

# کاربرد روش المان مرزی در حل سه بعدی مسائل دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع

امیررضاخویی و امیرمسعودکی نیا

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه ولز- سوانسی، انگلستان

مؤسسه ژئوتکنیک، اسلو، نروژ

چکیده - در مقاله حاضر برای تحلیل دینامیکی ارتعاش دائم یک محیط متخلخل اشباع از فرمولبندی المان مرزی سه بعدی استفاده شده است. معادله‌های حاکم بر محیط از تبدیل فوریه بر معادله‌های دینامیکی محیطهای متخلخل الاستیک بیو (معادله‌های بنیادی، دارسی، ممنتوم و پیوستگی) و سپس جانشینی فشار حفره‌ای مایع به جای جابه‌جایی مایع به دست می‌آیند. معادله‌های انتگرالی محیط متخلخل اشباع با کاربرد روش باقیمانده وزنی بر معادله‌های حاکم بر محیط حاصل گردیده است که با انتگرال‌گیری جزء به جزء این معادله‌ها، دو دسته معادله‌های انتگرالی، یکی روی کل میدان و دیگری روی مرز سیستم حاصل می‌شوند. حل‌های اساسی وابسته به این فرمولبندی که بر اساس جابه‌جایی توده جامد و فشار حفره‌ای مایع با بارهای نقطه‌ای در توده جامد و یک تزریق نقطه‌ای در مایع تعریف شده‌اند با استفاده از روش کوپرادز [۱] تعیین می‌گردند. بر مبنای این حل‌های اساسی می‌توان معادله‌های انتگرالی روی میدان را حذف نمود و معادله‌های انتگرالی که فقط مرزهای سیستم را شامل شوند، به دست آورد. در نهایت حل این معادله‌های انتگرالی مرزی با استفاده از تکنیک عددی روش المان مرزی صورت می‌گیرد. در ادامه برای نمایش مدل المان مرزی ارائه شده، ارتعاش حالت - دائم یک پی صلب مربع مستطیلی بر روی نیم فضای متخلخل اشباع به دست آمده و نتایج حاصل از تأثیر نفوذ پذیری محیط بر تغییرات تابع نرمی دینامیکی پی در تغییرات فرکانسی مختلف بررسی گردیده است.

## Application of the Boundary Element Method to Three-Dimensional Dynamic Solution of Fluid-Saturated Porous Media Problems

A.R. Khoei and A.M. Kaynia

Civil Engineering Department, University of Wales Swansea, Singleton Park, Swansea SA28PP, U.K.

Norwegian Geotechnical Institute, P.O. Box 3930, Ullevål Hageby, N-0806 Oslo, Norway

**ABSTRACT** - In this paper, an advanced implementation of the direct boundary element method applicable to steady-state dynamic analysis involving three-dimensional fluid-saturated porous media is presented. The coupled differential equations in terms of solid displacement and pore-fluid pressure are derived from the field equations by the application of the Fourier transform. The boundary integral formulation is obtained by the weighted residual method and the associated fundamental solutions, which define the solid displacement field and the pore pressure due to point forces in the solid and point sources in the medium, are obtained by the method developed by Kupradze. As a numerical example of the boundary element model, the dynamic

