسخ دینامیکی غیرخطی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی روی یک پایه الاستیک که در محیط حرارتی قرار داشت را بررسی کردند. علی بیگلو [۲۳] تحلیل استاتیکی صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی را در معرض تحریک پیزوالکتریک بررسی کرد. کماتش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی با استفاده از روش المان آزاد ریتز توسط لی و همکارانش [۲۴] مطالعه شد. اخیراً ساختارهای ساندویچی در به کارگیری کامپوزیت های تقویت شده با نانولوله های کربنی مورد توجه قرار گرفته اند، به طوری که شن و وانگ [۲۵ و ۲۶] پاسخ پس از کماتش و همچنین ارتعاش و خمش غیرخطی صفحات ساندویچی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله ها را مورد مطالعه قرار دادند.

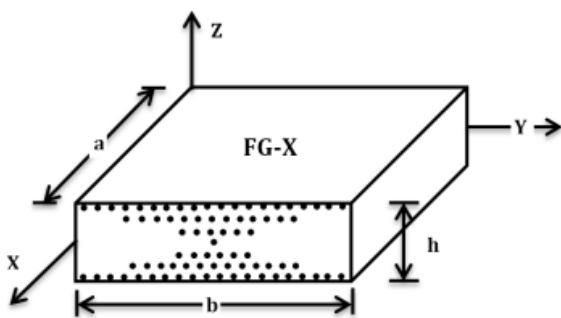
با توجه به اهمیت بار بحرانی کماتش در طراحی های مهندسی، در تحقیق حاضر از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی برای تحلیل کماتش مکانیکی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان های تابعی مختلف از نانولوله های کربنی تک جداره در شرایط مرزی ساده و گیردار استفاده شده است. خواص مواد نانولوله های کربنی تک جداره وابسته به اندازه هستند که از طریق شبیه سازی دینامیک مولکولی انجام شده در مراجع به دست آمده است. خواص کامپوزیت های تقویت شده با نانولوله های کربنی با فرض تابعی بودن در جهت ضخامت از طریق یک مدل میکرومکانیکی با نام قانون اختلاط به دست آمده است. کلیه معادلات حاکم به صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش های



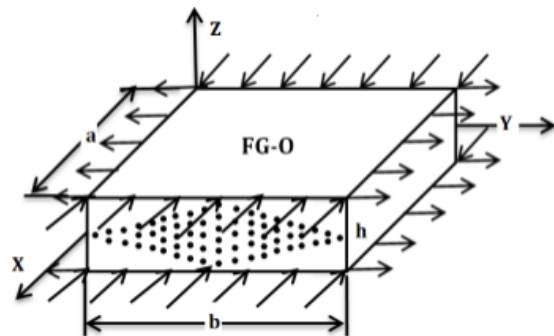
شکل (ب) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی V



شکل (الف) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع یکنواخت



شکل (د) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی X



شکل (ج) صفحه نانوکامپوزیتی با توزیع تابعی O

شکل ۱- نانوصفحات کامپوزیتی با آرایش مختلف نانولوله‌های کربنی تحت توزیع مختلف بارهای فشاری و کششی

حالات‌های مختلف توزیع نانولوله‌ها برابر است. نسبت پواسون

ν_{12} صفحات نانو کامپوزیتی با فرض توزیع یکنواخت از رابطه

زیر به دست می‌آید [۱۴، ۱۵ و ۲۴]:

$$\nu_{12} = V_{CNT} \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu_m^m \quad (7)$$

۲-۲- معادلات تعادل

برای به دست آوردن بار بحرانی کماتش، بار به صورت نموی اعمال می‌شود و در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود.

بدین منظور معادلات تعادل می‌بایست به شکل نموی استخراج شوند. تئوری برشی مرتبه اول صفحات برای محاسبه میدان

جابه‌جایی $\{u, v, w\}^T$ به کار گرفته شده است [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (8)$$

مختلف آنها دارای روابط زیر است [۱۹]:

$$V_{CNT}(z) = V_{CNT}^* \quad \text{توزیع یکنواخت}$$

$$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^* \quad \text{توزیع تابعی V شکل}$$

$$V_{CNT}(z) = 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* \quad \text{توزیع تابعی O شکل}$$

$$V_{CNT}(z) = 2 \left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* \quad \text{توزیع تابعی X شکل} \quad (5)$$

به طوری که:

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) w_{CNT}} \quad (6)$$

در بالا w_{CNT} کسر جرمی نانولوله‌های کربنی در صفحه کامپوزیتی است و ρ^m و ρ^{CNT} چگالی بستر و نانولوله‌های کربنی هستند. کسر جرمی $(w_{CNT})^3$ ، استفاده شده برای

در رابطه (۱۱) اجزای ماتریس سفتی به شکل زیر نوشته می شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{\phi\phi} = G_{12}, \quad Q_{\psi\psi} = G_{23}, \quad Q_{\omega\omega} = G_{13} \quad (12)$$

منتجه های نیروی نموی، گشتاور نموی و متجه های تنش برشی نموی توسط معادلات زیر به تنش های نموی داخلی وابسته می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \delta N_{xx} \\ \delta N_{yy} \\ \delta N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \delta \sigma_{xx} \\ \delta \sigma_{yy} \\ \delta \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} \delta M_{xx} \\ \delta M_{yy} \\ \delta M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \delta \sigma_{xx} \\ \delta \sigma_{yy} \\ \delta \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz,$$

$$\begin{Bmatrix} \delta Q_y \\ \delta Q_x \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \delta \sigma_{yz} \\ \delta \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۹) تا (۱۱) در معادلات (۱۳) متجه های نیروی نموی، گشتاور نموی و تنش برشی نموی به شکل ماتریسی به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix} \delta N_{xx} \\ \delta N_{yy} \\ \delta N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx}^0 \\ \delta \epsilon_{yy}^0 \\ \delta \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_{xx} \\ \delta k_{yy} \\ \delta k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta M_{xx} \\ \delta M_{yy} \\ \delta M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx}^0 \\ \delta \epsilon_{yy}^0 \\ \delta \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_{xx} \\ \delta k_{yy} \\ \delta k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta Q_y \\ \delta Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & A_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \gamma_{yz}^0 \\ \delta \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ماتریس های سفتی کششی، سفتی اتصال خمش - کشش و

روابط بین کرنش های غیرخطی نموی با جابه جایی های نموی با در نظر گرفتن فرضیات تغییر شکل های بزرگ فون کارمن، اینگونه محاسبه می شود:

$$\begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx} \\ \delta \epsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \\ \delta \gamma_{yz} \\ \delta \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx}^0 \\ \delta \epsilon_{yy}^0 \\ \delta \gamma_{xy}^0 \\ \delta \gamma_{yz}^0 \\ \delta \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \delta k_{xx} \\ \delta k_{yy} \\ \delta k_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

به طوری که:

$$\begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx}^0 \\ \delta \epsilon_{yy}^0 \\ \delta \gamma_{xy}^0 \\ \delta \gamma_{yz}^0 \\ \delta \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial \delta v_x}{\partial y} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \delta \psi_y \\ \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} + \delta \psi_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

روابط ساختاری بین تنش های نموی و کرنش های نموی به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \delta \sigma_{xx} \\ \delta \sigma_{yy} \\ \delta \sigma_{xy} \\ \delta \sigma_{yz} \\ \delta \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(Z) & Q_{12}(Z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(Z) & Q_{22}(Z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\phi\phi}(Z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\psi\psi}(Z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{\omega\omega}(Z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{xx} \\ \delta \epsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \\ \delta \gamma_{yz} \\ \delta \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۰) و انجام ضرب ماتریسی روابط (۱۴) تا (۱۶) و جایگذاری آنها در روابط (۲۲)، می‌توان معادلات نموی تعادل نیرویی را برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی $(u, v, w, \psi_x, \psi_y)$ نوشت. گفتنی است به علت گستردگی معادلات برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی، از ارائه این معادلات در این قسمت خودداری شده است و در قسمت پیوست آورده شده‌اند.

