نشریه علمی ـ پژوهشی
روش های عددی در مهندسی

مقاله کوتاه

بررسی کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزتروپی بر انتشار امواج صوتی در بلوره صوتی لیتیوم نیوباته

شاهرخ رضائی، مرتضی اسکندری قادی و محمد رحیمیان*
دانشکده فنی، دانشگاه تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۸/۲۴ – دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۳/۰۸)
DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161

چکیده– سرعت صوت در اغلب مواد بستگی به الاستیسیته و چگالی مواد دارد، ولی بررسی انتشار امواج در بلوره‌های صوتی پیزوالکتریکی به‌سبب آنیزتروپی و به‌ویژه کوپلینگ پیزوالکتریکی یک مسأله کاربردی مهم و چالش برانگیز است. در این مقاله با استفاده از حل تحلیلی- عددی معادله کریستوفل اصلاح یافته، براساس مفهوم سرعت گروهی، اثر کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزتروپی بر سرعت امواج صوتی (شبه طولی، شبه عرضی عمودی و شبه عرضی افقی) در ویفرهای مختلف بلوره صوتی لیتیوم نیوباته (آنیزتروپی قوی) بررسی می‌شود و با داده‌های آزمایشی تصدیق می‌شود و دامنه سرعت‌هایی که این بلوره صوتی می‌تواند دارا باشد، تعیین می‌شود. نتایج این مطالعه برای طراحی فرامواد صوتی و بلورهای فونونی و موجبرهای پایه پیزوالکتریکی کاملاً اساسی است.

واژه‌های کلیدی: بلوره صوتی، لیتیوم نیوباته، انتشار امواج صوتی، کوپلینگ پیزوالکتریکی.

Investigation of Piezoelectric Coupling and Anisotropy Effect on Acoustic Wave Propagation at LithiumNiobate Crystalloacoustic

S. Rezaei, M. Eskandari-Ghadi and M. Rahimian*

School of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract: ***The acoustic wave velocity depends on elasticity and density at most materials, but because of anisotropy and especially piezoelectric coupling effect, the acoustic wave propagation at piezoelectric based crystalloacoustic materials, is an applied and challenging problem. In this paper, using modified Christoffel's equation based on group velocity concept, the effect of anisotropy and piezoelectric coupling at different wafers of lithium niobate crystalloacoustic (strong anisotropy) on acoustic wave velocity (semi-longitudinal, semi-vertical transverse wave and semi-horizontal transverse wave) is investigated, and validated by experimental data. Then, the acoustic wave velocity ranges that can be supported are determined. The result of this study can be essential at acoustic metamaterials design, Phononic crystal and piezoelectric based wave-guides.***

Keywords: ***Crystalloacoustic, Lithium niobate, Acoustic wave propagation, Piezoelectric coupling.***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: shrezaei@ut.ac.ir

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

فهرست علائم

c_{ijkl}	تانسور ضرایب الاستیسیته	u_i	بردار جابه‌جایی
D_i	میدان‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی	ρ	چگالی ماده
E_i	میدان الکتریکی	σ_{ij}	تانسور تنش کوشی
e_{ijk}	ثوابت پیزوالکتریسته	ϕ	پتانسیل الکتریکی

۱- مقدمه

شاخه‌ای از مصالح مهندسی هوشمند موسوم به پیزوالاستیک (پیزوالکتریک) مورد توجه محققان قرار گرفته است به‌ویژه اینکه این مواد در کنترل ارتعاشات صوتی از طریق تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی و برعکس به‌کار گرفته می‌شوند. نشان داده شده است که چگونه می‌توان تنش‌ها را با استفاده از میدان‌های الکتریکی کنترل کرد [۱]. اگرچه سرعت صوت در مواد بستگی به الاستیسیته و چگالی آنها دارد، اما به‌سبب آنیزتروپی در بلوره‌های صوتی[۱] نظیر پیزوالکتریک‌ها و به‌ویژه به‌سبب کوپلینگ پیزوالکتریکی، انتشار امواج در محیط پیزوالکتریکی با درنظر گرفتن کوپلینگ یک مسأله کاربردی و مهم و چالش برانگیز است زیرا آنیزتروپی در بلوره‌های صوتی منجر به خلق پدیده‌های کیفی با خواص منحصر به‌فرد جدید به‌ویژه در طراحی فراموا[۲] صوتی می‌شود. انتشار امواج مکانیکی یا صوتی در یک محیط هموژن و نامحدود امواج صوتی حجمی[۳] نامیده می‌شوند. برای بلوره‌هایی که دارای درجه بالایی از تقارن هستند، اگر جهت انتشار هم‌راستا با جهت‌های اصلی باشد، در آن صورت سرعت فازی موج به‌سادگی قابل محاسبه است، ولی برای یک جهت دلخواه که نیازمند حل معادله مشخصه[۴] یا معادله کریستوفل[۵] از طریق تعیین مقایر اصلی[۶] است، مسأله کاملاً پیچیده می‌شود، زیرا انتشار امواج در محیط‌های آنیزتروپی[۷] مستلزم حل معادلات جبری درجه سوم یا بالاتر است که فقط برای حالت‌های ساده پاسخ‌های آن مقدور است. محققان حالت‌های خاصی از انتشار موج دلخواه در این محیط‌ها را بررسی کرده‌اند [۱، ۲، ۳ و ۴]. بررسی انتشار امواج الکتروالاستیک در پیزوالکتریک‌ها به لحاظ طراحی‌های کاربردی در حوزه پردازش سیگنال، فرستنده‌های رادیوفرکانسی، کنترل ارتعاشات صوتی و طراحی فیلترهای بالاگذر[۸]و پایین‌گذر[۹] صوتی در زمینه کنترل فرکانس‌های صوتی کاملاً حائز اهمیت است [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱]. از آنجا که سرعت امواج صوتی در پیزوالکتریک‌ها در حدود صد هزار بار کمتر از سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی در این مصالح است، از این‌رو فرض می‌شود که امواج الکترومغناطیسی به‌صورت بلادرنگ منتشر خواهند شد و میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی به‌دست می‌آید. این فرض تقریب شبه استاتیکی[۱۰] نامیده می‌شود که در نتیجه می‌توان فرض نمود که در یک محیط هموژن و بی‌نهایت، امواج به فرم امواج مسطح[۱۱] منتشر می‌شود. تئوری محورهای صوتی[۱۲] به‌وسیله مرجع [۱۰] توسعه یافت که در آن جهت‌های انتشار امواج را برای بلوره‌های صوتی غیرمقید ارائه نمود. تئوری وی وابسته به محورهای مختصات بود، بنابراین معیارهای متعددی به‌منظور مستقل نمودن انتشار امواج از دستگاه مختصات ارائه شد [۴، ۱۱ و ۱۲]. اثر آنیزتروپی بر انتشار امواج صوتی توسط مرجع [۱۳] ارائه شد. تفسیر سطوح کندی[۱۳] (عکس سرعت فاز) و سرعت فازهای مختلف توسط مرجع [۱۴] ارائه شد. سرعت امواج در بلوره‌های ارتوتروپی[۱۴] و شش وجهی[۱۵] در مرجع [۱۵] ارائه شد. همچنین [۱۶] شرایط لازم و کافی برای حضور امواج طولی و عرضی در این بلوره‌ها را ارائه نمود.

