ارتعاش آزاد ورق‌های دایره‌ای هدفمند تابعی با ضخامت متغیر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

محمد حسین یاس[۱]، محمد نجاتی[۲] و سید سجاد جعفری[۳*]

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه

۲. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان اراک

۳. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان همدان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۸/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۴/۱۲/۱۹)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.35.2.131

چکیده – در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند بررسی شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق، به‌صورت کسر حجمی است. با توجه به درنظر گرفتن تغییرات خطی و غیرخطی ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاع و نیز با توجه به تابع درنظر گرفته شده برای ضخامت، ضخامت ورق می‌تواند به‌صورت مقعر یا محدب باشد. همچنین معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه استخراج شده است. این معادلات یک‌سری معادلات دیفرانسیل درگیر شده هستند که با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها، به‌طوری که شرط تقارن محوری را برآورده کند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که حل دقیق آنها بسیار مشکل است به‌همین دلیل از روش عددی تفاضل مربعات برای حل این معادلات استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده با نتایج دیگر محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آنها مشاهده شده است. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی و همچنین درصد کسر حجمی مختلف از نانولوله‌ها برروی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: مواد هدفمند، نانولوله‌های کربنی، ارتعاش آزاد، ورق دایره‌ای سوراخ‌دار، روش تفاضل مربعات.

Free Vibration of Functionally Graded Variable Thickness Carbon Nanotube Annular Plates

M. H. Yas[1], M. Nejati[2] and S. S. Jafari[3*]

1. Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah
2. Young Researchers and Elite Club, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak
3. Young Researchers and Elite Club, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: sjd.jafari@iauh.ac.ir

Abstract: ***In this paper, free vibration of carbon nanotube-reinforced functionally graded circular plates with hole has been investigated. Distribution of carbon nanotubes are continuous and the gradual and graded changes of materials through the plate thickness are considered as volume fraction. Considering the linear and non-linear variation of circular plates through the radial direction and also considering the proposed function for the thickness, the plate thickness can be convex or concave. Moreover, the motion equations of plate were obtained based on the third-order shear deformation theory. These equations are coupled differential equations which can convert Ordinary Differential Equations (ODE) using the Trigonometric series expansion of displacement fields such that they satisfy the axial symmetry condition. Solving the converted ODE equations is too difficult. For this reason, the differential quadrature method is employed to solve these equations. The obtained results are compared with the results reported by other researchers and an excellent agreement is observed between them. Finally, the effects of different geometric parameters as well as different volume fracture of nanotubes on natural frequency have been studied.***

Keywords: ***Functionally graded materials, Carbon nanotube, Free vibration, Circular plates with hole, Differential quadrature method.***

فهرست علائم

C_{ij}	ماتریس سختی الاستیک	R_θ	نیرو برشی
d	قطر نانولوله‌های کربنی	T	انرژی جنبشی سیستم
E_c	مدول یانگ کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی	t	زمان
		U	میدان جابه‌جایی در راستای r
E_{CNT}	مدول یانگ طولی نانولوله‌های کربنی	U_1	انرژی پتانسیل سیستم
E_m	مدول یانگ طولی پلیمر	V	میدان جابه‌جایی در راستای θ
h	ضخامت ورق	V_{CNT}	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی
h_0	ضخامت در $r = 0$	V_m	کسر حجمی پلیمر
k_l	پارامتر مؤثر طول	W	میدان جابه‌جایی در راستای z
k_o	فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی	w_{nt}	کسر جرمی نانولوله
k_w	پارامتر موج نانولوله‌های کربنی	**علائم یونانی**	
l	طول نانولوله‌های کربنی	ε_{ij}	ماتریس کرنش
M	پارامتر هندسی	$\eta = \frac{z}{h}$	متغیر بی‌بعد
M_r	ممان خمشی	ν	ضریب پواسون کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی‌استیرن
$M_{r\theta}$	ممان پیچشی	ν_{CNT}	ضریب پواسون نانولوله کربنی
M_θ	ممان خمشی	ν_m	ضریب پواسون پلیمر
n	عدد موج محیطی	δ	نماد تغییرات
P_r	ممان خمشی	ρ	چگالی کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی‌استیرن
$P_{r\theta}$	ممان پیچشی	ρ_{CNT}	چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی
P_θ	ممان خمشی	ρ_m	چگالی جرمی پلیمر خالص
q	پارامتر هندسی	σ_{ij}	ماتریس تنش
Q_r	نیرو برشی	φ	متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)
Q_θ	نیرو برشی	ψ_r	زاویه چرخش صفحه $r-z$
R_r	نیرو برشی	ψ_θ	زاویه چرخش صفحه $\theta - z$

۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت روزافزون صنعت و تکنولوژی در زمینه‌های مختلف، نیاز به موادی که ویژگی‌های منحصر به‌فردی داشته باشند بیش از پیش احساس می‌شود. به‌عنوان نمونه، برای پوشش شاتل‌های فضایی و راکتورهای هسته‌ای که در معرض درجه حرارت بالا قرار دارند باید از موادی که مقاومت بالایی در برابر حرارت دارند استفاده نمود. بدین منظور در سال ۱۸۹۴ مواد تابعی مدرج[1] برای اولین بار در ژاپن ساخته شد [۱] که از دیدگاه ترموالاستیک مطالعات گسترده‌ای برروی آنها انجام شده است [۲]. در دهه‌های اخیر با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازه‌هایی با مقاومت بالا در برابر حرارت، جاذب انرژی و سبک، مطالعات زیادی برروی رفتار مواد تابعی مدرج (مواد هدفمند) صورت گرفته است.

نی و ژونک [۳] ارتعاشات سه‌بعدی آزاد و اجباری ورق‌های دایره‌ای هدفمند را تحت شرایط مرزی مختلف به‌صورت نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آنها فرکانس‌های ارتعاشی و پاسخ‌های دینامیکی ورق را به‌دست آوردند و نشان دادند که با افزایش اندیس خواص مواد، کمترین فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین در مسأله ارتعاش اجباری با نزدیک‌تر شدن فرکانس اجباری به فرکانس طبیعی، تغییر مکان‌ها و تنش‌ها افزایش می‌یابند.

ملک‌زاده [۴] تحلیل ارتعاش آزاد سه‌بعدی ورق هدفمند برروی بستر الاستیک را انجام داد. در این مقاله تغییرات تدریجی کسر حجمی مواد با استفاده از قانون توانی و توزیع نمایی در راستای ضخامت ورق درنظر گرفته شده است. معادلات حاکم براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به‌دست آمده و به‌کمک بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و معادلات با استفاده از روش تفاضل مربعات[2] حل شده‌اند.

ترنابنه [۵] ارتعاش آزاد یک پوسته مخروطی هدفمند را به‌کمک روش تفاضل مربعات دوبعدی بررسی نمود. وی شرایط تکیه‌گاهی را به‌صورت ساده و تغییرات کسر حجمی را به‌صورت چهار پارامتری و در راستای شعاع درنظر گرفت و نشان داد که به‌ازای پروفیل کسر حجمی خاص، فرکانس‌های منتجه می‌تواند بالاتر از فرکانس‌های پوستهٔ مخروطی متشکل از فلز خالص و سرامیک خالص قرار بگیرد.

فیدلوس و همکاران [۶] خصوصیات مکانیکی- حرارتی نانوکامپوزیت با زمینه اپوکسی برپایه درصد وزنی کم نانولوله (از ۰/۰۱ تا ۰/۵ درصد وزنی) و راستای دلخواه نانولولهٔ کربنی تک‌جداره و چندجداره را به‌صورت تجربی بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که مدول یانگ در نانوکامپوزیت‌ها با ماتریس رزین اپوکسی نسبت به رزین اپوکسی بهبود می‌یابد. همچنین مطابق بررسی آنها، فقط با استفاده از مقدار کمی نانولوله کربنی، چقرمگی ضربه کششی[3] زیاد می‌شود.

سانگ و یان [۷] خصوصیات مؤثر الاستیک نانوکامپوزیت پر شده با نانولوله را به‌صورت تجربی و عددی بررسی کردند. آنها راستای نانولوله کربن را به‌طور دلخواه در داخل ماتریس فرض کردند. هان و الیوت [۸] با استفاده از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی[4] به بررسی خواص مکانیکی پلیمر تقویت شده با نانولوله کربن تک‌جداره پرداختند. آنها نانولوله کربن را در دو پلیمر متفاوت با درصدهای حجمی مختلف درنظر گرفتند. نتایج شبیه‌سازی آنها این نظریه را که خواص مکانیکی کامپوزیت‌های پلیمری با افزایش نانولوله کربن بهبود پیدا می‌کنند، تأیید می‌کند. علاوه بر این، آنها نشان دادند که تأثیر پیوندهای بین نانولوله کربن و پلیمر تا زمانی که بین اتم‌های نانولوله کربن و پلیمر پیوند قوی وجود دارد، نباید نادیده گرفته شوند. همچنین در پیوندهای بین‌مولکولی بین نانولوله و پلیمر اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین نتایج شبیه‌سازی با قانون اختلاط در مقیاس ماکروسکوپیک مشاهده شد.

شن [۸] برای اولین بار ایدهٔ استفاده نانولوله‌های کربن در مواد هدفمند را مطرح کرد. او در این مقاله خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی هدفمند کامپوزیتی که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند را بررسی کرد. خصوصیات نانولوله کربن وابسته به دما فرض شده و با استفاده از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی

به‌دست آمده‌اند. شن معادلات حاکم را بر پایهٔ تئوری تغییر مکان برشی مرتبه بالاتر ردی با سینماتیک غیرخطی ون کارمن و با درنظر گرفتن تأثیرات حرارتی به‌دست آورد و از روش اختلالی[5] دو مرحله‌ای برای محاسبهٔ منحنی‌های بار- تغییر مکان و بار- ممان خمشی استفاده کرد. بررسی منحنی‌های بار- ممان خمشی ورق نشان داد که خصوصیات مکانیکی ورق تقویت شده با نانولوله‌ها بهبود یافته است. همچنین نتایج مبین این است که علاوه بر درصد حجمی نانولوله‌های کربن، عوامل دیگری مانند افزایش دما، شرایط مرزی درون صفحه‌ای، تغییر مکان برشی عرضی و نسبت‌های طولی بر خصوصیات خمش غیرخطی تأثیرگذار هستند.

لیو و همکاران [۹] در یک مطالعه جامع، به بررسی خواص مکانیکی مواد هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداختند. در زمینه ارتعاشات مواد هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مطالعات گسترده‌ای انجام شده است که در آنها از روش‌های مختلف برای حل معادلات حاکم استفاده شده است [۱۴-۱۰].

هدایتی و سبحانی [۱۵] اثرات نانولوله‌های کربنی را برروی ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی بررسی کردند. آنها از تخمین موری- تاکانا برای اعمال اثرات نانولوله‌ها برروی معادلات حاکم استفاده نمودند. وانگ و شن [۱۶] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را در محیط‌های دمایی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

کی و همکارانش [۱۷] ارتعاشات غیرخطی یک تیر کامپوزیتی هدفمند تقویت شده با نانولوله کربن را بررسی کردند. آنها معادلات حاکم را به‌کمک تئوری مرتبه بالاتر با سینماتیک غیرخطی ون کارمن به‌دست آورده و نشان دادند که افزایش کسر حجمی نانولوله منجربه افزایش فرکانس‌های خطی و غیرخطی می‌شود. همچنین توزیع متقارن نانولوله منجربه فرکانس‌های بالاتری نسبت به توزیع نامتقارن و یا یکنواخت می‌شود.

استفاده از ورق‌های دایره‌ای متشکل از مواد پیشرفته و مواد هدفمند در صنایع هوافضا، هسته‌ای، شیمیایی و... روز به روز بیشتر می‌شود. از سوی دیگر محصولات گوناگون نانوفناوری، مانند نانوکامپوزیت‌ها، کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. نانوکامپوزیت‌ها دارای انواع مختلفی هستند. یکی از مهم‌ترین انواع نانوکامپوزیت‌ها، نانوکامپوزیت پلیمری بوده که با نانولوله کربن تقویت شده‌اند. نانولوله کربن به‌خاطر خواص فوق‌العادهٔ مکانیکی، الکتریکی و حرارتی که دارد تأثیر زیادی در بهبود خواص پلیمر می‌گذارد.

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار هدفمند، که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند، بررسی شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق، به‌صورت کسر حجمی است. با توجه به درنظر گرفتن تغییرات خطی و غیرخطی ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاع و نیز با توجه به تابع درنظر گرفته شده برای ضخامت، ضخامت ورق می‌تواند به‌صورت مقعر یا محدب باشد. همچنین معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه استخراج شده است. این معادلات یک سری معادلات دیفرانسیل درگیر هستند که با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها، به‌طوری‌که شرط تقارن محوری را برآورده کند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که حل دقیق آنها بسیار مشکل است به‌همین دلیل از روش عددی تفاضل مربعات برای حل این معادلات استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده با نتایج دیگر محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آنها مشاهده شده است. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی و همچنین درصد کسر حجمی مختلف از نانولوله‌ها برروی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات

۲-۱- اعمال اثرات نانولوله‌ها در خواص مکانیکی

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، توزیع نانولوله‌ها تأثیر به‌سزایی در خواص مکانیکی مخصوصاً مدول یانگ دارد. با

استفاده از قانون مخلوط‌ها، می‌توان مدول یانگ کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (E_c) را به‌صورت زیر تخمین زد [۱۸ و ۱۹]:

$$E_c = (k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) V_{CNT} e^{\gamma V_{CNT}} + E_m \quad (۱)$$

که در رابطه فوق، E_{CNT} و E_m به‌ترتیب مدول یانگ طولی نانولوله‌های کربنی و پلیمر موردنظر هستند. همچنین V_{CNT} کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و k_l، k_o و k_w به‌ترتیب پارامتر مؤثر طول، فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی و پارامتر موج نانولوله‌های کربنی هستند. k_l با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$k_l = ۱ - \frac{\tanh \varphi}{\varphi} \quad (۲)$$

به‌طوری‌که:

$$\varphi = \frac{۲l}{d}\sqrt{\frac{-۲E_m}{E_{CNT}(۱-\nu_m)\ln(V_{CNT})}}$$
$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{\hat{V}_{CNT}}$$
$$\beta' = \frac{\hat{E}_c - E_m}{(k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m)\hat{V}_{CNT}} \quad (۳)$$

در رابطه فوق، l و d به‌ترتیب طول و قطر نانولوله‌های کربنی و ν_m ضریب پواسون پلیمر است. پارامترهایی که با علامت ^ مشخص شده‌اند به‌صورت تجربی و از طریق تست کشش برای نانولوله‌های با درصد وزنی بالا تعیین می‌شوند.