۲-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی برای حالت‌های مختلف بارگذاری به شکل زیر است:
الف) تکیه‌گاه گیردار:

$$\begin{aligned} w = v = \psi_x = \psi_y = 0, \quad \delta N_x = -q \quad x=0, a \text{ لبه} \\ w = u = \psi_x = \psi_y = 0, \quad \delta N_x = \pm q \quad y=0, b \text{ لبه} \end{aligned} \quad (23)$$

ب) تکیه‌گاه ساده:

$$\begin{aligned} w = v = \psi_y = \delta M_x = 0, \quad \delta N_x = -q \quad x=0, a \text{ لبه} \\ w = u = \psi_x = \delta M_y = 0, \quad \delta N_y = \pm q \quad y=0, b \text{ لبه} \end{aligned} \quad (24)$$

۳- روش آزادسازی دینامیکی

آزادسازی دینامیکی یک فرآیند تکراری است که هدف آن به‌طور کلی، انتقال یک سیستم استاتیک به فضای دینامیکی برای به‌دست آوردن حالت پایدار استاتیکی آن است. این روش به‌طور خاص، برای تحلیل مسائل با رفتارهای غیرخطی مناسب است. علاوه بر این، به علت فرمول‌سازی صریح، فضای کمی را در حافظه کامپیوتر اشغال کرده و بسیار مناسب برای کدنویسی است. در این روش، فرآیند تکراری حل دستگاه معادلات هم‌زمان با کمک گرفتن از تفاضل محدود مرکزی است. براساس این روش، یک سیستم استاتیکی با افزودن نیروهای فرضی اینرسی و میرایی به یک فضای ساختگی دینامیکی انتقال می‌یابد [۲۸]:

$$[M]\{\ddot{X}\}^n + [C]\{\dot{X}\}^n + [K]\{X\}^n = \{F(t)^n\} \quad (25)$$

سفتی خمشی و ماتریس ضرایب نیروهای برشی به ترتیب با روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (17)$$

$$A_{ij}^s = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (ij = 4, 5, 5) \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) k_s ضریب تصحیح برشی نامیده می‌شود و مقدار آن $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود.

معادلات تعادل تئوری برشی مرتبه اول با استفاده از حالت استاتیکی اصل کار مجازی به دست می‌آیند:

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (19)$$

$$\delta V = - \int \int q \delta W(x, y) dx dy \quad (20)$$

$$\delta U = \iint \delta u_x dx dy \quad (21)$$

در نهایت معادلات نموی تعادل برحسب متجه‌های تنش به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\delta u_x : \frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v_x : \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \delta w_x : \frac{\partial \delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta Q_y}{\partial y} + \delta N_{xx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + (N_{xx} + \delta N_{xx}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \delta N_{yy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ + (N_{yy} + \delta N_{yy}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \\ + 2\delta N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2(N_{xy} + \delta N_{xy}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \delta q = 0 \end{aligned}$$

$$\delta \psi_x : \frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} - \delta Q_x = 0$$

$$\delta \psi_y : \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y} - \delta Q_y = 0$$

$$(22)$$

گفتنی است که برای مسئله کمانش δq از معادله سوم حذف

در این رابطه $[M]$ و $[C]$ به ترتیب ماتریس های جرم و میرایی مجازی و همچنین $\{\ddot{X}\}^n$ و $\{\dot{X}\}^n$ بردارهای شتاب و سرعت مجازی در تکرار n هستند، همچنین $\{X\}$ بردار جابه جایی است. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب را می توان به صورت زیر نوشت [۲۸]:

$$\{\ddot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} - \{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (26)$$

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\{X\}^n - \{X\}^{n-1}}{\Delta t} \quad (27)$$

در معادله بالا، Δt گام زمانی ساختگی است. طبق مقدار میانگین، سرعت را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\{\dot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۲۶) و (۲۸) در رابطه (۲۵) و ساده سازی آن، سرعت در گام $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ بدست می آید. همچنین جابه جایی در گام $(n+1)$ به دست خواهد آمد که روابط آن در زیر آمده است:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{[M]}{\Delta t} - \frac{[C]}{2}\right)}{\left(\frac{[M]}{\Delta t} + \frac{[C]}{2}\right)} \{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{([F] - [K]\{X\})}{\left(\frac{[M]}{\Delta t} + \frac{[C]}{2}\right)} \quad (29)$$

$$\{X\}^{n+1} = \{X\}^n + \Delta t \{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (30)$$

به منظور داشتن معادلات تکرار صریح، ماتریس جرمی ساختگی باید قطری باشد. همچنین، ماتریس میرایی با رابطه زیر به ماتریس جرمی وابسته است:

$$[C] = c[M] \quad (31)$$

در رابطه بالا c ضریب میرایی است. با جایگذاری رابطه (۳۱) در (۲۹) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\gamma - c\Delta t)}{(\gamma + c\Delta t)} \{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(\gamma\Delta t)}{(\gamma + c\Delta t)} [M]^{-1} \{R\}^n \quad (32)$$

در اینجا $\{R\}^n$ بردار نیروهای باقی مانده است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{R\}^n = [M]\{\ddot{X}\}^n + [C]\{\dot{X}\}^n - \{F(t)^n\} - [K]\{X\}^n \quad (33)$$

پیشنهاد می شود برای شروع به حل مقادیر صفر به

بردارهای $\{X\}^0$ و $\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}}$ اختصاص داده شود. از این طریق، سرعت در وسط گام، با استفاده از رابطه (۳۲) و سپس بردار جابه جایی با استفاده از رابطه (۳۰) بدست می آید. این فرآیند تا وقتی که همگرایی حل به حالت پایدار برسد، ادامه خواهد داشت. در این حالت در هر گام بردارهای جابه جایی و سرعت اصلاح می شوند. نحوه اعمال شرایط مرزی که شامل دو دسته نیرویی و جابه جایی هستند نیز بدین صورت است که با توجه به حل معادلات تعادل برحسب میدان جابه جایی در ناحیه داخلی، در هر بار فرآیند تکرار با توجه به نوع شرایط مرزی مقادیر مختلف جابه جایی ها در مرز با استفاده از بسط تفاضل محدود پیشرو، پسرو و یا مرکزی محاسبه می شوند. بنابراین تمامی مقادیر میدان جابه جایی و همچنین میدان سرعت برای تمامی گره ها در هر فرآیند تکرار موجود هستند. گفتنی است شرط همگرایی برای اتمام فرآیند به حداقل رسیدن مقادیر سرعت (انرژی جنبشی) گره ها است که این شرایط بیان کننده به تعادل استاتیکی رسیدن سیستم دینامیکی فرضی در نظر گرفته شده است.

