

## بررسی کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزوتروپی بر انتشار امواج صوتی در بلوره صوتی لیتیوم نیوباته

شاهرخ رضائی، مرتضی اسکندری قادی و محمد رحیمیان\*  
دانشکده فنی، دانشگاه تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۸/۲۴ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۵/۰۳/۰۸)

DOI: 10.18869/acadpub.jcme.36.1.161

چکیده - سرعت صوت در اغلب مواد بستگی به الاستیسیته و چگالی مواد دارد، ولی بررسی انتشار امواج در بلوره‌های صوتی پیزوالکتریکی به سبب آنیزوتروپی و به ویژه کوپلینگ پیزوالکتریکی یک مسأله کاربردی مهم و چالش برانگیز است. در این مقاله با استفاده از حل تحلیلی - عددی معادله کریستوفل اصلاح یافته، براساس مفهوم سرعت گروهی، اثر کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزوتروپی بر سرعت امواج صوتی (شبه طولی، شبه عرضی عمودی و شبه عرضی افقی) در ویفرهای مختلف بلوره صوتی لیتیوم نیوباته (آنیزوتروپی قوی) بررسی می‌شود و با داده‌های آزمایشی تصدیق می‌شود و دامنه سرعت‌هایی که این بلوره صوتی می‌تواند دارا باشد، تعیین می‌شود. نتایج این مطالعه برای طراحی فرامواد صوتی و بلورهای فونونی و موجبرهای پایه پیزوالکتریکی کاملاً اساسی است.

واژه‌های کلیدی: بلوره صوتی، لیتیوم نیوباته، انتشار امواج صوتی، کوپلینگ پیزوالکتریکی.

## Investigation of Piezoelectric Coupling and Anisotropy Effect on Acoustic Wave Propagation at LithiumNiobate Crystalloacoustic

S. Rezaei, M. Eskandari-Ghadi and M. Rahimian\*

School of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

**Abstract:** *The acoustic wave velocity depends on elasticity and density at most materials, but because of anisotropy and especially piezoelectric coupling effect, the acoustic wave propagation at piezoelectric based crstalloacoustic materials, is an applied and challenging problem. In this paper, using modified Christoffel's equation based on group velocity concept, the effect of anisotropy and piezoelectric coupling at different wafers of lithium niobate crstalloacoustic (strong anisotropy) on acoustic wave velocity (semi-longitudinal, semi-vertical transverse wave and semi-horizontal transverse wave) is investigated, and validated by experimental data. Then, the acoustic wave velocity ranges that can be supported are determined. The result of this study can be essential at acoustic metamaterials design, Phononic crystal and piezoelectric based wave-guides.*

**Keywords:** *Crystalloacoustic, Lithium niobate, Acoustic wave propagation, Piezoelectric coupling.*

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: shrezaei@ut.ac.ir

$C_{ijkl}$	تانسور ضرایب الاستیسیته	$u_i$	بردار جابه‌جایی
$D_i$	میدان‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی	$\rho$	چگالی ماده
$E_i$	میدان الکتریکی	$\sigma_{ij}$	تانسور تنش کوشی
$\epsilon_{ijk}$	ثوابت پیزوالکتریسته	$\phi$	پتانسیل الکتریکی

## ۱- مقدمه

شاخه‌ای از مصالح مهندسی هوشمند موسوم به پیزوالاستیک (پیزوالکتریک) مورد توجه محققان قرار گرفته است به‌ویژه اینکه این مواد در کنترل ارتعاشات صوتی از طریق تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی و برعکس به‌کار گرفته می‌شوند. نشان داده شده است که چگونه می‌توان تنش‌ها را با استفاده از میدان‌های الکتریکی کنترل کرد [۱]. اگرچه سرعت صوت در مواد بستگی به الاستیسیته و چگالی آنها دارد، اما به‌سبب آنیزوتروپی در بلوره‌های صوتی<sup>۱</sup> نظیر پیزوالکتریک‌ها و به‌ویژه به‌سبب کوپلینگ پیزوالکتریکی، انتشار امواج در محیط پیزوالکتریکی با در نظر گرفتن کوپلینگ یک مسأله کاربردی و مهم و چالش برانگیز است زیرا آنیزوتروپی در بلوره‌های صوتی منجر به خلق پدیده‌های کیفی با خواص منحصر به‌فرد جدید به‌ویژه در طراحی فرامواد<sup>۲</sup> صوتی می‌شود. انتشار امواج مکانیکی یا صوتی در یک محیط هموزن و نامحدود امواج صوتی حجمی<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند. برای بلوره‌هایی که دارای درجه بالایی از تقارن هستند، اگر جهت انتشار هم‌راستا با جهت‌های اصلی باشد، در آن صورت سرعت فازی موج به‌سادگی قابل محاسبه است، ولی برای یک جهت دلخواه که نیازمند حل معادله مشخصه<sup>۴</sup> یا معادله کریستوفل<sup>۵</sup> از طریق تعیین مقایر اصلی<sup>۶</sup> است، مسأله کاملاً پیچیده می‌شود، زیرا انتشار امواج در محیط‌های آنیزوتروپی<sup>۷</sup> مستلزم حل معادلات جبری درجه سوم یا بالاتر است که فقط برای حالت‌های ساده پاسخ‌های آن مقدور است. محققان حالت‌های خاصی از انتشار موج دلخواه در این محیط‌ها را بررسی کرده‌اند [۱، ۲، ۳ و ۴]. بررسی انتشار امواج الکتروالاستیک در پیزوالکتریک‌ها به لحاظ طراحی‌های