چگالی (ρ) و ضریب پواسون (ν) کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی‌استیرن[۶] طبق قانون خطی مخلوط‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = V_{CNT}\rho_{CNT} + V_m \rho_m$$
$$\nu = V_{CNT}\nu_{CNT} + V_m \nu_m \quad (۴)$$

که ρ_{CNT} و ρ_m به‌ترتیب چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی و پلیمر خالص هستند. V_{CNT} و V_m به‌ترتیب کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و کسر حجمی پلیمر خالص هستند.

در این مقاله فرض شده که ماتریس پلی‌استیرن با نانولوله‌های کربنی تقویت شده، به‌طوری‌که برای کسر حجمی آنها به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

جدول ۱- خواص مکانیکی پلی‌استیرن و نانولولهٔ کربنی خالص [۱۸].

پلی‌استیرن	$E_m = ۱/۹$ GPa $\rho_m = ۱۰۵۰ \frac{Kg}{m^۳}$ $\nu_m = ۰/۳۴$
نانولولهٔ کربنی	$E_{CNT} = ۹۰۰$ GPa $\rho_{CNT} = ۲۱۰۰ \frac{Kg}{m^۳}$ $\nu_{CNT} = ۰/۲۸$
ابعاد نانولوله‌های کربنی	$d = ۲۵$ nm $l = ۶۰ \mu m$
مقادیر استفاده شده در معادله (۱)	$k_o = ۰/۲$ $k_w = ۰/۱$ $E_c = ۳/۸$ GPa $V_{CNT} = ۰/۱۵$

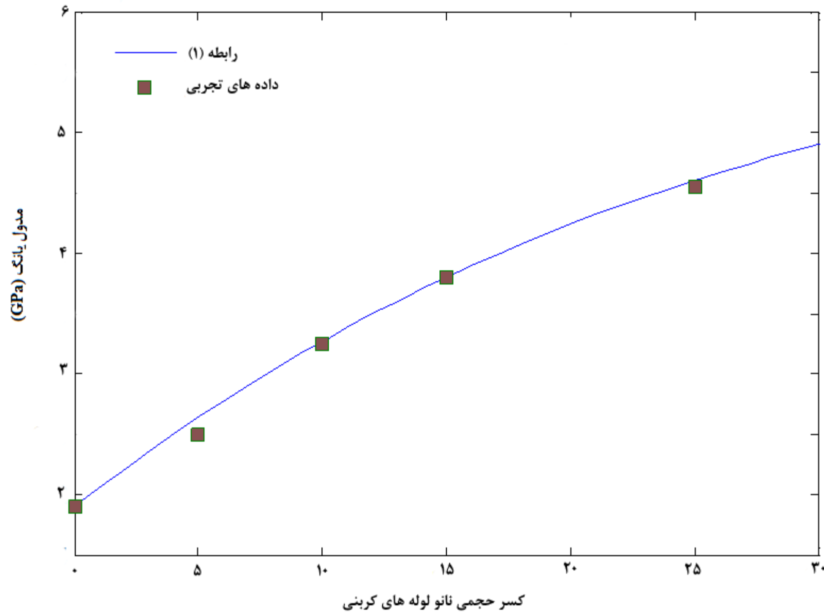
$$V_{CNT} + V_m = ۱ \quad (۵)$$

خواص مکانیکی پلی‌استیرن و نانولوله‌های کربنی خالص در جدول (۱) آورده شده است. منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی‌استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی براساس رابطه (۱) در شکل (۱) نشان داده شده و با داده‌های تجربی مرجع [۲۰] مقایسه شده است. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد مطابقت خوبی بین نتایج تجربی و نتایج حاصل از رابطه (۱) وجود دارد.

در این مقاله فرض شده است که توزیع نانولوله‌های کربن در راستای ضخامت ورق دایره‌ای سوراخ‌دار به‌صورت خطی باشد. از اینرو چند تابع برای توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت درنظر گرفته شده است. توزیع نامتقارن نانولوله‌های کربن در راستای ضخامت[۷] که در این حالت از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$V_{CNT} = (۱ - \frac{۲z}{h})V_{NT}^{*} \quad \text{توزیع نامتقارن هدفمند} \quad (۶)$$

دو نوع مختلف از توزیع خطی متقارن از کسر حجمی نانولوله‌ها در راستای ضخامت[۸] که به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند:



شکل ۱- منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی‌استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی تغییرات و مقایسه بین داده‌های تجربی و نتایج رابطه (۱)

توزیع متقارن هدفمند نوع اول $V_{CNT}=\frac{۴|z|}{h}V_{NT}^{*}$

توزیع متقارن هدفمند نوع دوم $V_{CNT}=۴(\frac{۱}{۲}-\frac{|z|}{h})V_{NT}^{*}$ (۷)

توزیع یکنواخت[۹] نانولوله‌ها که تابع آن به‌صورت زیر است:

$$V_{CNT}=V_{NT}^{*} \tag{۸}$$

در روابط فوق h ضخامت ورق و V_{NT}^{*} به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

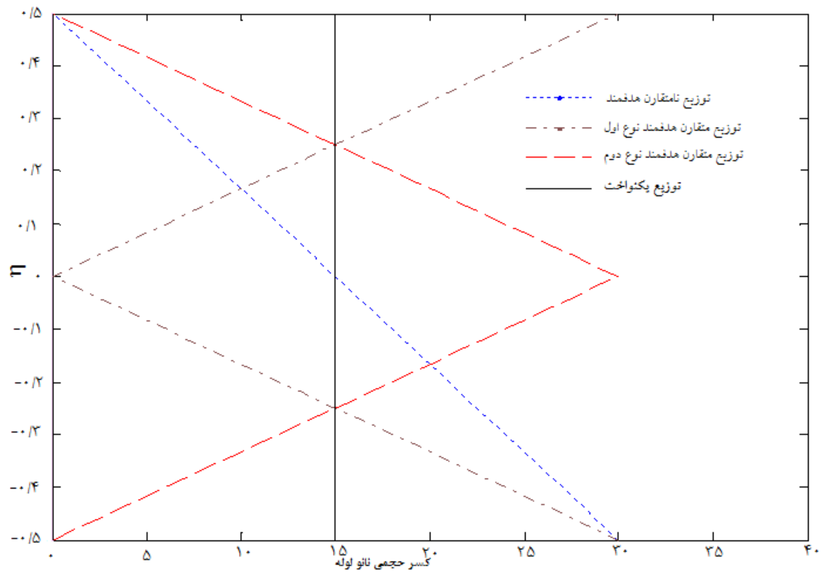
$$V_{NT}^{*}=\frac{w_{NT}}{w_{NT}+(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m})-(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m})w_{NT}} \tag{۹}$$

که w_{NT}، ρ_{CNT} و ρ_m به‌ترتیب کسر جرمی نانولوله، چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی و چگالی جرمی پلیمر خالص هستند. با تعریف پارامتر بی‌بعد $\eta=z/h$ تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربن و همچنین مدول یانگ در راستای ضخامت ورق دایره‌ای به‌صورت شکل‌های (۲) و (۳) است.

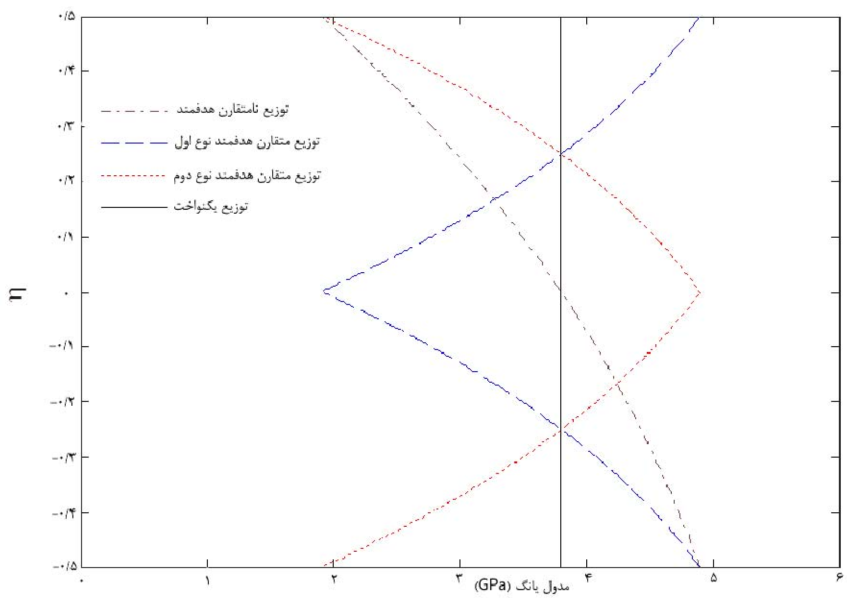
۲-۲- معادلات حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

در شکل (۴) شماتیکی از ورق دایره‌ای سوراخ‌دار با ضخامت متغیر در راستای شعاعی نشان داده شده است. معادلات حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی به‌دست آمده‌اند. براساس این تئوری، خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل دیگر راست و مستقیم باقی نمی‌مانند. بنابراین، مؤلفه‌های جابه‌جایی U و V به‌صورت توابع مرتبه بالا از z فرض شده و مؤلفه W مستقل از z درنظر گرفته می‌شود. میدان جابه‌جایی طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned}
U(r,\theta,z,t)&=z\psi_r(r,\theta,t)-\frac{۴z^{۳}}{۳h^{۲}}(\psi_r(r,\theta,t)+\frac{\partial w(r,\theta,t)}{\partial r})\\
V(r,\theta,z,t)&=z\psi_\theta(r,\theta,t)-\frac{۴z^{۳}}{۳h^{۲}}(\psi_\theta(r,\theta,t)+\frac{\partial w(r,\theta,t)}{r\partial\theta})\\
W(r,\theta,z,t)&=w(r,\theta,t)
\end{aligned} \tag{۱۰}$$



شکل ۲- تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به‌ازای توزیع مختلف



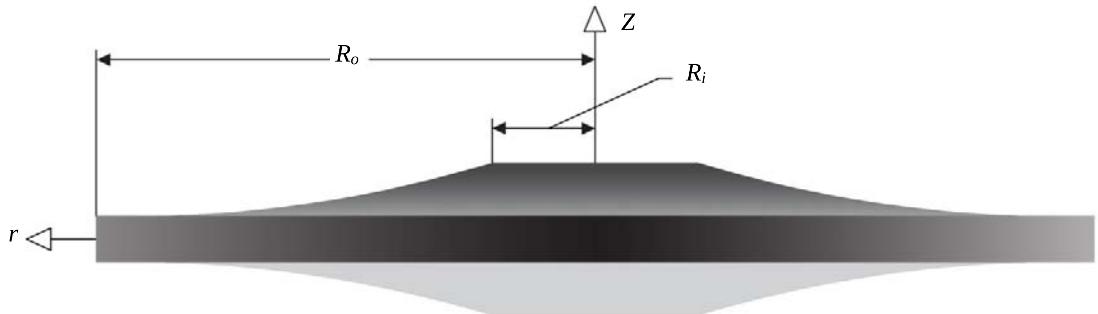
شکل ۳- تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت به‌ازای توزیع مختلف از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی

که در آن، w جابه‌جایی عرضی (خیز) صفحه میانی است. ψ_r و ψ_θ زاویه چرخش صفحات $r-z$ و $\theta-z$ در $z=0$ حول محورهای θ و r هستند.