روش تکرار آزادسازی دینامیکی به طور کلی ناپایدار است، بنابراین باید مقادیر جرم، میرایی، گام زمانی و بردار جابه جایی اولیه به گونه ای انتخاب شوند که همگرایی فرآیند را تضمین کنند. با توجه به تئوری گرشگورین، برای هر گره i از یک سیستم گسسته شده، باید نابرابری زیر به منظور تعیین ماتریس قطری $[5 \times 5]$ $[1: u_x, v_x, \psi_x, \psi_y, w]$ که از ماتریس جرم مجازی $M(N \times N)$ استخراج شده است (که N تعداد گره ها در راستای محورهای مختصات x و y هستند)، تأمین شود [۲۹]:

$$m_{ii}^1 \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_{j=1}^N |k_{ij}^1| \quad (34)$$

در رابطه بالا k_{ij} عناصر ماتریس سفتی $[K]$ است که از رابطه زیر حاصل می شوند:

$$[K] = \frac{\partial \{P\}}{\partial \{X\}} \quad (35)$$

$$v_i^{n+\frac{1}{\tau}} = \frac{\tau \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y} \right)_i^n + \frac{\tau - c_i^n \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} v_i^{n-\frac{1}{\tau}}$$

$$(\dot{\psi}_x)_i^{n+\frac{1}{\tau}} = \frac{\tau \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} - \delta Q_x \right)_i^n + \frac{\tau - c_i^n \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (\dot{\psi}_x)_i^{n+\frac{1}{\tau}}$$

$$(\dot{\psi}_y)_i^{n+\frac{1}{\tau}} = \frac{\tau \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y} - \delta Q_y \right)_i^n + \frac{\tau - c_i^n \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (\dot{\psi}_y)_i^{n+\frac{1}{\tau}}$$

$$\dot{w}_i^{n+\frac{1}{\tau}} = \frac{\tau \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial \delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta Q_y}{\partial y} + \delta N_{xx} \left(\frac{\partial^r w}{\partial x^r} \right) \\ & + (N_{xx} + \delta N_{xx}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial x^r} \\ & + \delta N_{yy} \left(\frac{\partial^r w}{\partial y^r} \right) \\ & + (N_{yy} + \delta N_{yy}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial y^r} \\ & + \tau \delta N_{xy} \left(\frac{\partial^r w}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \tau (N_{xy} + \delta N_{xy}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial x \partial y} + \delta q \end{aligned} \right) + \frac{\tau - c_i^n \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} \dot{w}_i^{n-\frac{1}{\tau}} \quad (38)$$

حال با داشتن مقادیر سرعت در وسط گام و با استفاده از رابطه (30) مقادیر جابه‌جایی‌ها و دوران‌ها، در انتهای هر بازه زمانی محاسبه می‌شود.

- گام‌های محاسباتی روش آزادسازی دینامیکی همانند زیر است:
- ۱- عامل‌های حداکثر تکرارها، خطاهای باقی‌مانده نیروهای داخلی و انرژی جنبشی سازه (e_k, e_R, N_{max}) تعیین می‌شوند و $n=0$ و $\dot{x} = 0$ در نظر گرفته می‌شود.
 - ۲- بردار $\{x\}^0$ حدس زده یا محاسبه می‌شود.

در رابطه بالا $\{X\} = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}$ و $\{P\}$ سمت چپ معادلات تعادل نموی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی (معادلات پ-۱) است. فاکتور مهم بعدی ضریب میرایی است که طبق ایده ارائه شده توسط ژانگ، به صورت زیر به دست می‌آید [29]:

$$c_n = \tau \left\{ \frac{\{X_n\}^T \{F(X_n)\}}{\{X_n\}^T [M_n] \{X_n\}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \quad (36)$$

پارامتر دیگری که بسیار تأثیرگذار است، گام زمانی است. آندروود [30] مقادیر ثابت 1 و 1/1 را برای گام زمانی پیشنهاد داده است. از آنجا که معادلات حاکم از نوع مسائل با مقدار مرزی مشخص هستند با اضافه کردن ترم‌های اینرسی و میرایی به سمت راست معادلات تعادل به فرمت مسائلی با مقدار اولیه معین مطابق روابط ذیل تغییر شکل یابند:

$$\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = m_u \frac{d^r u}{dt^r} + c_u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{yy}}{\partial y} = m_v \frac{d^r v}{dt^r} + c_v \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta Q_y}{\partial y} + \delta N_{xx} \left(\frac{\partial^r w}{\partial x^r} \right) + (N_{xx} + \delta N_{xx}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial x^r} + \delta N_{yy} \left(\frac{\partial^r w}{\partial y^r} \right) + (N_{yy} + \delta N_{yy}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial y^r} + \tau \delta N_{xy} \left(\frac{\partial^r w}{\partial x \partial y} \right) + \tau (N_{xy} + \delta N_{xy}) \frac{\partial^r \delta w}{\partial x \partial y} + \delta q = m_w \frac{d^r w}{dt^r} + c_w \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} - \delta Q_x = m_{\psi_x} \frac{d^r \psi_x}{dt^r} + c_{\psi_x} \frac{d\psi_x}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y} - \delta Q_y = m_{\psi_y} \frac{d^r \psi_y}{dt^r} + c_{\psi_y} \frac{d\psi_y}{dt} \quad (37)$$

با حل روابط (37) برای پیدا کردن سرعت در گام میانی روابط زیر حاصل می‌شود:

$$u_i^{n+\frac{1}{\tau}} = \frac{\tau \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} \right)_i^n + \frac{\tau - c_i^n \Delta t^n}{\tau + c_i^n \Delta t^n} u_i^{n-\frac{1}{\tau}}$$

۳- نیروی نامیزان از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود.

۴- اگر $\|R^n\| \leq e_R$ ، کار پایان می‌یابد. در غیر این صورت، کار ادامه می‌یابد.

۵- ماتریس‌های جرم و میرایی محاسبه می‌شوند.

۶- $\{x\}^{n+\frac{1}{2}}$ از رابطه (۳۸)، به دست می‌آید.

۷- اگر انرژی جنبشی سیستم $\sum_{j=1}^q (D_j^{n+\frac{1}{2}})^2 \leq e_k$ باشد کار پایان می‌یابد. در غیر این صورت، کار ادامه می‌یابد.

۸- بردار $\{x\}^{n+1}$ از رابطه (۳۰)، محاسبه می‌شود.

۹- شرط‌های مرزی وارد می‌شود.

۱۰- اگر $N_{\max} > n$ باشد، کار پایان می‌یابد. در غیر این صورت، $n = n + 1$ و تحلیل به گام (۳) برمی‌گردد.

