

# مقایسه روش آنالیز ایزوژئومتریکی و روش اجزای محدود توسعه یافته در مدل سازی ناپیوستگی و محاسبه فاکتور شدت تنش

رضا نادری\* و عبدالغفور خادم الرسول

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۱۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۰۳/۲۶)

چکیده - این مطالعه نشان خواهد داد که چگونه می توان انواع ترک و ناپیوستگی ها را با کمک روش های آنالیز ایزوژئومتریکی و اجزای محدود توسعه یافته مدل سازی نمود. در این مطالعه با استفاده از دو ویژگی منحصر به فرد روش آنالیز ایزوژئومتریکی به تولید منطقه ناپیوسته پرداخته شده است. ناپیوستگی های تولید شده شامل ترک و مرز ناپیوستگی است. در مدل سازی به روش ایزوژئومتریکی از تکنولوژی هندسی محاسباتی نریز در تقریب هندسه دامنه و متغیر اصلی مسئله استفاده شده است. در تکنولوژی نریز، هندسه مسئله تقریباً به طور دقیق مدل سازی می شود. همچنین با کاربرد روش آنالیز ایزوژئومتریکی فاکتورهای شدت تنش در نوک ترک برای مسائل دو بعدی محاسبه شده و با فاکتور شدت تنش به دست آمده از روش حل تحلیلی و عددی مقایسه می شوند. روش عددی دیگری که برای مقایسه نتایج آنالیز ایزوژئومتریکی از آن استفاده شده است، روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته است. در روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل سازی ناپیوستگی از غنی سازی گره های متأثر از ناپیوستگی استفاده می شود. در مطالعه حاضر در آنالیز اجزای محدود توسعه یافته فاکتورهای شدت تنش به وسیله انتگرال مستقل از مسیر  $J$  محاسبه می گردد. همچنین به منظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب بارگذاری از روش انتگرال اندرکنش، استفاده شده است. مقایسه نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت مطلوب روش آنالیز ایزوژئومتریکی با درجات آزادی کمتر و در نتیجه کاهش حجم محاسبات در مقایسه با روش اجزای محدود توسعه یافته است. به علاوه تولید منطقه متأثر از ناپیوستگی یا لایه مرزی به عنوان یکی از موضوعات بسیار مهم در مکانیک شکست محاسباتی، با ویژگی های خاص روش آنالیز ایزوژئومتریکی قابل مدل سازی است. این توانایی خاص در این مطالعه نشان داده می شود و نتایج گویای تولید منطقه ناپیوسته با استفاده از فضای ریاضی در مدل هندسی است.

واژگان کلیدی: روش آنالیز ایزوژئومتریکی، روش اجزای محدود توسعه یافته، نریز، توابع غنی سازی گره ها، روش انتگرال اندرکنش.

## Comparison between Isogeometric Analysis and Extended Finite Element Methods in Discontinuities Modeling and Stress Intensity Factor Calculation

R. Naderi\* and A. Khademalrasoul

Shahrood University of Technology, Shahrood

**Abstract:** This study shows how to create different types of crack and discontinuities by using isogeometric analysis approach (IGA) and extended finite element method (XFEM). In this contribution, two unique features of isogeometric analysis approach are utilized to create discontinuous zones. Discontinuities consist of crack and cohesive-zone. In isogeometric analysis method

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: r\_naderi@shahroodut.ac.ir

*NURBS is used to approximate both geometry and primary variable. NURBS can create quadratic shapes exactly. Also, stress intensity factors are calculated in the vicinity of the crack tips for two dimensional problems and are compared with corresponding analytical and numerical counterparts. Extended finite element method is the other numerical method which is used in this work. The enrichment procedure is utilized in extended finite element method to create discontinuities. The well-known path independent J-integral approach is used in order to calculate the stress intensity factors. Also, in mixed mode situation, the interaction integral (M-integral) is considered to calculate the stress intensity factors. Results show that isogeometric analysis method has desirable accuracy as it uses lower degree of freedoms and consequently lower computational efforts than extended finite element method. In addition, creating the internal cohesive zone as one of the most important issues in computational fracture mechanics is feasible due to the special features of isogeometric analysis. The present study demonstrates the capability of isogeometric analysis parametric space to control the inter-element continuity and create the cohesive zone.*

**Keywords:** *Isogeometric Analysis Method (IGA), Extended Finite Element Method (XFEM), NURBS; nodes enrichment functions, interaction integral.*

## فهرست علائم

نیروهای گسترده	$\mathbf{T}$	توابع چندمتغیره نربز	$B_{i,p}(\xi)$
تقریب جابه‌جایی	$u^h(x)$	نیروهای حجمی	$\mathbf{b}$
دانسیته انرژی کرنشی	$W$	منحنی تک‌متغیره نربز	$C(\xi)$
تانسور کرنش	$\varepsilon_{ij}$	مدول الاستیسته	$E$
تابع غنی‌سازی نوک ترک	$\varphi_\alpha$	تابع غنی‌سازی هویساید	$h(x)$
تابع مجموعه تراز نوک ترک	$\varphi(x, t)$	انتگرال مستقل از مسیر	$J$
نسبت پواسون	$\nu$	فاکتور شدت تنش مود اول	$K_I$
زاویه نسبت به نوک ترک	$\theta$	فاکتور شدت تنش مود دوم	$K_{II}$
تانسور تنش	$\sigma_{ij}$	انتگرال اندرکنش	$M$
تابع مجموعه تراز بدنه ترک	$\psi(x, t)$	توابع شکل اجزای محدود	$N_j(x)$
محدوده اعمال شرایط مرزی اساسی	$\Gamma_{Di}$	توابع پایه نربز	$N_{i,p}(\xi)$
محدوده اعمال شرایط مرزی طبیعی	$\Gamma_{Ni}$	مجموعه نقاط کنترلی	$\mathbf{P}_i$
بردار گرهی	$\Xi, \mathcal{H}$	فاصله از نوک ترک	$r$
		سطوح نربز	$S(\xi)$

### ۱- مقدمه

آوردن توزیع تنش و کرنش صحیح و قابل قبول از جسم حاوی ناپیوستگی، باید بتوان ناپیوستگی مورد نظر را به‌درستی و همچنین به سادگی در جسم اولیه تولید نمود. از این‌رو محققین مختلف و برجسته‌ای در علم مکانیک شکست و روش‌های عددی به دنبال مدل‌سازی ناپیوستگی با روش‌های بهینه و کم

مکانیک شکست یکی از موضوعات مورد توجه محققین مختلف به‌شمار می‌آید. هدف اصلی تمامی روش‌های موجود در علم مکانیک شکست محاسباتی، تعیین فضای تنش و کرنش در جسم حاوی ناپیوستگی است. از طرفی به‌منظور به‌دست

هزینه بوده‌اند [۱-۶].

مدل‌های شکست گسسته<sup>۱</sup> که شامل منطقه فرایند باشند، تحت عنوان مدل‌های ناحیه چسباننده<sup>۲</sup> شناخته و توسط داگدال و بارنبلات معرفی شدند [۷ و ۸]. در مدل‌های ناحیه چسباننده در مقایسه با مدل‌هایی که برای شکست تُرد توسط گریفیث معرفی شد [۹]، مصالح به تدریج ظرفیت باربری خود را از دست می‌دهند. معمولاً از روش اجزای محدود در گسسته‌سازی مدل‌های ناحیه چسباننده استفاده شده است. اما به علت ماهیت المان‌بندی در روش اجزای محدود استاندارد مشکل چگونگی مدل‌سازی ترک وجود دارد. این مسئله زمانی بیشتر مشخص می‌شود که شبیه‌سازی رشد ترک مدنظر باشد. به‌طور کلی در روش‌های عددی که از تکنولوژی المان استفاده می‌شود، برای تولید ناپیوستگی از المان‌های واسط<sup>۳</sup> [۱۰ و ۱۱] و یا تعبیه ناپیوستگی [۱۲-۱۴] در دامنه استفاده شده است. امروزه روش‌های پیکره‌بندی واحد<sup>۴</sup> (PUM) [۱۵ و ۱۶]، یا اجزای محدود توسعه یافته (XFEM) به‌عنوان انعطاف‌پذیرترین تکنولوژی‌های بر مبنای المان هستند که در مدل‌سازی ناپیوستگی و رشد ترک به‌کار گرفته می‌شوند [۶]. از طرفی با پیشرفت و توسعه هر چه بیشتر و سریع‌تر تکنولوژی‌های جدید و ساخت طرح‌های مهندسی پیچیده‌تر، اهمیت مدل‌سازی مناسب‌تر هندسه دامنه بیشتر مشخص می‌گردد. به‌عنوان نمونه، مدل‌سازی و آنالیز بدنه هواپیماهای پیشرفته، قطعات زیردریایی‌های مدرن از جمله طرح‌های پیچیده مهندسی جدید به‌شمار می‌آیند که نیاز به دقت در تولید هندسه و انجام آنالیز و طراحی به‌صورت هم‌زمان دارند. در این حال از میان تمامی روش‌های عددی، تنها روشی که قادر به مدل‌سازی هندسه تقریباً به‌طور دقیق برای سطوح درجه دو است، روش آنالیز ایزوژئومتریکی است که در آن توابع پایه تقریب نریز<sup>۵</sup> به‌کار گرفته شده باشد [۱۷]. همچنین یکی دیگر از مزایای روش آنالیز ایزوژئومتریکی بر روش‌های مبتنی بر تکنولوژی المان مربوط به شرایط پیوستگی از مراتب بالاتر است، که این ویژگی در روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌دست می‌آید. در مدل‌های ناحیه

چسباننده وجود پیوستگی از مراتب بالاتر بسیار لازم و با اهمیت است، چون می‌توان ترک یا ناپیوستگی را با سطوح هموارتری گسسته‌سازی نمود. البته تلفیق روش‌های پیکره‌بندی واحد و روش آنالیز ایزوژئومتریکی در مدل‌سازی فرایند مکانیک شکست و گسترش ترک مورد استفاده قرار گرفته است [۴ و ۵]. بنابراین این امکان وجود دارد که با ترکیب روش آنالیز ایزوژئومتریکی و روش پیکره‌بندی واحد ناحیه چسباننده گسسته‌سازی شود. اما در این حالت ناپیوستگی مورد نظر باید با استفاده از توابع هویساید<sup>۶</sup> در حل مسئله وارد شود. درحالی‌که تمام این فرایندها را می‌توان از طریق ویژگی‌های ذاتی روش آنالیز ایزوژئومتریکی انجام داد. در واقع روش آنالیز ایزوژئومتریکی دارای قابلیتی است که می‌تواند ناپیوستگی‌ها را مستقیماً در حل مسئله وارد کند. ایده اصلی، در کنترل پیوستگی بین المانی است. در روش آنالیز ایزوژئومتریکی درجه پیوستگی بین المانی با اعمال گره<sup>۷</sup>، که یک فرایند ریاضی و در فضای پارامتری است، کنترل و از این طریق مدل‌سازی هموارتری از متغیرهای مسئله به‌دست آورده می‌شود.

تکنولوژی هندسی محاسباتی که بیش از دیگر روش‌ها در روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌کار گرفته شده است، تکنولوژی نریز است. مهم‌ترین توانایی‌های نریز شامل: مناسب بودن جهت مدل‌سازی سطوح آزاد، امکان نمایش تقریباً دقیق سطوح درجه دو مانند استوانه، کره، بیضی و غیره و همچنین وجود چندین الگوریتم مؤثر پایدار و عددی در تولید اجسام نریز است. همچنین نریز دارای ویژگی‌های محاسباتی سودمندی مانند: امکان بهبود از طریق اعمال گره، پیوستگی از مرتبه  $C^{P-1}$  برای تابع نریز از مرتبه  $P$ ، تقلیل تغییرات<sup>۸</sup> و نیز مشخصه بدنه محدب<sup>۹</sup> است.

به‌طور کلی قابلیت تغییر در توابع پایه بی‌اسپیلاین با اعمال گره در بردار گرهی و کنترل درجه پیوستگی چندجمله‌ای پایه، روش آنالیز ایزوژئومتریکی را به یک روش مناسب برای مدل‌سازی انواع ترک و یا حتی وجود ناپیوستگی‌های متعدد در یک دامنه تبدیل نموده است. روش آنالیز ایزوژئومتریکی دارای

مشخصات متعددی است که در این مطالعه از آنها در تولید منطقه ناپیوسته بهره گرفته شده است. بنابراین استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریکی به عنوان راه حلی که دارای ویژگی‌های خاص در محاسبات عددی بوده و از طرف دیگر نیاز به تولید شبکه اجزای محدود را از بین می‌برد می‌تواند در مکانیک شکست محاسباتی بسیار مفید باشد. در این مطالعه به بررسی توانایی روش آنالیز ایزوژئومتریکی در مکانیک شکست پرداخته می‌شود.

هیوز مفهوم آنالیز ایزوژئومتریکی با استفاده از نریز را در ایجاد روش جدیدی در مکانیک محاسباتی بر پایه پیشرفت‌های جدید در هندسه محاسباتی معرفی نمود [۱۷]. بازیلوز و هیوز مبانی ریاضی روش آنالیز ایزوژئومتریکی بر پایه نریز را بررسی نمودند. آنها ویژگی‌های تقریب و پایداری روش آنالیز ایزوژئومتریکی بر پایه نریز را در چارچوب بهبود حل به روش  $h^1$  مورد مطالعه قرار دادند. به علاوه، آنها روش جدیدی را در تقریب که برای نریز مناسب است توسعه دادند [۱۸]. هیوز و همکاران مطالعه بر روی قوانین گوس-کوادیچر را در آنالیز ایزوژئومتریکی بر پایه نریز آغاز نمودند. آنها قوانین مؤثر و کارایی را در محاسبات مربوط به ماتریس‌های جرم، سختی و همرفت، توسعه دادند [۱۹]. وانگ و همکاران روشی را برای اعمال بهتر شرایط مرزی در آنالیز ایزوژئومتریکی در حالت شرایط مرزی همگن و غیرهمگن ارائه نمودند. آنها از یک انتقال برای نقاط کنترلی مرزی برای انتقال به مرز واقعی دامنه استفاده نموده‌اند [۲۰]. میسوره و همکاران از نمایش نریز در دنبال نمودن مرزهای متحرک و تغییر توپولوژی در خلال تغییر فاز استفاده نمودند. آنها در کار خود به وسیله روش آنالیز ایزوژئومتریکی مرزها را به صورت صریح و به وسیله تکنولوژی نریز مدل نموده و هر دو مسئله تغییر شکل و توپولوژی را برآورد نمودند [۲۱].

در این مطالعه چندین مدل از محیط‌های همراه با ناپیوستگی به صورت ترک‌های لبه‌ای و وسط‌چین با توانایی تولید ترک در مرز وصله‌ها<sup>۱۱</sup>، مورد آنالیز قرار گرفته است. مقادیر فاکتور

شدت تنش به دست آمده از روش برون‌یابی تنش در صفحه جلوی نوک ترک در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، با مقادیر فاکتور شدت تنش تحلیلی و همچنین مقادیر فاکتور شدت تنش به دست آمده از انتگرال  $J$  در آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، مقایسه می‌شوند. از طرفی در محاسبه فاکتور شدت تنش برای مسائل با مود مرکب بارگذاری از روش انتگرال  $M$  در آنالیز اجزای محدود توسعه یافته استفاده می‌گردد.