رابطه تنش- کرنش در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که در این رابطه C_{ij} ماتریس سختی الاستیک، ε_{ij} کرنش و σ_{ij}



شکل ۴- ورق دایره‌ای با ضخامت متغیر در راستای شعاعی

تنش هستند. ضرایب ماتریس الاستیک به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}=\frac{E(z)}{(1-\nu^2)}$$
$$C_{12}=C_{13}=C_{23}=\frac{E(z)\nu(z)}{(1-\nu(z)^2)}$$
$$C_{44}=C_{55}=C_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \qquad (۱۲)$$

همچنین روابط کرنش- جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial U}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z}$$
$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r},\ \gamma_{rz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r},\ \gamma_{\theta z}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{r\partial \theta} \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_r=z\frac{\partial \psi_r}{\partial r}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)$$
$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\left\{z\psi_r-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\psi_r+\frac{\partial w}{\partial r}\right)+z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 w}{r\partial \theta^2}\right)\right\}$$
$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\left\{z\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right)-z\psi_\theta-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right)\right\}$$
$$+z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r}-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial \theta}-\frac{\partial w}{r^2\partial \theta}\right)$$
$$\gamma_{rz}=\psi_r-\frac{4z^2}{h^2}\left(\psi_r+\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial w}{\partial r}$$
$$\gamma_{\theta z}=\psi_\theta-\frac{4z^2}{h^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right)+\frac{\partial w}{r\partial \theta} \qquad (۱۴)$$

حال با توجه به اینکه کار نیروهای خارجی برابر صفر است و با درنظر گرفتن اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\int_0^t(\delta T-\delta U)dt=0 \qquad (۱۵)$$

که در آن T انرژی جنبشی و U_1 انرژی پتانسیل سیستم و δ نماد تغییرات[10] است. برای به‌دست آوردن δU می‌توان نوشت:

$$\delta U=\int_V(\sigma_r\delta\varepsilon_r+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\sigma_{z\theta}\delta\gamma_{z\theta}+\sigma_{rz}\delta\gamma_{rz}+\sigma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta})dv \qquad (۱۶)$$

منتجه‌های تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}M_r\\P_r\end{Bmatrix}=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}\sigma_r\begin{Bmatrix}z\\z^3\end{Bmatrix}dz$$
$$\begin{Bmatrix}M_\theta\\P_\theta\end{Bmatrix}=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}\sigma_\theta\begin{Bmatrix}z\\z^3\end{Bmatrix}dz$$
$$\begin{Bmatrix}M_{r\theta}\\P_{r\theta}\end{Bmatrix}=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}\sigma_{r\theta}\begin{Bmatrix}z\\z^3\end{Bmatrix}dz$$
$$\begin{Bmatrix}Q_r\\Q_\theta\end{Bmatrix}=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{rz}\\\sigma_{\theta z}\end{Bmatrix}dz$$
$$\begin{Bmatrix}R_r\\R_\theta\end{Bmatrix}=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}z^2\begin{Bmatrix}\sigma_{rz}\\\sigma_{\theta z}\end{Bmatrix}dz \qquad (۱۷)$$

که $M_r,M_\theta,P_r,P_\theta$ ممان‌های خمشی، $M_{r\theta},P_{r\theta}$ ممان‌های پیچشی و $Q_r,Q_\theta,R_r,R_\theta$ نیروهای برشی هستند. با تعریف منتجه‌ها تنش به‌صورت رابطه (۱۷) و با جایگذاری (۱۴) در رابطه (۱۶) و انجام ساده‌سازی، رابطه (۱۸) به‌دست می‌آید:

$$\delta U=\int_{R_i}^{R_0}\int_0^{2\pi}\left\{\left\{M_r\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial r}-\frac{4P_r}{3h^2}\left(\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial r}+\frac{\partial^2\delta w}{\partial r^2}\right)\right\}\right.$$
$$+\frac{1}{r}\left\{M_\theta\delta\psi_r-\frac{4P_\theta}{3h^2}\left(\delta\psi_r+\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)+M_\theta\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial\theta}-\frac{4P_\theta}{3h^2}\left(\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\delta w}{r\partial\theta^2}\right)\right\}$$
$$+\left\{Q_\theta\delta\psi_\theta-\frac{4R_\theta}{h^2}\left(\delta\psi_\theta+\frac{\partial\delta w}{r\partial\theta}\right)+Q_\theta\frac{\partial\delta w}{r\partial\theta}\right\}+\left\{Q_r\delta\psi_r-\frac{4R_r}{h^2}\left(\delta\psi_r+\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)+Q_r\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right\}$$
$$\left.+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{r}\left\{M_{r\theta}\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial\theta}-\frac{4P_{r\theta}}{3h^2}\left(\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\delta w}{\partial r\partial\theta}\right)-M_{r\theta}\delta\psi_\theta-\frac{4P_{r\theta}}{3h^2}\left(\delta\psi_\theta+\frac{\partial\delta w}{r\partial\theta}\right)\right\}+\\ M_{r\theta}\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial r}-\frac{4P_{r\theta}}{3h^2}\left(\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\delta w}{r\partial r\partial\theta}-\frac{\partial\delta w}{r^2\partial\theta}\right)\end{array}\right\}\right\}rdrd\theta \quad (18)$$

همچنین δT به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta T=\int_{R_i}^{R_0}\int_0^{2\pi}\left\{I_1\left(\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+I_3\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial t}\right)+I_3\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial t}\right)\right.$$
$$+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial t}\right)+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial t}\right)+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial r\partial t}\right)$$
$$+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial\theta\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2\delta w}{r\partial\theta\partial t}\right)-I_5\frac{8}{3h^2}\left\{\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial t}\right)\right\}$$
$$+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left\{\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial t}+\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial r\partial t}\right\}+I_7\left(\frac{4}{3h^2}\right)^2\left\{\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{r\partial\theta\partial t}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{r\partial\theta\partial t}\right\}$$
$$\left.-I_5\frac{8}{3h^2}\left\{\frac{\partial\delta\psi_r}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial t}+\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial r\partial t}+\frac{\partial\delta\psi_\theta}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{r\partial\theta\partial t}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{r\partial\theta\partial t}\right\}\right\}rdrd\theta \quad (19)$$

که در رابطه فوق، ثوابت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_7)=\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2}\rho\left\{1,z,z^2,z^3,z^4,z^6\right\}dz \quad (20)$$

در نهایت با قرار دادن روابط (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۱۵)، معادلات حرکت ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و ضخامت متغیر برحسب منتجه‌های نیرو و ممان به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_{r\theta}}{\partial\theta}\right)+\frac{4}{3h^2}\frac{P_\theta-P_r}{r}$$
$$+\frac{M_r-M_\theta}{r}+\frac{4}{h^2}R_r-Q_r=$$
$$\left(I_3-\frac{8}{3h^2}I_5+\frac{16}{9h^4}I_7\right)\ddot{\psi}_r-\frac{4}{3h^2}\left(I_5-\frac{4}{3h^2}I_7\right)\frac{\partial\ddot{w}}{\partial r} \quad (21)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial M_\theta}{r\partial\theta}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_\theta}{\partial\theta}\right)-\frac{8}{3h^2}\frac{P_{r\theta}}{r}$$
$$+\frac{2M_{r\theta}}{r}+\frac{4}{h^2}R_\theta-Q_\theta=\left(I_3-\frac{8}{3h^2}I_5+\frac{16}{9h^4}I_7\right)\ddot{\psi}_\theta$$
$$-\frac{4}{3h^2}\left(I_5-\frac{4}{3h^2}I_7\right)\frac{\partial\ddot{w}}{r\partial\theta} \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-\frac{4}{h^2}\left(\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 P_{r\theta}}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P_\theta}{\partial\theta^2}\right)$$
$$+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial P_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial P_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial P_{r\theta}}{\partial\theta}\right)+$$

$$\frac{1}{r}(Q_r - \frac{4}{h^2}R_r) =$$

$$I_1\ddot{w} - (\frac{4}{3h^2})^2 I_7(\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \ddot{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial\theta^2})$$
$$+\frac{4}{3h^2}(I_5 - \frac{4}{3h^2}I_7)(\frac{\partial\ddot{\psi}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\ddot{\psi}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\ddot{\psi}_r)$$
$$-\frac{16}{9h^4}\frac{\partial I_7}{\partial r}(\frac{\partial\ddot{w}}{\partial r}+\frac{\partial\ddot{\psi}_r}{\partial r}) + \frac{4}{3h^2}\frac{\partial I_5}{\partial r}(\ddot{\psi}_r) \quad (۲۳)$$

(..) به‌معنای مشتق دوم نسبت به زمان است. برای اعمال شرایط مرزی در حالت تکیه‌گاه ساده می‌توان نوشت:

$$W = 0$$
$$M_r = 0$$
$$M_{r\theta} - \frac{4}{3}P_{r\theta} = 0 \quad (۲۴)$$

و در حالت تکیه‌گاه گیردار:

$$W = 0$$
$$\psi_r = 0$$
$$\psi_\theta = 0 \quad (۲۵)$$

با قرار دادن منتجه‌های نیرو و ممان برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی و سپس جایگذاری در معادلات حرکت برحسب منتجه‌ها و در نهایت قرار دادن روابط (۲۶) در این روابـط، معـادلات حرکـت برحسـب مؤلفه‌هـای جابـه‌جـایی بـرای ورق گـرد تـابعی تقویـت شـده بـا نانولوله‌های کربنی با ضخامت متغیر در راستای شعاعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه، استخراج می‌شود:

$$\psi_r(r,\theta,t) = \psi_r(r)\cos(n\theta)e^{i\omega t}$$
$$\psi_\theta(r,\theta,t) = \psi_\theta(r)\sin(n\theta)e^{i\omega t}$$
$$W(r,\theta,t) = W(r)\cos(n\theta)e^{i\omega t} \quad (۲۷)$$

که $n = 0,1,2,...,\infty$ در روابط بالا عـدد مـوج محیطـی اسـت و $n = 0$ به‌معنـی هندسـه متقـارن محـوری اسـت. در ایـن مقالـه ضخامت به‌صورت تابعی از شعاع ورق گرد درنظر گرفتـه شـده که طبق مرجع [۲۲] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(r) = h_0\left\{1 - q(\frac{r}{r_o})^M\right\}, \quad 0 \le q < 1\ ,\ \ M > 0 \quad (۲۷)$$

کـه h_0 ضـخامت در $r = 0$ و q و M پارامترهـای هندسـی هستند. در صورتی‌که $q = 0$، ضخامت ثابت و به‌ازای $q \neq 0$ اگر $M = 1$ منحنی ضخامت خطی و اگر $M < 1$ پروفیـل ضـخامت مقعر و $M > 1$ پروفیل ضخامت محدب خواهد بود.

در شکل‌های (۵) تا (۸)، پروفیـل تغییـرات ضـخامت ورق گرد که تابع شعاعی بوده، به ازای پارامترهای مختلف q و M، برحسب شعاع، نشان داده شده است.

۳- حل معادلات

۳-۱- اعمال روش تفاضل مربعات

روش تفاضل مربعات اولین بـار توسـط بلمـن و کاسـتی در سال ۱۹۷۱ در مقالـه‌ای ارائـه [۲۳] و بعـدها توسـط بـرت و مالیک برای حل معـادلات مکانیـک جامـدات اسـتفاده شـد [۲۴]. از این روش می‌توان در حل معادلات مقـدار مـرزی و مقدار اولیه با طبیعت خطی و غیرخطی استفاده نمـود (بـرای مطالعه جزئیات بیشتر به مرجع [۲۵] مراجعه شود).

با اعمال این روش به معادلات حرکت، آنها به فرم روش تفاضل مربعات نوشته می‌شوند (با توجـه بـه طـولانی بـودن روابط، این روابط در ضمیمه آورده شده است).

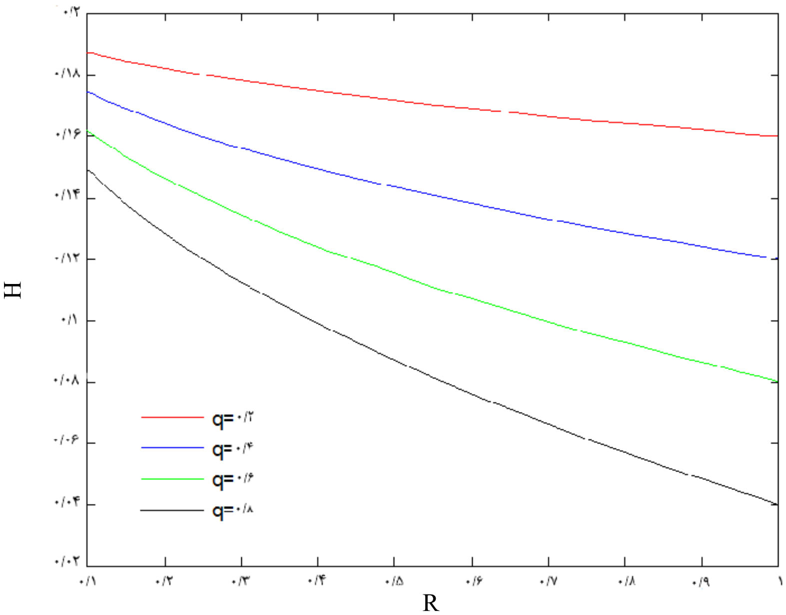
۴- نتایج و بحث

۴-۱- بررسی صحت نتایج

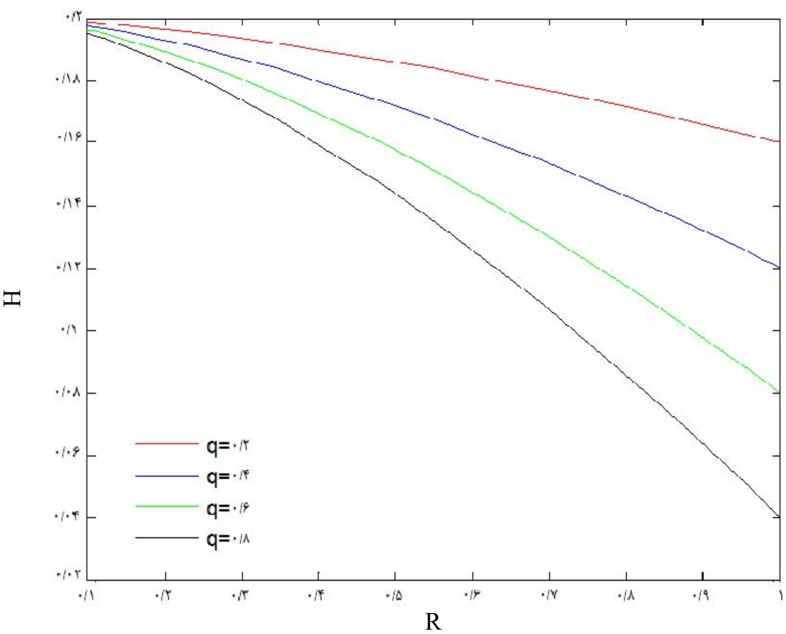
هدف اصلی ایـن مقالـه بررسـی ارتعـاش آزاد ورق دایـره‌ای سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولولـه‌هـای کربنـی تقویـت شده‌اند، است. در ابتدا لازم است تا نتایج بـه‌دسـت آمـده بـا نتایج سایر تحقیقات مقایسه شود تا اعتبـار و صـحت نتـایج به‌دست آمده تأییـد شـود. بـدین منظـور از تـابع زیـر بـرای تغییرات خواص استفاده شده است [۲۶]:

$$C_{ij}(z) = C_{ij}^m e^{(\beta z/h)}$$
$$\rho(z) = \rho^m e^{(\beta z/h)} \quad (۲۸)$$