این مقاله به بررسی اثر کوپلینگ پیزوالاستیکی و آنیزتروپی بر انتشار امواج صوتی در بلوره صوتی لیتیوم نیوباته[۱۶] (این بلوره به‌واسطه خلوص ذاتی و حساسیت شیمیایی ویژه آن و نیز قابلیت ساخت مینیاتوری با استفاده از آن، یک کاندیدای مناسب

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

برای تجهیزات الکتروصوتی است) که دارای ساختار بلورهٔ تریگونال[17] است از طریق حل عددی معادله کریستوفل اصلاح شده می‌پردازد و دامنه سرعت‌هایی که بلوره صوتی لیتیوم نیوباته می‌تواند داشته باشد را نشان می‌دهد. سپس درستی محاسبات از طریق نتایج آزمایشگاهی برای امتدادهای خاص تصدیق می‌شود.

۲- امواج الاستیک در محیط کریستال صوتی پیزوالکتریکی

۲-۱- معادلات حاکم

بدین‌منظور محیط باز B شامل ماده مگنتوالکتروالاستیک درنظر گرفته می‌شود. اگر دستگاه مختصات دکارتی $(O:X_1,X_2,X_3)$ به این محیط نصب شود و اگر تانسورتنش کوشی با $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$ و جرم حجمی محیط با ρ نمایش داده شود، معادله حرکت در هر نقطه ودر هر $t>0$، در غیاب نیروهای حجمی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

با فرض اینکه محور x_3 بردار عمود بر صفحه تقارن در ساختار شبکه‌ای مونوکلینیک باشد، معادلات پیزوالکتریک کوپل برحسب معادله حرکت و شارژ الکترواستاتیک به فرم اندیسی به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_j}+e_{kij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (2)$$

$$e_{kij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_j}-\varepsilon_{ki}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i}=0 \qquad (3)$$

و رابطه وابسته به آن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}s_{kl}+e_{kij}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \qquad (4)$$

$$D_k=e_{kij}s_{ij}-\varepsilon_{ki}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \qquad (5)$$

همچنین رابطه تغییرمکان- کرنش نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$s_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (6)$$

$$E_k=-\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \qquad (7)$$

که u_i مؤلفه‌های بردار تغییر مکان و تانسور تنش در هر نقطه σ_{ij} است و میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی به‌ترتیب با توابع برداری E_i و D_i نشان داده می‌شود. به‌علاوه در روابط فوق ε_{ij}،c_{ijkl} به‌ترتیب تانسور الاستیسیته و ماتریس ضرایب دی‌الکتریک است. e_{ijk} تانسور پیزوالکتریک و ϕ نیز پتانسیل اسکالر الکتریکی است.

ماتریس ضرایب پیزوالکتریک اغلب شبیه ماتریس ضرایب بردار پلاریزاسیون است که برحسب نوع کریستالوگرافی و گروه‌های کوری[18] در ۱۷ گروه تعریف می‌شود. به‌دلیل کوپلینگ پیزوالکتریک، دو کلاس از این مصالح که متعلق به گروه‌های"۲" و "m" گروه‌های کوری هستند، دارای تقارن مونوکلینیک هستند و شرایط کوپلینگ پیزوالکتریکی (اثر مستقیم و معکوس) را به نمایش می‌گذارند. فرم ماتریسی جهت کلاس گروه "m" کوری به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\\ D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} & -e_{211} & -e_{211} & 0\\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} & -e_{122} & -e_{222} & 0\\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} & -e_{133} & -e_{233} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{2333} & c_{2331} & 0 & 0 & 0 & -e_{323}\\ 0 & 0 & 0 & c_{2331} & c_{3131} & 0 & 0 & 0 & -e_{331}\\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & 0 & 0 & c_{1212} & -e_{112} & -e_{212} & 0\\ e_{111} & e_{122} & e_{133} & 0 & 0 & e_{112} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ e_{211} & e_{222} & e_{233} & 0 & 0 & e_{212} & \varepsilon_{122} & \varepsilon_{222} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_{323} & e_{331} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11}\\ s_{22}\\ s_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\\ E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad (8)$$

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

و فرم تانسوری جهت کلاس گروه "۲" کوری به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\\ D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} & 0 & 0 & -e_{311}\\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} & 0 & 0 & -e_{322}\\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} & 0 & 0 & -e_{333}\\ 0 & 0 & 0 & c_{2323} & c_{2331} & 0 & -e_{123} & -e_{223} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{2331} & c_{3131} & 0 & -e_{131} & -e_{231} & 0\\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 & e_{312}\\ 0 & 0 & 0 & e_{123} & e_{131} & 0 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_{223} & e_{231} & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & e_{312} & 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11}\\ s_{22}\\ s_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\\ E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad (۹)$$

$\gamma_{ij}=2s_{ij}, i\neq j$ کرنش‌های برشی هستند.