۴- نتایج و بحث

در تحلیل نمودی حاضر، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و در هنگام اجرای تکرارهای آزادسازی دینامیکی، مقدار بار ثابت نگه‌داشته می‌شود. پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و فرآیند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. با توجه به اینکه ماهیت کمانش عبارتست از افزایش نامتناسب تغییر مکان به علت افزایش کوچک بار، به منظور پیدا کردن بار بحرانی در پایان هر همگرایی میزان جابه‌جایی‌های حاصل از هر نمو با جابه‌جایی حاصل از نمو قبل جمع می‌شود. در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود و در نقطه‌ای از نمودار که افزایش نامتناسب تغییر مکان وجود دارد، آن نقطه بار بحرانی کمانش است. مقدار نقص اولیه $w(i, j) = 0.01 * \cos(2\pi x/a)$ در نظر گرفته شده است. پارامتر بی بعد $P = N_{cr} b^2 / E_m h^3$ و همچنین مقدار ضخامت $h = 2 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده‌اند. مطالعه پارامتری جهت نشان دادن اثرات کسر حجمی نانولوله‌ها، نوع توزیع نانولوله‌ها، نسبت عرض به ضخامت صفحه، نسبت ابعادی صفحه و شرایط مرزی ساده و گیردار بر بار بحرانی کمانش انواع صفحات نانوکامپوزیتی تابعی و یکنواخت، انجام شده است. با توجه به

جهت چیدمان نانولوله‌های کربنی هم‌راستا با محور x ، با تعریف γ_1 و γ_2 به‌عنوان ضرایب تناسب بار به‌ترتیب در دو جهت x و y ، حالت‌های مختلف بار برای لبه‌های صفحه در نظر گرفته شده است که شامل فشاری تک‌محوری در جهت محور $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ فشاری دو محوری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ و فشاری (در راستای محور x) - کششی (در راستای محور y) $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ است.

۴-۱- بررسی صحت و دقت پاسخ‌های تحلیل

در جدول (۱) مطالعه مقایسه‌ای از تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با چیدمان‌های مختلف نانولوله‌ها با نتایج مرجع [۲۴] ارائه شده است. گفتنی است که در این مقایسه نسبت عرض به ضخامت صفحه برابر $b/h = 10$ بوده و خواص ماده پلیمری به صورت $E_m = 2/1 \text{ GPa}$ و $\nu_m = 0/34$ و خواص نانولوله‌های کربنی مطابق آنچه در جدول (۲) مشاهده می‌شود، در نظر گرفته شده است. همچنین کسر حجمی مورد استفاده برای این مقایسه $V_{CNT}^* = 0/11$ است و ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی در این کسر حجمی عبارتند از $\eta_1 = 0/149$ و $\eta_2 = 0/934$. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار انطباق نسبتاً خوبی بین نتایج دو تحلیل وجود دارد.

۴-۲- مطالعه پارامتریک

ابتدا خواص مواد کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی معرفی می‌شوند. در این تحقیق ماده پلیمری با خواص $\rho_m = 1/15 \text{ g/cm}^3$ و $\nu_m = 0/34$ ، $E_m = 2/5 \text{ GPa}$ برای فاز بستر انتخاب شده است. خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره صندلی راحتی^(۱۰ و ۱۰) مورد استفاده در این مقاله نیز در جدول (۲) مشاهده می‌شود. نکته کلیدی جهت کاربرد درست قانون اختلاط ساده برای کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تعیین درست ضرایب مؤثر نانولوله $\eta_j (j=1, 2, 3)$ است. ضرایب جدول (۳) به‌عنوان ضرایب تأثیر

$$P = N_{cr} b^2 / E_m h^3$$

جدول ۱- مقایسه بار بی‌بعد کماتش

تکیه‌گاه ساده		تکیه‌گاه گیردار		توزیع نانولوله‌ها	نوع بارگذاری
لی [۲۴]	پژوهش حاضر	لی [۲۴]	پژوهش حاضر		
۱۴/۱۰۷۳	۱۳/۷۴۹	۲۵/۷۳۲۹	۲۵/۱۹۰۴	UD	$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$
۱۷/۰۶۳۱	۱۶/۱۴۷	۲۷/۸۸۸۲	۲۶/۶۶۶۷	FG-X	
۹/۸۳۰۶	۱۰/۵۴۹۶	۲۱/۱۲۲۱	۲۲/۳۸۰۱	FG-O	
-	۱۳/۴۲۹۲	-	۲۴/۵۳۶۲	FG-V	
۲۸/۴۷۶۸	۲۷/۸۱۷۶	۳۱/۱۰۰۰۶	۳۰/۹۵۲۳	UD	$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$
۲۹/۱۸۹۷	۲۸/۹۷۷۵	۳۱/۳۸۷	۳۱/۴۲۸۵	FG-X	
۲۴/۰۴۷۴	۲۵/۲۵۹۷	۲۷/۹۳۴	۲۷/۱۴۲۸	FG-O	
-	۲۸/۹۷۷۵	-	۳۱/۴۲۸۵	FG-V	
۵/۸۸۳۱	۵/۷۱۴۲	۹/۲۸۳	۹/۰۴۷۶	UD	$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$
۶/۴۳۸۴	۶/۱۹۰۴	۹/۶۵۱	۹/۵۴۲۴	FG-X	
۴/۸۹۴۶	۵/۰۰۱	۸/۶۰۰۶	۸/۵۷۱۴	FG-O	
-	۵/۰۰۱	-	۸/۵۷۱۴	FG-V	

جدول ۲- خواص نانولوله‌های کربنی (۱۰ و ۱۰) ($h=0/067nm, L=9/26nm, R=0/67nm$) در دمای محیط [۱۵]

$\rho_{CNT} (g/cm^3)$	ν_{12}^{CNT}	$G_{12} (TPa)$	$E_{22} (TPa)$	$E_{11} (TPa)$
۱/۴	۰/۱۷۵	۱/۹۴۴۵	۵/۰۸۰۰	۵/۶۴۶۶

جدول ۳- ضرایب تأثیر نانولوله‌های کربنی برای ماده نانوکامپوزیتی [۱۵]

قانون اختلاط ساده					V_{CNT}^*
η_3	η_2	$E_{22} (GPa)$	η_1	$E_{11} (GPa)$	
۰/۷۱۵	۱/۰۲۲	۲/۹	۰/۱۳۷	۹۴/۷۸	۰/۱۲
۱/۱۳۸	۱/۶۲۶	۴/۹	۰/۱۴۲	۱۳۸/۶۸	۰/۱۷
۱/۱۰۹	۱/۵۸۵	۵/۵	۰/۱۴۱	۲۲۴/۵	۰/۲۸

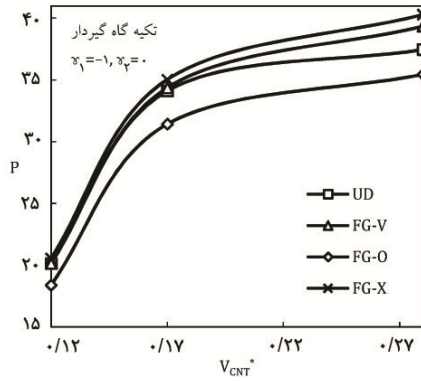
$G_{23} = 1/2 G_{12}$ است.