### فهرست علائم

پارامتر مواد بیهوش	$\alpha$	پارامتر جرم ( $\rho f/n$ )	m	فرکانس بدون بعد	$a_0$
وزن حجمی مخلوط جامد و مایع	$\gamma$	تخلخل محیط	n	اوپراتور اجوینت	A(or $A_{ij}$ )
تابع دلتای دیراک	$\delta(x-y)$	فشار حفره‌ای مایع	p	ضریب قابلیت مقاومت محیط	b
کرونیکیردلتا	$\delta_{ij}$	سرعت تزریق مایع بداخل سیستم	q	( $\gamma/k$ )	
لاپلاسیان	$\Delta$	پارامتر مواد بیهوش (معرف اثر فشار پذیریری مرکب دانه‌های جامد و مایع)	Q	بردار نیرو	B(or $B_i$ )
تانسور تغییر شکل نسبی	$\epsilon$ (or $\epsilon_{ij}$ )	فاصله بین نقطه اشر بار	r	تانسور ضریب شکل	C(or $C_{ij}$ )
ثابت زهکشی لامه برای توده جامد	$\lambda$	(یاد بی تزریقی) تانقظه‌ای که تغییر مکان‌ها (یا فشار منقذی) اندازه گیری می شود.		مدل یانگ	E
شکل مختلط ثابت $\lambda$	$\lambda^*$	مرز سیستم	s	تابع نرمی افقی دینامیکی	CHH
ثابت زهکشی لامه برای توده جامد	$\mu$	جابجایی توده جامد	u(or $u_j$ )	تابع نرمی چرخشی دینامیکی	CMM
شکل مختلط ثابت $\mu$	$\mu^*$	بردار حاوی جابجایی های توده جامد و فشار منقذی	U(or $U_i$ )	تابع نرمی قائم دینامیکی	CVV
ضریب پواسون	$\nu$	میدان سیستم	v	نیروهای بدنه	f
ضریب استهلاک	$\xi$	سرعت موج برشی	$V_s$	توابع گرین	G(or $G_{ij}$ )
چگالی مخلوط جامد و مایع	$\rho$	جابجایی متوسط مایع نسبت به جامد	w(or $w_i$ )	ژاکوبین	J
چگالی مایع	$\rho_f$	نقاط میدان	x	ضریب نفوذپذیری محیط	k
چگالی توده جامد	$\rho_s$	نقاط منفرد توابع انتگرالی	y	مدول حجمی مخلوط شده توده جامد	$K_d$
تانسور تنش	$\sigma$ (or $\sigma_{ij}$ )			جامد	
بردار تنش	$\vec{\sigma}$ (or $\vec{\sigma}_a$ )			مدول حجمی مایع	$K_f$
کمیت نظیر تنش ناشی از توابع گرین	$\tau^*$ (or $\tau^*_{ij}$ )			مدول حجمی دانه‌های جامد	$K_s$
فرکانس	$\omega$			ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی	L(or $L_{ij}$ )

response of three-dimensional rigid square foundations bonded to the surface of a water-saturated half-space is numerically obtained. The results presented in this paper display the variations with frequency of the real and imaginary parts of the compliance functions of rectangular foundations and the effect of soil permeability on these functions.

### ۱- مقدمه

بررسی اثر متقابل خاک - پی در مطالعه عکس العمل دینامیکی پی‌های صلب واقع بر محیط‌های خاکی اشباع که از عوامل مهم در طراحی پی‌های ماشین است، اهمیت موضوع را در بررسی حالت دینامیکی اش ایجاب می‌نماید.

معادله‌های حاکم بر محیط‌های خاکی اشباع که در حالت شبه‌استاتیکی آن به عنوان پدیده نفوذ شناخته می‌شود موضوع تحقیقات وسیعی در گذشته بوده است. اما تحقیق در جنبه‌های دینامیکی این محیط‌ها که به علت وجود دو فاز جامد و مایع در بردارنده اثرات اینرسی ناشی از شتاب توده جرم خاک و شتاب جرم مایع است و دارای مؤلفه‌های جابه جایی مستقل از یکدیگرند، از سال ۱۹۵۶ توسط بیو آغاز گردید. تحقیقات بیو [۲ و ۳] نشان داد که تحت یک اغتشاش دینامیکی در محیط متخلخل اشباع، یک موج برشی و دو موج طولی (فشاری) ایجاد می‌گردد. موج برشی و اولین موج طولی تقریباً مشابه امواج نظیر در محیط‌های تکفاز است. موج