در جـدول‌هـای (۲) و (۳) فرکـانس طبیعـی بـی‌بعـد شـده به‌دست آمده به‌ترتیـب بـا نتـایج مراجـع [۲۸-۲۶] و [۳ و ۲۸] مقایسه شده است. فرکـانس طبیعـی بـی‌بعـد شـده بـه‌صـورت $\Omega = \omega h\sqrt{\rho_m / C_{11}}$ درنظـر گرفتـه شـده اسـت کـه در آن



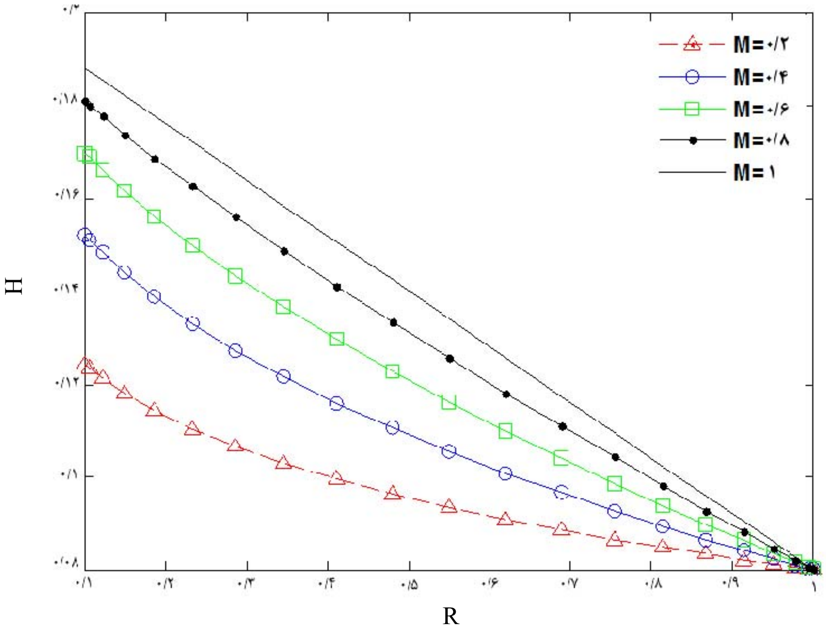
شکل ۵- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $m = ۰/۵, h_{\circ} = ۰/۲, R_i / R_o = ۰/۱$



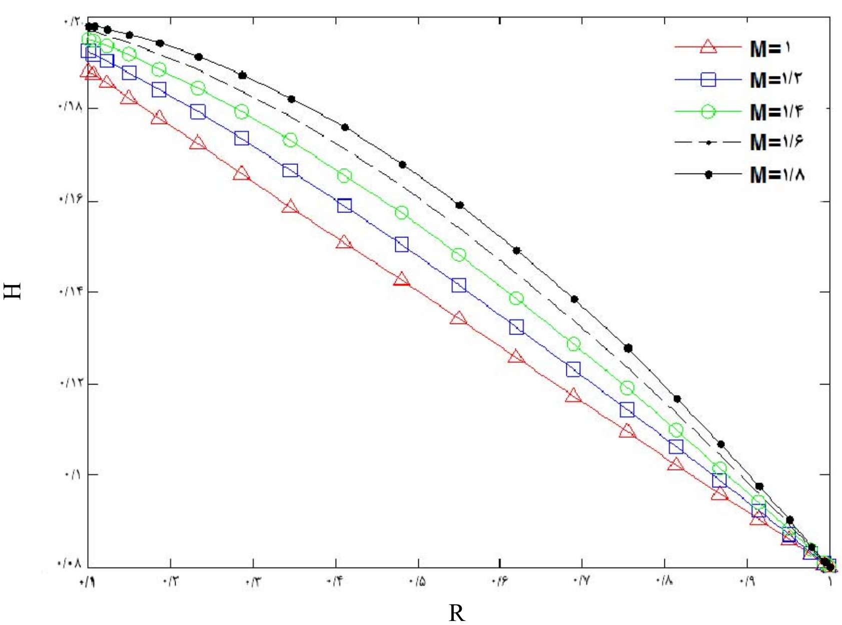
شکل ۶- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $m = ۱/۵, h_{\circ} = ۰/۲, R_i / R_o = ۰/۱$

$C_{11} = E_m(1-\nu_m)/(1+\nu_m)(1-2\nu_m)$. در این جدول n عدد موج محیطی، R_i شعاع داخلی و R_o شعاع خارجی از ورق گرد و N_r تعداد گره‌ها در راستای شعاعی است. همچنین نتایج کار حاضر به‌ازای ۱۵ گره در راستای شعاعی گرفته شده است. همان‌طور که از این جدول مشخص است، مطابقت خوبی بین نتایج وجود دارد.

در جدول (۴) مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای شرایط مرزی مختلف و اعداد موج مختلف ۰،۱،۲،۳ برای



شکل ۷- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $h_o = ۰/۲,\ R_i / R_o = ۰/۱,\ q = ۰/۶$ **به ازای** $M \le ۱$



شکل ۸- تغییرات ضخامت ورق گرد نسبت به شعاع: $h_o = ۰/۲,\ R_i / R_o = ۰/۱,\ q = ۰/۶$ **به ازای** $M \ge ۱$

یک ورق گرد ایزوتروپیک به‌دست آمده و با نتایج حاصل از حل دقیق مرجع [۲۹] مقایسه شده است. همانگونه که مقایسه نتایج نشان می‌دهد، مطابقت مناسبی بین نتایج وجود دارد.

۴-۲- بررسی همگرایی

برای بررسی همگرایی نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش تفاضل مربعات، به‌ازای تعداد گره‌های مختلف (N_r) یعنی

جدول ۲- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار- گیردار و اعداد موج مختلف،

$R_i / R_o = ۰/۲,\ h / R_o = ۰/۱,\ N_r = ۱۵,\ \beta = ۱$

n	مطالعه حاضر (تئوری مرتبه سوم)	مرجع [۲۶]	مرجع [۲۷]	مرجع [۲۸]
۰	۰/۰۷۹۸	۰/۰۷۹۶	۰/۰۸۰۷	۰/۰۸۰۱
۱	۰/۰۸۲۹	۰/۰۸۲۶	۰/۰۸۳۷	۰/۰۸۳۱
۲	۰/۰۹۶۰	۰/۰۹۵۲	۰/۰۹۶۱	۰/۰۹۵۵

جدول ۳- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار- گیردار و اعداد موج مختلف،

$R_i / R_o = ۰/۱,\ h / R_o = ۰/۲,\ N_r = ۱۵,\ \beta = ۱$

n	مطالعه حاضر (تئوری مرتبه سوم)	مرجع [۳]	مرجع [۲۸]
۰	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۲
۱	۱۹۸۷/۰	۰/۱۹۹۴	۰/۱۹۹۰
۲	۰/۲۷۶۶	۰/۲۷۸۱	۰/۲۷۸۳
۳	۰/۳۷۹۱	۰/۳۸۱۹	۰/۳۸۱۹

جدول ۴- مقایسه مقادیر فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده در شرایط مرزی و اعداد موج مختلف،

$R = ۰/۲,\ N_r = ۱۵,\ R = R_i / R_o,\ \ \eta = h / R_o,\ \ \Omega = \omega R_o^۲ \sqrt{\rho h(۱۲(۱-\upsilon^۲)) / Eh^۳}$

شرایط تکیه‌گاهی	η		n = ۰	n = ۱	n = ۲	n = ۳
ساده- ساده	۰/۰۱	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)	۱۶/۷۷۳۱	۱۹/۱۰۱۶	۲۷/۰۰۸۴	۴۰/۰۷۶۷
		مرجع [۲۹]	۱۶/۷۷۳۲	۱۹/۲۱۴۳	۲۷/۲۲۶۱	۴۰/۲۷۸۸
	۰/۱	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)	۱۶/۱۷۰۲	۱۷/۹۷۰۱	۲۵/۰۶۵۵	۳۶/۹۶۲۰
		مرجع [۲۹]	۱۶/۱۷۰۵	۱۸/۴۸۳۰	۲۵/۹۴۵۱	۳۷/۶۷۰۸
گیردار- ساده	۰/۰۱	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)	۲۲/۶۹۲۷	۲۴/۲۳۳۹	۳۰/۰۰۹۴۵	۴۱/۱۹۶۶
		مرجع [۲۹]	۲۲/۶۹۶۰	۲۴/۲۵۰۰	۳۰/۰۵۷۶	۴۱/۲۸۸۰
	۰/۱	مطالعه حاضر (روش تفاضل مربعات)	۲۰/۸۴۵۷	۲۲/۱۳۱۵	۲۷/۴۳۵۲	۳۷/۷۲۴۰
		مرجع [۲۹]	۲۱/۱۱۲۶	۲۲/۴۷۰۰	۲۷/۶۸۱۸	۳۸/۲۱۷۶

جدول ۵- همگرایی فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده به‌ازای اعداد موج و شرایط مرزی و تعداد گره مختلف، توزیع متقارن نوع اول

$M = q = ۰/۲,\ R_i / R_o = ۰/۲,\quad h_o / R_o = ۰/۲$

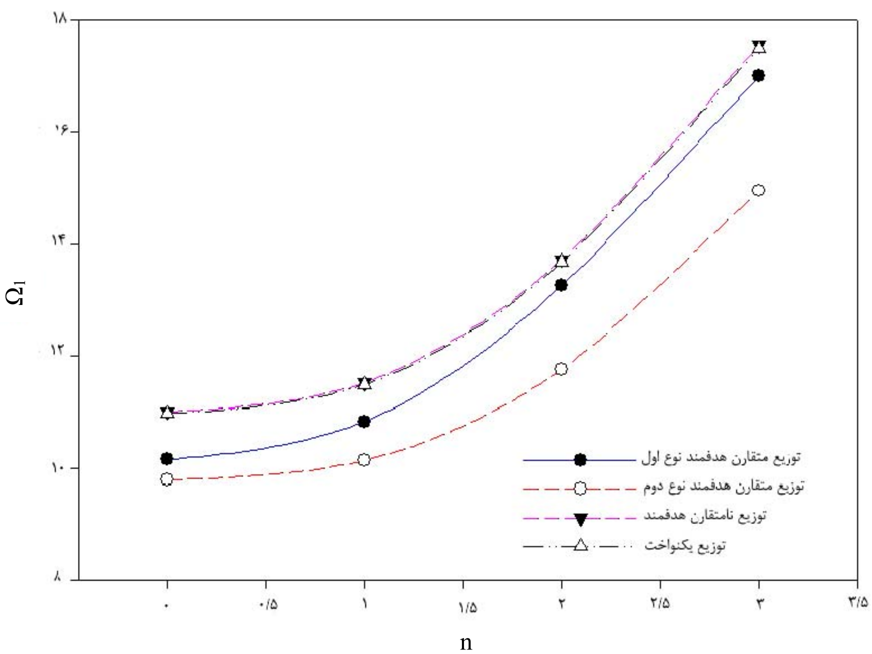
شرایط تکیه‌گاهی	n	$N_r = ۵$	$N_r = ۷$	$N_r = ۱۱$	$N_r = ۱۵$	$N_r = ۱۷$	$N_r = ۱۹$
گیردار- ساده	۰	۸/۸۳۷۶	۸/۸۱۵۶	۸/۸۲۴۵	۸/۸۵۸۹	۸/۸۷۹۶	۸/۸۷۶۹
	۱	۹/۳۱۰۵	۹/۳۳۵۶	۹/۳۵۴۶	۹/۳۹۲۶	۹/۴۰۹۸	۹/۴۰۹۸
	۲	۱۱/۶۰۶۳	۱۱/۶۷۳۷	۱۱/۷۱۱۶	۱۱/۷۵۶۷	۱۱/۷۷۸۳	۱۱/۷۷۱۸
ساده- ساده	۰	۶/۶۷۶۹	۶/۷۷۸۴	۶/۷۸۳۷	۶/۷۸۵۵	۶/۷۹۹۴	۶/۸۰۲۳
	۱	۷/۴۰۸۷	۷/۵۲۷۲	۷،۵۱۸۱	۷،۵۳	۷،۵۳۸۸	۷،۵۳۹۳
	۲	۱۰/۱۹۵۸	۱۰/۳۲۲۴	۱۰/۳۰۷۵	۱۰/۳۳۰۵	۱۰/۳۴۷۵	۱۰/۳۴۰۰
گیردار- گیردار	۰	۹/۴۱۳۲	۹/۴۲۳۵	۹/۴۴۹۴	۹/۴۵۲۳	۹/۴۵۲۶	۹/۴۵۲۸
	۱	۱۰/۰۵	۱۰/۰۱۴۶	۱۰/۰۱۱۸	۱۰/۰۰۲	۱۰/۰۰۲۴	۱۰/۰۰۲۸
	۲	۱۲/۲۵۰۱	۱۲/۱۳۲۷	۱۲/۱۲۲	۱۲/۱۰۸۶	۱۲/۱۰۳۳	۱۲/۱۰۳۵

۵، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی: گیردار- گیردار (C-C)، ساده- ساده (S-S)، گیردار- ساده (S-C) و همچنین اعداد موج محیطی $n = ۰,۱,۲$ برای توزیع متقارن از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، نتایج در جدول (۵) آورده شده است. در این جدول پارامتر بی‌بعد شده به‌صورت $\Omega = \omega R_o \sqrt{\rho_m / G_m}$ درنظر گرفته شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد گره‌ها نرخ همگرایی افزایش یافته و به‌ازای تعداد گره‌های بالای ۱۶ نتایج همگرایی حاصل شده است.