کاربردی در حوزه پردازش سیگنال، فرستنده‌های رادیوفرکانسی، کنترل ارتعاشات صوتی و طراحی فیلترهای بالاگذر<sup>۸</sup> و پایین‌گذر<sup>۹</sup> صوتی در زمینه کنترل فرکانس‌های صوتی کاملاً حائز اهمیت است [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱]. از آنجا که سرعت امواج صوتی در پیزوالکتریک‌ها در حدود صد هزار بار کمتر از سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی در این مصالح است، از این‌رو فرض می‌شود که امواج الکترومغناطیسی به‌صورت بلادرنگ منتشر خواهند شد و میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی به‌دست می‌آید. این فرض تقریب شبه استاتیکی<sup>۱۰</sup> نامیده می‌شود که در نتیجه می‌توان فرض نمود که در یک محیط هموزن و بی‌نهایت، امواج به فرم امواج مسطح<sup>۱۱</sup> منتشر می‌شود. تئوری محورهای صوتی<sup>۱۲</sup> به‌وسیله مرجع [۱۰] توسعه یافت که در آن جهت‌های انتشار امواج را برای بلوره‌های صوتی غیرمقید ارائه نمود. تئوری وی وابسته به محورهای مختصات بود، بنابراین معیارهای متعددی به‌منظور مستقل نمودن انتشار امواج از دستگاه مختصات ارائه شد [۴، ۱۱ و ۱۲]. اثر آنیزوتروپی بر انتشار امواج صوتی توسط مرجع [۱۳] ارائه شد. تفسیر سطوح کندی<sup>۱۳</sup> (عکس سرعت فاز) و سرعت فازهای مختلف توسط مرجع [۱۴] ارائه شد. سرعت امواج در بلوره‌های ارتوتروپی<sup>۱۴</sup> و شش‌وجهی<sup>۱۵</sup> در مرجع [۱۵] ارائه شد. همچنین [۱۶] شرایط لازم و کافی برای حضور امواج طولی و عرضی در این بلوره‌ها را ارائه نمود.

این مقاله به بررسی اثر کوپلینگ پیزوالاستیکی و آنیزوتروپی بر انتشار امواج صوتی در بلوره صوتی لیتیوم نیوباته<sup>۱۶</sup> (این بلوره به‌واسطه خلوص ذاتی و حساسیت شیمیایی ویژه آن و نیز قابلیت ساخت مینباتوری با استفاده از آن، یک کاندیدای مناسب

$$e_{kij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} - \epsilon_{ki} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \quad (3)$$

و رابطه وابسته به آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} s_{kl} + e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (4)$$

$$D_k = e_{kij} s_{ij} - \epsilon_{ki} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (5)$$

همچنین رابطه تغییر مکان - کرنش نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$E_k = - \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (7)$$

که  $u_i$  مؤلفه‌های بردار تغییر مکان و تانسور تنش در هر نقطه  $\sigma_{ij}$  است و میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی به ترتیب با توابع برداری  $E_i$  و  $D_i$  نشان داده می‌شود. به علاوه در روابط فوق  $c_{ijkl}$ ،  $\epsilon_{ij}$  به ترتیب تانسور الاستیسیته و ماتریس ضرایب دی‌الکتریک است.  $e_{ijk}$  تانسور پیزوالکتریک و  $\phi$  نیز پتانسیل اسکالر الکتریکی است.

ماتریس ضرایب پیزوالکتریک اغلب شبیه ماتریس ضرایب بردار پلاریزاسیون است که برحسب نوع کریستالوگرافی و گروه‌های کوری<sup>۱۸</sup> در ۱۷ گروه تعریف می‌شود. به دلیل کوپلینگ پیزوالکتریک، دو کلاس از این مصالح که متعلق به گروه‌های "۲" و "m" گروه‌های کوری هستند، دارای تقارن مونوکلینیک هستند و شرایط کوپلینگ پیزوالکتریک (اثر مستقیم و معکوس) را به نمایش می‌گذارند. فرم ماتریسی جهت کلاس گروه "m" کوری به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} & -e_{211} & -e_{311} & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} & -e_{122} & -e_{222} & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} & -e_{133} & -e_{233} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2333} & c_{2331} & 0 & 0 & 0 & -e_{333} \\ 0 & 0 & 0 & c_{2331} & c_{2311} & 0 & 0 & 0 & -e_{331} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & 0 & 0 & c_{1212} & -e_{112} & -e_{212} & 0 \\ e_{111} & e_{122} & e_{133} & 0 & 0 & e_{112} & e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{211} & e_{222} & e_{233} & 0 & 0 & e_{212} & e_{122} & e_{222} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{333} & e_{331} & 0 & 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

برای تجهیزات الکتروصوتی است) که دارای ساختار بلوریه تریگونال<sup>۱۷</sup> است از طریق حل عددی معادله کریستوفل اصلاح شده می‌پردازد و دامنه سرعت‌هایی که بلوره صوتی لیتیوم نیوباته می‌تواند داشته باشد را نشان می‌دهد. سپس درستی محاسبات از طریق نتایج آزمایشگاهی برای امتدادهای خاص تصدیق می‌شود.