بررسی محیط‌های خاکی اشباع که شامل دو فاز جامد و مایع داخلی حفره‌ها هستند کاربردهای متعددی دارند که نه تنها در علم مکانیک خاک بلکه در سایر علوم همچون ژئوفیزیک، زلزله شناسی و مهندسی ساختمان و مکانیک نیز اهمیت دارند. اثرات انتشار امواج در این محیط‌ها نظیر اثر بارهای ارتعاشی همچون زلزله و بررسی پدیده‌های روانگرایی در محیط‌های خاکی اشباع که به علت وجود منافذ پر از آب در بین دانه‌های خاک بوده، باعث می‌گردد تا در اثر یک ارتعاش دینامیکی و ایجاد تراکم در محیط خاکی، فشار آب داخل منافذ افزایش یافته و سبب حرکت آب به سمت بالا گردد که به صورت فوران و جوشش گل و ماسه در سطح زمین پدیدار گشته و در نتیجه کاهش مقاومت زمین به مقدار زیادی را سبب می‌شود. رفتار چنین پدیده‌هایی در ارتباط با مسائلی نظیر: سدهای خاکی واقع بر محیط خاکی اشباع، مسائل اثر متقابل خاک و سازه و یا

فشاری دوم که متناظر با حرکات خارج از فاز اجزای جامد و مایع است خاصیت میرایی شدیدی دارد به طوری که در فاصله کوتاهی از نقطه ایجادش مستهلک شده و از بین می‌رود. اغلب تئوریهای جدید مکانیک محیطهای پیوسته همچون تئوری مخلوط (تروزدل و توپین [۴] و باون [۵]) نتایج یکسانی را از معادله های با خواص مشابه ارائه می‌دهند، (به گارگ [۶]، پروست [۷]، باون [۸] و اوریالیت [۹] مراجعه شود). معادله های ارائه شده توسط بیو بر اساس جابه جاییهای جامدومایع (مدل  $u - w$ ) تعریف شده اند، برای تعیین حل اساسی این معادله ها محققینی همچون بورجیج و وارگاس [۱۰] با استفاده از این معادله ها، میدانهای تغییر مکان در فازهای جامد و مایع محیط اشباع را در اثر نیروی متمرکز در یک محیط نامتناهی در فازهای جامد و مایع (به طور جداگانه) به دست آوردند. علی رغم توفیق نسبی که در این زمینه به دست آمد، استفاده از نتایج موجود برای حل مسائل عملی چندان ساده نبود، زیرا شرایط مرزی مربوط به فاز مایع در سطح زمین به صورت تعریف مقدار صفر برای فشار آب است. لذا، محققین سعی کردند معادله های بیو را با استفاده از تبدیل میدان بر حسب جابه جاییهای توده جامد و فشار مایع منفذی (مدل  $u - p$ ) بیان نمایند (سیمون، زینکوویچ و پل [۱۱]). کاربرد این فرمولبندی در تعیین حلهای اساسی محیطهای متخلخل دینامیکی توسط بانث [۱۲] و بوتین [۱۳] و کی نیا [۱۴] مورد استفاده قرار گرفته است. حل مسائل مقادیر مرزی محیطهای متخلخل اشباع به روش المان محدود توسط زینکوویچ و شیومی [۱۵] و زینکوویچ [۱۶] و بوگاشا و تازولاس [۱۷] و هیرایی [۱۸] ارائه گردید. اخیراً، چنچ و همکاران [۱۹] و کی نیا و خوبی [۲۰] با استفاده از یک فرمولبندی انتگرال مرزی، ارتعاشات حالت - دائم محیط متخلخل اشباع را به دست آورده که براساس آن، تعدادی مسائل دینامیک خاک را حل نموده اند. اهمیت بررسی آب منفذی در مسائل اثر متقابل خاک - سازه، تحقیقات متعددی را در مطالعه رفتار دینامیکی پی صلب بر روی محیط متخلخل اشباع به دنبال داشته که در برخی از آنها مطالعات بدون تغییر در شکل اولیه معادله های بیو بر اساس مدل  $u - w$  صورت گرفته است. گازتاس و پتراکیس [۲۱] یک محیط نیم - فضای متخلخل الاستیک را تحت حرکات موجی و ارتعاشی ناشی از یک پی نواری صلب نفوذپذیر به صورت عددی ارزیابی نمودند.