همچنین با استفاده از قابلیت کنترل پیوستگی در روش آنالیز ایزوژئومتریکی در فضای پارامتری به تولید ناپیوستگی به صورت مرز (لایه) ناپیوستگی پرداخته خواهد شد. مزیت تولید مرز ناپیوستگی با کمک فضای ریاضی (فضای پارامتری)، امکان کاربرد این توانایی در موضوع رشد ترک است. بنابراین به شبیه‌سازی اثرات یک لایه مرزی بر توزیع تنش‌ها پرداخته می‌شود. موضوعی که باید مورد توجه قرار گیرد این است که در روش تولید ناپیوستگی با کمک فضای ریاضی در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، از ویژگی‌های خاص کنترل درجه پیوستگی توابع پایه بی‌اسپیلاین استفاده می‌شود. در این روش تولید ناپیوستگی، جسم اولیه در محل مورد نظر دارای یک ناپیوستگی سراسری شده و اثرات این ناپیوستگی سراسری در نتایج آنالیز مشخص می‌گردد. به نحوی که با تبدیل این ویژگی از حالت کلی به محلی می‌توان با آن ناپیوستگی به صورت یک ترک محدود در جسم برخورد نمود.

آنچه در مطالعه حاضر ارائه خواهد شد بدین ترتیب است: ابتدا روش آنالیز ایزوژئومتریکی تشریح شده و حل مسئله الاستواستاتیک بیان خواهد شد. پس از آن مکانیک شکست و اصول کلی حاکم بر آن گفته خواهد شد. در ادامه، آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز گفته شده و سپس به بیان نتایج به دست آمده و مقایسه نتایج پرداخته خواهد شد. در بخش هشتم چگونگی مدل‌سازی ناپیوستگی با کمک فضای پارامتری تشریح شده و در انتها نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

لازم به ذکر است که تمامی محاسبات انجام شده در

روش‌های عددی نام‌برده و انجام آنالیز کامپیوتری از برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار MATLAB بهره برده شده است.

## ۲- روش آنالیز ایزوژئومتریکی

طرح و ایده اصلی روش آنالیز ایزوژئومتریکی استفاده هم‌زمان از یک روش در تولید هندسه، شبکه‌بندی و آنالیز عددی است. در این مسیر یک تلفیق اساسی بین تمامی روش‌های محاسباتی در یک موضوع ایجاد شده است. بنا به نظر محققین گام اصلی این روش تمرکز بر فقط و فقط یک هندسه تولید شده و انجام فرایند آنالیز بر همان هندسه تقریباً دقیق اولیه مدل است. این شیوه نیازمند تغییر دادن آنالیز اجزای محدود استاندارد از وضع کنونی به شرایطی است که آنالیز براساس هندسه سازگار با کد<sup>۱۲</sup> تقریباً دقیق صورت گیرد. عمده توسعه‌ای که در روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌وجود آمده است، بر تصدیق رفتار توابع پایه هموار نریز تاکید دارد. به‌طور کلی نشان داده شده است که درجه همواری دارای مزایای محاسباتی با اهمیتی بر روش اجزای محدود استاندارد است [۲۲-۲۴].

در حالت کلی، بی‌اسپیلاین‌ها چندجمله‌ای‌های تکه‌ای هستند که انعطاف‌پذیری و دقت فوق‌العاده‌ای در کاربردهای مدل‌سازی دارند. توابع بی‌اسپیلاین از ترکیب خطی توابع پایه ساخته می‌شوند. توابع پایه بی‌اسپیلاین برای مرتبه  $p$ ، از طریق یک رابطه بازگشتی و براساس بردار گرهی مفروض در فضای پارامتری تعریف می‌شوند. منظور از رابطه بازگشتی در تولید توابع پایه این است که برای مثال اگر بخواهیم توابع پایه مرتبه ۲ تولید کنیم باید توابع پایه مرتبه ۱ و صفر را داشته باشیم. بنابراین با تعریف توابع ثابت تکه‌ای ( $p=0$ ) شروع می‌کنیم. براساس رابطه (۱) تابع پایه مرتبه صفر به‌دست می‌آید [۲۵ و ۲۶]:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

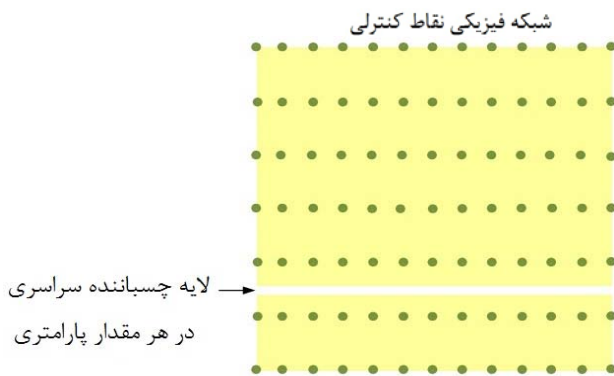
برای توابع مرتبه  $p=1, 2, 3, \dots$  از فرمول بازگشتی استفاده

می‌شود. فرمول بازگشتی کوگس-دی بور<sup>۱۳</sup> به این صورت تعریف می‌شود:

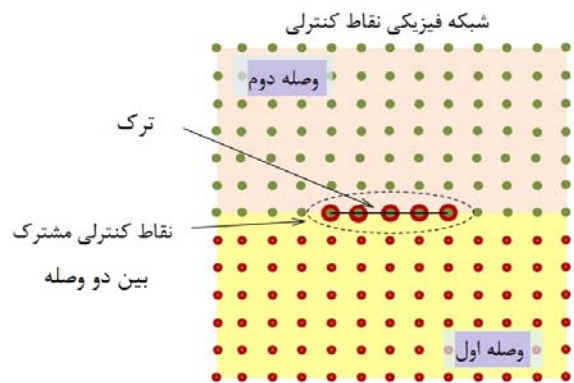
$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

که در این رابطه  $N_{i,p}$ ، توابع پایه نریز،  $\xi$ ، مقادیر گرهی هستند. بردار گرهی<sup>۱۴</sup> از یک سری افزایشی مقادیر پارامتر در فضای پارامتری تحت عنوان گره تشکیل شده که مشخص کننده فاصله پارامتری برای تمام منحنی‌های بزیری<sup>۱۵</sup> است که به یکدیگر متصل شده تا یک بی‌اسپیلاین تولید نمایند. یک بردار گرهی به‌صورت  $\xi_i \in \mathbb{R}$  که در آن  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  گره  $i^{\text{th}}$  است و  $i$  نیز اندیس گرهی به‌صورت  $i=1, 2, \dots, n+p+1$ ، مرتبه چندجمله‌ای و  $n$  تعداد توابع پایه (معادل نقاط کنترلی) بوده که تولید کننده بی‌اسپیلاین هستند. توابع پایه بی‌اسپیلاین یک بعدی (یک متغیره) از یک بردار گرهی ساخته می‌شوند. باید توجه داشت که بیش از یک مقدار گرهی می‌تواند در یک موقعیت در فضای پارامتری قرار بگیرد. یک بردار گرهی باز<sup>۱۶</sup> گفته می‌شود، اگر مقادیر گرهی ابتدا و انتهای آن به تعداد  $p+1$  تکرار شوند. تکرار مقادیر گرهی در ابتدا و انتهای بردار گرهی جهت کنترل بر شرایط ابتدا و انتهای منحنی بی‌اسپیلاین است [۱۷]. لازم به‌ذکر است که بردارهای گرهی باز، بردارهای استاندارد در کد هستند. در این مطالعه از بردار گرهی باز استفاده شده است.

توابع پایه نریز دارای ویژگی‌هایی مانند، پیکره‌بندی واحد<sup>۱۷</sup>، مثبت بودن، مستقل خطی بودن، منطقه پوششی مشخص و کنترل پیوستگی را دارا هستند. منظور از کنترل پیوستگی یعنی این که اگر یک مقدار گرهی دارای  $k$  تکرار باشد (یعنی:  $\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k-1}$ )، آنگاه توابع پایه در آن موقعیت دارای پیوستگی از نوع  $C^{p-k}$  هستند. همچنین زمانی که  $k=p$  باشد تابع پایه  $C^0$  بوده و در آن موقعیت به‌صورت درون‌یابی است. چهار مورد اول تضمین کننده درستی حل و ماتریس‌های با پراکندگی پایین، در فضای کل ماتریس هستند. پنجمین ویژگی امکان انعطاف‌پذیری بالا را فراهم می‌آورد [۲۷ و ۲۸]



شکل ۲- نحوه گسسته‌سازی روش آنالیز ایزوژئومتریکی در تولید ناحیه چسباننده به کمک یک وصله



شکل ۱- نحوه گسسته‌سازی روش آنالیز ایزوژئومتریکی در تولید ترک

### ۳- حل مسئله الاستواستاتیک در روش آنالیز ایزوژئومتریکی

فلسفه روش حل ایزوژئومتریکی براساس مسائل چندمتغیره است که حل هر جزء به صورت سطحی مستقل در مسائل دوبعدی ساخته می‌شود. در نهایت جواب مسئله با پیدا کردن نقاط کنترلی تعیین می‌گردد. در روش آنالیز ایزوژئومتریکی حل مسئله به صورت یک سطح تصور می‌شود که می‌تواند توسط بی‌اسپیلاین و نریز تعریف گردد. در واقع  $x$  و  $y$  نقاط کنترلی معلوم در نظر گرفته شده و مختصات  $z$  این نقاط با یکی از روش‌های باقیمانده وزنی یا وریشنال<sup>۱۸</sup> به دست می‌آیند.

معادلات حاکم بر یک مسئله مقدار مرزی<sup>۱۹</sup> بدین ترتیب است. اگر فرض شود که  $f_i : \Omega \rightarrow R$  و  $g_i : \Gamma_{Di} \rightarrow R$  و  $h_i : \Gamma_{Ni} \rightarrow R$  مسئله جهت یافتن  $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow R$  حل می‌شود به نحوی که:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{in } \Omega \\ u_i &= g_i & \text{on } \Gamma_{Di} \\ \sigma_{ij} n_j &= h_i & \text{on } \Gamma_{Ni} \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط فوق  $\sigma_{ij}$  برحسب  $u_i$  به عنوان متغیر اصلی مسئله، با فرض تغییر شکل‌های کوچک، روابط سازگاری بین تانسور کرنش و تنش و همچنین تعریف گرادیان جابه‌جایی تعریف می‌شود. در روابط فوق،  $g_i$  و  $h_i$  به ترتیب جابه‌جایی‌های مرزی<sup>۲۰</sup> و نیز

مطابق شکل (۱) و (۲) نحوه تولید منطقه ناپیوسته با کمک نقاط کنترلی و نیز کنترل پیوستگی توابع پایه در فضای پارامتری نشان داده شده است.

سطوح و احجام نریز با استفاده از قوانین ضرب تانسوری و با استفاده از تعریف توابع چندمتغیره پایه به دست می‌آیند و این سطوح و احجام تمامی خصوصیات مربوط به توابع پایه خود از جمله پیوستگی و مشتق‌پذیری را دارا هستند. یک سطح نریز به شکل رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$S(\xi) = \sum_{i \in I} P_i R_{i,p}(\xi) \quad (3)$$

در رابطه فوق  $P_i$ ، مجموعه نقاط کنترلی و  $R_{i,p}$  توابع پایه چند متغیره هستند. توابع پایه نریز چند متغیره به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i B_{i,p}(\xi)}{\sum_{j \in I} w_j B_{j,p}(\xi)} \quad (4)$$

در رابطه فوق  $w_i$  و  $w_j$  وزن نقاط کنترلی هستند که قطعاً می‌بایست مقادیر مثبت و غیرصفر باشند. همچنین توابع پایه چندمتغیره نریز،  $B_{i,p}(\xi)$  به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند:

$$B_{i,p}(\xi) = \prod_{l=1}^{d_p} N_{il,pl}^1(\xi^l) \quad (5)$$

که  $d_p = 1, 2, 3, \dots$  بوده و متناظر با ابعاد مسئله انتخاب می‌شود.

لازم به ذکر است که هر کدام از درایه‌های ماتریس ژاکوبین بر اساس تابع پایه، مشتقات آنها (رابطه (۱۰)) و مختصات نقاط کنترلی در منطقه پوشش محلی محاسبه می‌شوند [۲۹]:

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (10)$$

#### ۴- مکانیک شکست

به‌طور کلی محققین مختلفی سال‌ها با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی به مطالعه مکانیک شکست پرداخته‌اند. به‌طور کلی رفتار عضو دارای ناپیوستگی در مکانیک شکست خطی با یک پارامتر مانند فاکتور شدت تنش<sup>۲۴</sup> که با استفاده از روش‌های مستقیم و انرژی تعیین می‌شود مشخص می‌شود [۳۰]. این پارامتر نقش مهمی در تعیین فضای تنش، در همسایگی نوک ترک دارد. فاکتور شدت تنش دارای واحد  $MPa \cdot \sqrt{m}$  بوده و به هر دو عامل تنش وارده در دور دست و هندسه دامنه و ترک بستگی دارد. به‌طور کلی در حل تحلیلی که برای دامنه‌ای حاوی ترک توسط ویلیامز انجام شده است، مقادیر تنش در دامنه به‌صورت یک سری ارائه شده است [۳۱]. در شکل (۳) نمایش عمومی از جسم حاوی ناپیوستگی ارائه شده است.

با فرض ایجاد پدیده جاری شدن در مقیاس کوچک<sup>۲۵</sup> در جسم الاستیک، می‌توان ترک را به‌عنوان یک ناپیوستگی نیمه بی‌نهایت در نظر گرفت. بنابراین می‌توان از تعدادی از جملات سری صرف‌نظر نمود. از این‌رو معادلات فضای تنش مرتبه اول برای مود اول شکست به‌صورت زیر خواهد شد [۳۰]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

بارگذاری<sup>۲۱</sup> هستند. همچنین  $\Omega$ ، دامنه مورد مطالعه،  $\Gamma_{Di}$ ، محدوده اعمال شرایط مرزی اساسی<sup>۲۲</sup> و  $\Gamma_{Ni}$  محدوده اعمال شرایط مرزی طبیعی<sup>۲۳</sup> هستند. سپس با تبدیل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله الاستوستاتیک، به‌شکل ضعیف و به‌دست آوردن معادلات انتگرالی و همچنین با استفاده از اصول تقریب متغیر وابسته و نیز هندسه با کمک توابع تقریب نربز به حل عددی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله پرداخته می‌شود [۲۸].