۲-۱- انتشار امواج در یک محیط نیم بی‌نهایت پیزوالکتریک

شکل جواب جهت معادله حرکت برای یک موج مسطح به فرم زیر می‌تواند باشد:

$$u_k = A_k \exp i\left(\omega t-(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)\right) \qquad (۱۰)$$

$$\phi = \Phi \exp i\left(\omega t-(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)\right) \qquad (۱۱)$$

در روابط فوق، u_k، مؤلفه k امین میدان جابه‌جایی نسبت به مبداء، A_k دامنه موج، $i=\sqrt{-1}$، ω فرکانس زاویه‌ای و $\vec{k}$ بردار موج، x بردار مختصات و اندازه بردار $\vec{k}$ برابر با $2\pi/\lambda$ است به‌طوری که λ طول موج است.

پاسخ‌های نوع اول منجر به ۳ نوع موج آکوستیکی و پاسخ‌های نوع دوم منجر به موج‌های الکترومغناطیسی می‌شود. با جای‌گذاری این عبارات در معادله حرکت و معادله شارژ الکترواستاتیک، روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\rho\omega^2 u_i = c_{ijkl}k_jk_lu_k + e_{mij}k_jk_m\phi \qquad (۱۲)$$

$$0 = e_{jkl}k_lk_ju_k - \varepsilon_{mj}k_jk_m\phi \qquad (۱۳)$$

جهت بررسی موج‌های آکوستیکی، پارامتر ϕ حذف و برحسب u حل می‌شود. مؤلفه‌های بردار موج به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$k_i = (\omega/v)N_i \qquad (۱۴)$$

که در این رابطه v سرعت و ω فرکانس زاویه‌ای بوده و N_i کسینوس هادی‌های موج نرمال یا زوایای بردارهای هادی هستند.

در این صورت معادلات حرکت به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۸]:

$$\left[\frac{1}{\rho}c_{ijkl}N_jN_l+\frac{1}{\rho}\frac{\left(N_me_{mij}N_j\right)\left(N_je_{jkl}N_l\right)}{N_m\varepsilon_{mj}N_j}-v^2\delta_{ik}\right]u_k=0 \qquad (۱۵)$$

جمله اول داخل کروشه، معادله کریستوفل کلاسیک است که اندرکنش موج مسطح در مصالح الاستیک را برحسب نرمال‌های جبهه موج و ضرایب الاستیسیته بیان می‌کند و جمله دوم اندرکنش‌های موج مسطح با مصالح پیزوالاستوالکتریک را با درنظر گرفتن عوامل برشمرده فوق در حالت کوپل درنظر می‌گیرد. با توجه به معادله فوق مشاهده می‌شود که جمله دوم دارای ارتباط معنی‌داری برای انتشار امواج در برخی از جهت‌های مشخص است، در حالی که برای جهات دیگر مشخص نیست یعنی قطبش مدها دقیقاً موازی یا عمود بر بردار موج نمی‌شود و سطوح کندی برای مواد پیزوالکتریک شامل سطوح محدب، مقعر و زینی خواهند بود که به‌وسیله خطوط پارابولیک تقسیم‌بندی می‌شوند و برای هر نوع موج در هر امتداد دلخواه، دارای مقداری خاص است. به‌همین جهت در انتشار امواج در بلوره‌های صوتی پیزوالکتریکی، جهت موج و سرعت هر دو به‌صورت توأم در انتشار امواج مؤثرند.

در قالب ماتریسی برای جمله اول معادله فوق می‌توان نوشت:

$$C_{ik} \equiv \frac{1}{\rho}c_{ijkl}N_jN_l \qquad (۱۶)$$

جهت لحاظ نمودن اندرکنش‌های پیزوالکتریکی، از عملگر ماتریسی ثانویه استفاده می‌شود [۸]:

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

$$C_i \equiv N_m e_{mij} N_j \qquad (۱۷)$$

مزیت این عملگر این است، ضرایب تانسور پیزوالکتریکی e_{ijk} (i,j,k=۱-۳) به ضرایب ماتریسی e_{im} (i=۱-۳ و m=۱-۶) تبدیل می‌شود. از سوی دیگر ضرایب دی‌الکتریک [۱۰] به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$C \equiv \rho N_m \varepsilon_{mj} N_j \qquad (۱۸)$$

بنابراین فرم کامل معادله اصلاح شده کریستوفل [۱۰]، به فرم زیر در می‌آید [۸]:

$$\left(C_{ik} + \left(\frac{C_i C_k}{C}\right) - \nu^2 \delta_{ik}\right) u_k = 0 \qquad (۱۹)$$

شرط وجود جواب غیرصفر برای معادله اصلاح شده کریستوفل آن است که دترمینان ضرایب صفر باشد [۸]، یعنی:

$$\det\left(C_{ik} + \left(\frac{C_i C_k}{C}\right) - \nu^2 \delta_{ik}\right) = 0 \qquad (۲۰)$$