نانولوله‌ها مورد استفاده قرار گرفته است که از طریق انطباق ضریب‌های الاستیک به دست آمده از قانون اختلاط ساده با مقادیر حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست می‌آید. مقداری برای ضریب برشی G_{12} گزارش نشده است. بنابراین فرض شده است که $\eta_3 = 0/7 \eta_2$ و $G_{13} = G_{12}$

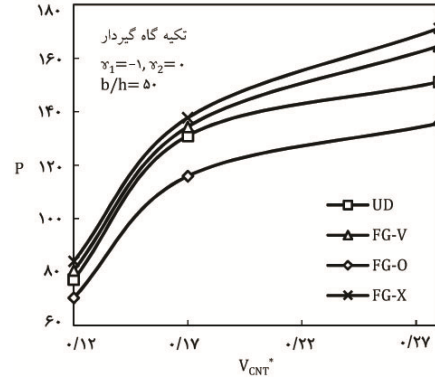
۴-۲-۲- تحلیل کماتش صفحه کامپوزیتی تقویت شده با

نانولوله‌های کربنی

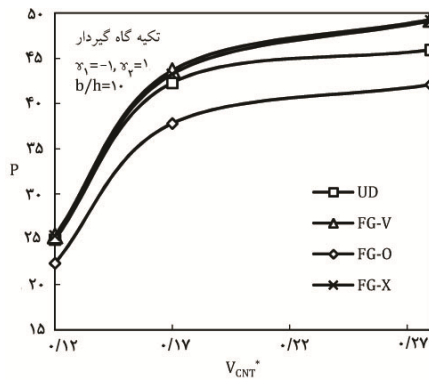
شکل‌های (۲) تا (۴) و شکل‌های (۵) تا (۷) منحنی بار بی‌بعد



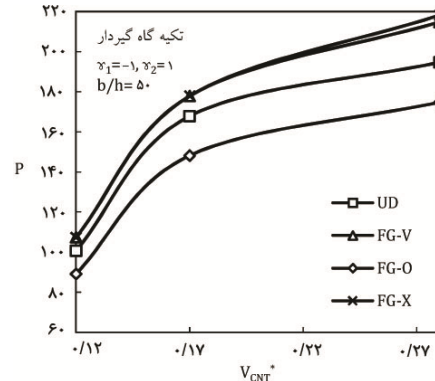
شکل ۵- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$



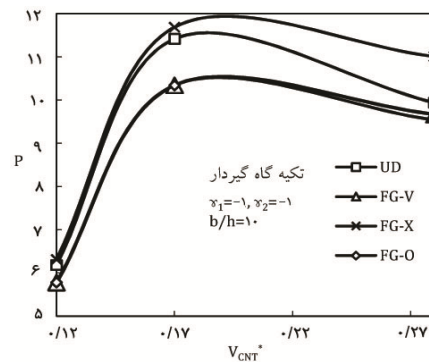
شکل ۲- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$



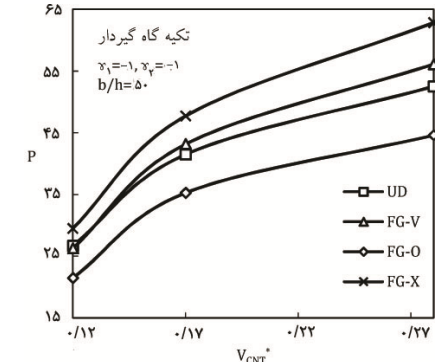
شکل ۶- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$



شکل ۳- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$



شکل ۷- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$



شکل ۴- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کماتش، $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$

به ترتیب برای نسبت عرض به ضخامت $b/h = 10$ و $b/h = 50$ نشان می‌دهند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل (۲) تا (۴) توزیع

کوماتش صفحه نانوکامپوزیتی را برحسب کسر حجمی‌های متفاوت برای چهار نوع توزیع مختلف نانولوله‌های کربنی و حالت‌های مختلف بارگذاری در شرایط تکیه‌گاهی گیردار

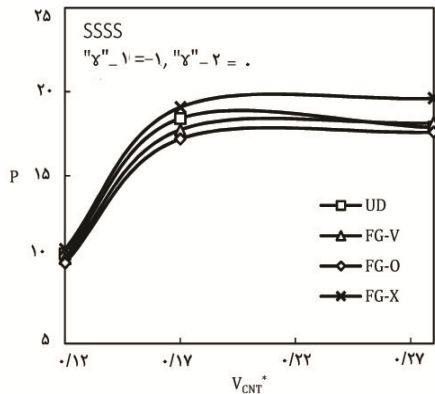
تابعی X شکل بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است. این در حالی است که توزیع تابعی O شکل کمترین میزان بار کمانش را تحمل می‌کند. توزیع تابعی X شکل به دلیل توزیع متقارن نانولوله‌های کربنی، که با شکل توزیع خود صفحات بالا و پایین صفحه نانوکامپوزیتی را تقویت کرده است، شرایط بهتری را برای تحمل بارگذاری جانبی فراهم می‌کند. از طرفی توزیع تابعی O شکل، که صفحات میانی را تقویت کرده است و سطوح بالا و پایین ضعیف‌تر هستند، کمترین بار کمانش را بین اشکال توزیع دارد. به علاوه با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی همچنان توزیع تابعی X شکل نسبت به سایر اشکال توزیع نانولوله‌های کربنی بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۱۲/۰ به ۱۷/۰ به طور متوسط شاهد افزایش ۳۹ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و همچنین سه حالت بارگذاری، $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ ، $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ هستیم. این در حالی است که با افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۱۷/۰ به ۲۸/۰ به طور متوسط حدود ۱۵ درصد در بار بی‌بعد کمانش افزایش اتفاق می‌افتد. این نشان می‌دهد که صرف افزایش نانولوله‌های کربنی به طور مداوم باعث افزایش چشمگیر بار بحرانی کمانش نمی‌شود.

همچنین با بررسی شکل‌های (۵) تا (۷) که نسبت عرض به ضخامت $b/h = 10$ در نظر گرفته شده است ملاحظه می‌شود که افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۱۲/۰ به ۱۷/۰ باعث افزایش حدود ۴۰ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و بارهای $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ ، $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ و

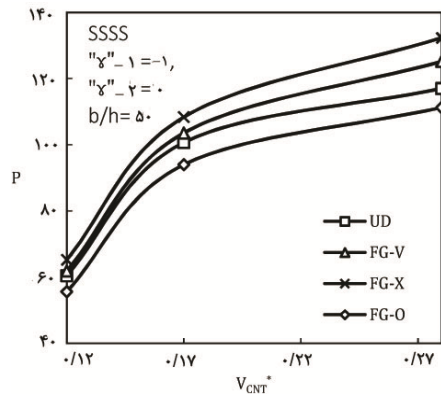
$(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ می‌شود. این در حالی است که افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در دو حالت بارگذاری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ از ۱۷/۰ به ۲۸/۰ در حالت‌های توزیع تابعی X و O و V افزایش حدود

۱۱ درصدی و در توزیع یکنواخت افزایش ۶ درصدی بار بی‌بعد کمانش را منجر می‌شود. در صورتی که در حالت بارگذاری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ ، افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی باعث کاهش ۶ درصدی در بار بی‌بعد کمانش می‌شود. با نگاهی دوباره به نتایج حاصل برای دو نسبت عرض به ضخامت متفاوت ($b/h = 50$ و $b/h = 10$) ملاحظه می‌شود که افزایش کسر حجمی در صفحات نازک‌تر تأثیر بیشتری در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی دارد. همچنین کاهش بار بی‌بعد کمانش در بارگذاری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ برای نسبت عرض به ضخامت $b/h = 10$ گویای این مطلب است که در صفحات ضخیم‌تر تراکم نانولوله‌ها عامل منفی در جهت استحکام بیشتر صفحه نانوکامپوزیتی محسوب می‌شود چرا که در پی افزایش کسر حجمی، کاهش بار بی‌بعد کمانش نتیجه می‌شود. همچنین با مقایسه مقدار بار بی‌بعد کمانش در نسبت عرض به ضخامت $b/h = 50$ و $b/h = 10$ مشاهده می‌شود که در هر سه حالت بارگذاری با افزایش نسبت عرض به ضخامت میزان بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد.