توابع جابه‌جایی برای مسائل الاستیسیته صفحه‌ای را می‌توان با سطوح به‌صورت رابطه (۷) تقریب زد:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{u,i,j} \quad (7)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{v,i,j}$$

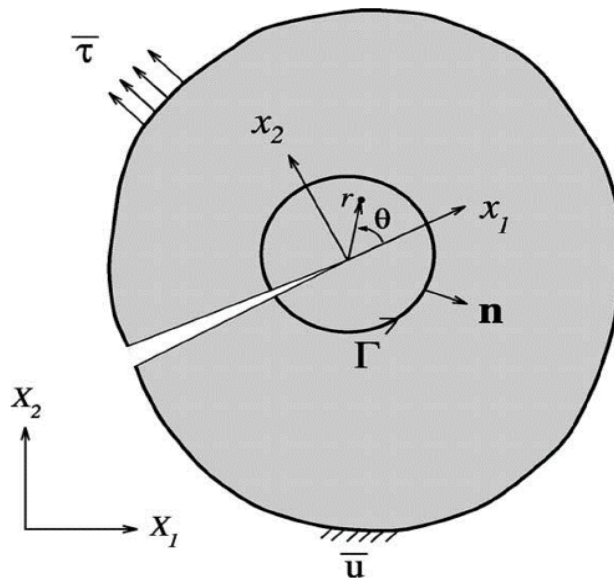
در روابط فوق  $P_{u,i,j}$  و  $P_{v,i,j}$ ، متغیرهای کنترل جابه‌جایی در روش آنالیز ایزوژئومتریک هستند. همچنین در روش آنالیز ایزوژئومتریک تقریب هندسه نیز با استفاده از توابع پایه‌ای که در تقریب متغیر اصلی مسئله به‌کار گرفته شد، انجام می‌گیرد. در شرایط آنالیز دوبعدی صفحه‌ای تقریب هندسه به‌صورت رابطه (۸) انجام می‌شود:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) X_{i,j} \quad (8)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) Y_{i,j}$$

در رابطه فوق  $\xi$  و  $\eta$  پارامترهایی با مقادیر بین صفر و یک هستند. در اینجا  $X_{i,j}$ ،  $Y_{i,j}$ ، مختصات نقاط کنترلی صفحه حل شده که همان  $P_{u,i,j}$ ،  $P_{v,i,j}$  هستند. همان‌طور که در روابط فوق مشاهده می‌شود تمام متغیرها برحسب پارامترهای  $\xi$  و  $\eta$  نوشته شده است. این موضوع مشابه نگاشت به المان واحد در اجزای محدود است. ماتریس ژاکوبین به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$



شکل ۳- نمایش عمومی جسم حاوی ترک، مختصات قطبی نسبت به نوک ترک و مسیر انتگرال‌گیری حول نوک ترک

#### ۴-۱- انتگرال M برای محاسبه ضرایب شدت تنش

در مطالعه حاضر با استفاده از روش برون‌یابی تنش و همچنین روش انتگرال اندرکنش<sup>۲۶</sup> (انتگرال M) به محاسبه فاکتورهای شدت تنش پرداخته شده است. روش انتگرال اندرکنش اولین بار توسط یاو و همکاران برای مسائل با مود مرکب در مصالح ایزوتروپیک معرفی گردید [۳۲].

انتگرال M از انتگرال مستقل از مسیر J برای دو وضعیت ممکن از یک جسم الاستیک ترک‌دار به دست می‌آید. انتگرال J توسط رایس توسعه داده شد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (12)$$

که مسیر انتگرال‌گیری  $\Gamma$  در شکل (۳) نشان داده شده است.  $W = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  بوده و به عنوان دانسیته انرژی کرنشی تعریف می‌شود.  $n_i$  بردار نرمال بیرونی بر مسیر انتگرال‌گیری،  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  بردار نیروهای گسترده،  $u_i$  بردار جابه‌جایی و  $ds$  جزء دیفرانسیلی در امتداد مسیر انتگرال‌گیری هستند.

در روش انتگرال اندرکنش، یک فضای کمکی تعریف می‌شود و بر فضای اصلی مسئله تحمیل می‌گردد. فضای کمکی

تنش و جابه‌جایی‌ها به نحوی انتخاب می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی مسئله بدون نیرو بر سطوح ترک را در دامنه معادل در انتگرال‌گیری عددی پیرامون ترک ارضا نماید (در بخش ضمایم). در واقع مزیت عمده روش انتگرال اندرکنش، محاسبه هم‌زمان فاکتور شدت تنش برای مود مرکب بارگذاری است. در این مطالعه از معادلات کمکی تنش و جابه‌جایی به دست آمده توسط ویلیامز و وسترگارد استفاده می‌شود. برای بیان فرمولاسیون روش انتگرال M بالانویس "۱" در جملات  $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  جهت نمایش وضعیت اصلی و بالانویس "۲" در جملات  $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$  برای نمایش وضعیت کمکی است [۳۳]. پس از تعریف فضای حل اصلی و کمکی، برهم‌نهی آنها انجام گرفته و سپس مقادیر فاکتور شدت تنش براساس رابطه بین انتگرال J و فاکتورهای شدت تنش به دست می‌آیند.

عبارت  $W^{(1,2)}$  تحت عنوان دانسیته انرژی کرنشی تعریف شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (13)$$

از آنجا که دو حالت ترک روی هم‌گذاری شده، پس می‌توان آنها



را به صورت زیر نوشت:

$$J^{(1+\nu)} = \frac{\left(K_I^{(1)} + K_I^{(\nu)}\right)^2}{E_{eff}} + \frac{\left(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(\nu)}\right)^2}{E_{eff}} \quad (14)$$

با مقداری محاسبات و جایگذاری در روابط فوق چنین نتیجه می شود:

$$M^{(1, \nu)} = \frac{\nu \left(K_I^{(1)} K_I^{(\nu)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(\nu)}\right)}{E_{eff}} \quad (15)$$

در انتها فاکتور شدت تنش را برای وضعیت تنش موجود می توان با جداسازی دو مود شکست از یکدیگر به دست آورد. برای مثال با قرار دادن  $K_I^{(\nu)} = 1, K_{II}^{(\nu)} = 0$  مسئله برای به دست آوردن  $K_I^{(1)}$  حل می گردد. به طور مشابه می توان  $K_{II}^{(1)}$  را نیز به دست آورد:

$$K_I^{(1)} = \frac{I^{(1, \text{Mode I})} E_{eff}}{\nu}; K_{II}^{(1)} = \frac{I^{(1, \text{Mode II})} E_{eff}}{\nu} \quad (16)$$

در روابط فوق  $E_{eff}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{eff} = \begin{cases} E, & \text{plane stress} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{plane strain} \end{cases} \quad (17)$$

رابطه (۱۲) برای انتگرال اندرکنش، انتگرال روی مسیر است که به علت نتایج بهتر، دقیق تر و پایدارتر انتگرال روی سطح، عبارت انتگرالی روی مسیر به انتگرال روی سطح بازنویسی می شود. با تعریف تابع  $q_1$  به نحوی که بر روی مسیر  $I_1$  صفر و بر روی مسیر  $I_2$  یک و در محدوده ناحیه A مشتق پذیر باشد (شکل (۴))، انتگرال اندرکنش بر روی سطح معادل به صورت زیر تعریف می شود:

$$M^{(1, \nu)} = \int_A \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(\nu)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(\nu)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1, \nu)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \quad (18)$$

که در رابطه فوق  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر است.

محاسبه انتگرال اندرکنش در یک حلقه از المان ها که در اطراف نوک ترک قرار گرفته اند، انجام می گیرد. المان های موجود در این حلقه مانند یک جسم صلب حرکت می کنند.

برای تمامی المان های موجود در این حلقه مقدار تابع  $q_1$  برابر واحد است لذا مشتق تابع  $q_1$  نسبت به  $x_j$  صفر خواهد شد. از طرفی برای تمامی المان های خارج از حلقه مفروض مقدار تابع  $q_1$  صفر بوده، پس مجدداً مشتق تابع  $q_1$  صفر خواهد بود. المان هایی که در انتگرال گیری اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می گیرند به صورت رابطه زیر تعیین می شوند:

$$\text{Radius} = c \times \sqrt{\text{Elemental Area}}; c = 1, \dots, 4 \quad (19)$$

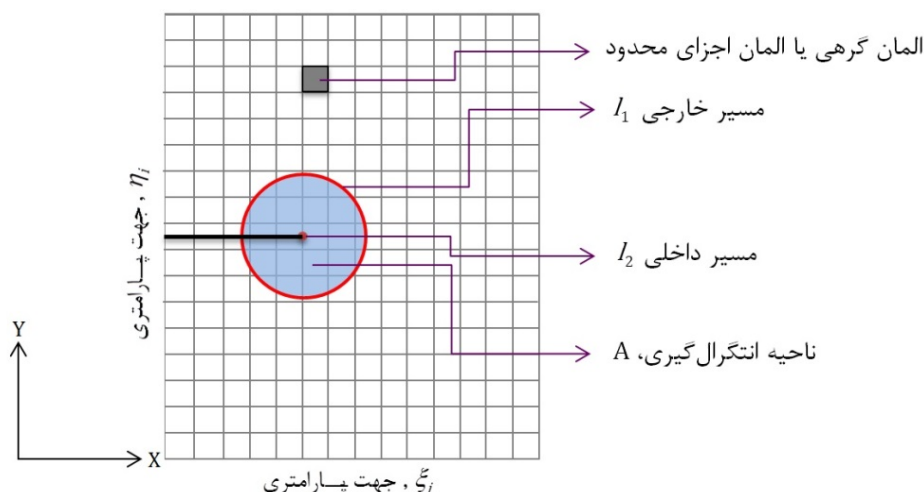
که  $c$  ضریبی است بین یک تا چهار. روش برون یابی تنش در صفحه مقابل نوک ترک روش دیگری است که می توان از آن جهت محاسبه فاکتور شدت تنش استفاده نمود. در این روش مقدار فاکتور شدت تنش بر اساس میزان تنش محاسبه شده در همسایگی نوک ترک به دست آورده می شود اما از آن جهت که مقدار تنش در نوک ترک دچار تکینگی است، باید از برون یابی فاکتور شدت تنش استفاده نمود و برای نوک ترک مقدار فاکتور شدت تنش را محاسبه کرد. محاسبه فاکتور شدت تنش به روش مستقیم مطابق رابطه زیر است:

$$K_I = \sigma_{yy} \times \sqrt{2\pi r} \quad (20)$$

#### ۴-۲- روابط تجربی - تحلیلی برآورد فاکتور شدت تنش

در حالت کلی برای برخی از حالات ایده آل شده و مطابق شرایط هندسی و بارگذاری مشخص حل تجربی - تحلیلی برای محاسبه فاکتور شدت تنش ارائه شده است که در این بخش مختصراً به آن روابط اشاره خواهد شد.

روابط مورد استفاده شامل دامنه های حاوی ترک وسط (رابطه (۲۱))، ترک لبه ای (رابطه (۲۲)) و دو ترک لبه ای (رابطه (۲۳)) است که در ادامه به ترتیب روابط محاسباتی تحلیلی فاکتور شدت تنش برای آنها ارائه می گردد. همچنین در شکل (۵) پارامترها و شرایط هندسی دامنه جهت محاسبه فاکتور شدت تنش تحلیلی - تجربی نمایش داده شده است.



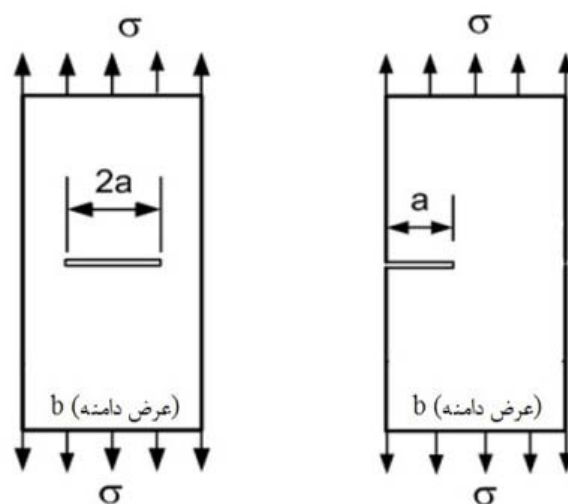
شکل ۴- مسیرها برای انتگرال روی سطح انتگرال اندرکنش

### ۵- اصول روش اجزای محدود توسعه یافته

به طور کلی روش اجزای محدود توسعه یافته برپایه مفهوم پیکره بندی واحد در غنی سازی تقریب اجزای محدود استاندارد که در برگیرنده اثرات تکنیکی یا ناپیوستگی های دامنه اطراف یک ترک است، استوار است [۱۵ و ۱۶]. روش اجزای محدود توسعه یافته به ناپیوستگی ها اجازه می دهد تا با پیکره بندی واحد اجزای محدود به صورت مستقل از شبکه اجزای محدود نمایش داده شوند. در این روش هرگونه ناپیوستگی با هر زاویه ای مستقل از شبکه اجزای محدود با فرایند غنی سازی المان های قطع شده با ترک به وسیله توابع غنی سازی ارضا کننده رفتار ناپیوسته و درجات آزادی اضافی، مدل می شوند. در روش اجزای محدود توسعه یافته برای یافتن جابه جایی نقطه  $\mathbf{x}$ ، واقع در دامنه، از تقریب مطابق رابطه (۲۴) استفاده می شود. به عبارت دیگر مقادیر توابع شکل اجزای محدود استاندارد در توابع غنی سازی ضرب می شوند:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Omega} N_I(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{u}_I + \sum_{I \in \Omega_d} v(x) \mathbf{a}_I \right] \quad (24)$$

که در رابطه فوق  $\Omega$  بیانگر کل دامنه،  $\Omega_d$  دامنه حاوی ناپیوستگی ها،  $N_I(\mathbf{x})$  توابع شکل اجزای محدود و  $v(x)$  تابع غنی سازی ناپیوستگی و  $\mathbf{u}_I$  و  $\mathbf{a}_I$  به ترتیب درجات آزادی



شکل ۵- معرفی پارامترها و شرایط هندسی

در محاسبه فاکتور شدت تنش تحلیلی

$$K_I = \left[ 1 + 0.256 \left( \frac{a}{b} \right) - 1.152 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1.2/2 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

$$K_I = \left[ 1.12 - 0.23 \left( \frac{a}{b} \right) + 1.0/56 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 21/74 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 30/42 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (22)$$

$$K_I = \left[ 1.12 - 0.2 \left( \frac{a}{b} \right) + 1/2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 1/93 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (23)$$

استاندارد و غنی شده هستند. درحالتی که  $\Omega \cap \Omega_d = \emptyset$  باشد توابع غنی کننده  $V(x)$  حذف می‌شوند. برای مدل کردن ترک در مصالح همگن، دو بخش غنی‌سازی وجود دارد. دو بخش غنی‌سازی شامل، غنی‌سازی المان‌های نوک ترک و همچنین تابع هویساید<sup>۲۷</sup> برای المان‌هایی که با بدنه ترک قطع شده باشند. تابع هویساید در واقع یک تابع علامت است که در نمایش ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته به‌کار گرفته می‌شود [۳۴-۳۷]. در شکل (۶) نحوه غنی‌سازی نقاط متأثر از نوک و بدنه ترک در خلال چند مرحله مدل‌سازی رشد ترک نشان داده شده است.