## ۲- امواج الاستیک در محیط کریستال صوتی

### پیزوالکتریک

#### ۱-۲- معادلات حاکم

بدین منظور محیط باز B شامل ماده مگنتوالکتروالاستیک در نظر گرفته می‌شود. اگر دستگاه مختصات دکارتی  $(O: X_1, X_2, X_3)$  به این محیط نصب شود و اگر تانسور تنش کوشی با  $\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  و جرم حجمی محیط با  $\rho$  نمایش داده شود، معادله حرکت در هر نقطه و در هر  $t > 0$ ، در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

با فرض اینکه محور  $x_3$  بردار عمود بر صفحه تقارن در ساختار شبکه‌ای مونوکلینیک باشد، معادلات پیزوالکتریک کوپل برحسب معادله حرکت و شارژ الکترواستاتیک به فرم اندیسی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

و فرم تانسوری جهت کلاس گروه "۳" کوری به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} & 0 & 0 & -e_{311} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & c_{2212} & 0 & 0 & -e_{322} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & c_{3312} & 0 & 0 & -e_{333} \\ 0 & 0 & 0 & c_{2323} & c_{2331} & 0 & -e_{123} & -e_{223} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2331} & c_{2131} & 0 & -e_{131} & -e_{231} & 0 \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 & e_{312} \\ 0 & 0 & 0 & e_{123} & e_{131} & 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{223} & e_{231} & 0 & e_{12} & e_{22} & 0 \\ e_{311} & e_{322} & e_{333} & 0 & 0 & e_{312} & 0 & 0 & e_{333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

در این صورت معادلات حرکت به صورت زیر بیان می‌شوند [۸]:

$$\left[ \frac{1}{\rho} c_{ijkl} N_j N_l + \frac{1}{\rho} \frac{(N_m e_{mij} N_j)(N_l e_{jkl} N_l)}{N_m e_{mij} N_j} - v^2 \delta_{ik} \right] u_k = 0 \quad (15)$$

جمله اول داخل کروشه، معادله کریستوفل کلاسیک است که اندرکنش موج مسطح در مصالح الاستیک را برحسب نرمال‌های جبهه موج و ضرایب الاستیسیته بیان می‌کند و جمله دوم اندرکنش‌های موج مسطح با مصالح پیزوالکتریک را با در نظر گرفتن عوامل برشمرده فوق در حالت کوپل در نظر می‌گیرد. با توجه به معادله فوق مشاهده می‌شود که جمله دوم دارای ارتباط معنی‌داری برای انتشار امواج در برخی از جهت‌های مشخص است، در حالی که برای جهات دیگر مشخص نیست یعنی قطبش مدها دقیقاً موازی یا عمود بر بردار موج نمی‌شود و سطوح کندی برای مواد پیزوالکتریک شامل سطوح محدب، مقعر و زینی خواهند بود که به وسیله خطوط پارابولیک تقسیم‌بندی می‌شوند و برای هر نوع موج در هر امتداد دلخواه، دارای مقداری خاص است. به همین جهت در انتشار امواج در بلوره‌های صوتی پیزوالکتریکی، جهت موج و سرعت هر دو به صورت توأم در انتشار امواج مؤثرند.

در قالب ماتریسی برای جمله اول معادله فوق می‌توان نوشت:

$$C_{ik} \equiv \frac{1}{\rho} c_{ijkl} N_j N_l \quad (16)$$

جهت لحاظ نمودن اندرکنش‌های پیزوالکتریکی، از عملگر ماتریسی ثانویه استفاده می‌شود [۸]:

$j = 2, 3, i \neq j$  کرنش‌های برشی هستند.

## ۲-۱- انتشار امواج در یک محیط نیم بی‌نهایت پیزوالکتریک

شکل جواب جهت معادله حرکت برای یک موج مسطح به فرم زیر می‌تواند باشد:

$$u_k = A_k \exp(i(\omega t - (k_x x_1 + k_y x_2 + k_z x_3))) \quad (10)$$

$$\phi = \Phi \exp(i(\omega t - (k_x x_1 + k_y x_2 + k_z x_3))) \quad (11)$$

در روابط فوق،  $u_k$ ، مؤلفه  $k$  امین میدان جابه‌جایی نسبت به مبداء،  $A_k$  دامنه موج،  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای و  $\vec{k}$  بردار موج،  $x$  بردار مختصات و اندازه بردار  $\vec{k}$  برابر با  $2\pi/\lambda$  است به طوری که  $\lambda$  طول موج است.

پاسخ‌های نوع اول منجر به ۳ نوع موج آکوستیکی و پاسخ‌های نوع دوم منجر به موج‌های الکترومغناطیسی می‌شود. با جای‌گذاری این عبارات در معادله حرکت و معادله شارژ الکترواستاتیک، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\rho \omega^2 u_i = c_{ijkl} k_j k_l u_k + e_{mij} k_j k_m \phi \quad (12)$$

$$0 = e_{jkl} k_l k_j u_k - \epsilon_{mjk} k_j k_m \phi \quad (13)$$

جهت بررسی موج‌های آکوستیکی، پارامتر  $\phi$  حذف و برحسب  $u$  حل می‌شود. مؤلفه‌های بردار موج به صورت زیر بیان می‌شود:

$$k_i = (\omega/v) N_i \quad (14)$$

که در این رابطه  $v$  سرعت و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای بوده و  $N_i$  کسینوس هادی‌های موج نرمال یا زوایای بردارهای هادی هستند.

$$C_i \equiv N_m \epsilon_{mij} N_j \quad (17)$$

مزیت این عملگر این است، ضرایب تانسور پیزوالکتریک  $e_{ijk}$  (۳-۱-۳) به ضرایب ماتریسی  $e_{im}$  (۳-۱-۳) تبدیل می‌شود. از سوی دیگر ضرایب دی‌الکتریک (۶-۱-۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C \equiv \rho N_m \epsilon_{mij} N_j \quad (18)$$

بنابراین فرم کامل معادله اصلاح شده کریستوفل [۱۰]، به فرم زیر در می‌آید [۸]:

$$\left( C_{ik} + \left( \frac{C_i C_k}{C} \right) - v^2 \delta_{ik} \right) u_k = 0 \quad (19)$$