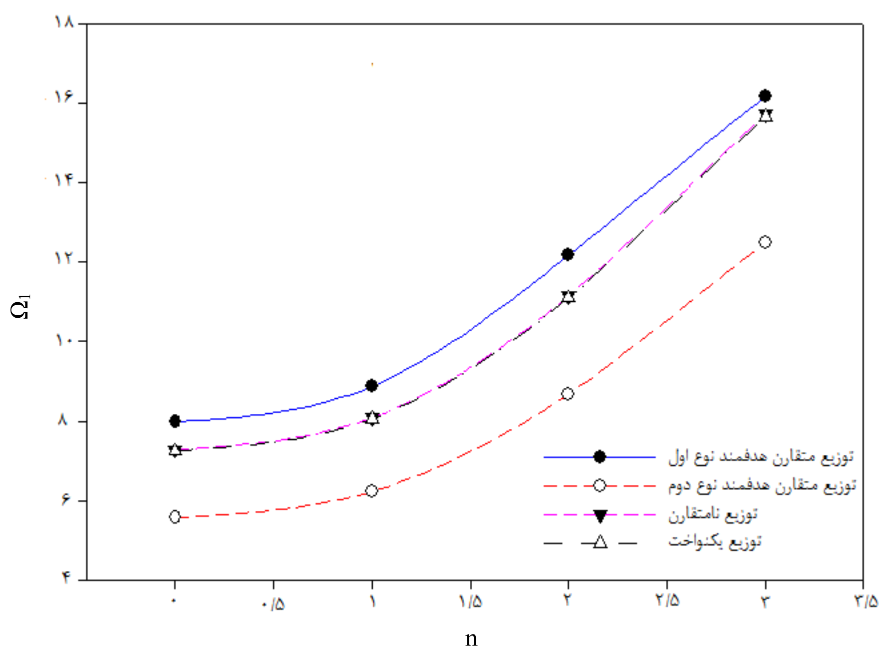
۴-۳- بررسی اثرات تکیه‌گاهی، عدد موج طبیعی و فرکانس طبیعی بی‌بعد شده

پس از اعتبارسنجی و تأیید صحت نتایج به‌دست آمده، اثرات برخی از پارامترها بررسی شده است. منحنی تغییرات فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده ورق گرد در شعاع داخلی و خارجی به‌ترتیب در شکل‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. همچنین در این شکل‌ها انواع توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت یعنی؛ متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت نیز درنظر گرفته شده است. از رابطه بی‌بعد $\Omega = \omega R_o \sqrt{\rho_m / G_m}$ برای فرکانس طبیعی استفاده شده است. همان‌طور که مشخص است، با افزایش عدد محیطی، فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده نیز افزایش می‌یابد.

نتایج به‌دست آمده در این شکل‌ها نشان می‌دهد که برای کلیه شرایط تکیه‌گاهی ذکر شده، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در حالت توزیع نامتقارن و توزیع یکنواخت بسیار نزدیک به‌هم است. همچنین فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای توزیع متقارن نوع دوم کمترین مقدار را نسبت به توزیع‌های دیگر در تمامی شرایط مرزی دارد. از طرفی در شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار و گیردار- ساده یعنی شکل‌های (۱۰) و (۱۱)، بالاترین مقادیر فرکانس بی‌بعد به توزیع نامتقارن و یکنواخت اختصاص دارد و همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد نتایج به‌ازای این دو نوع توزیع بسیار نزدیک به‌هم است. در



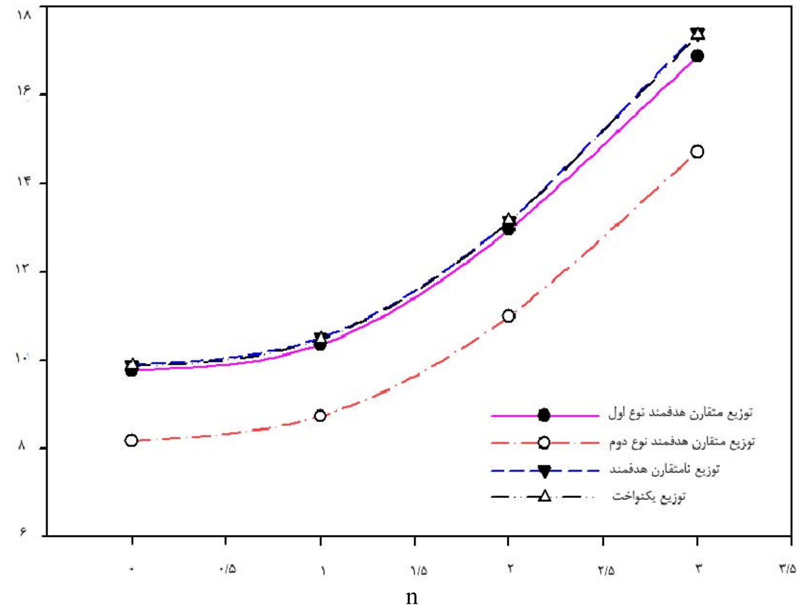
شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده

در شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده یعنی شکل (۱۰)، بیشترین مقادیر فرکانس بی‌بعد در توزیع متقارن نوع اول رخ می‌دهد.

منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب پارامتر q، برای $n = ۱$ با درنظر گرفتن مقادیر مختلف M و در

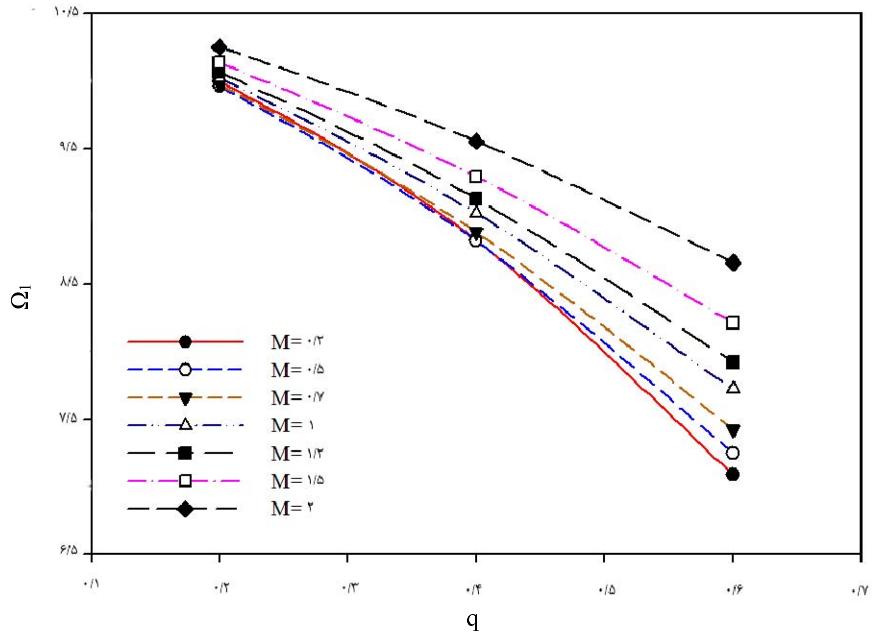


شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب عدد موج محیطی برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده

شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار برای توزیع نانولوله کربنی به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت به‌ترتیب در شکل‌های (۱۲) تا (۱۵) نشان داده شده است. مطابق این شکل‌ها با ثابت درنظر گرفتن پارامتر M، افزایش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود. همچنین با ثابت درنظر گرفتن q، با افزایش پارامتر M فرکانس طبیعی بی‌بعد شده نیز افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که این افزایش در مقادیر کم q مقدار قابل‌توجهی ندارد اما با زیاد شدن مقدار q، این افزایش محسوس‌تر می‌شود. در واقع می‌توان ادعا کرد که اثر پارامتر M برروی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده، با افزایش q محسوس‌تر می‌شود. همانگونه که قبلاً ذکر شده به‌ازای $M < ۱$ پروفیل ضخامت مقعر و به‌ازای $M > ۱$ پروفیل ضخامت محدب است.

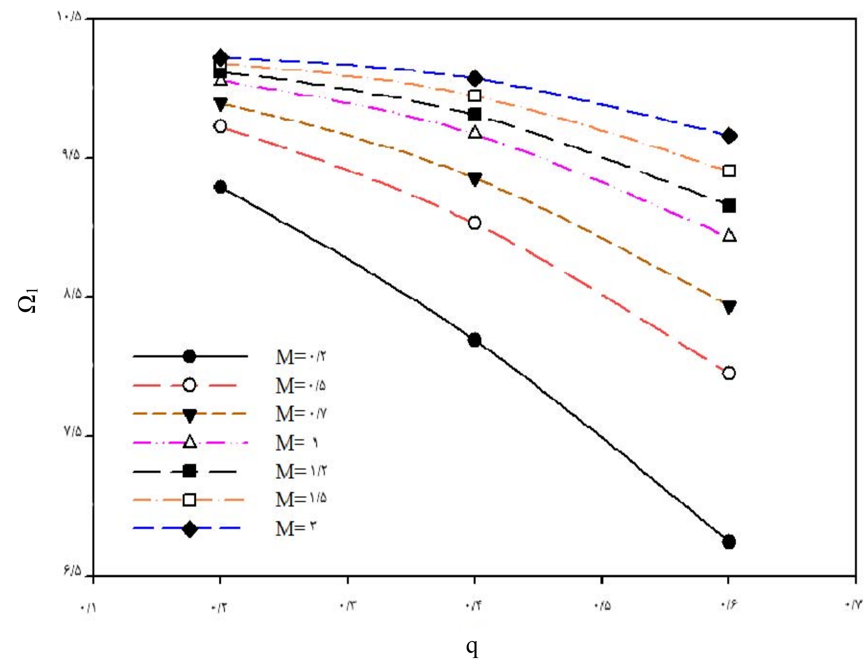
منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب پارامتر M، برای $n = ۱$ با درنظر گرفتن مقادیر مختلف q و در شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده برای توزیع نانولوله‌های کربن به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت به‌ترتیب در شکل‌های (۱۶) تا (۱۹) نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است افزایش M و کاهش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود.

مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به‌ازای مقادیر مختلف q و M با شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده و برای توزیع نانولوله‌های کربن به‌صورت‌های متقارن نوع اول، متقارن نوع دوم، نامتقارن و یکنواخت در جدول (۶) ارائه شده است. در این جدول پارامتر بی‌بعد شده به‌صورت $\Omega = \omega R_o \sqrt{\rho_m / G_m}$ درنظر گرفته شده است. این مقادیر با درنظر گرفتن $n = ۱$ به‌دست آمده‌اند. مقایسه مقادیر به‌دست آمده نشان می‌دهد که برای این حالت نیز افزایش M و کاهش q باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده می‌شود.
منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برحسب M، با درنظر گرفتن توزیع متقارن نوع اول و $n = ۱$ برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی (گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده) در شکل (۲۰) نشان داده شده است. مطابق این شکل، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در حالت گیردار- گیردار بیشترین و در حالت ساده- ساده کمترین مقدار را دارد.



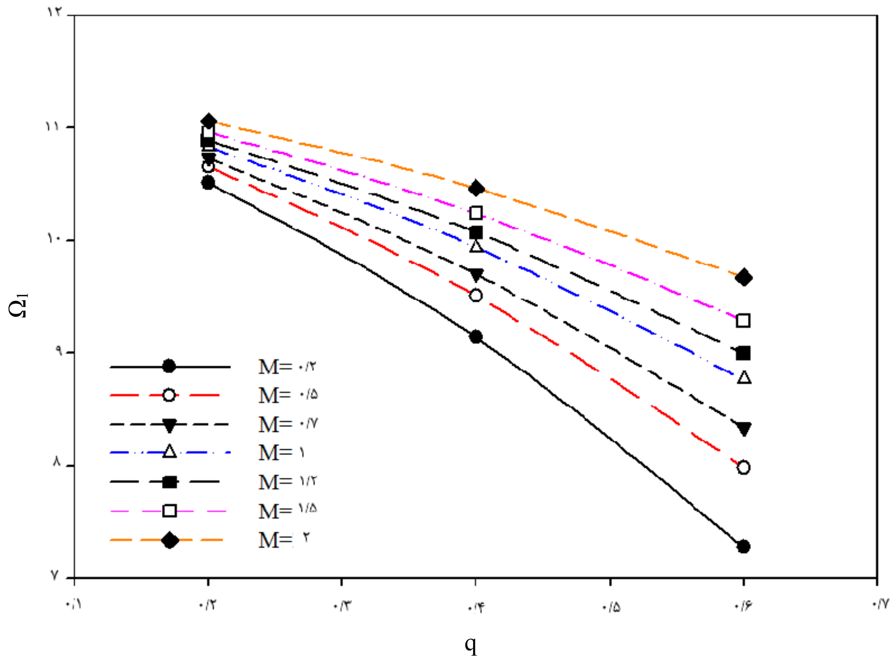
شکل ۱۲- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q، برای توزیع متقارن نوع اول از نانولوله‌های کربنی،