برای المان‌هایی که کاملاً با یک ترک قطع شده باشند از تابع غنی‌سازی هویساید به‌شکل زیر استفاده می‌شود. در نتیجه یک ناپیوستگی به‌صورت ضمنی به دامنه اجزای محدود اضافه می‌شود [۳۵ و ۳۶]:

$$h(x) = \begin{cases} +1 & \text{Above Crack} \\ -1 & \text{Below Crack} \end{cases} \quad (25)$$

برای شرایطی که المان حاوی نوک ترک باشد از توابعی استفاده می‌شود که توسط فلمینگ برای نمایش جابه‌جایی نوک ترک در روش بدون المان گالرکین و روابطی که توسط بلیچکو تکرار شده‌اند به‌کار می‌روند [۳۸ و ۳۹]. توابع غنی‌سازی گره‌های متأثر از نوک ترک به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F_\alpha(r, \theta), \alpha = 1, 2, 3, 4 = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{4}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{4}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{4} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{4} \sin \theta \right] \quad (26)$$

که در رابطه فوق  $r$  و  $\theta$  مختصات قطبی با مرکزیت نوک ترک هستند. درحالتی که نیاز باشد تا یک گره با هر دو تابع، غنی‌سازی گردد، فقط از تابع غنی‌سازی مربوط به نوک ترک مطابق با رابطه (۲۶) استفاده می‌شود.

## ۶- اصول روش مجموعه تراز

یکی از جنبه‌های مهم در مواجهه با مرز ناپیوستگی  $\Gamma_d$ ،

دنبال کردن تغییرات آن مرز است. روش مجموعه تراز<sup>۲۸</sup> یک روش محاسباتی برای دنبال نمودن مرز به‌شمار می‌آید. در این روش به‌جای دنبال کردن خود مرز، یک منحنی پایه انتخاب و بر روی یک سطح ایجاد می‌شود [۴۰-۴۲]. در واقع تابع روش مجموعه تراز در ترکیب با روش اجزای محدود توسعه یافته به‌منظور نمایش مرز مصالح همانند هندسه ترک به‌کار گرفته خواهد شد.

تابع مجموعه تراز  $\phi(x(t), t)$  یک تابع پیوسته است که در آن  $x(t)$  معرف یک نقطه در دامنه  $\Omega$  است. تابع مجموعه تراز دارای ویژگی‌هایی به‌قرار رابطه (۲۷) است:

$$\begin{aligned} \phi(x(t), t) &< 0 & \text{for } x \in \Omega \\ \phi(x(t), t) &> 0 & \text{for } x \notin \Omega \\ \phi(x(t), t) &= 0 & \text{for } x \in \Gamma_d \end{aligned} \quad (27)$$

بنابراین مرز مورد نظر در هر زمان  $t$ ، با یافتن  $x(t)$  به‌نحوی که معادله (۲۸) را اقلان نماید جانمایی می‌شود:

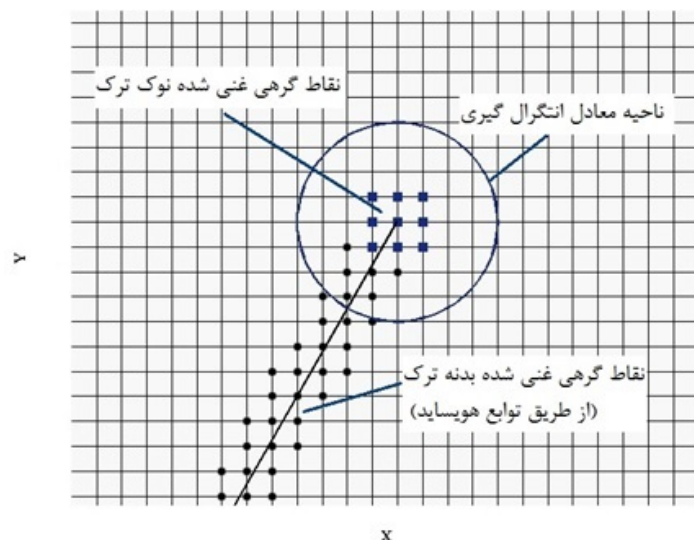
$$\phi(x(t), t) = 0 \quad (28)$$

بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط زیر مطابق با رابطه (۲۹) صادق باشد:

$$\begin{cases} \phi(x(t), t) \leq 0 \\ \psi(x(t), t) = 0 \\ \phi_{,i} \psi_{,i} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

در این روش مقادیر توابع مجموعه تراز فقط در نقاط ذخیره می‌شوند. پس با استفاده از همان توابع شکل اجزای محدود می‌توان مقادیر توابع را در شبکه اجزای محدود به‌دست آورد [۲۳].

فرایند تعیین خودکار نقاط گرهی، که غنی‌سازی می‌بایست در خصوص آنها انجام پذیرد، از طریق توابع مجموعه تراز انجام می‌گیرد. بدین منظور ابتدا شعاع پهنای باند اطراف نوک ترک محاسبه می‌شود. پس از آن طول و به‌عبارتی فواصل نوک‌های ترک نسبت به یکدیگر به‌دست آورده می‌شود. از اطلاعات به‌دست آمده زاویه فرارگیری ترک در دامنه مشخص شده و براساس طول ترک و پهنای باند، که خود تابع



شکل ۶- نمایش گره‌های متأثر از ترک در شبکه اجزای محدود و ناحیه انتگرال گیری

است. همچنین نتایج حاصل از محاسبه فاکتور شدت تنش با روش‌های تحلیلی، برون‌یابی تنش و نیز روش انتگرال  $M$  نشان شده است. در این مطالعه برای مقایسه توانایی روش آنالیز ایزوژئومتریکی در مکانیک شکست از مقادیر مختلف گسسته‌سازی دامنه در روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده است. تمامی مثال‌های عددی در این بخش، براساس کشش واحد یکنواخت به‌دست آمده است. برای تمامی مثال‌های حل شده، مشخصات مصالح برای رفتار در محدوده الاستیک خطی، از مقادیر  $\nu = 0/3$  ،  $E = 10^7$  (MPa) برای نسبت پواسون و مدول یانگ در رفتار کرنش صفحه‌ای استفاده شده است.

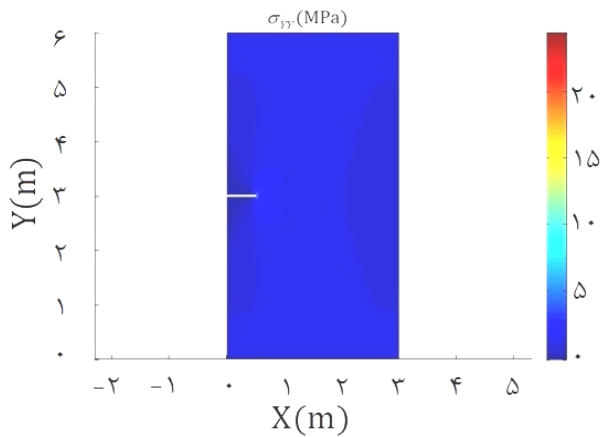
#### ۷-۱- مثال اول: ترک لبه‌ای

در بخش اول دامنه‌ای با یک ترک لبه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته و در بخش دوم به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریکی به مدل‌سازی دامنه مورد نظر پرداخته می‌شود. ابعاد دامنه به عرض ۳ و طول ۶ بوده و گسسته‌سازی دامنه مورد مطالعه در آنالیز به روش اجزای محدود توسعه یافته در هر جهت با المان‌های مربعی به ابعاد مختلف صورت گرفته است. در بخش مثال‌های عددی نتایج حاصل از آنالیز اجزای

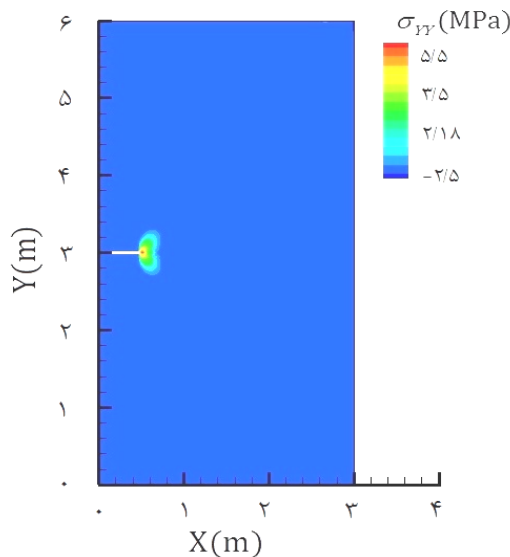
اندازه المان است، شعاع مربوط به جستجوی گرهی به منظور تعریف توابع مجموعه تراز مشخص می‌شود. سپس، فاصله همه نقاط دامنه نسبت به نوک ترک تعیین و نسبت به مختصات نوک ترک محلی می‌شوند. با داشتن بردار فاصله نقاط نسبت به نوک ترک جستجوی مربوط به تعیین نقاط گرهی که در شعاع تعیین شده قرار دارند انجام می‌پذیرد. پس از آن گره‌هایی که در شعاع تعریف شده قرار گرفته‌اند تعیین شده و به محاسبه توابع مجموعه تراز پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در روش به کار گرفته شده توابع مجموعه تراز تنها برای گره‌های واقع در شعاع پهنای باند محاسبه شده است. آنگاه به منظور تعیین شماره گره المان‌هایی که در پهنای باند قرار گرفته‌اند توابع مجموعه تراز گرهی غیرصفر پیدا شده و شماره گره کلی منحصر به فرد منسوب به آن گره مشخص می‌شود.

#### ۷- نتایج آنالیز عددی

در ابتدای این بخش باید اشاره شود که تمامی نتایج عددی حاصل، براساس برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار MATLAB هستند. در این قسمت به مدل‌سازی محیط‌های حاوی ناپوستگی به صورت ترک لبه‌ای و وسط‌چین پرداخته شده



شکل ۷- نمایش توزیع تنش  $\sigma_{yy}$ ، مدل با ترک لبه‌ای، روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۸- نمایش توزیع تنش  $\sigma_{yy}$ ، مدل با ترک لبه‌ای، روش آنالیز ایزوژئومتریکی (رنگی در نسخه الکترونیکی)

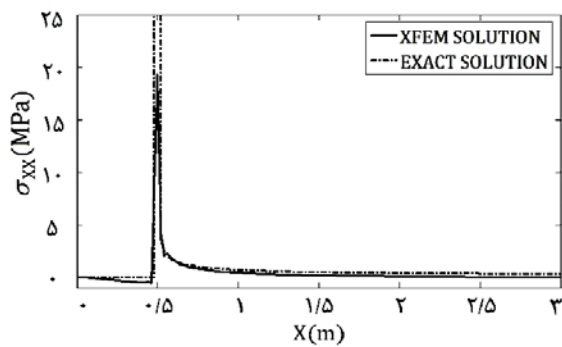
پارامتری،  $\xi$ ،  $\eta$ ، به ترتیب در هر دو جهت  $x$  و  $y$  به نحوی در نظر گرفته شده است که در مختصات نوک ترک بیشترین تمرکز مقادیر گرهی و همچنین نقاط کنترلی وجود داشته باشد.

از طرفی به منظور بررسی صحت و دقت هر دو روش عددی در مدل‌سازی ناپیوستگی ترک، از حل دقیق مطابق

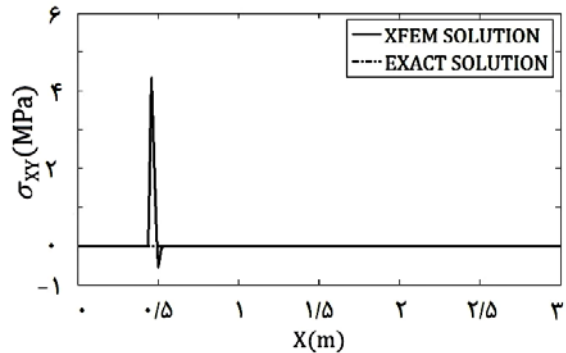
محدود توسعه یافته برای بهترین حالت ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که به منظور افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک از روش زیر مثلث‌سازی استفاده شده است. با کمک تابع زیر مثلث‌سازی ابتدا المان‌های غنی‌سازی شده متأثر از ترک، به المان مثلثی تقسیم شده و پس از آن از نقاط گوسی جدید در انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود تا دقت حل در منطقه متأثر از ترک بیشتر گردد.

با استفاده از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، توزیع تنش مطابق شکل (۷) با ترک لبه‌ای به دست آمده است. لازم به ذکر است که چون دامنه مورد مطالعه تحت کشش یکنواخت بوده مقادیر تنش  $\sigma_{yy}$  نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع تنش به دست آمده حاکی از تمرکز تنش در نوک ترک است. این توزیع تنش برای مدل اجزای محدود توسعه یافته با المان‌های مربعی به طول  $0.02$  ارائه شده که محل رخداد تمرکز تنش در آن مدل به وضوح مشخص است. در مدل اجزای محدود توسعه یافته از  $91022$  درجه آزادی استفاده شده است لذا شبکه اجزای محدود به کار گرفته شده یک شبکه بسیار ریز به شمار می‌آید.