اما به‌کارگیری عملی معادله (۱۵)، به‌واسطه عدم دقت در تعیین عمود بر سطوح کندی (عکس سرعت فاز)، به‌ویژه در سطوح کندی سه بعدی و نیز به‌واسطه فقدان مرکز تقارن در مواد پیزوالکتریک، و عدم جداسازی کامل مقادیر ویژه بسامد مشکل است و برای دقت‌های مورد نیاز برای طراحی مهندسی هزینه‌های محاسباتی (به‌واسطه استفاده از فرضیات اضافه) و آزمایشگاهی افزایش می‌یابد. دلیل آن است که قطبش مدها دقیقاً موازی یا عمود بر بردار موج نمی‌شود (به‌همین دلیل نیز امواج در محیط‌های «آنیزتروپی قوی» با مدهای شبه طولی و شبه عرضی افقی و شبه عرضی عمودی تعریف می‌شوند) و سطوح کندی برای مواد پیزوالکتریک شامل سطوح محدب، مقعر و زینی است که به‌وسیله خطوط پارابولیک تقسیم‌بندی می‌شوند و برای تفکیک آنها از یکدیگر باید نقاط با انحنای صفر تعیین شود و یافتن این نقاط به روش‌های عددی، بر عدم قطعیت‌های پارامترهای مورد نیاز طراحان مهندسی می‌افزاید. علاوه بر این، روش‌های مبتنی بر تفکیک موج‌های طولی و عرضی در محیط‌های آنیزتروپی، اغلب در محیط‌های با آنیزتروپی ضعیف کارآمد هستند و جداسازی کامل آنها در محیط‌های با آنیزتروپی قوی با تقریب زیادی همراه است که فرضیات اضافه‌ای بر مسأله تحمیل می‌کند (مثلاً حل مسأله به‌طریق روش‌های عددی مبتنی بر آشوب). روش «تکرار خارج قسمت رایلی» یک روش عددی مبتنی بر تکرار است که در همه الگوریتم‌های مبتنی بر یافتن مقدار ویژه‌ها، مؤثر و کارآمد است، ولی مشروط به اینکه بردار اولیه به بردار ویژه ماتریس مورد مطالعه نزدیک باشد. این الگوریتم می‌تواند در محیط‌های با آنیزتروپی ضعیف (نظیر بلوره صوتی کوارتز) کارآمد باشد.

یک راه حل برای به‌کارگیری عملی معادله کریستوفل اصلاح شده و جداسازی امواج در مصالح با آنیزتروپی قوی، این است که بر مبنای مفهوم سرعت گروهی امواج، عمل شود، زیرا سرعت گروهی امواج به معنای انرژی امواج تخت است. سرعت گروهی، مقدار بردار سرعت گروهی است که وابسته به زاویه انتشار است و این مقدار منحصر به‌فرد است و می‌توان با «اندیس کریستالوگرافی میلر»، آن را تصدیق نمود.

همان‌گونه که از محتوای دترمینان مشاهده می‌شود، سرعت و امتداد هر دو در داخل دترمینان ظاهر شده‌اند، از این‌رو در انتشار امواج در محیط پیزوالکتریکی هر دو پارامتر مؤثرند. یعنی با معلوم بودن سرعت، می‌توان امتدادهای مجهولی را به‌دست آورد که در آن امتدادها، موج قابلیت انتشار دارد یعنی انتشار موج به جهت انتشار موج نیز به‌سبب آنیزتروپی وابسته است.

از آنجا که اصلاح پیزوالکتریک[۱۹] کوچک است:

$$\Delta C_{ik} = C_i C_k \Big/ C \qquad (۲۲)$$

$$\left(C_{ik} + \Delta C_{ik}\right) u_k = \nu^2 u_i \qquad (۲۳)$$

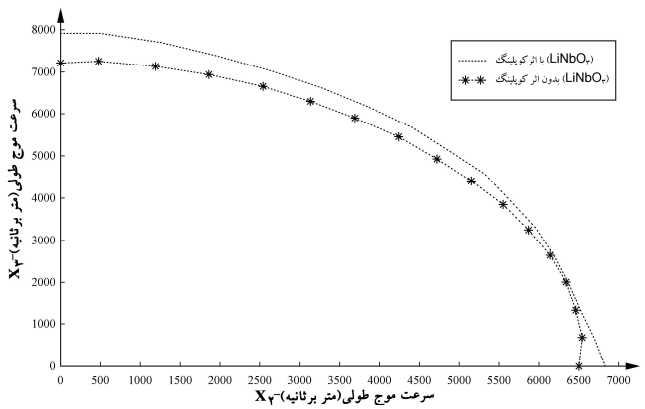
سرعت‌های فازی از معادله اخیر به‌دست می‌آید که می‌توان برای گروه‌های مختلف کوری مصالح پیزوالکتریک محاسبه کرد.

۲-۱-۱- حل مسأله برای کریستال صوتی لیتیوم نیوباته

لیتیوم نیوباته به‌واسطه خلوص ذاتی و نیز نداشتن حساسیت شیمیایی و قابلیت آن در ساخت ساختارهای تناوبی یک کاندید مطلوب از میان بلوره‌های متنوع صوتی است. لذا به جهت

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]



شکل ۱- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه $x_1 = ۰$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

کاربردهای متنوع آن در زمینه مهندسی آکوستیک و نیز ابزارهای آزمون غیرمخرب، این بلوره صوتی انتخاب می‌شود.