$n = ۱, R_i / R_o = ۰/۲, h_o / R_o = ۰/۲$



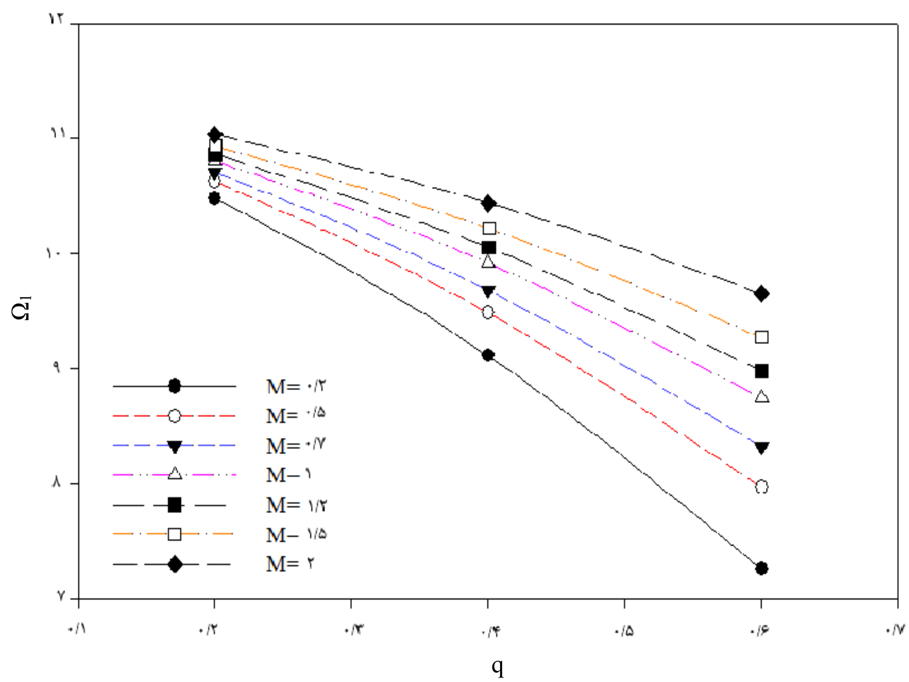
شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q، برای توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی،

$n = ۱, R_i / R_o = ۰/۲, h_o / R_o = ۰/۲$



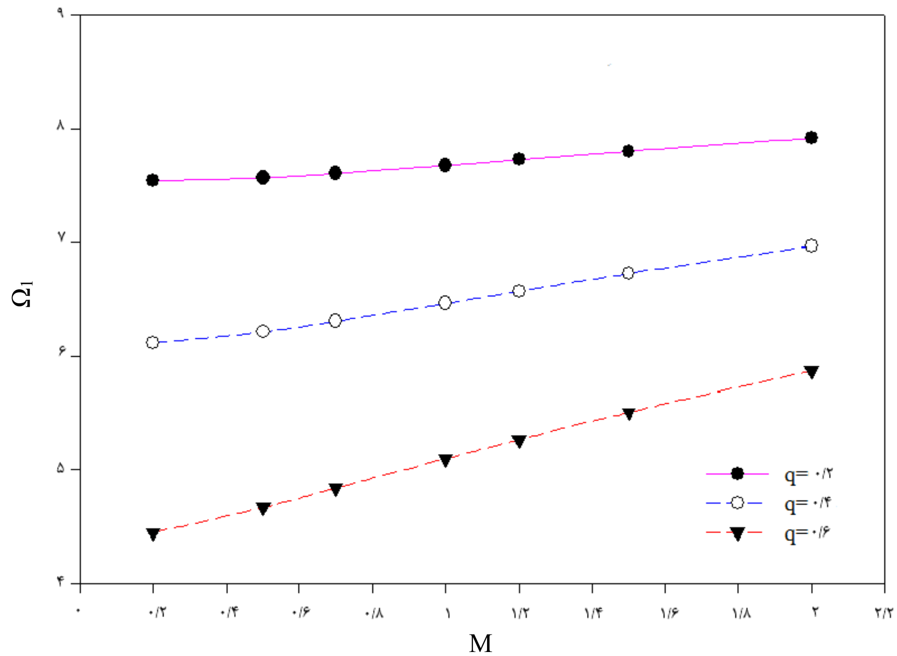
شکل ۱۴- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی،

$n = ۱,\ R_i / R_o = ۰/۲,\ h_o / R_o = ۰/۲$

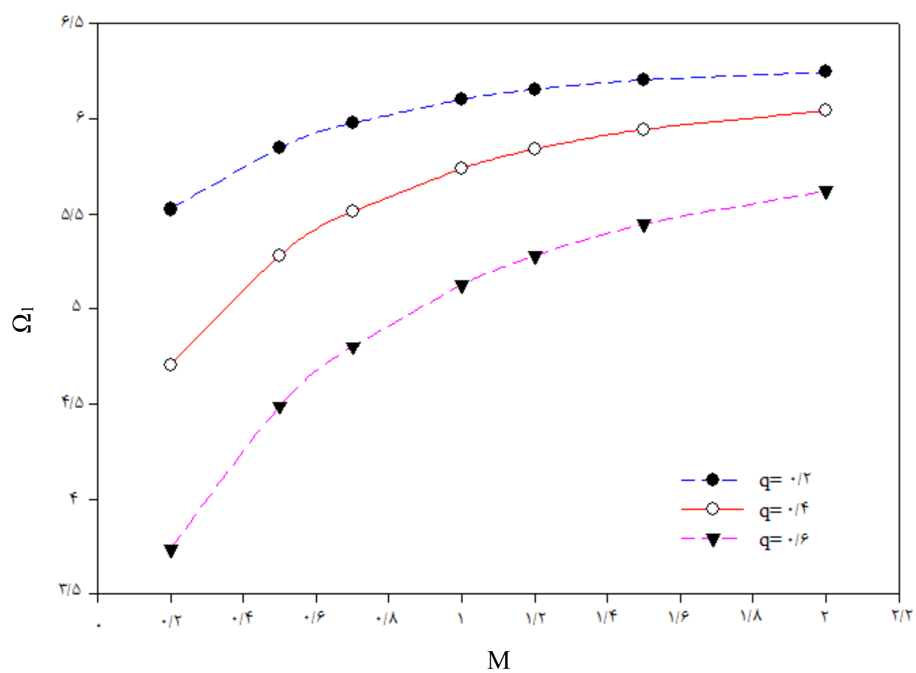


شکل ۱۵- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر q، برای توزیع یکنواخت از نانولوله‌های کربنی،

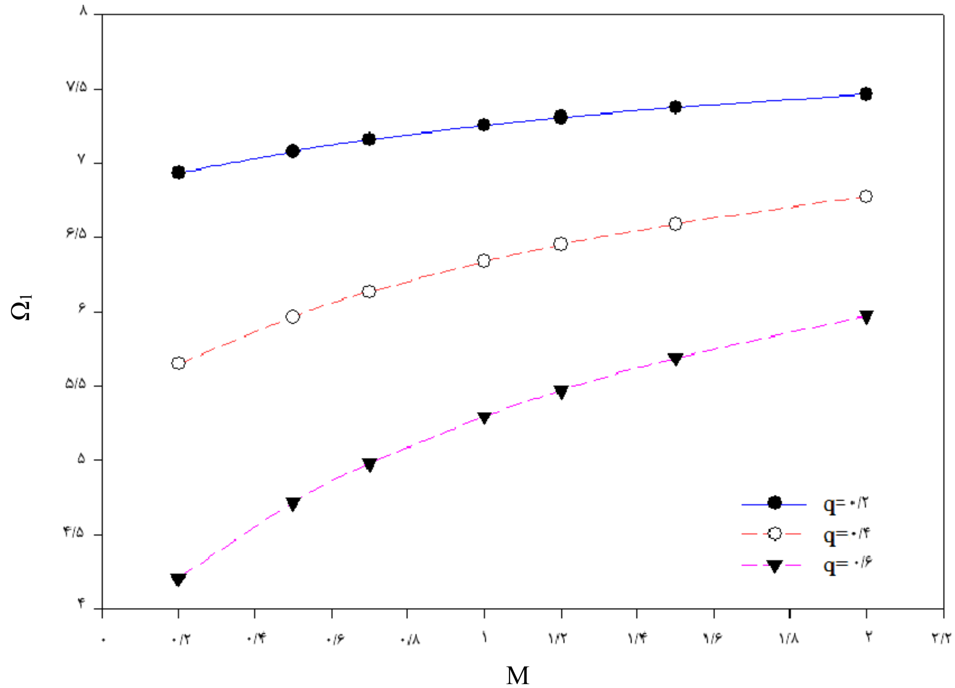
$n = ۱,\ R_i / R_o = ۰/۲,\ h_o / R_o = ۰/۲$



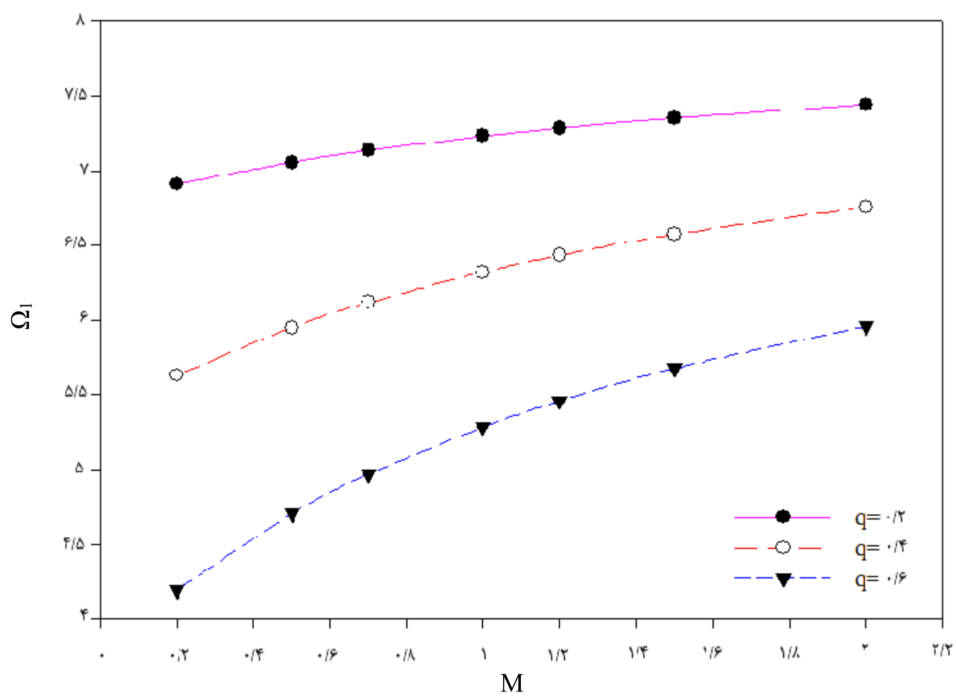
شکل ۱۶- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۷- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۸- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربنی



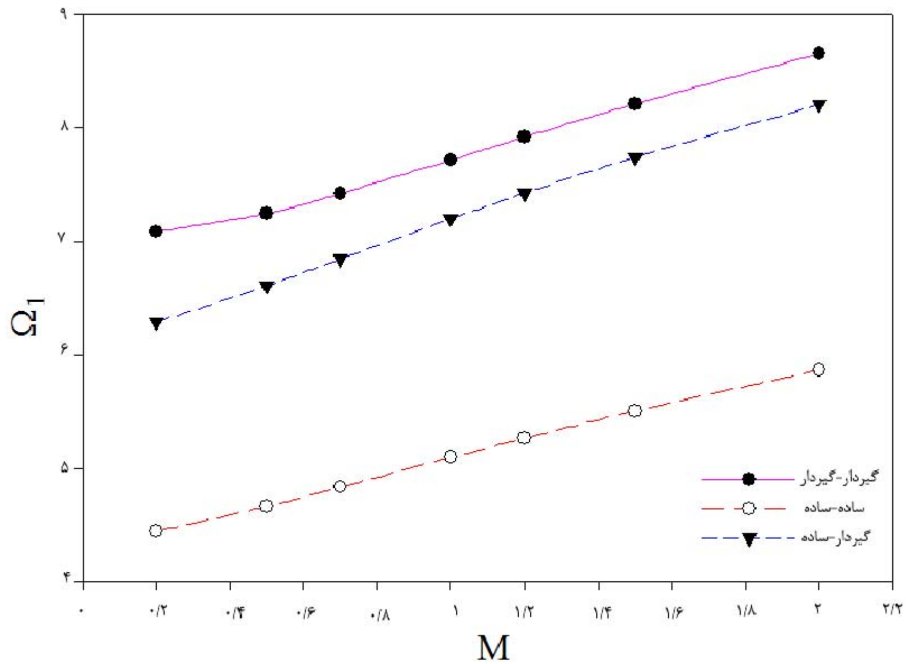
شکل ۱۹- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M، برای توزیع یکنواخت از نانولوله‌های کربنی

جدول ۶- مقادیر فرکانس طبیعی اول به‌ازای توزیع مختلف از نانولوله‌های کربنی برای ورق گرد با تکیه‌گاه ساده- گیردار با ضخامت متغیر، $n = ۱,\ R_i / R_o = ۰/۲,\ h_o / R_o = ۰/۲$