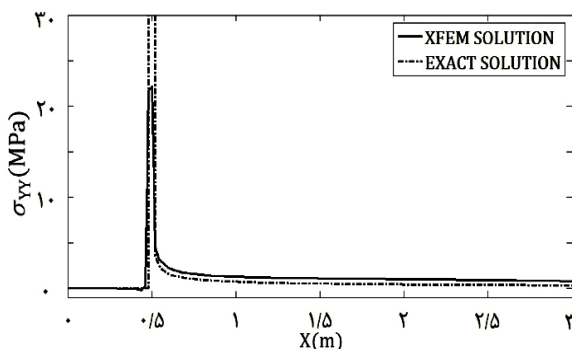
همچنین در شکل (۸) نتایج حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریکی برای صفحه حاوی ترک لبه‌ای ارائه شده است. در این مدل از تعداد  $1233$  نقطه کنترلی استفاده شده است. توابع تقریب پایه نریز در هر دو جهت  $x$  و  $y$  از مرتبه  $3$  انتخاب شده است. بنابراین بالاتر بودن مرتبه توابع تقریب باید بتواند تغییرات ناگهانی را به صورت هموارتر مدل‌سازی نماید. شبکه کنترلی در نظر گرفته شده برای این مثال در هر وصله  $29$ ،  $25$  در  $25$  بوده است. همچنین طول بردار گرهی در نظر گرفته شده در هر دو جهت  $x$  و  $y$  برابر با  $29$  است. طول بردار گرهی برابر با  $k = n + p + 1$  در نظر گرفته می‌شود. که در این رابطه  $n$ ، تعداد نقاط کنترلی در هر جهت،  $p$ ، مرتبه چندجمله‌ای هستند. لازم به ذکر است که انتخاب مختصات نقاط کنترلی در فضای فیزیکی و نیز موقعیت مقادیر گرهی در فضای



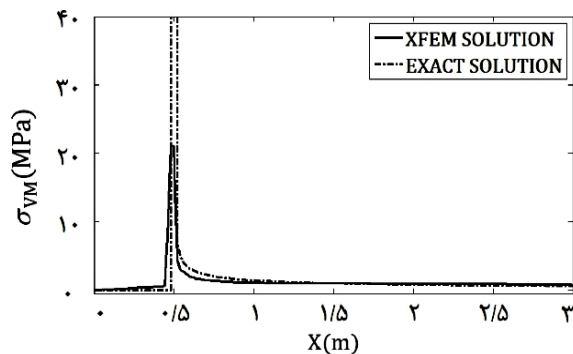
(ب) توزیع تنش  $\sigma_{xx}$



(الف) توزیع تنش  $\sigma_{xy}$



(د) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$



(ج) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$

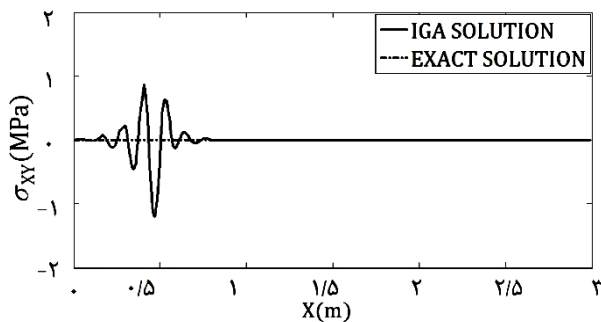
شکل ۹- مقایسه نتایج آنالیز اجزای محدود توسعه یافته و حل دقیق برای مسئله ترک لبه‌ای در ارتفاع گذرنده از خط نوک ترک

ترک و پس از آن تغییرات تنش تا انتهای دامنه منطبق با حل دقیق تداوم یافته است. نکته قابل ذکر این است که نتایج ارائه شده برای مدل اجزای محدود توسعه یافته با المان‌های به ابعاد  $0.02$  در هر دو جهت و در نتیجه میزان  $91022$  درجه آزادی است. باید اشاره شود که مسئله ترک لبه‌ای با المان‌های به ابعاد  $0.02$  تا  $0.2$  مدل‌سازی و بهترین آنها در این تحقیق ارائه شده است. مسلماً هر چقدر تعداد درجات آزادی مسئله بیشتر شده و از المان‌های ریزتری در گسسته‌سازی دامنه استفاده شود نتایج هموارتری به دست می‌آید. در عین حال نتایج ارائه شده برای مدل روش آنالیز ایزوژئومتری با  $1233$  نقطه کنترلی و در نتیجه  $2466$  درجه آزادی است. با توجه به اندازه مسئله مورد نظر میزان تلاش محاسباتی به کار گرفته شده در روش آنالیز ایزوژئومتری کمتر از مدل اجزای محدود توسعه یافته است.

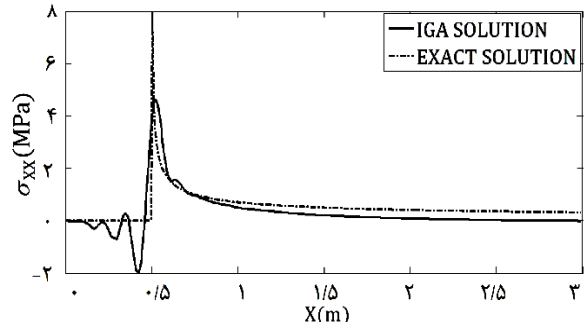
البته در روش آنالیز ایزوژئومتری نیز در موقعیت‌هایی که

رابطه (۱۱)، استفاده می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، هر دو روش در برآورد مقادیر تنش در جسم حاوی ترک لبه‌ای از دقت قابل توجهی برخوردار هستند. به عبارت دیگر هر دو روش موقعیت رخداد تمرکز تنش را به طور مطلوبی نمایش می‌دهند. از طرفی در فاصله پس از نوک ترک تا انتهای دامنه انطباق حل دقیق و حل عددی تقریباً کامل است. نکته قابل ذکر در اندک تغییرات تنش در نقاط کنترلی نزدیک به نوک ترک در صفحه پشت آن است که علت آن در نحوه گسسته‌سازی ترک در روش آنالیز ایزوژئومتری است. البته این وضعیت تنها در حداکثر دو نقطه کنترلی منتهی به نوک ترک ظاهر شده و پس از نوک ترک نتایج روند مطلوب خود را حفظ کرده است.

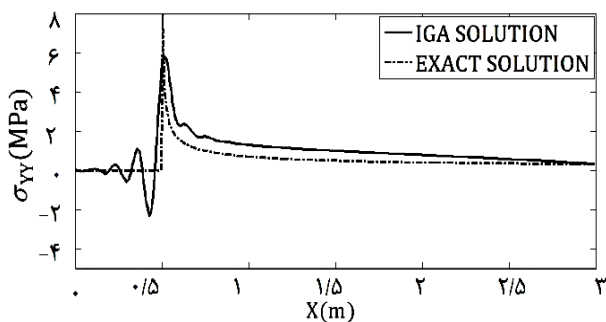
چنانچه در شکل (۹) مشاهده می‌شود، نحوه شبیه‌سازی دامنه با حضور ناپیوستگی با کمک روش اجزای محدود توسعه یافته به نحو مطلوبی تحقق یافته است. نقطه تمرکز تنش در نوک



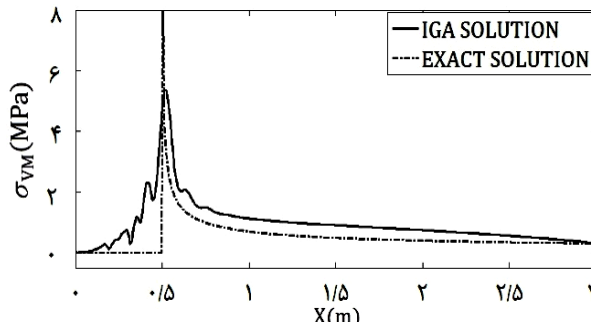
(ب) توزیع تنش  $\sigma_{xx}$



(الف) توزیع تنش  $\sigma_{xy}$



(د) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$



(ج) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$

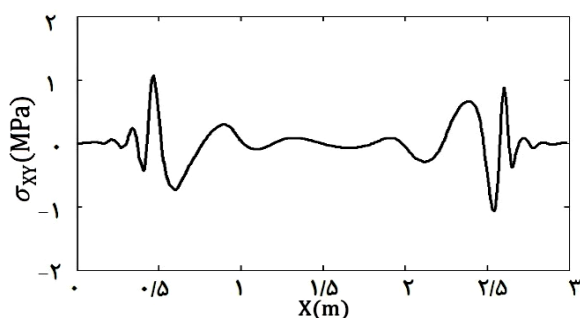
شکل ۱۰- مقایسه نتایج آنالیز روش ایزوژئومتریکی و حل دقیق برای مسئله ترک لبه‌ای در ارتفاع گذرنده از خط نوک ترک

جهت  $x$  و  $y$  منظور گردیده شبیه‌سازی شده است. نتایج حاصل برای دامنه‌ای با دو ترک لبه‌ای در روش آنالیز ایزوژئومتریکی در شکل (۱۱) ارائه شده است. همچنین در شکل (۱۲) چگونگی توزیع تنش  $\sigma_{yy}$  در صفحه‌ای با دو ترک لبه‌ای که از طریق روش آنالیز ایزوژئومتریکی به دست آمده است، نمایش داده می‌شود.

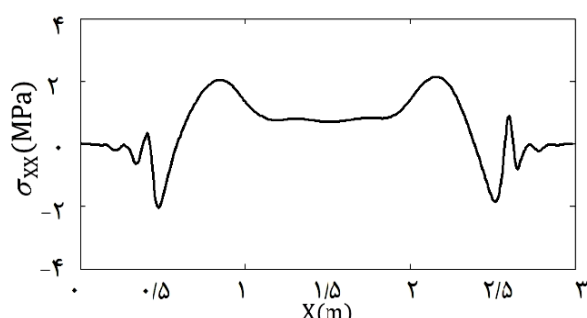
اما ماتریس سختی که در هر دو روش عددی ایجاد می‌شود، پُر<sup>۳۰</sup> یا متراکم<sup>۳۱</sup> نبوده و هر دو ماتریس دارای مقادیر زیاد صفر<sup>۳۲</sup> هستند. اما ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته از شرایط قطری بودن مناسب‌تری نسبت به ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریکی برخوردار است. به عنوان نمونه در مثال اول ماتریس سختی مربعی به دست آمده در روش آنالیز ایزوژئومتریکی با اندازه ۲۴۶۶، دارای پهنای باند بالایی ۱۵۷ و پهنای باند پایین ۱۳۲۴ است. در حالی که ماتریس سختی مربعی محاسبه شده به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته با اندازه

کنترل بر سطح تغییرات اهمیت بیشتری داشته باشد، چنانچه از نقاط کنترلی بیشتری استفاده شود دقت نتایج افزایش خواهد یافت. لذا در فرایند گسسته‌سازی فیزیکی و همچنین در تعیین فواصل مقادیر پارامتری در بردار گرهی مربوطه، با نزدیک شدن به نوک ترک از شبکه ریزتری استفاده شده است. در شکل (۱۰) نتایج حاصل از آنالیز دامنه‌ای با یک ترک لبه‌ای و مقایسه آنها با حل دقیق با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریکی نمایش داده شده است.

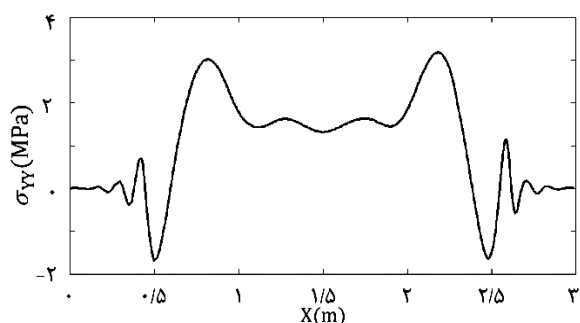
در مسئله با دو ترک لبه‌ای از ۱۲۴۳ نقطه کنترلی استفاده شده است که در مجموع ۲۴۸۶ درجه آزادی وجود داشته است. ماتریس سختی به دست آمده دارای پهنای باند بالایی ۱۵۷ و پهنای باند پایین ۱۳۴۴ بوده است. همواری مناسب نتایج نشان‌دهنده دقت قابل توجه روش آنالیز ایزوژئومتریکی در برآورد تغییرات ناگهانی در متغیر مسئله است. این مثال از طریق دو وصله که در هر وصله توابع پایه نرَبز با مرتبه ۳ برای هر دو



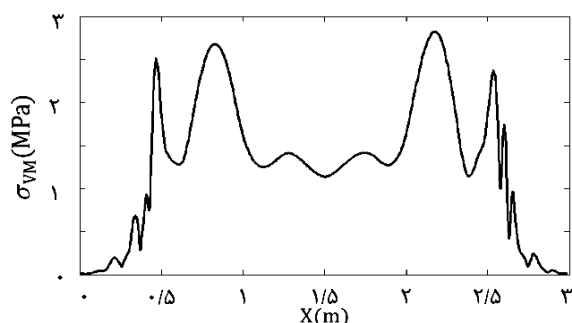
(ب) توزیع تنش  $\sigma_{xy}$



(الف) توزیع تنش  $\sigma_{xx}$



(د) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$



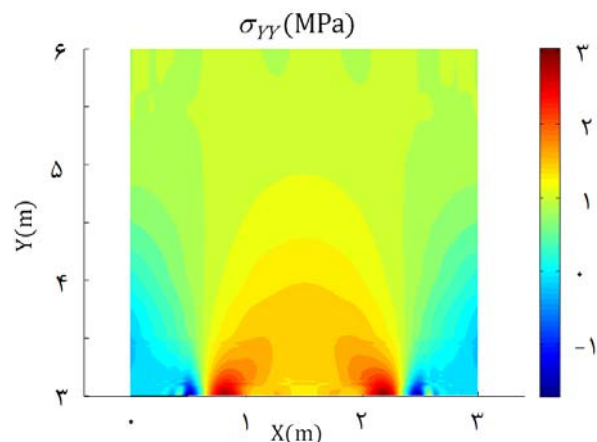
(ج) توزیع تنش  $\sigma_{vm}$

شکل ۱۱- روش آنالیز ایزوژئومتریکی؛ صفحه‌ای با دو ترک لبه‌ای، نمایش تنش‌های گذرنده از خط نوک ترک

ماتریسی اختلافاتی در نوع حل و یا حجم محاسبات جهت معکوس‌سازی ماتریس به‌دنبال خواهد داشت که البته شاید بتوان گفت به‌دلیل کوچکتر بودن ابعاد ماتریس در مقایسه با روش اجزای محدود توسعه یافته این اختلاف قابل اغماض باشد.