شرط وجود جواب غیرصفر برای معادله اصلاح شده کریستوفل آن است که دترمینان ضرایب صفر باشد [۸]، یعنی:

$$\det \left( C_{ik} + \left( \frac{C_i C_k}{C} \right) - v^2 \delta_{ik} \right) = 0 \quad (20)$$

اما به‌کارگیری عملی معادله (۱۵)، به‌واسطه عدم دقت در تعیین عمود بر سطوح کندی (عکس سرعت فاز)، به‌ویژه در سطوح کندی سه بعدی و نیز به‌واسطه فقدان مرکز تقارن در مواد پیزوالکتریک، و عدم جداسازی کامل مقادیر ویژه بسامد مشکل است و برای دقت‌های مورد نیاز برای طراحی مهندسی هزینه‌های محاسباتی (به‌واسطه استفاده از فرضیات اضافه) و آزمایشگاهی افزایش می‌یابد. دلیل آن است که قطبش‌مدها دقیقاً موازی یا عمود بر بردار موج نمی‌شود (به‌همین دلیل نیز امواج در محیط‌های «آنیزوتروپی قوی» با مدهای شبه طولی و شبه عرضی افقی و شبه عرضی عمودی تعریف می‌شوند) و سطوح کندی برای مواد پیزوالکتریک شامل سطوح محدب، مقعر و زینی است که به‌وسیله خطوط پارابولیک تقسیم‌بندی می‌شوند و برای تفکیک آنها از یکدیگر باید نقاط با انحنای صفر تعیین شود و یافتن این نقاط به روش‌های عددی، بر عدم قطعیت‌های پارامترهای مورد نیاز طراحان مهندسی می‌افزاید.

علاوه بر این، روش‌های مبتنی بر تفکیک موج‌های طولی و عرضی در محیط‌های آنیزوتروپی، اغلب در محیط‌های با آنیزوتروپی ضعیف کارآمد هستند و جداسازی کامل آنها در محیط‌های با آنیزوتروپی قوی با تقریب زیادی همراه است که

روش‌های عددی در مهندسی، سال ۳۶، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۶

فرضیات اضافه‌ای بر مسأله تحمیل می‌کند (مثلاً حل مسأله به‌طریق روش‌های عددی مبتنی بر آشوب). روش «تکرار خارج قسمت رایلی» یک روش عددی مبتنی بر تکرار است که در همه الگوریتم‌های مبتنی بر یافتن مقدار ویژه، مؤثر و کارآمد است، ولی مشروط به اینکه بردار اولیه به بردار ویژه ماتریس مورد مطالعه نزدیک باشد. این الگوریتم می‌تواند در محیط‌های با آنیزوتروپی ضعیف (نظیر بلوره صوتی کوارتز) کارآمد باشد.

یک راه حل برای به‌کارگیری عملی معادله کریستوفل اصلاح شده و جداسازی امواج در مصالح با آنیزوتروپی قوی، این است که بر مبنای مفهوم سرعت گروهی امواج، عمل شود، زیرا سرعت گروهی امواج به معنای انرژی امواج تخت است. سرعت گروهی، مقدار بردار سرعت گروهی است که وابسته به زاویه انتشار است و این مقدار منحصر به فرد است و می‌توان با «اندیس کریستالوگرافی میلر»، آن را تصدیق نمود.

همان‌گونه که از محتوای دترمینان مشاهده می‌شود، سرعت و امتداد هر دو در داخل دترمینان ظاهر شده‌اند، از این رو در انتشار امواج در محیط پیزوالکتریک هر دو پارامتر مؤثرند. یعنی با معلوم بودن سرعت، می‌توان امتدادهای مجهولی را به‌دست آورد که در آن امتدادها، موج قابلیت انتشار دارد یعنی انتشار موج به جهت انتشار موج نیز به‌سبب آنیزوتروپی وابسته است.

از آنجا که اصلاح پیزوالکتریک<sup>۱۹</sup> کوچک است:

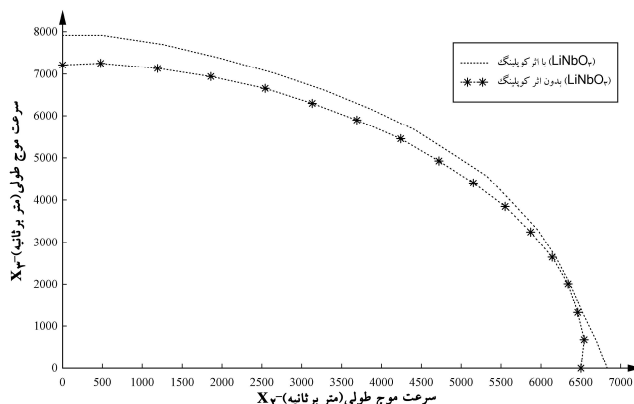
$$\Delta C_{ik} = C_i C_k / C \quad (22)$$

$$(C_{ik} + \Delta C_{ik}) u_k = v^2 u_i \quad (23)$$

سرعت‌های فازی از معادله اخیر به‌دست می‌آید که می‌توان برای گروه‌های مختلف کوری مصالح پیزوالکتریک محاسبه کرد.