ضرایب الاستیسیته عبارتند از:

$$\rho = ۴۷۰۰\frac{kg}{m^3}$$

$$C_{۱۱۱۱} = ۲۰/۳\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2}, C_{۱۱۲۲} = ۵/۳\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2},$$

$$C_{۱۱۳۳} = ۷/۵\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2}, C_{۳۳۳۳} = ۲۴/۵\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2},$$

$$C_{۱۱۲۳} = ۰/۹\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2}, C_{۲۳۲۳} = ۰/۶\times۱۰^{۱۰}\frac{N}{m^2},$$

$$C_{۱۱۳۱} = C_{۱۱۱۲} = C_{۲۲۳۱} = C_{۲۲۱۲} = C_{۳۳۳۱} = C_{۳۳۱۲} = C_{۲۳۳۱} = C_{۲۳۱۲} = C_{۳۳۲۳} = ۰$$

$$C_{۳۱۱۲} = C_{۱۱۲۳}, C_{۲۲۲۳} = -C_{۱۱۲۳}, C_{۳۱۳۱} = C_{۲۳۲۳}, C_{۲۲۳۳} = C_{۱۱۳۳}, C_{۲۲۲۲} = C_{۱۱۱۱}, C_{۱۲۱۲} = -۰/۵(C_{۱۱۱۱} + C_{۱۱۲۲})$$

ثوابت پیزوالکتریک نیز عبارتند از:

$$e_{۳۱۱} = ۰/۲\frac{C}{m^2}, e_{۲۲۲} = ۲/۵\frac{C}{m^2}, e_{۱۳۱} = ۳/۷\frac{C}{m^2},$$

$$e_{۳۳۳} = ۱/۳\frac{C}{m^2}, e_{۳۲۳} = e_{۲۳۳} = e_{۲۳۱} = e_{۲۱۲} = e_{۳۳۱} = ۰$$

$$e_{۳۱۲} = e_{۱۱۱} = e_{۱۲۲} = e_{۱۲۳} = e_{۱۳۳} = ۰, e_{۳۲۲} = e_{۳۱۱},$$

$$e_{۱۱۲} = -e_{۲۲۲}, e_{۲۱۱} = -e_{۲۲۲}, e_{۲۲۳} = -e_{۱۳۱}$$

و ثوابت دی‌الکتریک عبارتند از:

$$\varepsilon_{۱۱} = ۳۸۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{F}{m}, \varepsilon_{۳۳} = ۲۵۷\times۱۰^{-۱۲}\frac{F}{m},$$

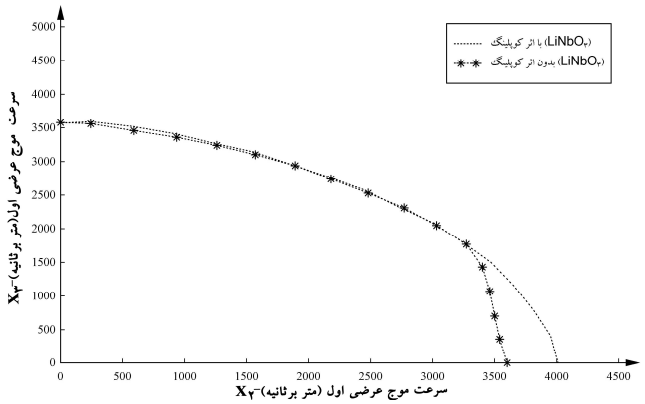
$$\varepsilon_{۲۲} = \varepsilon_{۲۲}, \varepsilon_{۲۳} = \varepsilon_{۳۱} = \varepsilon_{۱۲} = ۰$$

۲-۲- نتایج عددی و تحلیل آنها

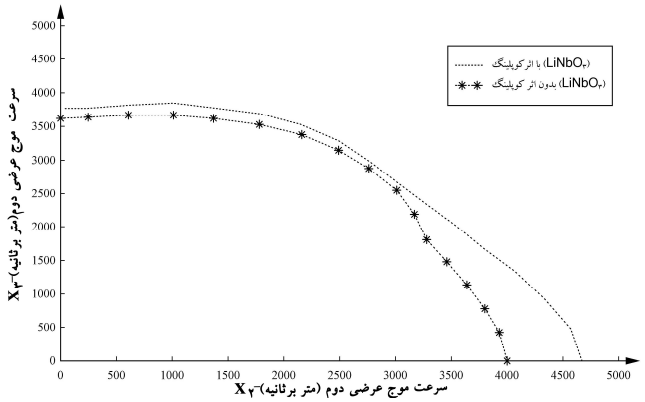
به‌منظور ارائه گرافیکی پاسخ‌ها، معادله (۲۰) به‌صورت عددی برای لیتیوم نیوباته حل می‌شود. تانسورهای کریستال لیتیوم نیوباته [۸]، براساس مقادیر داده شده در مرجع [۱۷]، ارائه شده است. معادلات کریستوفل اصلاح شده به‌صورت کوپله حل می‌شود و سرعت فاز در دو حالت، حل معادله کریستوفل در حالت کلاسیک (الاستیک) و حل معادله کریستوفل در حالت اصلاح شده (لحاظ نمودن کوپلینگ) جهت ۳ نوع موج، یک نوع شبه طولی و دو موج شبه عرضی (افقی و عمودی) ارائه می‌شود.

از آنجا که سرعت فاز گروهی، به‌صورت ۳ بعدی است، به‌منظور سهولت در تحلیل نتایج و تصدیق نتایج روش به‌کار گرفته شده با اندیس کریستالوگرافی میلر، و به‌ویژه اینکه سرعت‌های فاز گروهی در برخی جهت‌های مشخص انتشار، به‌صورت آزمایشگاهی موجود است، سرعت فاز گروهی در برش‌های کریستالی در شکل‌های فوق ارائه شده است. شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) سرعت فاز گروهی در برش $x_1 - cut$، شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) سرعت فاز گروهی در برش $x_2 - cut$ و شکل‌های (۷)، (۸) و (۹) سرعت فاز گروهی در برش $x_3 - cut$ و به‌ترتیب بیانگر سرعت فاز موج طولی، عرضی اول و عرضی دوم، با درنظر گرفتن اثر کوپلینگ و بدون درنظر گرفتن اثر کوپلینگ است.