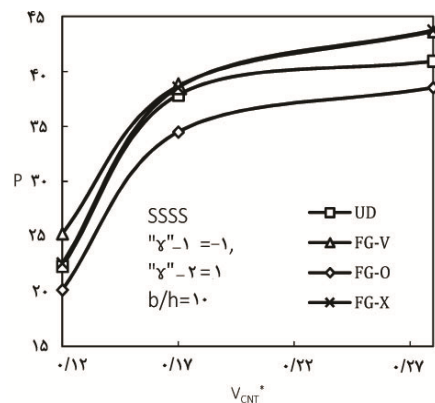
شکل‌های (۸) تا (۱۰) و شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) منحنی بار بی‌بعد کمانش صفحه نانو کامپوزیتی را برحسب کسر حجمی‌های متفاوت برای چهار نوع توزیع مختلف نانولوله‌های کربنی و حالت‌های مختلف بارگذاری در شرایط تکیه‌گاهی ساده به ترتیب برای نسبت عرض به ضخامت $b/h = 50$ و $b/h = 10$ نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در شرایط تکیه‌گاهی ساده نیز توزیع تابعی X شکل بیشترین بار بی‌بعد کمانش را دارا است و توزیع تابعی O شکل کمترین میزان بار کمانش را تحمل می‌کند. همچنین مشابه شرایط تکیه‌گاهی گیردار در شرایط تکیه‌گاهی ساده نیز در نسبت عرض به ضخامت $b/h = 50$ (شکل‌های (۸) تا (۱۰)) با افزایش ۲۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۱۲/۰ به ۱۷/۰ به طور متوسط شاهد افزایش ۳۹ درصدی در بار بی‌بعد کمانش برای حالت‌های مختلف توزیع و



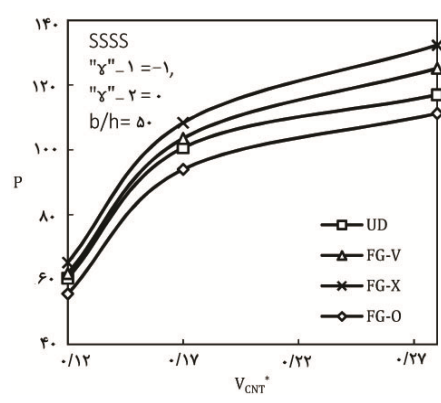
شکل ۱۱- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$



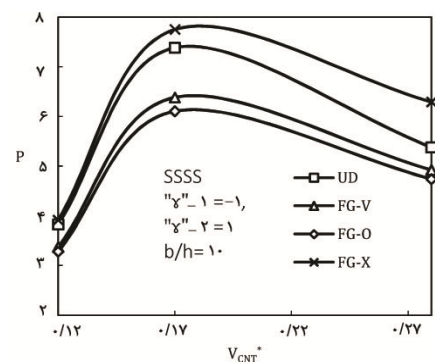
شکل ۸- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$



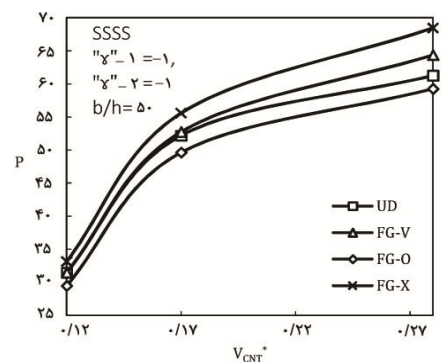
شکل ۱۲- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$



شکل ۹- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$



شکل ۱۳- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 10$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$



شکل ۱۰- تأثیر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر بار بی‌بعد کمانش، و $b/h = 50$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$

کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ به‌طور متوسط حدود ۲۰ درصد در بار بی‌بعد کمانش افزایش اتفاق می‌افتد. با این وجود باز هم افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به‌طور پیوسته باعث

همچنین سه حالت بارگذاری، $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ ، $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1)$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ هستیم. این در حالی است که با افزایش ۳۹ درصدی کسر حجمی نانولوله‌های

افزایش چشمگیر بار بی‌بعد کمانش نشده است و مشاهده می‌شود که از میزان تأثیرگذاری کسر حجمی نانولوله‌های کربنی کاسته شده است. همچنین با ضخیم‌تر شدن صفحه در نسبت عرض به ضخامت $b/h = 10$ (شکل‌های (۱۱) تا (۱۳)) از میزان تأثیرگذاری کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به مقدار بیشتری کاسته می‌شود. به علاوه مشاهده می‌شود که در شرایط تکیه‌گاهی ساده در تمامی کسر حجمی‌های استفاده شده، توزیع تابعی X شکل در صفحات نازک‌تر نسبت به صفحات ضخیم‌تر به مراتب نسبت به سایر اشکال توزیع عملکرد بهتری را در جهت استحکام بخشیدن بیشتر صفحه نانوکامپوزیتی داشته است. این مطلب مؤید این نکته است که در صفحات نازک استفاده از توزیع تابعی به میزان بیشتری باعث بهبود استحکام صفحه نانوکامپوزیتی می‌شود. همچنین همانطور که انتظار می‌رود در شرایط تکیه‌گاهی ساده بار بی‌بعد کمانش نسبت به شرایط تکیه‌گاهی گیردار کاهش پیدا می‌کند. از نکات حائز اهمیت در میان نمودارهای ارائه شده سیر نزولی در مقادیر بار بحرانی کمانش در شکل‌های (۷) و (۱۳) با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ است. دلیل این رویداد را می‌توان به نحوه تغییرات ضرایب الاستیسیته و مقادیر سفتی صفحه در اثر افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی مربوط دانست. به طوری که با بررسی نسبت ضرایب الاستیسیته در راستای محور X نسبت به راستای محور Y، (E_{11}/E_{22}) ، صفحه نانوکامپوزیتی مشاهده شد که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۲ به ۰/۱۷ نسبت E_{11}/E_{22} کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای محور X نسبت به راستای محور Y کاهش می‌یابد. این در حالی است که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ نسبت E_{11}/E_{22} افزایش می‌یابد که این را می‌توان به معنای افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای محور X نسبت به راستای محور Y دانست. لذا در شکل‌های (۷) و (۱۳) که مربوط به حالت‌های بارگذاری فشاری دو محوری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$

برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده است به علت کاهش سفتی صفحه در راستای محور Y با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰/۱۷ به ۰/۲۸ شاهد سیر نزولی در مقادیر بار کمانشی خواهیم بود. این در حالی است که در حالت بارگذاری فشاری تک محوره $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ چون بارگذاری فشاری در راستای محور Y وجود ندارد کاهش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در این راستا تأثیر محسوسی بر بار بحرانی کمانش در مقایسه با حالت قبلی نخواهد داشت. همچنین در حالت بارگذاری دو محوری، فشاری-کششی $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ ، از آنجا که بارگذاری در راستای محور Y کششی است و با علم به اینکه بارگذاری کششی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود، در این حالت نیز نمودار سیر طبیعی خود را دارد و سیر نزولی پیدا نمی‌کند. اما علت اینکه در $b/h = 50$ برخلاف $b/h = 10$ این کاهش در میزان بار بی‌بعد کمانش مشاهده نمی‌شود (شکل‌های (۴) و (۱۰)) می‌تواند ناشی از افزایش مداوم نسبت E_{11}/E_{22} در اثر افزایش کسر حجمی باشد. به عبارت دیگر افزایش کسر حجمی در صفحات نازک‌تر تأثیر همواره مثبتی در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی در راستای افزایش بار بحرانی کمانش دارد.