## ۲-۱-۱- حل مسأله برای کریستال صوتی لیتیوم نیوباته

لیتیوم نیوباته به‌واسطه خلوص ذاتی و نیز نداشتن حساسیت شیمیایی و قابلیت آن در ساخت ساختارهای تناوبی یک‌کاندید مطلوب از میان بلوره‌های متنوع صوتی است. لذا به جهت



شکل ۱- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه  $x_1 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خطچین) و در حالت فقط الاستیک (خطچین ستاره‌ای)

## ۲-۲- نتایج عددی و تحلیل آنها

به منظور ارائه گرافیکی پاسخ‌ها، معادله (۲۰) به صورت عددی برای لیتیوم نیوباته حل می‌شود. تانسورهای کریستال لیتیوم نیوباته [۸]، براساس مقادیر داده شده در مرجع [۱۷]، ارائه شده است. معادلات کریستوفل اصلاح شده به صورت کوپله حل می‌شود و سرعت فاز در دو حالت، حل معادله کریستوفل در حالت کلاسیک (الاستیک) و حل معادله کریستوفل در حالت اصلاح شده (لحاظ نمودن کوپلینگ) جهت ۳ نوع موج، یک نوع شبه طولی و دو موج شبه عرضی (افقی و عمودی) ارائه می‌شود.

از آنجا که سرعت فاز گروهی، به صورت ۳ بعدی است، به منظور سهولت در تحلیل نتایج و تصدیق نتایج روش به کار گرفته شده با اندیس کریستالوگرافی میلر، و به ویژه اینکه سرعت‌های فاز گروهی در برخی جهت‌های مشخص انتشار، به صورت آزمایشگاهی موجود است، سرعت فاز گروهی در برش‌های کریستالی در شکل‌های فوق ارائه شده است. شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) سرعت فاز گروهی در برش  $x_1$ -cut، شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) سرعت فاز گروهی در برش  $x_2$ -cut و شکل‌های (۷)، (۸) و (۹) سرعت فاز گروهی در برش  $x_3$ -cut و به ترتیب بیانگر سرعت فاز موج طولی، عرضی اول و عرضی دوم، با در نظر گرفتن اثر کوپلینگ و بدون در نظر گرفتن اثر کوپلینگ است.

کاربردهای متنوع آن در زمینه مهندسی آکوستیک و نیز ابزارهای آزمون غیرمخرب، این بلوره صوتی انتخاب می‌شود. ضرایب الاستیسیته عبارتند از:

$$\rho = 4700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$C_{1111} = 2073 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, C_{1122} = 573 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$C_{1133} = 775 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, C_{2222} = 2475 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$C_{1123} = 0.9 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, C_{2223} = 0.6 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$C_{1131} = C_{1112} = C_{2231} = C_{2212} = C_{3331} =$$

$$C_{3312} = C_{3331} = C_{3312} = C_{3332} = 0$$

$$C_{3312} = C_{1123}, C_{2223} = -C_{1123}, C_{3311} = C_{2223}, C_{2223} =$$

$$C_{1123}, C_{2222} = C_{1111}, C_{1212} = -0.5(C_{1111} + C_{1122})$$

ثوابت پیزوالکتریک نیز عبارتند از:

$$e_{211} = 0.2 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, e_{222} = 2/5 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, e_{131} = 3/7 \frac{\text{C}}{\text{m}^2},$$

$$e_{233} = 1/3 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, e_{222} = e_{233} = e_{231} = e_{212} = e_{331} = 0$$

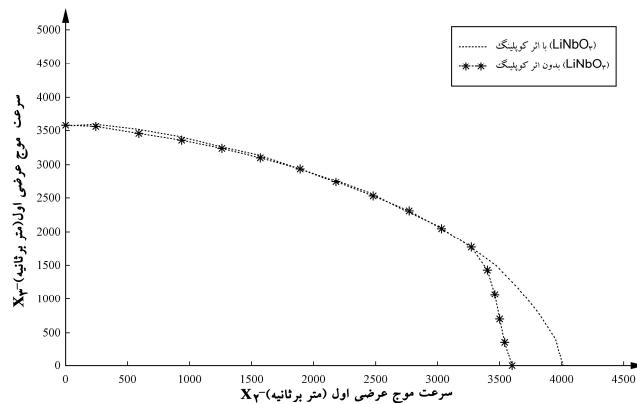
$$e_{212} = e_{111} = e_{122} = e_{133} = e_{132} = 0, e_{222} = e_{311},$$

$$e_{112} = -e_{222}, e_{211} = -e_{222}, e_{222} = -e_{311}$$

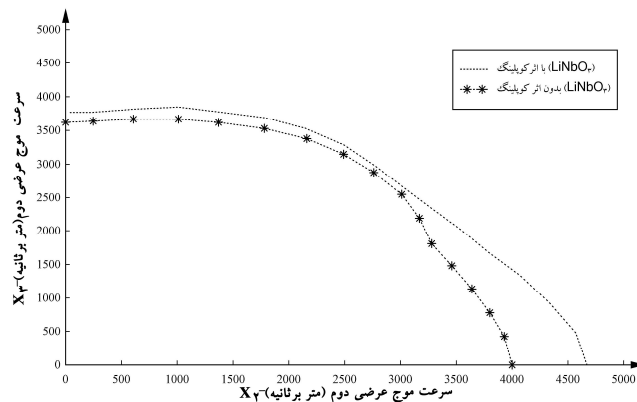
و ثوابت دی‌الکتریک عبارتند از:

$$\epsilon_{11} = 289 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}, \epsilon_{33} = 257 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}},$$

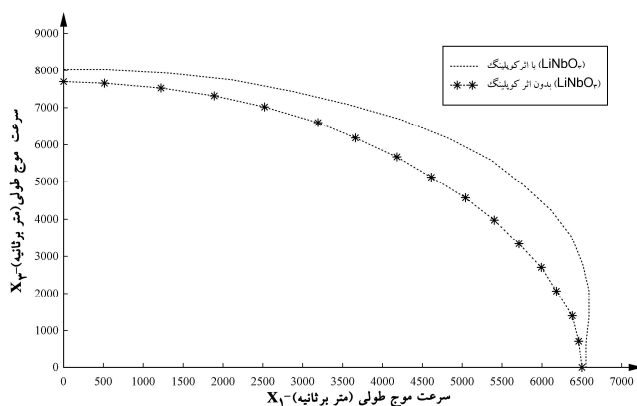
$$\epsilon_{22} = \epsilon_{23}, \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{12} = 0$$