#### ۷-۲- مثال دوم: ترک وسط‌چین

در مثال دوم با کاربرد هر دو روش عددی اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژئومتریکی به مدل‌سازی دامنه‌ای با یک ترک وسط‌چین پرداخته می‌شود. ابعاد دامنه به عرض ۳ و ارتفاع ۶ بوده و گسسته‌سازی دامنه مورد مطالعه در آنالیز به روش اجزای محدود توسعه یافته در هر جهت با المان‌های مربعی به ابعاد مختلف صورت گرفته است. در بخش مثال‌های عددی نتایج حاصل از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته برای بهترین حالت ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که به‌منظور افزایش دقت

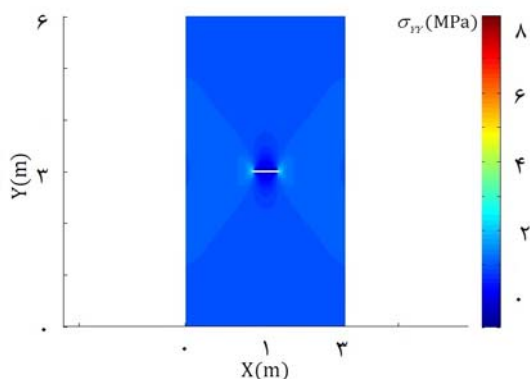


شکل ۱۲- توزیع تنش  $\sigma_{yy}$  در روش آنالیز

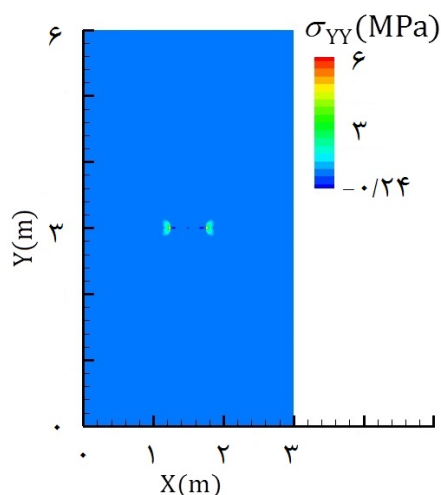
ایزوژئومتریکی برای دامنه‌ای با دو ترک لبه‌ای

۹۱۰۲۲، دارای پهنای باند بالایی ۴۶۲۲۷ و پهنای باند پایین ۴۶۲۲۷ بوده است. به‌عبارت دیگر ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریکی پُرتر از ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته است. این مسئله به خودی‌خود به‌لحاظ محاسبات





شکل ۱۳- نمایش توزیع تنش  $\sigma_{yy}$ ، مدل با ترک وسط‌چین، روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته (رنگی در نسخه الکترونیکی)



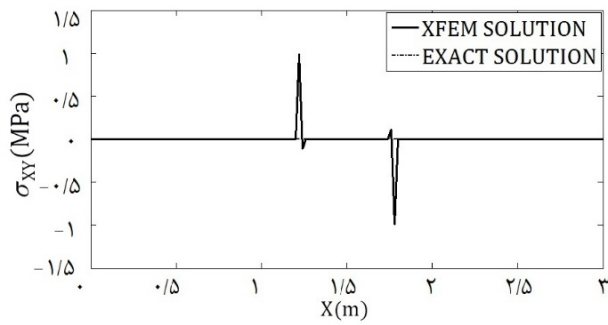
شکل ۱۴- نمایش توزیع تنش  $\sigma_{yy}$ ، مدل با ترک وسط‌چین، روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته (رنگی در نسخه الکترونیکی)

روش آنالیز اجزای محدود با ترک وسط‌چین توسعه یافته در ادامه جهت مشخص شدن چگونگی برآورد توزیع تنش در هر دو روش عددی، وضعیت تنش در صفحه گذرنده از نوک ترک نمایش داده شده و با حل دقیق مقایسه می‌گردد. البته لازم به ذکر است که نتایج مقایسه‌ای حل دقیق از نوک دوم ترک تا انتهای دامنه ارائه می‌گردد. شکل (۱۵) تغییرات تنش به دست آمده در روش اجزای محدود توسعه یافته را برخط گذرنده از نوک‌های ترک، در عرض دامنه نشان می‌دهند. از طرفی شکل (۱۶) تغییرات تنش به دست آمده در روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته را برخط

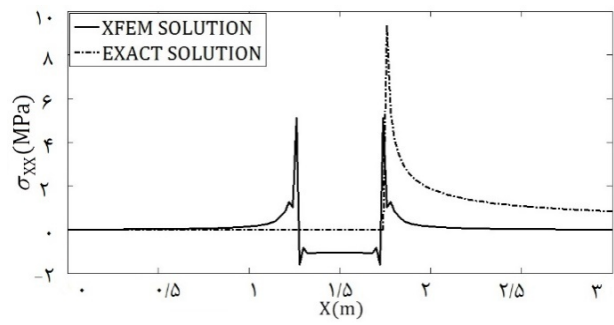
در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک از روش زیرماتریک‌سازی استفاده می‌گردد.

در مثال حاضر به شبیه‌سازی ترک وسط به طول ۰/۵ در میانه دامنه پرداخته می‌شود. بنابراین نوک اول ترک در عرض ۱/۲۵ که معادل با ۰/۴۱۶ مقدار پارامتری است و نوک دوم ترک در عرض ۱/۷۵ که معادل ۰/۵۸۳ مقدار پارامتری است قرار دارد.

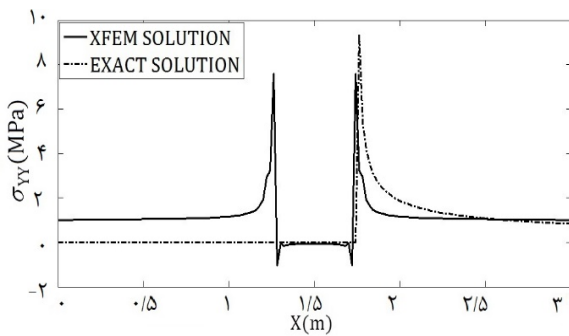
نتایج حاصل از مدل‌سازی با روش آنالیز اجزای محدود متریک به وسیله ۱۲۳۰ و ۴۰۱۰ نقطه کنترلی، که به ترتیب دارای ۲۴۶۰ و ۸۰۲۰ درجه آزادی هستند و با استفاده از دو وصله (پیچ)، انجام گرفته است. ترک وسط‌چین در روش آنالیز اجزای محدود متریک از طریق تکرار نقاط کنترلی و در نتیجه ایجاد تکنیکی در ماتریس سختی صورت پذیرفته است. لازم به ذکر است که مدل‌سازی با تعداد نقاط کنترلی کمتر نیز ممکن است، اما جهت حصول نتایج مطلوب‌تر این تعداد نقطه کنترلی در نظر گرفته شده است. در مقایسه با مدل اجزای محدود توسعه یافته همواری نتایج توزیع تنش در حالت با درجات آزادی یکسان در روش آنالیز اجزای محدود متریک قابل توجه است؛ که علت در نحوه محاسبه و استخراج نتایج است. در روش آنالیز اجزای محدود متریک نتایج به دست آمده به صورت سطحی از نرَبز هستند که به طور پیوسته به دست می‌آید. لازم به ذکر است که سطح نرَبز از طریق موقعیت نقاط کنترلی به دست آورده می‌شود. سپس به منظور نمایش نتایج، می‌توان به مقدار دلخواه از این سطح پیوسته را استخراج نمود. اصولاً به طور کلی می‌توان گفت که براساس ویژگی‌های منحصر به فرد روش آنالیز اجزای محدود متریک، امکان مدل‌سازی بهتر و مطلوب‌تر تغییرات ناگهانی و شدید گرادینان یا تغییر شدید در مقادیر تنش و کرنش وجود دارد. نحوه توزیع تنش  $\sigma_{yy}$  برای صفحه‌ای با یک ترک میانی به کمک روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز اجزای محدود متریک به ترتیب در شکل (۱۳) و شکل (۱۴) نمایش داده شده است. در هر دو مثال ارائه شده شرایط ماتریس سختی مشابه مثال اول بوده و ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته از وضعیت قطری بودن مناسب‌تری نسبت به ماتریس سختی به دست آمده از



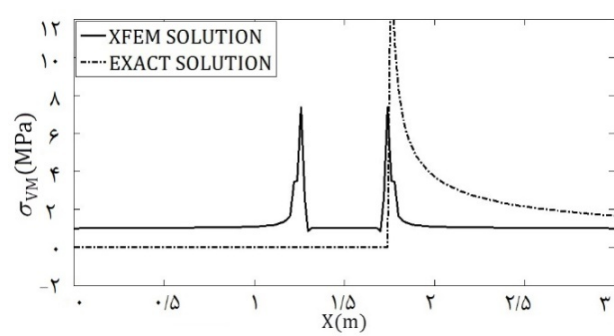
(ب) توزیع تنش  $\sigma_{xx}$



(الف) توزیع تنش  $\sigma_{xy}$

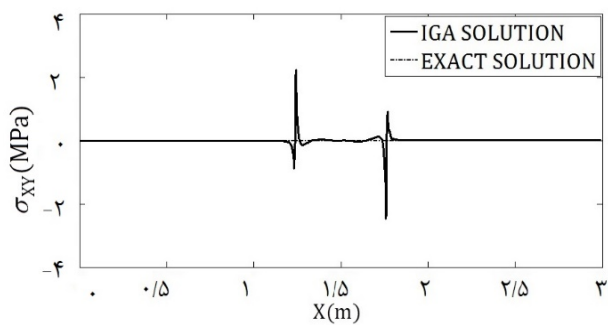


(د) توزیع تنش  $\sigma_{VM}$

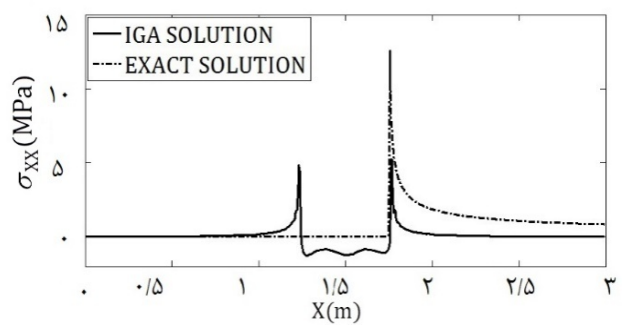


(ج) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$

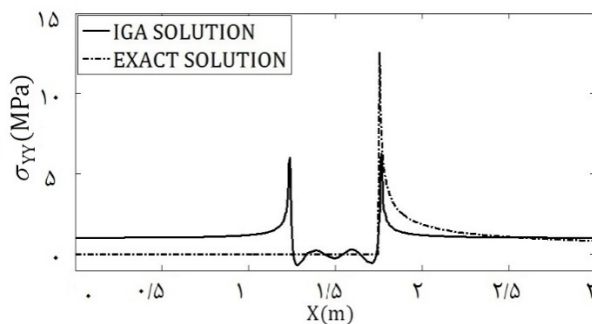
شکل ۱۵- نمایش تنش در خط گذرنده از نوک ترک وسط چین و مقایسه با حل دقیق، روش اجزای محدود توسعه یافته



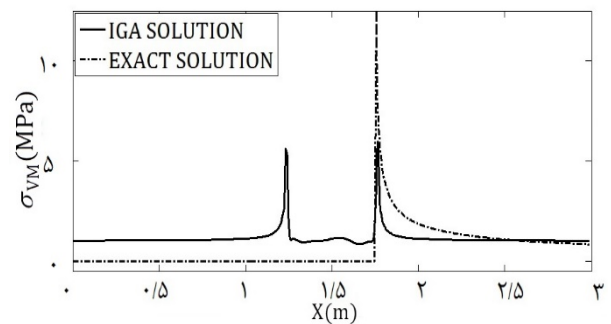
(ب) توزیع تنش  $\sigma_{xx}$



(الف) توزیع تنش  $\sigma_{xy}$



(د) توزیع تنش  $\sigma_{VM}$



(ج) توزیع تنش  $\sigma_{yy}$

شکل ۱۶- نمایش تنش در خط گذرنده از نوک ترک وسط چین و مقایسه با حل دقیق، روش آنالیز ایزوژئومتریک

جدول ۱- مشخصات ماتریس سختی و تلاش محاسباتی در روش‌های اجزای محدود توسعه یافته و آنالیز ایزوژئومتریکی

درجات آزادی	تلاش محاسباتی	شاخص سختی	پهنای باند		اندازه بعد المان مربعی	تشریح مدل	روش آنالیز
			عرض بالا	عرض پایین			
۱۰۴۴	$1/9 \times 10^8$	۱/۵۰	۵۹۱	۵۹۱	۰/۲	ترک لبه‌ای	
۳۸۶۲	$9/6 \times 10^9$	۱/۷۸	۲۰۶۷	۲۰۶۷	۰/۱	ترک لبه‌ای	
۱۴۸۵۲	$5/5 \times 10^{11}$	۱/۲۹	۷۷۰۷	۷۷۰۷	۰/۰۵	ترک لبه‌ای	
۳۳۰۴۲	$6/0 \times 10^{12}$	۱/۲۲	۱۶۹۴۷	۱۶۹۴۷	۰/۰۳۳	ترک لبه‌ای	
۵۸۴۳۲	$3/3 \times 10^{13}$	۱/۱۸	۲۹۷۸۷	۲۹۷۸۷	۰/۰۲۵	ترک لبه‌ای	اجزای محدود
۹۱۰۲۲	$1/3 \times 10^{14}$	۱/۱۱	۴۶۲۲۷	۴۶۲۲۷	۰/۰۲	ترک لبه‌ای	توسعه یافته
۳۸۸۴	$9/77 \times 10^9$	۱/۷۱	۲۰۴۹	۲۰۴۹	۰/۱	ترک میانی	(X-FEM)
۱۴۹۲۰	$5/5 \times 10^{11}$	۱/۳۰	۷۶۷۷	۷۶۷۷	۰/۰۵	ترک میانی	
۳۳۰۶۴	$6/0 \times 10^{12}$	۱/۲۲	۱۶۸۹۳	۱۶۸۹۳	۰/۰۳۳	ترک میانی	
۴۴۸۶۰	$1/5 \times 10^{13}$	۱/۲۰	۲۲۸۵۷	۲۲۸۵۷	۰/۰۲۸	ترک میانی	
۹۱۰۴۴	$1/3 \times 10^{14}$	۱/۱۲	۴۶۱۴۳	۴۶۱۴۳	۰/۰۲	ترک میانی	
۲۴۶۶	$2/5 \times 10^9$	۱/۵۶	۱۳۲۴	۱۵۷	متغیر	ترک لبه‌ای	آنالیز
۲۴۶۰	$2/48 \times 10^9$	۱/۸۵	۱۳۱۸	۱۵۷	متغیر	ترک میانی	ایزوژئومتریکی
۸۰۲۰	$8/6 \times 10^{10}$	۱/۶۹	۴۱۵۸	۲۷۷	متغیر	ترک میانی	(IGA)

گذرنده از نوک‌های ترک، در عرض دامنه نشان می‌دهند.

به‌منظور مقایسه شرایط ماتریس سختی در هر دو روش عددی مورد مطالعه، در جدول (۱)، مشخصات ماتریس سختی دامنه حاوی ترک لبه‌ای و میانی نشان داده شده است. منظور از شاخص سختی، نسبت حداکثر مقدار ویژه به حداقل مقدار ویژه در ماتریس سختی است. از طرفی در جدول (۲) خلاصه نتایج به‌دست آمده برای مقادیر فاکتور شدت تنش محاسبه شده نشان داده شده است. لازم به ذکر است که مقادیر فاکتور شدت تنش با هر دو روش پذیرفته شده، یعنی برون‌یابی تنش در نوک ترک و روش انتگرال، J محاسبه گردیده است. نتایج جدول (۲) برای شبکه اجزای محدود با اندازه‌های متفاوت و برای روش آنالیز ایزوژئومتریکی با تعداد نقاط کنترلی مختلف ارائه می‌شوند. همان‌گونه که در نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود با افزایش درجات آزادی دقت حل نیز افزایش می‌یابد.