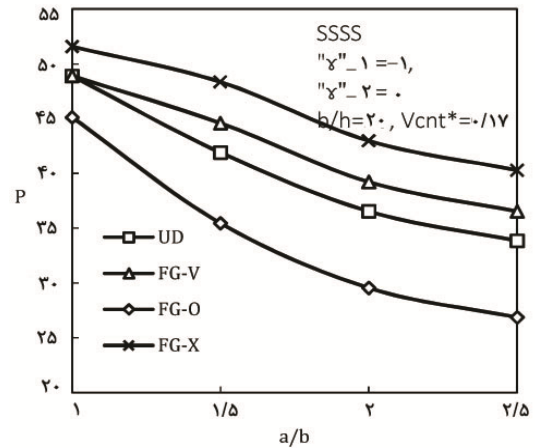
شکل‌های (۱۴) تا (۱۶) منحنی بار بی‌بعد کمانش را در نسبت‌های ابعادی متفاوت تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده نشان می‌دهد. کسر حجمی $V_{CNT}^* = 0/17$ و نسبت عرض به ضخامت $b/h = 20$ در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که در حالت بارگذاری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ و $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ با افزایش نسبت ابعادی، بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد و میزان کاهش برای حالتی که بار دو محوری فشاری و کششی $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1)$ است نسبت به حالتی که بار فشاری تک‌محوری $(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0)$ است خیلی بیشتر است. به طوری که در حالت اول با $2/5$ برابر شدن نسبت ابعادی کاهش حدود ۱۱۵ درصدی برای توزیع X شکل و بیش از ۲۰۰ درصدی در سایر اشکال توزیع در میزان بار بی‌بعد کمانش

اتفاق می افتد ولی برای حالت دوم حداکثر ۷۰ درصد کاهش در بار بی بعد کمانش اتفاق می افتد. در ادامه مشاهده می شود که برای حالت بارگذاری فشاری دومحوری ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1$) افزایش ۲/۵ برابری نسبت ابعادی فقط در حالت توزیع O شکل نانولوله های کربنی باعث کاهش بسیار کم حدود ۸ درصدی در بار بی بعد کمانش می شود و در سایر اشکال توزیع افزایش نسبت ابعادی تغییر محسوسی در میزان بار بی بعد کمانش ایجاد نمی کند.

۵- نتیجه گیری

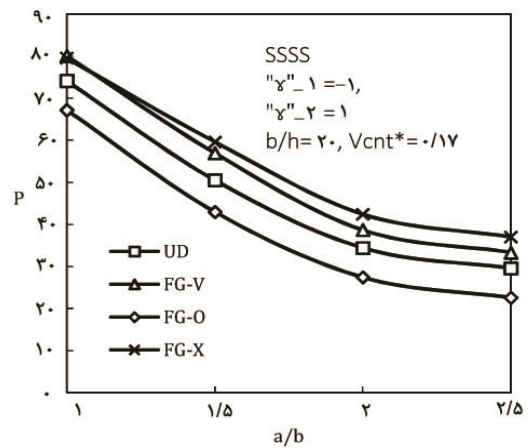
در تحقیق حاضر از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی برای تحلیل کمانش مکانیکی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با چیدمان های مختلف تابعی از نانولوله های کربنی تک جداره در شرایط مرزی ساده و گیردار استفاده شده است. خواص مواد نانولوله های کربنی تک جداره وابسته به اندازه هستند که از طریق شبیه سازی دینامیک مولکولی انجام شده در مراجع به دست آمده است. خواص کامپوزیت های تقویت شده با نانولوله های کربنی با فرض تابعی بودن در جهت ضخامت از طریق قانون اختلاط ساده به دست آمده است. کلیه معادلات حاکم به صورت نموی و براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات و کرنش های غیرخطی فون کارمن به دست آمده است. سپس دستگاه معادلات تعادل غیرخطی کوپل به کمک روش انرژی به صورت نموی به دست آمده و به کمک ترکیب روش های آزادسازی دینامیکی و اختلاف محدود برای به دست آوردن بار بحرانی کمانش حل شده است.

مطالعه پارامتری بیانگر این است که استفاده از توزیع تابعی در افزایش بار بحرانی کمانش تأثیرگذار است به طوری که توزیع تابعی X شکل به طور قابل توجهی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می شود. همچنین مشاهده شد که افزایش کسر حجمی نانولوله های کربنی به طور پیوسته نمی تواند باعث بهبود چشمگیر در استحکام صفحه نانوکامپوزیتی گردد و در واقع برای این امر کسر حجمی بهینه وجود دارد. در حالتی که



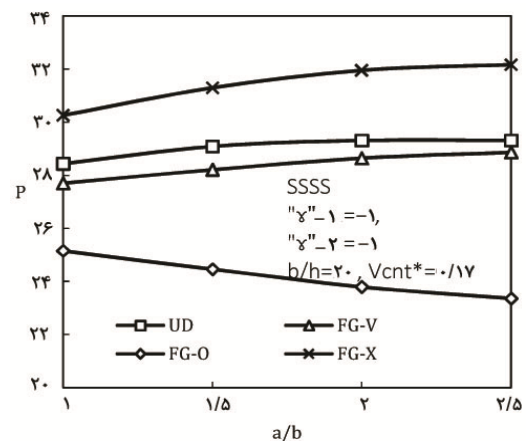
شکل ۱۴- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی بعد کمانش،

$$(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0) \text{ و } b/h = 20$$



شکل ۱۵- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی بعد کمانش،

$$(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1) \text{ و } b/h = 20$$



شکل ۱۶- تأثیر افزایش نسبت ابعادی بر بار بی بعد کمانش،

$$(\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1) \text{ و } b/h = 20$$

حالت‌های بارگذاری، متفاوت است. به‌علاوه مشخص گردید که پارامتر نسبت ابعادی تأثیر کمتری نسبت به سایر پارامترها در میزان بار بحرانی کمانش از خود بر جای می‌گذارد و زمانی که صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از دو طرف تحت فشار است تأثیر پارامتر نسبت ابعادی تقریباً ناچیز است.