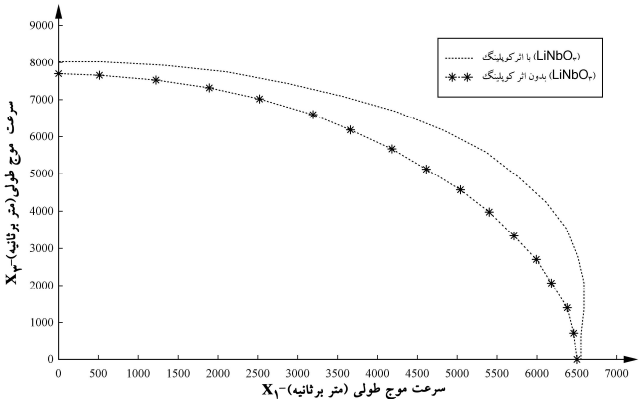
[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]



شکل ۲- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی اول (عمودی) در صفحه $x_1 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

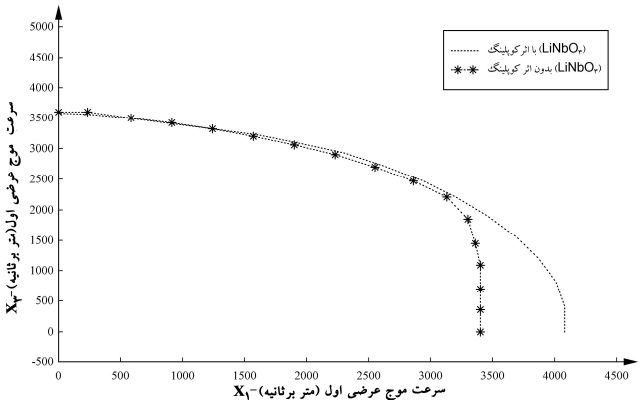


شکل ۳- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه $x_1 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

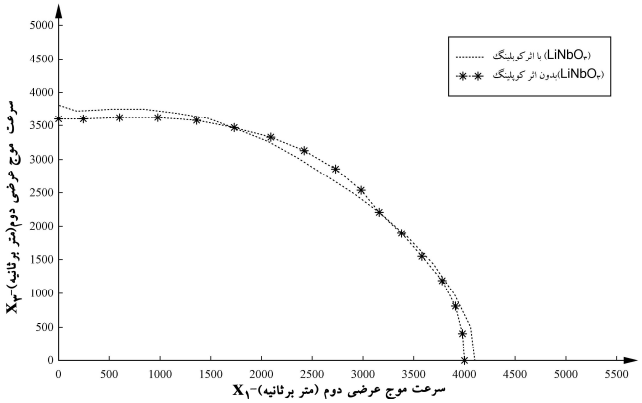


شکل ۴- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه $x_2 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

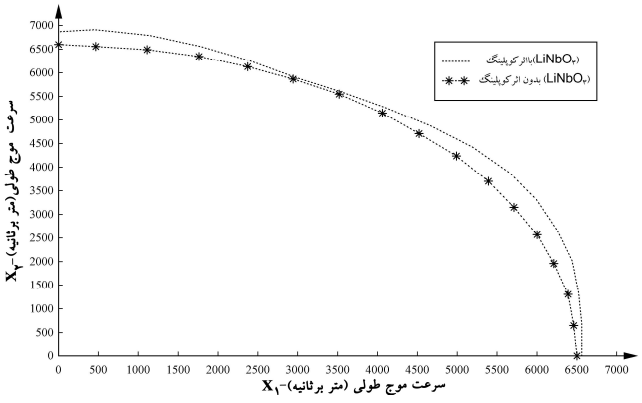
[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]



شکل ۵- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی عمودی (اول) در صفحه $x_2 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

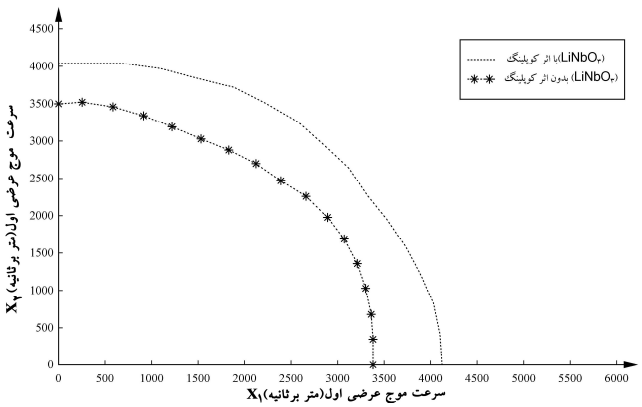


شکل ۶- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه $x_2 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط‌چین) و در حالت فقط الاستیک (خط‌چین ستاره‌ای)

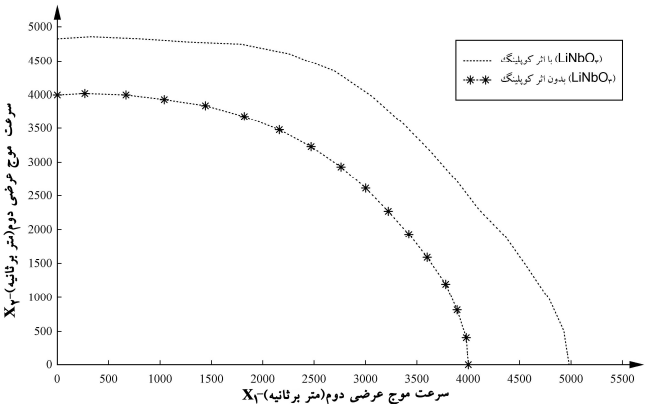


شکل ۷- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه $x_2 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]



شکل ۸- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی اول (عمودی) در صفحه $x_3 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)



شکل ۹- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه $x_3 = 0$ با درنظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)

در هر شکل اگر از مبدأ مختصات به هر نقطه دلخواه برروی منحنی وصل شود، این بردار به مفهوم بردار موج و زاویه آن با محور قائم، بیانگر زاویه انتشار موج دلخواه و مقدار قرائت شده برروی منحنی بیانگر مقادیر سرعت پلاریزاسیون در جهت‌های دیگر است.