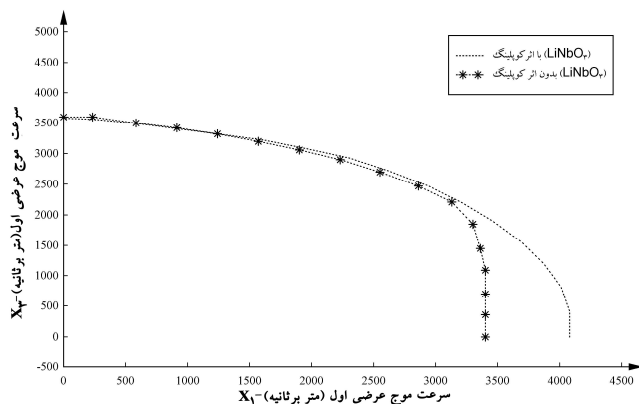
شکل ۲- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیم نیوباته الاستیک برای موج عرضی اول (عمودی) در صفحه  $x_1 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط چین) و در حالت فقط الاستیک (خط چین ستاره‌ای)



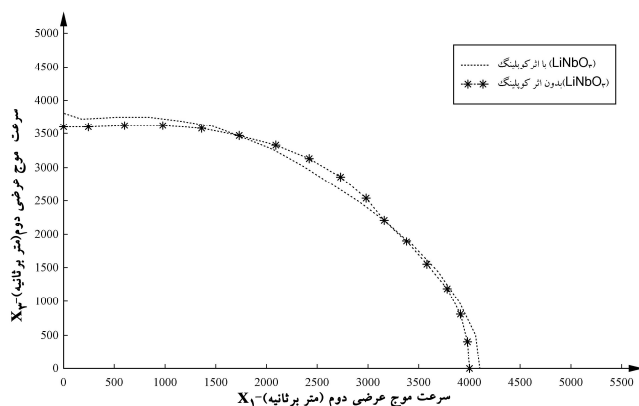
شکل ۳- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه  $x_1 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط چین) و در حالت فقط الاستیک (خط چین ستاره‌ای)



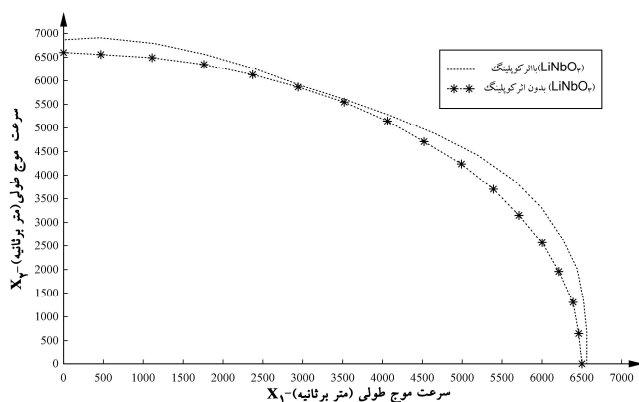
شکل ۴- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه  $x_1 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط چین) و در حالت فقط الاستیک (خط چین ستاره‌ای)



شکل ۵- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی عمودی (اول) در صفحه  $X_p = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط چین) و در حالت فقط الاستیک (خط چین ستاره‌ای)

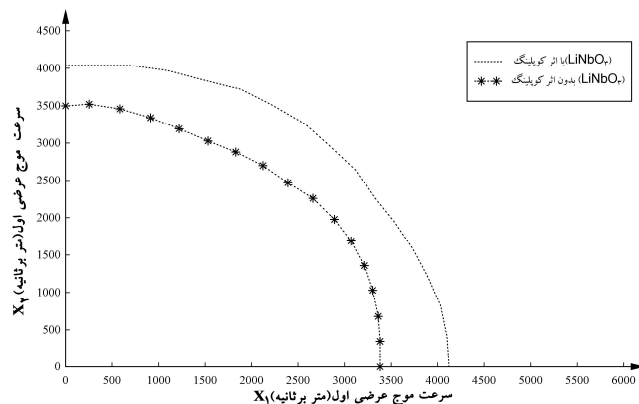


شکل ۶- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه  $X_p = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط چین) و در حالت فقط الاستیک (خط چین ستاره‌ای)

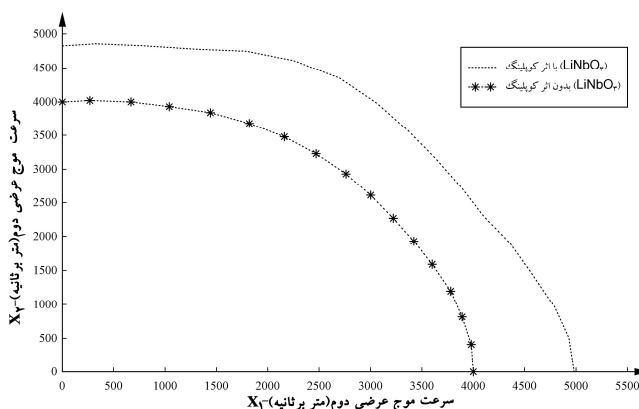


شکل ۷- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته الاستیک برای موج طولی در صفحه  $X_p = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)





شکل ۸- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیم نیوباته الاستیک برای موج عرضی اول (عمودی) در صفحه  $X_3 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)



شکل ۹- سرعت فاز در ماده پیزوالکتریک لیتیم نیوباته الاستیک برای موج عرضی دوم (افقی) در صفحه  $X_3 = 0$  با در نظر گرفتن کوپلینگ پیزوالاستیک (خط ستاره‌دار) و در حالت فقط الاستیک (خط ممتد)

مثلاً فولاد) به منظور تحلیل نتایج، براساس اختلاف بین اثر کوپلینگ و بدون اثر کوپلینگ بلوره سنجیده می‌شود. هرچه این شکاف بیشتر باشد، دقت آزمون بالاتر است. در نقاطی که این سرعت‌ها به هم نزدیک است، یعنی آن نوع برش  $X_i - \text{cut} (i = 1, 2, 3)$  بلوره، برای آزمون‌های هم‌سنجی در آن امتدادها مناسب نیست.