دقت هر دو روش در محاسبه فاکتورهای شدت تنش قابل

توجه است. نکته قابل ذکر در محاسبات مربوط به شرایط تنش و در نتیجه برآورد فاکتور شدت تنش، اهمیت میزان درجات آزادی و متعاقباً تلاش محاسباتی مصرف شده در فرایند محاسبات است. در این بخش محاسبه فاکتور شدت تنش با در نظر گرفتن درجات آزادی مختلف در هر دو روش انجام شده و تلاش محاسباتی بر مبنای عملکرد با ممیز شناور<sup>۳۳</sup> (رابطه مربوط به عملکرد با ممیز شناور که نقش مهمی در مثلث‌سازی دارد در پیوست ارائه می‌گردد) تعیین می‌گردد. همچنین از روابط تجربی-تحلیلی که در بخش ۴-۲ ارائه شد برای به تصویر کشیدن پتانسیل هر دو روش در مکانیک شکست محاسباتی استفاده شده است. نتایج نشان‌دهنده آن است که هر چقدر میزان درجات آزادی در هر دو روش بیشتر شود، دقت آنها نیز در محاسبه فاکتور شدت تنش بالا می‌رود. علیرغم نقش درجات آزادی، در روش آنالیز ایزوژئومتریکی برای به‌دست آوردن نتایجی با دقت مشابه روش اجزای محدود توسعه یافته،

جدول ۲- نتایج محاسباتی فاکتور شدت تنش برای مدل اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژئومتریکی

روش آنالیز	تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	فاکتور شدت تنش	فاکتور شدت تنش
		تعداد نقاط کنترلی	تنش تئوری- تجربی	عددی
	ترک لبه‌ای	۰/۲	۱/۶۲۶۶	۱/۵۴۴۱
	ترک لبه‌ای	۰/۱	۱/۶۲۶۶	۱/۵۹۷۲
	ترک لبه‌ای	۰/۰۵	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۳۱
	ترک لبه‌ای	۰/۰۳۳	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۴۲
اجزای محدود توسعه یافته	ترک لبه‌ای	۰/۰۲۵	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۵۸
(X-FEM)	ترک لبه‌ای	۰/۰۲	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۹۱
	ترک میانی	۰/۱	۰/۹۰۴۳	۰/۷۴۲۱
	ترک میانی	۰/۰۵	۰/۹۰۴۳	۰/۸۷۳۸
	ترک میانی	۰/۰۳۳	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۱۲
	ترک میانی	۰/۰۲۸	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۸۹
	ترک میانی	۰/۰۲	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۵۴
آنالیز ایزوژئومتریکی	ترک لبه‌ای	۱۲۳۳	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۱۰
(IGA)	ترک میانی	۱۲۳۰	۰/۹۰۴۳	۰/۹۱۰۳
	ترک میانی	۴۰۱۰	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۷۰

ایزوژئومتریکی تولید ناپیوستگی بسیار مشخص است به نحوی که مهندسیین و محققین می‌توانند با اطلاعات کافی از موضوع روش آنالیز ایزوژئومتریکی به تولید محیط ناپیوسته بپردازند. بنابراین برای اینکه پلی بین روش عددی و کار مهندسی برقرار شود، در اینجا روشی بسیار کارا و قابل فهم در تولید ناپیوستگی را در روش آنالیز ایزوژئومتریکی بیان می‌شود. لازم به ذکر است که از این ویژگی روش آنالیز ایزوژئومتریکی می‌توان در مدل‌سازی مسئله رشد ترک بدون اینکه در فضای فیزیکی تغییری ایجاد شود، استفاده نمود.

در این روش منطقه ناپیوسته با استفاده از عملیاتی که در فضای پارامتری انجام می‌گیرد، ساخته می‌شود. همانطور که گفته شد در فضای پارامتری می‌توان درجه پیوستگی چندجمله‌ای تقریب را کنترل نمود. به عبارت دیگر کنترل درجه پیوستگی بین المانی مزیت خاص روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌شمار می‌آید که با استفاده از این قابلیت منحصر به فرد به تولید

در مجموع نیاز به نقاط کنترلی و در نتیجه درجات کمتری وجود دارد. در واقع توابع تقریب با ویژگی‌های اشاره شده از مرتبه ۳ همواری مناسبی از تغییرات تنش را در تمام دامنه و بالاخص در محل نوک ترک می‌دهد که به لحاظ محاسباتی حائز اهمیت است.

## ۸- مدل‌سازی ناحیه ناپیوسته با کنترل پیوستگی در

### فضای پارامتری روش آنالیز ایزوژئومتریکی

این موضوع که به صورت خاص در این مطالعه ارائه شده است یکی از توانایی‌های منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریکی محسوب می‌گردد. به طور کلی موضوع تولید منطقه متأثر از ناپیوستگی تحت عنوان مدل ناحیه چسباننده<sup>۳۴</sup>، شناخته می‌شود [۴۴ و ۴۵]. در تمامی روش‌های عددی تلاش برای یافتن راه‌حلی است که بتوان هرچه ساده‌تر این ناحیه را بر دامنه فیزیکی مسئله منطبق نمود. به‌طور کلی در روش آنالیز

مرز ناپیوستگی در هر موقعیتی از وصله پرداخته می‌شود. کنترل درجه پیوستگی چندجمله‌ای براساس میزان تکرار مقادیر گرهی موجود در بردار گرهی، که تولید کننده وصله هستند، انجام می‌گیرد. فضای پارامتری در روش آنالیز ایزوژئومتریک تصویر فضای فیزیکی مسئله است که با نگاهت توابع نریز به دست می‌آید. بنابراین با تکرار یک مقدار گرهی در یک مختصات مشخص در فضای پارامتری، به تعداد یکی بیشتر از مرتبه چندجمله‌ای تقریب، یک ناپیوستگی سراسری در کل دامنه ایجاد می‌شود.

در شکل (۱۷) نمای کلی از این موضوع نشان داده شده است. از سمت چپ به راست شکل (۱۷)، فضای اندیسی، فضای پارامتری و در انتها فضای فیزیکی نشان داده شده است. در نمایش فضای اندیسی به منظور فهم بهتر موضوع از تقسیمات یکسان استفاده می‌شود. بنابراین مقادیری که در هر دو جهت فضای اندیسی نشان داده شده است معرف مقادیر گرهی است که در بردار گرهی تولید کننده وصله به کار گرفته می‌شود. از طرفی فضای پارامتری نشان‌دهنده چگونگی المان‌بندی فضای فیزیکی است. به عبارت دیگر تعداد تقسیمات المانی انجام شده بر فضای فیزیکی از طریق فضای پارامتری مشخص می‌شود.

هدف اصلی این مطالعه بیان این قابلیت و نشان دادن اثرات کنترل درجه پیوستگی در روش آنالیز ایزوژئومتریک است. بنابراین انتظار می‌رود تا در نتایج حاصل از کرنش و تنش برای جسم مورد نظر با یک پرش مواجه باشیم. نکته قابل توجه دیگر در این است که ناپیوستگی‌های دلخواه را می‌توان تنها در یک وصله ایجاد و به این ترتیب در حجم محاسبات صرفه‌جویی نمود.

در ادامه برای مشخص‌تر شدن موضوع به مدل‌سازی دامنه‌ای با اعمال قانون فوق در تولید منطقه ناپیوسته پرداخته می‌شود. در این مثال دامنه‌ای با یک ناپیوستگی افقی سراسری تولید می‌شود. در این مثال دامنه تحت کشش یکنواخت قرار گرفته است. بردارهای گرهی در هر دو جهت به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته شده است. در این قابلیت با استفاده از یک وصله می‌توان دامنه‌ای را مدل نمود که به چندین بخش تقسیم

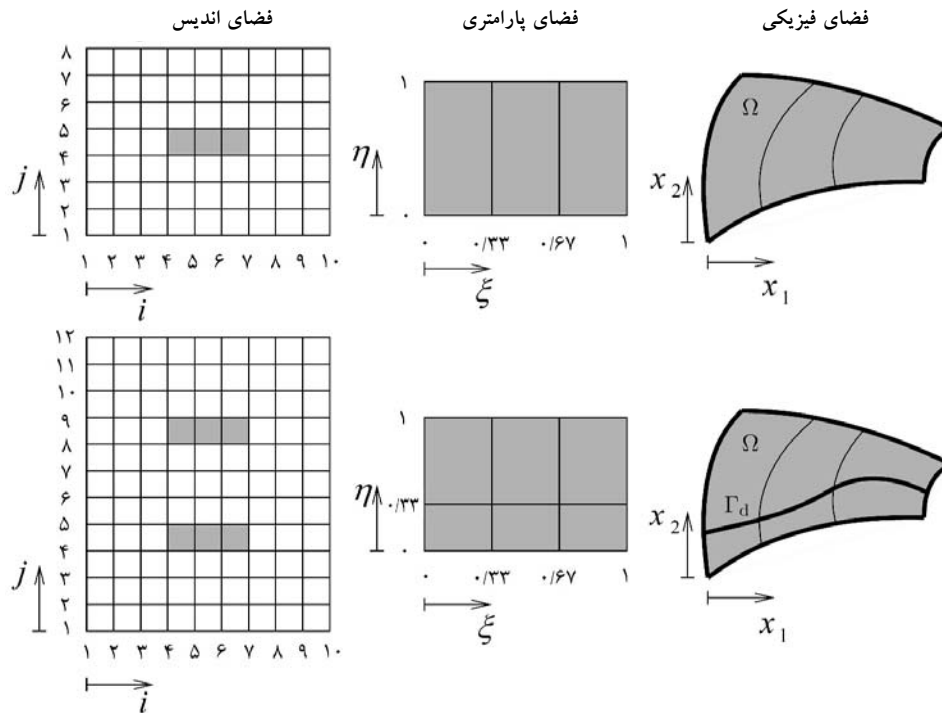
شده است. مطابق بردارهای گرهی ارائه شده در گسسته‌سازی فضای فیزیکی از ۳ المان گرهی در جهت  $x$  و ۲ المان گرهی در جهت  $y$  استفاده شده است. از طرفی در بردار گرهی  $\mathcal{H}$  در موقعیت پارامتری  $\eta = \eta_d = \frac{1}{3}$ ، که معادل  $7/3$  ارتفاع در فضای فیزیکی است، با تکرار ۴ بار در مقدار پارامتری  $0/333$ ، که این تعداد تکرار یکی بیشتر از مرتبه چندجمله‌ای تقریب است، یک ناپیوستگی سراسری در دامنه فیزیکی و تنها از طریق ویژگی کنترل پیوستگی در فضای پارامتری، ایجاد گردیده است. در شکل (۱۸) توابع نریز ناپیوسته در موقعیت پارامتری  $0/333$  ارتفاع صفحه ارائه می‌گردد:

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0/333, 0/666, 1, 1, 1, 1\} \quad (30)$$

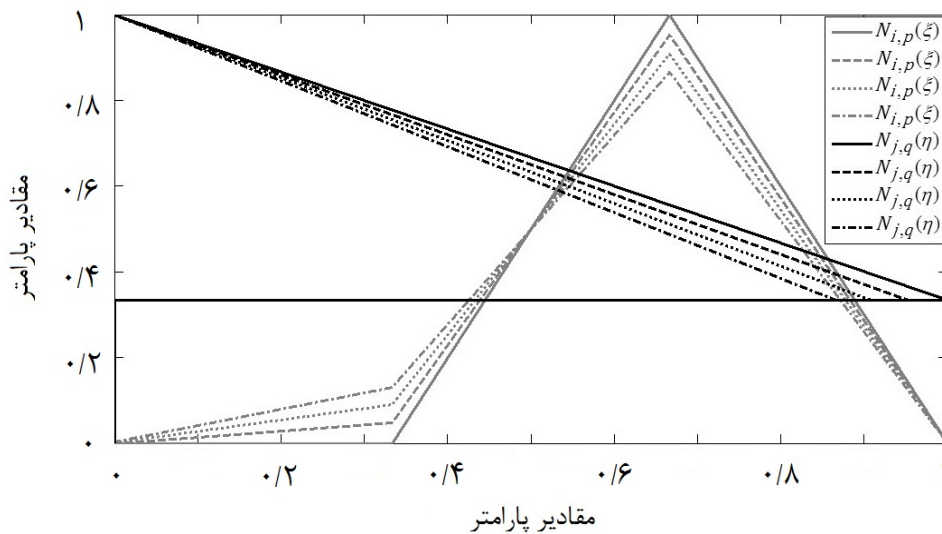
$$\mathcal{H} = \{0, 0, 0, 0, 0/333, 0/333, 0/333, 0/333, 1, 1, 1, 1\}$$

در فرمولاسیون منطقه متأثر از ناپیوستگی در وضعیت تغییر شکل‌های کوچک، پیوستگی بردار موقعیت  $x$  از طریق مقید نمودن موقعیت نقاط کنترلی و وزن آنها بر روی دو وجه ناپیوستگی تأمین می‌شوند. به عبارت دیگر قیدهای مربوطه از طریق مساوی قرار دادن موقعیت و همچنین وزن نقاط کنترلی متناظر بر دو سطح ترک اعمال می‌گردند. این قید در مورد میدان جابه‌جایی مورد نیاز نیست. از این رو، یک پرش در میدان جابه‌جایی‌ها در مرز ناپیوستگی میانی ( $\Gamma_d$ ) در فضای حل به دست می‌آید. این در حالی است که برای مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ، میدان موقعیت مادی  $x$ ، در وضعیت تغییر شکل یافته، ناپیوسته خواهد بود. لذا در چنین وضعیتی باید قیود به نحوی اعمال گردد تا پیوستگی نقاط مادی در حالت تغییر شکل نیافته را ارضا نماید. در چنین حالتی با یک سیستم معادلات غیرخطی مواجه خواهیم بود که باید از طریق یک فرایند تکرار شونده مانند نیوتن-رافسون حل شود.

در مدل نشان داده شده، که دارای عرض ۵ و ارتفاع ۷ است، در ارتفاع معادل  $1/3$ ، یک ناپیوستگی سراسری تولید شده است. نحوه توزیع کرنش برای شرایط مختلف نشان‌دهنده وجود یک لایه ناپیوسته می‌باشد. مطابق نتایج ارائه شده در شکل‌های (۱۹) و (۲۰) تأثیر وجود لایه مرزی تولید شده از



شکل ۱۷- تولید منطقه ناپیوسته سراسری با کنترل درجه پیوستگی در فضای پارامتری



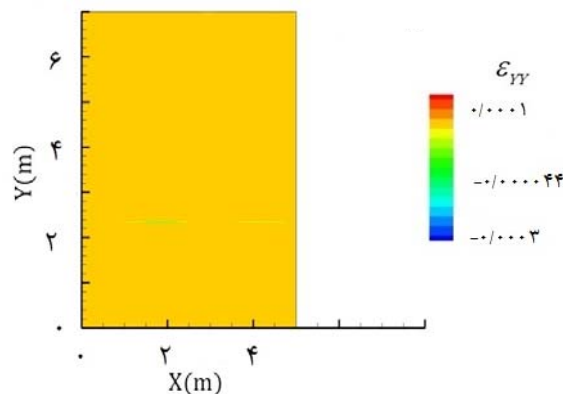
شکل ۱۸- نمایش توابع نریز و توابع پایه ناپیوسته نریز در مقدار پارامتری  $\eta = \frac{1}{3}$

به سوی محققین مختلف و بالاخص در زمینه آنالیزهای عددی برای مطالعات بیشتر باز می‌نماید. نکته مورد توجه در نمایش توزیع کرنش، پرش به وجود آمده در نتایج است که خود گواه وجود ناپیوستگی سراسری در

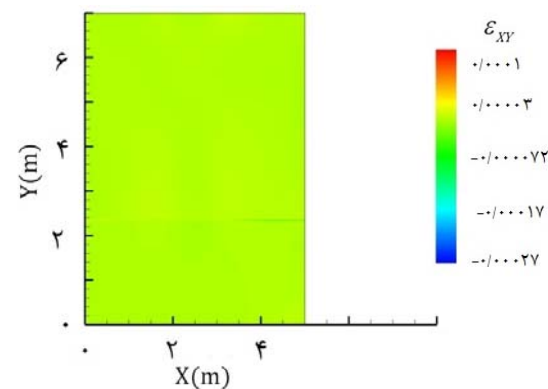
طریق فضای پارامتری روش آنالیز ایزوژئومتری یک مشاهده می‌گردد. باید اضافه نمود که این قابلیت منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتری یک امتیاز فوق‌العاده مفید در مدل‌سازی مسائل با لایه مرزی است. بنابراین این توانایی در پیچه‌ای را

اجزای محدود توسعه یافته دارای توانایی‌های قابل توجه در تولید منطقه ناپیوسته دارند. امکان استفاده از توابع پایه مرتبه بالاتر نیز در روش آنالیز ایزوژئومتریکی قابلیت بالایی برای روش آنالیز ایزوژئومتریکی در شبیه‌سازی تغییرات ناگهانی سطح تنش در مقایسه با روش اجزای محدود توسعه یافته، ایجاد نموده است. از این‌رو روش آنالیز ایزوژئومتریکی از پتانسیل لازم جهت تبدیل شدن به ابزاری نیرومند در موضوع مکانیک شکست محاسباتی برخوردار است. در این مطالعه با استفاده از توابع پایه مرتبه ۳ در روش آنالیز ایزوژئومتریکی به نتایجی با دقت بیشتر نسبت به مدل اجزای محدود توسعه یافته با همان تعداد درجات آزادی دست یافته‌ایم. از طرفی برتری در میزان همواری نتایج فضای تنش و کرنش در درجات آزادی یکسان با روش آنالیز ایزوژئومتریکی است.