در بلوره مورد مطالعه، کوپلینگ پیزوالاستیکی باعث افزایش دامنه سرعتی شده است که این بلوره برای هر سه نوع موج طولی و عرضی عمودی و افقی، می‌تواند پشتیبانی کند. این موضوع برای طراحان ابزارهای آزمون‌های غیرمخرب و انتخاب بلوره مناسب، بسیار حائز اهمیت است زیرا دقت ابزارهای آزمون و هم‌سنجی با ماده مورد مطالعه (مثلاً فولاد) به‌منظور تحلیل نتایج، براساس اختلاف بین اثر کوپلینگ و بدون اثر کوپلینگ بلوره سنجیده می‌شود. هرچه این شکاف بیشتر باشد، دقت آزمون بالاتر است. در نقاطی که این سرعت‌ها به‌هم نزدیک است، یعنی آن نوع برش $x_i - cut(i = 1,2,3)$ بلوره، برای آزمون‌های هم‌سنجی در آن امتدادها مناسب نیست.

منحنی‌های بدون اثر کوپلینگ، یک راهنما برای طراحان است که به کمک آنها می‌توانند تعیین کنند که چه مصالحی با این نوع برش بلوره‌ای، قابل اندازه‌گیری است. میزان دقت مورد نیاز در پالایه‌های بالاگذر و پایین‌گذر، تعیین کننده نوع برش بلوره و نوع بلوره است.

جدول ۱- مقایسه سرعت فاز پلاریزه شده در جهات متفاوت تابش و پلاریزه شده حاصل از این تحقیق و نتایج آزمایشگاهی «لیزر تک اینک» برای ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته

جهت انتشار	جهت پلاریزاسیون	$V_{lab}(10^5 cm/s)$	$V_{Theory}(10^5 cm/s)$	$\frac{V_{Theory}-V_{lab}}{V_{Theory}}\times 100$
[۱۰۰]	[۱۰۰], L	۶/۵۴	۶/۵۶	۰/۱۶
[۰۱۰]	[۰۱۰], L	۶/۸۳	۶/۸۲	۰/۲۶
[۰۱۰]	S	۴/۴۶	۴/۴۸	۰/۲۹
[۰۰۱]	[۰۰۱], L	۷/۳۳	۷/۳۲	۰/۱۵
[۰۰۱]	[۱۰۰], S	۳/۵۸	۳/۵۹	۰/۰۵
[۰۱۰]	[۱۰۰], S	۳/۸۳	۳/۸۱	۰/۷۳
[۰۰۱]	[۰۰۱], L	۷/۲۱	۷/۲۶	۰/۱۵
[۱۰۰]	[۰۰۱], S	۴/۸۱	۴/۸	۰/۰۲
[۱۰۰]	[۰۱۰], S	۴/۰۵	۴/۰۲	۰/۹۷
[۰۱۰]	[۰۱۰], QL	۶/۸۸	۶/۸	۱/۲۰
[۰۱۰]	[۱۰۰], S	۳/۹۶	۳/۹۷	۰/۲
[۰۱۰]	[۰۰۱], QS	۴/۴۹	۴/۵	۰/۱۳
[۰۰۱]	[۰۰۱] L	۷/۳۳	۷/۳	۰/۴۵
[۰۰۱]	[۰۰۱] L	۷/۲۲	۷/۱	۱/۶۹
[۰۱۰]	[۰۱۰] L	۶/۵۸	۶/۵۵	۰/۴۵
[۱۰۰]	[۱۰۰] L	۶/۵۷	۶/۵۴	۰/۴۵
[۰۰۱]	[۰۱۰] S	۳/۵۷	۳/۶	۰/۸۳
[۰۰۱]	[۱۰۰] S	۳/۵۷	۳/۶	۰/۸۳
[۰۰۱]	[۰۰۱] L	۷/۳۱	۷/۲۸	۰/۷۰

L: Longitudinal Wave, S: Shear Wave (Transversly Wave), QL: Quasi Longitudinal Wave and QS: Quasi Shear (Transversly) Wave

۲-۴- تصدیق نتایج با استفاده از نتایج آزمایشگاهی دیگران[۱]

به‌منظور تصدیق نتایج، نتایج به‌دست آمده با داده‌های آزمایشگاهی[۲] مربوط به بلوره صوتی لیتیوم نیوباته مقایسه می‌شود. این مقایسه در جدول ۱ ارائه شده است. همان‌طور که از ستون اول سمت راست مشاهده می‌شود خطا در حدود اختلاف آزمایشگاهی و عددی قابل قبول است.

۳- نتیجه‌گیری

اثر آنیزتروپی و کوپلینگ پیزوالاستیکی در بلوره‌های صوتی منجر به خلق پدیده‌های کیفی با خواص منحصر به‌فرد جدید، به‌ویژه در طراحی فراموا صوتی- امواج صوتی در محدوده بسامدی مشخصی در آنها منتشر نمی‌شود، می‌شود که مبنای طراحی برای بسیاری از فیلترهای صوتی و کنترل نوفه است.