منحنی‌های بدون اثر کوپلینگ، یک راهنما برای طراحان است که به کمک آنها می‌توانند تعیین کنند که چه مصالحی با این نوع برش بلوره‌ای، قابل اندازه‌گیری است. میزان دقت مورد نیاز در پالایه‌های بالاگذر و پایین‌گذر، تعیین کننده نوع برش بلوره و نوع بلوره است.

در هر شکل اگر از مبدأ مختصات به هر نقطه دلخواه بر روی منحنی وصل شود، این بردار به مفهوم بردار موج و زاویه آن با محور قائم، بیانگر زاویه انتشار موج دلخواه و مقدار قرائت شده بر روی منحنی بیانگر مقادیر سرعت پلاریزاسیون در جهت‌های دیگر است.

در بلوره مورد مطالعه، کوپلینگ پیزوالاستیکی باعث افزایش دامنه سرعتی شده است که این بلوره برای هر سه نوع موج طولی و عرضی عمودی و افقی، می‌تواند پشتیبانی کند. این موضوع برای طراحان ابزارهای آزمون‌های غیرمخرب و انتخاب بلوره مناسب، بسیار حائز اهمیت است زیرا دقت ابزارهای آزمون و هم‌سنجی با ماده مورد مطالعه

جدول ۱- مقایسه سرعت فاز پلاریزه شده در جهات متفاوت تابش و پلاریزه شده حاصل از این تحقیق و نتایج آزمایشگاهی «لیزر تک اینک» برای ماده پیزوالکتریک لیتیوم نیوباته

$\frac{V_{\text{Theory}} - V_{\text{lab}}}{V_{\text{Theory}}} \times 100$	$V_{\text{Theory}} (10^5 \text{ cm/s})$	$V_{\text{lab}} (10^5 \text{ cm/s})$	جهت پلاریزاسیون	جهت انتشار
۰/۱۶	۶/۵۶	۶/۵۴	[۱۰۰], L	[۱۰۰]
۰/۲۶	۶/۸۲	۶/۸۳	[۰۱۰], L	[۰۱۰]
۰/۲۹	۴/۴۸	۴/۴۶	S	[۰۱۰]
۰/۱۵	۷/۳۲	۷/۳۳	[۰۰۱], L	[۰۰۱]
۰/۰۵	۳/۵۹	۳/۵۸	[۱۰۰], S	[۰۰۱]
۰/۷۳	۳/۸۱	۳/۸۳	[۱۰۰], S	[۰۱۰]
۰/۱۵	۷/۲۶	۷/۲۱	[۰۰۱], L	[۰۰۱]
۰/۰۲	۴/۸	۴/۸۱	[۰۰۱], S	[۱۰۰]
۰/۹۷	۴/۰۲	۴/۰۵	[۰۱۰], S	[۱۰۰]
۱/۲۰	۶/۸	۶/۸۸	[۰۱۰], QL	[۰۱۰]
۰/۲	۳/۹۷	۳/۹۶	[۱۰۰], S	[۰۱۰]
۰/۱۳	۴/۵	۴/۴۹	[۰۰۱], QS	[۰۱۰]
۰/۴۵	۷/۳	۷/۳۳	[۰۰۱] L	[۰۰۱]
۱/۶۹	۷/۱	۷/۲۲	[۰۰۱] L	[۰۰۱]
۰/۴۵	۶/۵۵	۶/۵۸	[۰۱۰] L	[۰۱۰]
۰/۴۵	۶/۵۴	۶/۵۷	[۱۰۰] L	[۱۰۰]
۰/۸۳	۳/۶	۳/۵۷	[۰۱۰] S	[۰۰۱]
۰/۸۳	۳/۶	۳/۵۷	[۱۰۰] S	[۰۰۱]
۰/۷۰	۷/۲۸	۷/۳۱	[۰۰۱] L	[۰۰۱]

L: Longitudinal Wave, S: Shear Wave (Transversly Wave), QL: Quasi Longitudinal Wave and QS: Quasi Shear (Transversly) Wave

#### ۲-۴- تصدیق نتایج با استفاده از نتایج آزمایشگاهی دیگران<sup>(۱)</sup>

به منظور تصدیق نتایج، نتایج به دست آمده با داده‌های آزمایشگاهی<sup>(۲)</sup> مربوط به بلوره صوتی لیتیوم نیوباته مقایسه می‌شود. این مقایسه در جدول ۱ ارائه شده است. همان‌طور که از ستون اول سمت راست مشاهده می‌شود خطا در حدود اختلاف آزمایشگاهی و عددی قابل قبول است.

#### ۳- نتیجه گیری

اثر آنیزوتروپی و کوپلینگ پیزوالاستیکی در بلوره‌های صوتی منجر به خلق پدیده‌های کیفی با خواص منحصر به فرد جدید، به ویژه در طراحی فرامواد صوتی - امواج صوتی در محدوده بسامدی مشخصی در آنها منتشر نمی‌شود، می‌شود که مبنای طراحی برای بسیاری از فیلترهای صوتی و کنترل نوفه است.