M	q	متقارن نوع اول	متقارن نوع دوم	نامتقادن	یکنواخت
	۰/۲	۹/۴۰۹۸	۷/۸۶۹۷	۹/۳۸۲۹	۹/۳۵۲۵
۰/۲	۰/۴	۸/۰۸۶۶	۶/۸۱۷۸	۷/۹۴۸۹	۷/۹۲۴۲
	۰/۶	۶/۲۸۸۵	۵/۵۰۹۴	۶/۱۴۵۷	۶/۱۲۸۶
	۰/۲	۹/۴۲۹۱	۸/۲۸۰۲	۹/۵۶۵۰	۹/۵۳۶۲
۰/۵	۰/۴	۸/۱۹۷۴	۷/۵۹۳۶	۸/۳۷۸۳	۸/۳۵۵۹
	۰/۶	۶/۶۰۹۰	۶/۵۹۳۳	۶/۸۸۷۳	۶/۸۷۲۱
	۰/۲	۹/۴۶۷۸	۸/۴۴۵۲	۹/۶۶۲۲	۹/۶۳۳۷
۰/۷	۰/۴	۸/۳۱۰۳	۷/۹۰۴۷	۸/۶۰۱۳	۸/۵۷۹۳
	۰/۶	۶/۸۴۶۷	۷/۰۴۴۵	۷/۲۶۴۵	۷/۲۴۹۳
	۰/۲	۹/۵۴۲۷	۸/۶۰۱۳	۹/۷۸۱۳	۹/۷۵۲۹
۱	۰/۴	۸/۴۹۸۹	۸/۲۱۰۱	۸/۸۷۱۰	۸/۸۴۸۸
	۰/۶	۷/۲۰۰۸	۷/۵۱۱۳	۷/۷۱۷	۷/۷۰۱۱
	۰/۲	۹/۵۹۷	۸/۶۶۶۳	۹/۸۴۷۱	۹/۸۱۸۵
۱/۲	۰/۴	۸/۶۲۶۳	۸/۳۴۵۴	۹/۰۱۸۴	۸/۹۹۵۸
	۰/۶	۷/۴۲۶۷	۷/۷۳۱۴	۷/۹۶۳۳	۷/۹۴۶۷
	۰/۲	۹/۶۷۸۴	۸/۷۲۷۶	۹/۹۲۹۹	۹/۹۰۱۰
۱/۵	۰/۴	۸/۸۱۰۷	۸/۴۸۳۷	۹/۲۰۳۲	۹/۱۷۹۸
	۰/۶	۷/۷۴۳۸	۷/۹۷۱۸	۸/۲۷۲۰	۸/۲۵۴۲
	۰/۲	۹/۸۰۳۷	۸/۷۷۴۲	۱۰/۰۳۶۸	۱۰/۰۰۷۲
۲	۰/۴	۹/۰۸۶۶	۸/۶۱۰۷	۹/۴۴۰۹	۹/۴۱۶۱
	۰/۶	۸/۲۰۷۹	۸/۲۲۰۸	۸/۶۶۹۹	۸/۶۵

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار با ضخامت متغیر و شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی شده است. ورق دایره‌ای با نانولوله‌های کربنی تقویت شده و به‌صورت تابعی و مدرج است. پارامترهای بررسی‌شده عبارتند از: توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق، شرایط



شکل۲۰- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب پارامتر M و به ازای شرایط تکیه‌گاهی مختلف برای توزیع متقارن نوع اول،

$n=۱, q=۰/۶, R_i/R_o=۰/۲, h_o/R_o=۰/۲$

تکیه‌گاهی مختلف، پروفیل‌های مختلف از تغییرات ضخامت ورق دایره‌ای در راستای شعاعی و تغییرات عدد موج محیطی. مطابق نتایج به‌دست آمده، می‌توان گفت:

- علاوه بر شرایط تکیه‌گاهی عدد موج محیطی نیز پارامتری مهم در تغییرات فرکانس طبیعی است به‌طوری‌که، افزایش عدد موج محیطی باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.
- در بین توزیع‌های درنظر گرفته شده برای نانولوله‌های کربنی، توزیع متقارن نوع دوم از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق گرد سوراخ‌دار کمترین مقادیر فرکانسی را به‌خود اختصاص می‌دهد.
- نتایج فرکانسی به‌ازای توزیع‌های نامتقارن و یکنواخت از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت بسیار نزدیک به یکدیگر است.
- درنظر گرفتن هم‌زمان شرایط تکیه‌گاهی و توزیع‌های نانولوله‌های کربنی نشان می‌دهد که به‌ازای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار و گیردار- ساده، بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع متقارن نوع اول و برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع یکنواخت و نامتقارن است.
- افزایش پارامتر M مربوط به تغییرات تابع ضخامت، افزایش فرکانس طبیعی و همچنین افزایش q مربوط به تغییرات تابع ضخامت، کاهش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت. در واقع هرچه تغییرات ضخامت ورق گرد سوراخ‌دار از حالت مقعر به حالت محدب نزدیک شود فرکانس‌های طبیعی افزایش پیدا می‌کند.

پیوست

فرم تفاضل مربعات معادلات حرکت نهایی استخراج‌شده به‌صورت زیر است.

معادله اول حرکت:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}\frac{A_{44}(r)}{h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}W_j-D_{11}(r)\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{nD_{33}(r)}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{n^2D_{33}(r)\psi_{ri}}{r^2}-\frac{nD_{33}(r)\psi_{\theta i}}{r^2}-\frac{8}{3}\frac{nD_{44}(r)}{rh^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}+\\
&\frac{8}{3}\frac{n^2D_{44}(r)\psi_{ri}}{r^2h^2}+\frac{8}{3}\frac{n^2D_{44}(r)}{r^2h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{8}{3}\frac{A_{44}(r)}{h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{rj}+\frac{8}{3}\frac{nD_{44}(r)\psi_{\theta i}}{r^2h^2}+\frac{16}{9}\frac{nD_{55}(r)}{rh^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{16}{9}\frac{n^2D_{55}(r)\psi_{ri}}{r^2h^4}-\\
&\frac{32}{9}\frac{n^2D_{55}(r)}{r^2h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{16}{9}\frac{nD_{55}(r)\psi_{\theta i}}{r^2h^4}+\frac{16}{9}\frac{n^2D_{55}(r)W_i}{r^3h^4}+\frac{16}{9}\frac{\frac{\partial B_{55}}{\partial r}\psi_{ri}}{rh^4}+\frac{16}{9}\frac{\frac{\partial B_{55}}{\partial r}}{rh^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{16}{9}\frac{n\frac{\partial B_{55}}{\partial r}}{rh^4}\psi_{\theta i}-\\
&\frac{16}{9}\frac{n^2\frac{\partial B_{55}}{\partial r}}{r^2h^4}W_i+\frac{16}{9}\frac{nB_{55}}{rh^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}+\frac{\partial A_{33}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+A_{33}(r)\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{rj}-\frac{16}{9}\frac{n^2B_{55}}{r^2h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{16}{9}\frac{n^2B_{55}}{r^3h^4}W_i+\\
&\frac{n\frac{\partial B_{33}}{\partial r}}{r}\psi_{\theta i}-\frac{4}{3}\frac{n^2D_{44}}{r^3h^2}W_i+\frac{8}{3}\frac{A_{44}}{r^2h^2}\psi_{ri}+\frac{8}{3}\frac{nA_{44}}{r^2h^2}\psi_{\theta i}-\frac{16}{9}\frac{A_{55}}{r^2h^4}\psi_{ri}-\frac{16}{9}\frac{A_{55}}{r^2h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{16}{9}\frac{nA_{55}}{r^2h^4}\psi_{\theta i}+\frac{16}{9}\frac{n^2A_{55}}{r^3h^4}W_i-\\
&\frac{8}{3}\frac{A_{44}}{rh^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{16}{9}\frac{A_{55}}{rh^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{16}{9}\frac{A_{55}}{h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{rj}-D_{11}(r)\psi_{ri}+\frac{16}{9h^4}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j+\frac{A_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\\
&\frac{A_{33}}{r^2}\psi_{ri}\frac{8D_{33}}{h^2}\psi_{ri}+\frac{8D_{33}}{h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{16}{9h^4}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{8}{3h^2}\frac{\partial A_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{\partial B_{33}}{r\partial r}\psi_{ri}-\frac{16D_{44}}{h^4}\psi_{ri}-\frac{16D_{44}}{h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\\
&\frac{16}{9h^4r}A_{55}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j-\frac{4}{3h^2r}A_{44}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j+\frac{16A_{55}}{9h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}W_j-\frac{nA_{33}}{r^2}\psi_{\theta i}+\frac{4A_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{4n^2A_{44}}{3h^2r^3}W_i+\frac{nB_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\\
&\frac{8}{3h^2r}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{4}{3h^2r}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{8n}{3h^2r}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}\psi_{\theta i}+\frac{4n^2}{3h^2r^2}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}W_i-\frac{8nB_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}+\frac{4n^2B_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{4n^2B_{44}}{3h^2r^3}W_i-\\
&\frac{4}{3h^2}\frac{\partial A_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j=-\left(I_3-\frac{8}{3h^2}I_5+\frac{16}{9h^4}I_7\right)\omega^2\psi_{ri}+\frac{4}{3h^2}\left(I_5-\frac{4}{3h^2}I_7\right)\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j
\end{aligned}
$$

(پ-۱)

معادله دوم حرکت:

$$
\begin{aligned}
&\frac{4nB_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j-\frac{n}{r}\frac{\partial D_{33}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{32nD_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j-\frac{16nB_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j\\
&\frac{8n}{3h^2r}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{8nD_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{8nD_{44}}{3h^2r^2}\psi_{ri}+\frac{4nD_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\\
&\frac{8}{3h^2r}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\psi_{\theta i}-\frac{4n}{3h^2r^2}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}W_i-\frac{8D_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{nB_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\\
&\frac{8nB_{44}}{3rh^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{8D_{33}}{h^2}\psi_{\theta i}+\frac{\partial D_{33}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{nA_{33}}{r^2}\psi_{ri}-\frac{n^2A_{33}}{r^2}\psi_{\theta i}+
\end{aligned}
$$

$$\frac{8nA_{44}}{3r^2h^2}\psi_{ri}+\frac{4nA_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{8n^2A_{44}}{3r^2h^2}\psi_{\theta i}-\frac{4n^3A_{44}}{3r^3h^2}W_i-\frac{8nD_{33}}{rh^2}W_i+$$

$$\frac{nD_{11}}{r}W_i+\frac{8D_{44}}{3h^2r^2}\psi_{\theta i}-\frac{16n}{9h^4r}\frac{\partial D_{55}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{32n}{9h^4r}\frac{\partial D_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{16nD_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-$$

$$\frac{16nD_{55}}{9h^4r^2}\psi_{ri}-\frac{16nD_{55}}{9h^4r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{16}{9h^4r}\frac{\partial D_{55}}{\partial r}\psi_{\theta i}+\frac{16n}{9h^4r^2}\frac{\partial D_{55}}{\partial r}W_i+$$

$$\frac{16D_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{16D_{55}}{9r^2h^4}\psi_{\theta i}-\frac{16nB_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{1}{r}\frac{\partial D_{33}}{\partial r}\psi_{\theta i}-\frac{8D_{44}}{3h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{\theta j}-$$

$$\frac{16nA_{55}}{9r^2h^4}\psi_{ri}-\frac{16nA_{55}}{9h^4r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{16n^2A_{55}}{9r^2h^4}\psi_{\theta i}+\frac{D_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{D_{33}}{r^2}\psi_{\theta i}+$$

$$\frac{16}{9h^4}\frac{\partial D_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{8}{3h^2}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}+\frac{16nD_{44}}{rh^4}W_i+D_{33}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{\theta j}+$$

$$\frac{8nD_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j+\frac{16D_{55}}{9h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{\theta j}-D_{11}\psi_{\theta i}+\frac{16n^3A_{55}}{9r^3h^4}W_i-\frac{nD_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-$$

$$\frac{nD_{33}}{r^2}\psi_{ri}+\frac{8n}{3h^2r}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{16D_{44}}{h^4}\psi_{\theta i}=-(I_3-\frac{8}{3h^2}I_5+\frac{16}{9h^4}I_7)\omega^2\psi_{\theta i}-$$

$$\frac{4n}{3rh^2}(I_5-\frac{4}{3h^2}I_7)\omega^2 w_i$$

(پ-۲)