به‌علاوه در روش آنالیز ایزوژئومتریکی نیاز به تولید شبکه المانی مشابه روش اجزای محدود از بین رفته که خود یک مزیت بزرگ در این روش به‌شمار می‌آید. بنابراین می‌توان با صرف زمانی کوتاه دامنه مورد نظر را با یک یا چند وصله تولید نمود. همچنین مقادیر محاسباتی فاکتور شدت تنش دقت مناسب و بالای روش آنالیز ایزوژئومتریکی را در برآورد فاکتورهای شدت تنش، با درجات آزادی کمتر و در نتیجه تلاش محاسباتی کمتر، نشان می‌دهد. همچنین در روش آنالیز ایزوژئومتریکی بر پایه نیز هندسه مسئله تقریباً به‌طور دقیق مدل شده، بنابراین خطای تقریب هندسه به حداقل می‌رسد در حالی که در روش اجزای محدود خطای تقریب هندسه و متغیر اصلی مسئله وجود دارد. به‌علاوه ویژگی‌های روش آنالیز ایزوژئومتریکی در تولید ناپیوستگی موجب استفاده آسان این روش در مسئله شکست شده است. در این مطالعه با استفاده از تکرار نقاط کنترلی در مرز وصله‌ها با پیوستگی  $C^0$  در یک موقعیت که به تولید ناپیوستگی به‌شکل ترک منجر می‌شود، پرداخته شد. در واقع این مزیت یک امکان منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌شمار می‌آید. همچنین روش آنالیز ایزوژئومتریکی توانایی قابل توجهی در



شکل ۱۹- نمایش نحوه توزیع کرنش  $\epsilon_{yy}$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)



شکل ۲۰- نمایش نحوه توزیع کرنش  $\epsilon_{xy}$  (رنگی در نسخه الکترونیکی)

جسم فیزیکی است. نکته قابل توجه در تمامی نتایج به‌دست آمده از تولید منطقه ناپیوسته سراسری به‌وسیله کنترل پیوستگی در فضای بردار گرهی روش آنالیز ایزوژئومتریکی در این است که جسم اولیه به دو یا چند قطعه مجزا از یکدیگر تفکیک شده و پرش به‌وجود آمده در نتایج تنش و کرنش گویای این واقعیت است. پرش به‌وجود آمده در نتایج معرف ایجاد ناپیوستگی در جسم فیزیکی اولیه بدون تغییر در دامنه فیزیکی مسئله است.

## ۹- نتیجه‌گیری

همانگونه که نشان داده شد، هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریکی و

شامل فضای خالی یا اینکلوژن<sup>۳۵</sup> (جاسازی مصالحی در یک ماتریس در مصالح دیگر) را نداشته و نیازمند استفاده از چندین وصله در مدل‌سازی هندسی است. همچنین ماتریس سختی به دست آمده از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته نسبت به ماتریس سختی به دست آمده از روش آنالیز ایزوژئومتریکی از شرایط قطری بودن مطلوب‌تری برخوردار بوده و پهنای باند بالا و پایین آن مساوی بوده در حالی که پهنای باند بالا و پایین ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریکی برابر نیست. این شرایط ماتریس سختی در روش آنالیز ایزوژئومتریکی باعث می‌شود که در اندازه یکسان با ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته دارای شرایط پُر بودن بیشتری بوده که تا حدودی حجم محاسبات ماتریسی را بیشتر می‌نماید. همچنین نسبت حداکثر مقدار ویژه ماتریس سختی به حداقل آن در مجموع در ماتریس سختی اجزای محدود توسعه یافته کمتر از همان نسبت در روش آنالیز ایزوژئومتریکی است که خود نشان‌دهنده شرایط مناسب‌تر ماتریس سختی اجزای محدود است.

مدل‌سازی ضمنی یک ناپیوستگی و لایه مرزی دارد که در این مطالعه این برتری به‌خوبی نشان داده شده است. در واقع به‌صورت ضمنی و با کمک فضای ریاضی که در این روش به‌کار گرفته شده است، می‌توان یک مرز ناپیوستگی را به‌خوبی در موقعیت مورد نظر تولید نمود. چنین ویژگی در مدل‌سازی ضمنی رشد ترک نیز بسیار مفید خواهد بود. همچنین روش آنالیز ایزوژئومتریکی برخلاف روش اجزای محدود توسعه یافته که برپایه پیکره‌بندی واحد قرار دارد، نیازمند روش‌های خاص مانند غنی‌سازی جهت مدل‌سازی ناپیوستگی نیست. مسلماً عدم نیاز به روش‌های خاص مانند غنی‌سازی جهت مدل‌سازی ناپیوستگی باعث کاهش حجم محاسبات خواهد شد.

در کنار امتیازاتی که روش آنالیز ایزوژئومتریکی دارد، روش اجزای محدود توسعه یافته نیز یک روش بسیار انعطاف‌پذیر در مسئله مکانیک شکست محاسباتی است. با کمک این روش انواع ناپیوستگی‌ها از جمله ترک به‌طور ضمنی به مدل اجزای محدود اضافه می‌شوند. این در حالی است روش آنالیز ایزوژئومتریکی به‌خودی خود امکان تولید هر نوع ناپیوستگی

## واژه‌نامه

1. discrete fracture models
2. cohesive zone models
3. interface element
4. partition of unity method
5. non-uniform rational b-spline
6. heaviside enrichment functions
7. knot
8. variation diminishing
9. convex hull property
10. h-refinement
11. patches
12. computer aided design (CAD)
13. Cox-de Boor
14. knot Vector
15. Bezier
16. open
17. partition of unity
18. variational
19. boundary value problem
20. boundary displacements
21. tractions
22. Dirichlet boundary condition
23. Neumann boundary condition
24. stress intensity factor
25. small-scale yielding
26. interaction integral (M-integral)
27. heaviside
28. level set method (LSM)
29. patch
30. fully populated matrix
31. dense
32. sparse matrix
33. floating-point operations (FLOPS)
34. cohesive zone modeling (CZM)
35. inclusion
36. Kolosov's constant



## پیوست

در این بخش روابط استفاده شده به عنوان فضای کمکی تنش و جابه‌جایی در محاسبه انتگرال اندرکنش و رابطه مربوط به محاسبه تلاش محاسباتی آورده می‌شود.

فضای کمکی تنش به ۲ شرح زیر هستند:

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad i, j = 1, 2 \quad (31)$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (32)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (33)$$

فضای کمکی جابه‌جایی نیز به صورت زیر است:

$$u_1 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \right\} \quad (34)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \sin \theta) + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \right\} \quad (35)$$

لازم به ذکر است که در روابط ارائه شده پارامترهای  $\kappa$  و  $\mu$  به ترتیب ثابت کولوسوف<sup>۳۶</sup> و مدول صلبیت (برشی) هستند. ثابت کولوسوف به صورت رابطه (۳۶) تعریف می‌شود:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 2\nu & \text{plane strain} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{plane stress} \end{cases} \quad (36)$$

که  $\nu$  نسبت پواسون است.

همچنین رابطه تعیین تلاش محاسباتی بر مبنای عملکرد با ممیز شناور به شکل رابطه (۳۷) ارائه شده است:

$$FLOPS = \frac{(\text{ndof})^2}{6} + \frac{(\text{ndof})^2}{2} - \frac{(2 \times \text{ndof})}{3} \quad (37)$$

1. Zhuang, Z., Liu, Z., Cheng, B., and Liao, J., "Fundamental Linear Elastic Fracture Mechanics", Extended Finite Element Method, Oxford, Academic Press, pp. 13-31, 2014.
2. Torres, Y., Tarrago, J. M., Coureaux, D., Tarrés, E., Roebuck, B., Chan, P., James, M., Liang, B., Tillman, M., Viswandham, R. K., Mingrad, K. P., Mestra, A., and Lianes, L., "Fracture and Fatigue of Rock Bit Cemented Carbides: Mechanics and Mechanisms of Crack Growth Resistance under Monotonic and Cyclic Loading", *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, Vol. 45, pp. 179-188, 2014.
3. Joseph, R. P., Purbolaksono, J., Liew, H. L., Ramesh, S., and Hamdi, M., "Stress Intensity Factors of a Corner Crack Emanating from a Pinhole of a Solid Cylinder", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 128, pp. 1-7, 2014.
4. Ghorashi, S. S., Valizadeh, N., and Mohammadi, S., "Extended Isogeometric Analysis for Simulation of Stationary and Propagating Cracks", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, pp. 1069-1101, 2012.
5. De Luycker, E., Benson, D. J., Belytschko, T., Bazilevs, Y., and Hsu, M. C., "X-FEM in Isogeometric Analysis for Linear Fracture Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 87, pp. 541-565, 2011.
6. Mohammadi, S., "Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Structures", Wiley, 2008.
7. Dugdale, D. S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
8. Barenblatt, G. I., "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture", *Advances in Applied Mechanics*, pp. 55-129, 1962.
9. Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, Vol. 221, pp. 163-198, 1921.
10. Schellekens, J. C. J., and De Borst, R., "On the Numerical Integration of Interface Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 43-66, 1993.
11. Rots, J., "Smearred and Discrete Representations of Localized Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. 51, pp. 45-59, 1991.
12. Jirásek, M., and Zimmermann, T., "Embedded Crack Model: I. Basic Formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 1269-1290, 2001.
13. Oliver, J., "Modelling Strong Discontinuities in Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 2: Numerical Simulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3601-3623, 1996.
14. Simo, J. C., Oliver, J., and Armero, F., "An Analysis of Strong Discontinuities Induced by Strain-Softening in Rate-Independent Inelastic Solids", *Computational Mechanics*, Vol. 12, pp. 277-296, 1993.
15. Babuška, I., and Zhang, Z., "The Partition of Unity Method for the Elastically Supported Beam", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 152, pp. 1-18, 1998.
16. Melenk, J. M., and Babuška, I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314, 1996.
17. Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
18. Bazilevs, Y., Beirão Da Veiga, L., Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Sangalli, G., "Isogeometric Analysis: Approximation, Stability and Error Estimates for H-Refined Meshes", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 16, pp. 1031-1090, 2006.
19. Hughes, T. J. R., Reali, A., and Sangalli, G., "Efficient Quadrature for NURBS-Based Isogeometric Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 301-313, 2010.
20. Wang, D., and Xuan, J., "An Improved NURBS-Based Isogeometric Analysis with Enhanced Treatment of Essential Boundary Conditions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 2425-2436, 2010.
21. Mysore, K., Morgan, O. T., and Subbarayan, G., "NURBS Representational Strategies for Tracking Moving Boundaries and Topological Changes During Phase Evolution", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, pp. 2594-2610, 2011.
22. Evans, J. A., Bazilevs, Y., Babuška, I., and Hughes, T. J. R., "N-Widths, Sup-Inf, and Optimality Ratios for the K-Version of the Isogeometric Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 1726-1741, 2009.
23. Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Reali, A., "Studies of Refinement and Continuity in Isogeometric Structural Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 4160-4183, 2007.

24. Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y., and Hughes, T. J. R., "Isogeometric Analysis of Structural Vibrations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257-5296, 2006.
25. De Boor, C., "On Calculating with B-Splines", *Journal of Approximation Theory*, Vol. 6, pp. 50-62, 1972.
26. Cox, M. G., "The Numerical Evaluation of B-Splines", *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol. 10, pp. 134-149, 1972.
27. Piegl, L. A., and Tiller, W., "*The Nurbs Book*", Springer-Verlag GmbH, 1997.
28. Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Bazilevs, Y., "*Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*", Wiley Publishing, 2009.
29. Hassani, B., Tavakkoli, S. M., and Moghadam, N. Z., "Application of Isogeometric Analysis in Structural Shape Optimization", *Scientia Iranica*, Vol. 18, pp. 846-852, 2011.
30. Gdoutos, E. E., "*Fracture Mechanics: An Introduction*", Springer, 2005.
31. Williams, M. L., "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 109-114, 1957.
32. Yau, J. F., Wang, S. S., and Corten, H. T., "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, Vol. 47, pp. 1980.
33. Belytschko, T., and Black, T., "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620, 1999.
34. Moës, N., and Belytschko, T., "Extended Finite Element Method for Cohesive Crack Growth", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 813-833, 2002.
35. Belytschko, T., Moës, N., Usui, S., and Parimi, C., "Arbitrary Discontinuities in Finite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 993-1013, 2001.
36. Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T., "Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, pp. 235-260, 2000.
37. Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T., "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 131-150, 1999.
38. Belytschko, T., and Fleming, M., "Smoothing, Enrichment and Contact in the Element-free Galerkin Method", *Computers & Structures*, Vol. 71, pp. 173-195, 1999.
39. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B., and Belytschko, T., "Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504, 1997.
40. Sethian, J. A., "A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 93, pp. 1591-1595, 1996.
41. Adalsteinsson, D., and Sethian, J. A., "A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces", *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, pp. 269-277, 1995.
42. Osher, S., and Sethian, J. A., "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp. 12-49, 1988.
43. Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., and Belytschko, T., "Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite-Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6183-6200, 2001.
44. Jiang, H., "Cohesive Zone Model for Carbon Nanotube Adhesive Simulation and Fracture/Fatigue Crack Growth", Ph.D. Thesis, University of Akron, 2010.
45. Verhoosel, C., Scott, M. A., Borst, R. D., and Hughes, T. J. R., "An Isogeometric Approach To Cohesive Zone Modeling", The Institute for Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin Austin, Texas 78712, 2010.