با استفاده از حل عددی معادله کریستوفل اصلاح یافته، بر مبنای سرعت گروهی و ارتباط آن با اندیس‌های کریستالوگرافی میلر، اثر کوپلینگ پیزوالکتریکی و آنیزوتروپی بر ویفرهای مختلف (برش‌های مختلف) بلوره صوتی لیتیوم نیوباته بررسی شد و با داده‌های آزمایشی تصدیق شد. شکل‌های ترسیم شده دامنه سرعت‌های مختلف صوتی که ویفرها (برش‌های) مختلف بلوره صوتی لیتیوم نیوباته می‌تواند دارا باشد را نشان می‌دهد. این مسأله نشان می‌دهد که برحسب نوع کاربری که از این بلوره مورد انتظار است، برش (ویفرهای) متفاوت باید به کار گرفته شود. این مسأله به ویژه در طراحی موجبرهای صوتی و فرامواد صوتی به منظور کنترل نوفه حائز اهمیت خواهد بود.

تصدیق نتایج روش فوق با نتایج آزمایشگاهی و خطای پلاریزاسیون نشان می‌دهد که راهبرد انتخاب شده برای حل نسبتاً دقیق معادله کریستوفل اصلاح شده بر مبنای سرعت

۱) [http://www.mt-berlin.com/frames\\_ao/descriptions/lbn.htm](http://www.mt-berlin.com/frames_ao/descriptions/lbn.htm)

۲) <http://www.lcoptical.com/LiNbo3/LiNbo3.html>

بلوره‌های صوتی و تعیین برش‌های بلوره‌ای به‌منظور طراحی مهندسی پالایه‌های صوتی و لرزه‌ای، گران است، روش ارائه شده، روشی مؤثر و ارزان‌تر است.

گروهی فاز و امتداد منحصر به فرد آنها، و ارتباط آن با اندیس کریستالوگرافی میلر روشی مؤثر بوده است و می‌توان به نتایج آن اعتماد کرد و در حالی که هزینه‌های آزمایشگاهی بر روی

## واژه‌نامه

- |                            |                                |                              |
|----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 1. crystalloacoustics      | 8. high pass filter            | 15. hexagonal                |
| 2. metamaterials           | 9. low pass filter             | 16. lithium niobate          |
| 3. bulk acoustic wave      | 10. quasi static approximation | 17. trigonal                 |
| 4. characteristic equation | 11. plane wave                 | 18. Curie Groups             |
| 5. Christoffel's equation  | 12. acoustic axes theory       | 19. piezoelectric correction |
| 6. eigenvalue              | 13. slowness surface           |                              |
| 7. anisotropy              | 14. orthotropic                |                              |

## مراجع

1. Alshits, V. I., and Chadwick, P., "Concavities on the Zonal Slowness Section of a Transversely Isotropic Elastic Material", *Wave Motion*, Vol. 25, No. 4, pp. 347-359, 1997.
2. Chadwick, P., "Wave Propagation in Transversely Isotropic Elastic Media. I. Homogeneous Plane Waves", *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 422, pp. 23-66, 1989.
3. Musgrave, M. J. P., "On an Elastodynamic Classification of Orthorhombic Media", *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 374, pp. 401-429, 1981.
4. Payton, R., *Elastic Wave Propagation In Transversely Isotropic Media*, Martinus Nijhoff Publication, 1983.
5. Holm, P. and Lothe, J., "The Topological Nature of the Polarization Field for Body Waves in Anisotropic Elastic Media" *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 370, pp. 331-350, 1980.
6. Khatkevich, A. G., "Acoustic Axes in Crystals". *Soviet physics, Crystallography*, Vol. 7, No. 5, pp. 601-604, 1963.
7. Marvin, J. W., and Weber, J., *Handbook of Optical Materials*. University of California by CRC Press LLC, 2003.
8. Newnham, R. E., *Properties Of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure*, Kindle edition, pp. 391, Oxford University Press Inc., Oxford-New York, 2005.
9. Norris, A. N., "Acoustic Axes in Elasticity", *Wave Motion*, Vol. 40, No. 4, pp. 315-328, 2004.
10. Parton, V. Z., and Kudryavtsev, B. A., *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Taylor & Francis, 1988.
11. Royer, D., and Dieulesaint, E., *Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation*, translated by DP Morgan, Springer-Verlag, New York, 2000.
12. Ting, T. C. T., "Longitudinal and Transverse Waves in Anisotropic Elastic Materials", *Acta Mechanica*, Vol. 185, No. 3-4, pp. 147-164, 2006.
13. Ting, T. C. T., "On Anisotropic Elastic Materials for which one Sheet of the Slowness Surface is a Sphere or a Cross-Section of a Slowness Sheet is a Circle", *Wave Motion*, Vol. 43, No. 4, pp. 287-300, 2006.
14. Topolov, V. Y., and Bowen, C. R., *From Smart Materials to Piezo-Composites, Electromechanical Properties in Composite Based on Ferroelectrics*, Springer, London, pp. 1-10, 2009.
15. Yang, J., *Basic Equations, Special Topics in the Theory of Piezoelectricity*, Springer, London, pp. 1-12, 2009.
16. Zhou, Q., Zhang, S., and Lü, Y., "Acoustic Anisotropy of Piezoelectric PbB 407 Crystals Studied by Laser Ultrasonics", *Materials Science and Engineering: B*, Vol. 83, No. 1, pp. 249-253, 2001.
17. Zuo-Guang, Y., *Handbook of Dielectric, Piezoelectric and Ferroelectric Materials. Synthesis, Properties and applications*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, England, 2008.