با استفاده از حل عددی معادله کریستوفل اصلاح یافته، بر مبنای سرعت گروهی و ارتباط آن با اندیس‌های کریستالوگرافی میلر، اثر کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزتروپی بر ویفرهای مختلف (برش‌های مختلف) بلوره صوتی لیتیوم نیوباته بررسی شد و با داده‌های آزمایشی تصدیق شد. شکل‌های ترسیم شده دامنه سرعت‌های مختلف صوتی که ویفرها (برش‌های) مختلف بلوره صوتی لیتیوم نیوبانه می‌تواند دارا باشد را نشان می‌دهد. این مسأله نشان می‌دهد که برحسب نوع کاربری که از این بلوره مورد انتظار است، برش (ویفرهای) متفاوت باید به‌کار گرفته شود. این مسأله به‌ویژه در طراحی موجبرهای صوتی و فراموا صوتی به‌منظور کنترل نوفه حائز اهمیت خواهد بود.

تصدیق نتایج روش فوق با نتایج آزمایشگاهی و خطای پلاریزاسیون نشان می‌دهد که راهبرد انتخاب شده برای حل نسبتاً دقیق معادله کریستوفل اصلاح شده بر مبنای سرعت

۱) http://www.mt-berlin.com/frames_ao/descriptions/lnb.htm

۲) http://www.lcoptical.com/LiNbo3/LiNbo3.html

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]

[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]

[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]

گروهی فاز و امتداد منحصر به فرد آنها، و ارتباط آن با انـدیس کریستالوگرافی میلر روشی مؤثر بوده است و می‌توان بـه نتـایج آن اعتماد کرد و در حالی‌که هزینـه‌هـای آزمایشـگاهی بـرروی بلوره‌های صوتی و تعیین برش‌های بلوره‌ای بـه‌منظـور طراحـی مهندسی پالایه‌های صوتی و لرزه‌ای، گـران اسـت، روش ارائـه شده، روشی مؤثر و ارزان‌تر است.

واژه‌نامه

1. crystalloacoustics
2. metamaterials
3. bulk acoustic wave
4. characteristic equation
5. Christoffel's equation
6. eigenvalue
7. anisotropy
8. high pass filter
9. low pass filter
10. quasi static approximation
11. plane wave
12. acoustic axes theory
13. slowness surface
14. orthotropic
15. hexagonal
16. lithium niobate
17. trigonal
18. Curie Groups
19. piezoelectric correction

مراجع

1. Alshits, V. I., and Chadwick, P., "Concavities on the Zonal Slowness Section of a Transversely Isotropic Elastic Material", *Wave Motion*, Vol. 25, No. 4, pp. 347-359, 1997.
2. Chadwick, P., "Wave Propagation in Transversely Isotropic Elastic Media. I. Homogeneous Plane Waves", *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 422, pp. 23-66, 1989.
3. Musgrave, M. J. P., "On an Elastodynamic Classification of Orthorhombic Media", *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 374, pp. 401-429, 1981.
4. Payton, R., *Elastic Wave Propagation In Transversely Isotropic Media*, Martinus Nijhoff Publication, 1983.
5. Holm, P. and Lothe, J., "The Topological Nature of the Polarization Field for Body Waves in Anisotropic Elastic Media" *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 370, pp. 331-350, 1980.
6. Khatkevich, A. G., "Acoustic Axes in Crystals". *Soviet physics, Crystallography*, Vol. 7, No. 5, pp. 601-604, 1963.
7. Marvin, J. W., and Weber, J., *Handbook of Optical Materials*. University of California by CRC Press LLC, 2003.
8. Newnham, R. E., *Properties Of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure*, Kindle edition, pp. 391, Oxford University Press Inc., Oxford-New York, 2005.
9. Norris, A. N., "Acoustic Axes in Elasticity", *Wave Motion*, Vol. 40, No. 4, pp. 315-328, 2004.
10. Parton, V. Z., and Kudryavtsev, B. A., *Electromagnetoelasticity:Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Taylor & Francis, 1988.
11. Royer, D., and Dieulesaint, E., *Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, translated by DP Morgan*, Springer-Verlag, New York, 2000.
12. Ting, T. C. T., "Longitudinal and Transverse Waves in Anisotropic Elastic Materials", *Acta Mechanica*, Vol. 185, No. 3-4, pp.147-164, 2006.
13. Ting, T. C. T., "On Anisotropic Elastic Materials for which one Sheet of the Slowness Surface is a Sphere or a Cross-Section of a Slowness Sheet is a Circle", *Wave Motion*, Vol. 43, No. 4, pp. 287-300, 2006.
14. Topolov, V. Y., and Bowen, C. R., *From Smart Materials to Piezo-Composites, Electromechanical Properties in Composite Based on Ferroelectrics*, Springer, London, pp. 1-10, 2009.
15. Yang, J., *Basic Equations, Special Topics in the Theory of Piezoelectricity*, Springer, London, pp. 1-12, 2009.
16. Zhou, Q., Zhang, S., and Lü, Y., "Acoustic Anisotropy of Piezoelectric PbB 4O7 Crystals Studied by Laser Ultrasonics", *Materials Science and Engineering: B*, Vol. 83, No. 1, pp. 249-253, 2001.
17. Zuo-Guang, Y., *Handbook of Dielectric, Piezoelectric and Ferroelectric Materials. Synthesis, Properties and applications*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, England, 2008.

[Downloaded from iutjournals.iut.ac.ir on 2024-07-03]
[DOR: 20.1001.1.22287698.1396.36.1.10.7]
[DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161]