معادله سوم حرکت:

$$-\frac{32}{9h^4}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}W_j+\frac{16n^2}{9h^4r^2}\frac{\partial^2 B_{55}}{\partial r^2}W_i+\frac{4nB_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{\theta j}-\frac{4n^3A_{44}}{3h^2r^3}\psi_{\theta i}+\frac{16n^2A_{55}}{9h^4r^3}\psi_{ri}+\frac{16n^3A_{55}}{9h^4r^3}\psi_{\theta i}-\frac{16n^4A_{55}}{9h^4r^4}W_i-$$

$$\frac{32n^2B_{55}}{9h^4r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{4}{3h^2r}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}+\frac{8}{3h^2r}\frac{\partial B_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{16}{9h^4r}\frac{\partial B_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{32n}{9h^4r}\frac{\partial B_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}+$$

$$\frac{32n^2}{9h^4r^2}\frac{\partial B_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{4A_{44}}{3h^2r^3}\psi_{ri}-\frac{4A_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{32}{9h^4r}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{16n}{9h^4r}\frac{\partial^2 B_{55}}{\partial r^2}\psi_{\theta i}-\frac{16}{9h^4r}\frac{\partial^2 B_{55}}{\partial r^2}\psi_{ri}-$$

$$\frac{32}{9h^4r}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j-\frac{4B_{44}n^2}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{4}{3h^2r^2}\frac{\partial A_{44}}{\partial r}\psi_{ri}+\frac{16D_{44}}{h^4}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j+\frac{\partial D_{11}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{8D_{33}}{h^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j+$$

$$\frac{16A_{55}}{9h^4r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}W_j-\frac{32A_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{rj}-\frac{32A_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}W_j+\frac{8A_{44}}{3h^2r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{rj}+\frac{8n}{3h^2r}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{8D_{33}}{h^2r}\psi_{ri}+$$

$$\frac{16D_{44}}{h^4r}\psi_{ri}+\frac{16D_{44}}{h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{16}{h^4}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\psi_{ri}+\frac{16}{h^4}\frac{\partial D_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j+\frac{nD_{11}}{r}\psi_{\theta i}+\frac{16}{9h^4r^2}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\psi_{ri}+\frac{16n}{9h^4r^2}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\psi_{\theta i}-$$

$$\frac{16n^2}{9h^4r^3}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}W_i+\frac{32n^2A_{55}}{9h^4r^4}W_i-\frac{16A_{55}}{9h^4r^3}\psi_{ri}+\frac{16}{9h^4r^2}\frac{\partial A_{55}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-\frac{4nA_{44}}{3h^2r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{\theta j}-\frac{16A_{55}}{9h^4r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}W_j-$$

$$\frac{16nA_{55}}{9h^4r^3}\psi_{\theta i}+\frac{4nA_{44}}{3h^2r^3}\psi_{\theta i}-\frac{n^2D_{11}}{r^2}W_i-\frac{8nD_{33}}{rh^2}\psi_{\theta i}+\frac{8n^2D_{33}}{r^2h^2}W_i+\frac{8}{3h^2r}\frac{\partial A_{44}}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}\psi_{rj}-\frac{32nD_{55}}{9h^4r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}\psi_{\theta j}+$$

$$\frac{۶۴n^۲D_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j-\frac{۱۶nB_{۵۵}}{۹h^۴r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}\psi_{\theta j}+\frac{۳۲n^۲B_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j-\frac{۸n^۲}{۳h^۲r^۲}\frac{\partial D_{۴۴}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{۳۲n^۲}{۹h^۴r^۳}\frac{\partial B_{۵۵}}{\partial r}W_i-\frac{۸n}{۳h^۲r^۲}\frac{\partial D_{۴۴}}{\partial r}\psi_{\theta i}-$$

$$\frac{۸n^۲D_{۴۴}}{۳h^۲r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-\frac{۳۲n}{۹h^۴r}\frac{\partial D_{۵۵}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{\theta j}+\frac{۳۲n^۲}{۹h^۴r^۲}\frac{\partial D_{۵۵}}{\partial r}\psi_{ri}+\frac{۶۴n^۲}{۹h^۴r^۲}\frac{\partial D_{۵۵}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+\frac{۳۲n^۲D_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-$$

$$\frac{۳۲n^۲D_{۵۵}}{۹h^۴r^۳}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+\frac{۱۶nD_{۴۴}}{h^۴r}\psi_{\theta i}-\frac{۱۶n^۲D_{۴۴}}{h^۴r^۲}W_i+\frac{۳۲n}{۹h^۴r^۲}\frac{\partial D_{۵۵}}{\partial r}\psi_{\theta i}-\frac{۳۲n^۲}{۹h^۴r^۳}\frac{\partial D_{۵۵}}{\partial r}W_i+\frac{۳۲n^۲B_{۵۵}}{۹h^۴r^۴}W_i+\frac{۱۶n^۲B_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-$$

$$\frac{۴n^۲A_{۴۴}}{۳h^۲r^۳}\psi_{ri}+D_{۱۱}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j-\frac{۸}{h^۲}\frac{\partial D_{۳۳}}{\partial r}\psi_{ri}-\frac{۸}{h^۲}\frac{\partial D_{۳۳}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j-\frac{۸D_{۳۳}}{h^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-\frac{۳۲}{۹h^۴}\frac{\partial A_{۵۵}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}\psi_{rj}+\frac{۱۶A_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}+$$

$$\frac{۸nD_{۴۴}}{۳h^۲r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}\psi_{\theta j}+\frac{۱۶nA_{۵۵}}{۹h^۴r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}\psi_{\theta j}+\frac{۳۲n^۲D_{۵۵}}{۹h^۴r^۴}W_i+\frac{۸}{۳h^۲}\frac{\partial A_{۴۴}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}\psi_{rj}-\frac{۸D_{۳۳}}{h^۲r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j-\frac{۱۶}{۹h^۴}\frac{\partial^۲A_{۵۵}}{\partial r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j+$$

$$\frac{۴}{۳h^۲}\frac{\partial^۲A_{۴۴}}{\partial r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}+D_{۱۱}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-\frac{۱۶}{۹h^۴}\frac{\partial^۲A_{۵۵}}{\partial r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-\frac{۱۶A_{۵۵}}{۹h^۴}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۴)}W_j+\frac{\partial D_{۱۱}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+\frac{۱۶D_{۴۴}}{h^۴}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}+$$

$$\frac{D_{۱۱}}{r}\psi_{ri}+\frac{D_{۱۱}}{r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+\frac{۴}{۳h^۲r}\frac{\partial^۲B_{۴۴}}{\partial r^۲}\psi_{ri}-\frac{۱۶}{۹h^۴r}\frac{\partial^۲B_{۵۵}}{\partial r^۲}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j-\frac{۱۶}{۹h^۴r}\frac{\partial B_{۵۵}}{\partial r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j-\frac{۴n}{۳h^۲r^۲}\frac{\partial A_{۴۴}}{\partial r}\psi_{\theta i}+\frac{۴n}{۳h^۲r}\frac{\partial^۲B_{۴۴}}{\partial r^۲}\psi_{\theta i}=$$

$$-I_۱\omega^۲w_i+\left(\frac{۴}{۳h^۲}\right)^۲I_۷\omega^۲\left(\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j+\frac{۱}{r}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j-\frac{n^۲}{r^۲}w_i\right)-\frac{۴\omega^۲}{۳h^۲}\left(I_۵-\frac{۴}{۳h^۲}I_۷\right)\times\left(\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}+\frac{n}{r}\psi_{\theta i}+\frac{۱}{r}\psi_{ri}\right)+$$

$$\frac{۱۶\omega^۲}{۹h^۴}\frac{\partial I_۷}{\partial r}\left(\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}\right)-\frac{۴\omega^۲}{۳h^۲}\frac{\partial I_۵}{\partial r}(\psi_{ri})$$

(پ-۳)

و هم‌چنین فرم تفاضل مربعات از روابط شرایط مرزی به‌صورت زیر هستند:

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده:

$$W_i=۰$$

$$M_r=۰\Rightarrow A_{۳۳}\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}-\frac{۴A_{۴۴}}{۳h^۲}\left\{\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{rj}+\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۲)}W_j\right\}+B_{۳۳}\left\{\frac{\psi_{ri}}{r}+\frac{n\psi_{\theta i}}{r}\right\}-$$

$$\frac{۴B_{۴۴}}{۳h^۲r}\left\{\psi_{ri}+\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j+n\psi_{\theta i}-\frac{n^۲W_i}{r}\right\}=۰$$

$$M_{r\theta}-\frac{۴}{۳}P_{r\theta}=۰\Rightarrow$$

$$D_{۳۳}\left\{\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{\theta j}-\frac{n\psi_{ri}}{r}-\frac{\psi_{\theta i}}{r}\right\}-\frac{۸D_{۴۴}}{۳h^۲}\left\{\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{\theta j}\right\}+\frac{۸D_{۴۴}n}{۳h^۲r}\psi_{ri}+\frac{۸D_{۴۴}n}{۳h^۲r}\left\{\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j\right\}+$$

$$\frac{۸D_{۴۴}}{۳h^۲r}\psi_{\theta i}-\frac{۴D_{۴۴}n}{۳h^۲r^۲}W_i+\frac{۱۶D_{۵۵}}{۹h^۴}\left(\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}\psi_{\theta j}-\frac{n\psi_{ri}}{r}\right)-\frac{۳۲D_{۵۵}n}{۹h^۴r}\left\{\sum_{j=۱}^{N}c_{ij}^{(۱)}W_j\right\}-\frac{۱۶D_{۵۵}}{۹h^۴r}\psi_{\theta i}+$$

$$\frac{۱۶D_{۵۵}n}{۹h^۴r^۲}W_i=۰$$

(پ-۴)

تکیه‌گاه گیردار:

$$W_i = 0$$
$$\psi_{ri} = 0 \qquad (پ-۵)$$
$$\psi_{\theta i} = 0$$

که در معادلات حرکت و شرایط مرزی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی که در بالا آورده شده است، ثوابت آورده شده در این روابط به‌صورت زیر تعریف‌شده‌اند:

$$(A_{33}, A_{44}, A_{55}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{11}(z)(z^2, z^4, z^6)dz$$

$$(B_{33}, B_{44}, B_{55}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{12}(z)(z^2, z^4, z^6)dz$$

$$(D_{11}, D_{33}, D_{44}, D_{55}) = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} C_{44}(z)(1, z^2, z^4, z^6)dz \qquad (پ-۶)$$

همچنین c_{ij} ضرائب وزنی مربوط به‌روش تفاضل مربعات است.

واژه‌نامه

1. functionally graded materials (FGM)
2. differential quadrature method (DQM)
3. tensile impact toughness
4. molecular dynamics simulations
5. perturbation method
6. CNT/ Polystyrene (PS)
7. unsymmetrical FG
8. symmetrical FG
9. uniform
10. variational

مراجع

1. Rao, S. S., and Sunar, M., “Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey”, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, pp. 113-123, 1994.
2. Zhong, Z., and Shang, E. T., “Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 5335-5352, 2003.
3. Nie, G. J., and Zhong, Z., “Semi-Analytical Solution for Three-Dimensional Vibration of Functionally Graded Circular Plates”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 4901-4910, 2007.
4. Malekzadeh, P., “Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations”, *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 367-373, 2009.
5. Tornabene, F., “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power-Law Distribution”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2911-2935, 2009.
6. Fidelus, J. D., Wiesel, E., Gojny, F. H., Schulte, K. and Wagner, H. D., “Thermo-Mechanical Properties of Randomly Oriented Carbon/Epoxy Nanocomposites”, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, pp. 1555-1561, 2005.
7. Song, Y. S. and Youn, J. R., “Modeling of Effective Elastic Properties for Polymer Based Carbon Nanotube Composites”, *Polymer*, Vol. 47, pp. 1741-1748, 2006.
8. Han, Y. and Elliott, J., “Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites”, *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315-323, 2007.
9. Liew, K. M., Lei, Z. X. and Zhang, L. W., “Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review”, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 90-97, 2015.

10. Zhang, L. W., Lei, Z. X. and Liew, K. M., “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Triangular Plates Using the FSDT and Element-Free IMLS-Ritz Method”, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 189-199, 2015.
11. Lei, Z. X., Zhang, L. W. and Liew, K. M., “Vibration Analysis of CNT-Reinforced Functionally Graded Rotating Cylindrical Panels using the Element-Free Kp-Ritz Method”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 77, pp. 291-303, 2015.
12. Zhang, L. W., Lei, Z. X. and Liew, K. M., “Vibration Characteristic of Moderately Thick Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Skew Plates”, *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 172-183, 2015.
13. Moradi-Dastjerdi, R., Pourasghar, A., Foroutan, M. and Bidram, M., “Vibration Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Cylinders Reinforced by Wavy Carbon Nanotube Based on Mesh-Free Method”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 48, pp. 1901-1913, 2014.
14. Shen, H. S. and Xiang, Y., “Nonlinear Response of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Panels Subjected to Combined Loadings and Resting on Elastic Foundations”, *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 939-950, 2015.
15. Hedayati, H. and Sobhani Aragh, B., “Influence of Graded Agglomerated CNTs on Vibration of CNT-Reinforced Annular Sectorial Plates Resting on Pasternak Foundation”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, pp. 8715-8735, 2012.
16. Wang, Z. X. and Shen, H. S., “Nonlinear Vibration of Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments”, *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 2319-2330, 2011.
17. Ke, L. L., Yang, J. and Kitipornchai, S., “Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams”, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 676-683, 2010.
18. Heshmati, M. and Yas, M. H., “Dynamic Analysis of Functionally Graded Multi-Walled Carbon Nanotube-Polystyrene Nanocomposite Beams Subjected to Multi-Moving Loads”, *Materials & Design*, Vol. 49, pp. 894-904, 2013.
19. Omidi, M., Rokni D. T, H., Milani, A. S., Seethaler, R. J. and Arasteh, R., “Prediction of the Mechanical Characteristics of Multi-Walled Carbon Nanotube/Epoxy Composites Using a New Form of the Rule of Mixtures”, *Carbon*, Vol. 48, pp. 3218-3228, 2010.
20. Andrews, R., Jacques, D., Minot, M. and Rantell, T., “Fabrication of Carbon Multiwall Nanotube/Polymer Composites by Shear Mixing”, *Macromolecular Materials and Engineering*, Vol. 287, pp. 395-403, 2002.
21. Najafizadeh, M. M. and Heydari, H. R., “An Exact Solution for Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher order Shear Deformation Plate Theory under Uniform Radial Compression”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 603-612, 2008.
22. Bayat, M., Sahari, B. B., Saleem, M., Ali, A. and Wong, S. V., “Thermoelastic Solution of a Functionally Graded Variable Thickness Rotating Disk with Bending Based on the First-Order Shear Deformation Theory”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, pp. 568-582, 2009.
23. Bellman, R. and Casti, J., “Differential Quadrature and Long-Term Integration”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
24. Bert, C. W. and Malik, M., “Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review”, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 1-28, 1996.
25. Shu, C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.
26. Jodaei, A., Jalal, M. and Yas, M. H., “Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates by State-space Based Differential Quadrature Method and Comparative Modeling by ANN”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 340-353, 2012.
27. Nie, G. and Zhong, Z., “Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Annular Plates”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 608-616, 2010.
28. Tahouneh, V. and Yas, M. H.,“3-D Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Annular Sector Plates on Pasternak Elastic Foundation Via 2-D Differential Quadrature Method”, *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 1879-1897, 2012.
29. Bisadi, H., Es'haghi, M., Rokni, H. and Ilkhani, M.,“Benchmark Solution for Transverse Vibration of Annular Reddy Plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 56, pp. 35-49, 2012.