بار فشاری فقط در راستای محور نانولوله‌ها قرار دارد نتیجه بهتری از افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها حاصل می‌شود. به‌علاوه افزایش کسر حجمی در صفحات نازکتر تأثیر بیشتری در میزان افزایش استحکام صفحه نانوکامپوزیتی، در راستای افزایش بار بحرانی کمانش دارد. همچنین تأثیر افزایش کسر حجمی در نسبت‌های عرض به ضخامت گوناگون و

واژه‌نامه

1. kevlar fibers
2. single-walled carbon Nanotube

3. mass fraction

پیوست

معادلات تعادل نموی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی $(u, v, w, \psi_x, \psi_\theta)$:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x^2} \\
 & + A_{12} \left(\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + A_{\psi\psi} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + B_{\psi\psi} \left(\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\
 & A_{12} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + A_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial y^2} \\
 & + A_{\psi\psi} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + B_{\psi\psi} \left(\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{\Delta\Delta} \left(\frac{\partial^r \delta w_o}{\partial x^r} + \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \right) + A_{\tau\Delta} \left(\frac{\partial^r \delta w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) + A_{\tau\tau} \left(\frac{\partial^r \delta w_o}{\partial y^r} + \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} \right) \\
& + A_{\tau\Delta} \left(\frac{\partial^r \delta w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} \right) + \left(A_{11} \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \right)^r \right) + B_{11} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^r w}{\partial x^r} \\
& \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \right) \frac{\partial^r w}{\partial x^r} \\
& + \left(A_{11} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^r \right) + A_{1r} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + B_{1r} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right) \\
& + \left(A_{11} \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \right)^r \right) + B_{11} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^r \delta w}{\partial x^r} \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \right) \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^r w}{\partial y^r} \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \right) \frac{\partial^r w}{\partial y^r} \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^r \right) + A_{1r} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{1r} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + B_{1r} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right) \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^r \delta w}{\partial y^r} \\
& + \left(A_{1r} \left(\frac{\partial \delta v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \right)^r \right) + B_{1r} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} \right) \\
& + \tau^* \left(A_{\tau\tau} \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \right) + B_{\tau\tau} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial^r w}{\partial x \partial y} \\
& + \left(A_{\tau\tau} \left(\frac{\partial \delta w_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \right) + B_{\tau\tau} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial^r w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma^* \left(\begin{aligned} & A_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) \\ & + A_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} = -\delta q \\
& B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x^2} \right) + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x^2} \\
& + B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} \right) + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x \partial y} \\
& + B_{\gamma\gamma} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \\ & + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial y^2} \end{aligned} \right) + D_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\
& B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} \right) + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x \partial y} \\
& + B_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial y^2} \right) + D_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial y^2} \\
& + B_{\gamma\gamma} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x^2} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} \\ & + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_x}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w_x}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right) + D_{\gamma\gamma} \left(\frac{\partial^2 \delta \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta \psi_y}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{ب-۱}
\end{aligned}$$

مراجع

1. Kroto, H. W., Heath, J. R., O'Brien, S. C., Curl, R. F., and Smalley, R. E., "C₆₀: Buckminsterfullerene", *Nature*, Vol. 318, pp. 162-163, 1985.
2. Lijima, S., "Helical Microtubules of Graphitic Carbon", *Nature*, Vol. 354, pp. 56-58, 1991.
3. Han, Y., and Elliott, J., "Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites", *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315-323, 2007.
4. Esawi, A. M. K., and Farag M. M., "Carbon Nanotube Reinforced Composites: Potential and Current Challenges", *Materials & Design*, Vol. 28, pp. 2394-2401, 2007.
5. Ruoff, R. S., Qian, D., and Liu, W. K., "Mechanical Properties of Carbon Nanotubes: Theoretical Predictions and Experimental Measurements", *Comptes Rendus Physique*, Vol. 4, pp. 993-1003, 2003.
6. Thostenson, E. T., Ren, Zh., and Chou, T. W.,

- “Advances in the Science and Technology of Carbon Nanotubes and their Composites: a Review”, *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1899-1912, 2001.
7. Griebel, M., and Hamaekers, J., “Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Moduli of Polymer-Carbon Nanotube Composites”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1773-1788, 2004.
 8. Fidelus, J. D., Wiesel, E., Gojny, F. H., Schulte, K., and Wagner, H. D., “Thermo-Mechanical Properties of Randomly Oriented Carbon/Epoxy Nanocomposites”, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, pp. 1555-1561, 2005.
 9. Ming, Li., Kang, Z. H., Yang, P., Meng, X., and Lu, Y., “Molecular Dynamics Study on Carbon/Epoxy Buckling of Single-Wall Carbon Nanotube-Based Intramolecular Junctions and Influence Factors”, *Computational Materials Science*, Vol. 67, pp. 390-396, 2013.
 10. Seifoori, S., and Liaghat, G. H. “Low Velocity Impact of a Nanoparticle on Euler-Bernoulli Nanobeam using a Nonlocal Elasticity Model”, *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, pp. 37-44, 2012.
 11. Vodenitcharova, T., and Zhang, L. C., “Bending and Local Buckling of a Nanocomposite Beam Reinforced by a Single-Walled Carbon Nanotube”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3006-3024, 2006.
 12. Shen, H. S., “Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments”, *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9-19, 2009.
 13. Shen, H. S., and Zhang, C. L., “Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates”, *Materials & Design*, Vol. 31, pp. 3403-3411, 2010.
 14. Wang, Z. X., and Shen, H. S., “Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments”, *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 2319-2330, 2011.
 15. Shen, H. S., “Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part I: Axially-Loaded shells”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2096-2108, 2011.
 16. Shen, H. S., “Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments, Part II: Pressure-Loaded Shells”, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2496-2503, 2011.
 17. Shen, H. S., “Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Cylindrical Shells”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 1030-1038, 2012.
 18. Shen, H. S., and Xiang, Y., “Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells Inthermal Environments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213-216, pp. 196-205, 2012.
 19. Zhu, P., Lei, Z. X., and Liew K. M., “Static and Free Vibration Analyses of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates using Finite Element Method with First Order Shear Deformation Plate Theory”, *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 1450-1460, 2012.
 20. Sobhani Aragh, B., Nasrollah Barati A. H., and Hedayati H., “Eshelby-Mori-Tanaka Approach for Vibrational Behavior of Continuously Graded Carbon Nanotube-Reinforced Cylindrical Panels”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 1943-1954, 2012.
 21. Yas, M. H., and Heshmati M., “Dynamic Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Beams Reinforced by Randomly Oriented Carbon Nanotube under the Action of Moving Load”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 1371-1394, 2012.
 22. Wang, Z. X., and Shen H. S., “Nonlinear Dynamic Response of Nanotube-Reinforced Composite Plates Resting on Elastic Foundations in Thermal Environments”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, pp. 735-754, 2012.
 23. Alibeigloo, A., “Static Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plate Embedded in Piezoelectric Layers by using Theory of Elasticity”, *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 612-622, 2013.
 24. Lei, Z. X., Leiw, K. M., and Yu, J. K., “Buckling Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates using the Element-Free kp-Ritz Method”, *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 160-168, 2013.
 25. Shen, H. S., and Zhu, Z. H., “Postbuckling of Sandwich Plates with Nanotube-Reinforced Composite Face Sheets Resting on Elastic Foundations”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 35, pp. 10-21, 2012.
 26. Wang, Z. X., and Shen, H. S., “Nonlinear Vibration and Bending of Sandwich Plates with Nanotube-Reinforced Composite Face Sheets”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 411-421, 2012.
 27. Reddy, J. N., “*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*”, Boca Raton (FL): CRC Press, 2004.
 28. Rezaee Pajand, M., and Alamatian, J., “The Dynamic Relaxation Method using New Formulation for Fictitious Mass and Damping”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, pp. 109-133, 2010.

29. Zhang, L. C., Kadkhodayan, M., and Mai, Y. W., "Development of the maDR method", *Computers & Structures*, Vol.52, pp.1-8, 1994.

30. Underwood, P., "Dynamic Relaxation, in: *Computational Method for Transient Analysis*", Elsevier, Amsterdam, 1983.