هالپرن و کریستیانو [۲۲] توابع گرین ناشی از نیروهای متمرکز هارمونیک حالت - دائم که بر فازهای جامد و مایع در سطح نیم - فضا به کار برده می‌شود را به دست آورده و سپس با استفاده از آنها توابع عمودی دیسک صلب واقع بر محیط نیم فضای متخلخل را به صورت عددی ارزیابی نمودند. اخیراً، نتایج حاصل از یک پی نواری بر روی محیط نیم - صفحه متخلخل اشباع توسط کی نیا و خوبی [۲۰] با استفاده از روش المان مرزی ارائه گردیده است.

هدف از این مقاله توسعه مدل المان مرزی دو بعدی محیطهای متخلخل اشباع (خوبی و کی نیا [۲۳]) به یک مدل سه بعدی با کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی و تعیین معادله های انتگرال مرزی و سپس حل عددی آن با روش المان مرزی در تعیین توابع نرمی پی صلب واقع بر محیط خاکی اشباع بوده که مشابه با روش ساو و توساکا [۲۴] در حل مسائل ترموالاستیسیته است.

## ۲- معادله های میدان

محیطهای متخلخل نظیر خاک، سنگ و بتن، مرکب از دو بخش اندک شامل توده های جامد و فضای بین آنها می‌شود که توسط آب، هوا یا ترکیب آنها پر شده است. در صورتی که در فضای حفره ها تنها هوا باشد محیط را خشک و اگر از آب پر شده باشد محیط را اشباع و در صورتی که بخشی از آن توسط آب و بقیه با هوا اشغال شده باشد محیط را نیمه اشباع می‌نامند. برای مسئله مورد نظر، محیط متخلخل در فضای کاملاً اشباع در نظر گرفته شده و در حالت های حدی آن با محیط کاملاً خشک مقایسه گردیده است.

معادله های دینامیکی محیطهای متخلخل الاستیک اشباع که توسط بیو [۲] و [۳] به دست آمده و توسط زینکوویچ [۱۵] و بوتین [۱۳] توسعه داده شده است را برای محیطهای با فاز جامد خطی تحت تغییر شکل های کوچک بر اساس معادله های اساسی حاکم بر میدان شامل: معادله بنیادی، معادله ممتوم مربوط به ترکیب جامد و مایع، معادله عمومی داری و معادله پیوستگی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (1)$$

$$\dot{w}_{k,k} + \alpha \dot{u}_{k,k} + \frac{1}{Q} \dot{p} = q \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \gamma \mu \varepsilon_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (3)$$

$$p_{,i} = -b \dot{w}_i - \rho_f \ddot{u}_i - m \ddot{w}_i \quad (4)$$

سپس حذف  $w_i$  (جابه جایی نسبی مایع به جامد) بین این معادله‌ها، کوپل معادله‌های دیفرانسیل محیطهای متخلخل اشباع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\lambda + \mu) \bar{u}_{i,jj} + \mu \bar{u}_{i,ji} - \alpha_1 \bar{p}_{,i} + \omega^2 \rho_1 \bar{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad (6)$$

$$\xi \bar{p}_{,ii} - \frac{i\omega}{Q} \bar{p} - i\omega \alpha_1 \bar{u}_{i,i} + \bar{q} = 0 \quad (7)$$

کسه در آن  $\xi = (\frac{\gamma}{k} + i\omega m)^{-1}$  ،  $\rho_1 = \rho - i\omega \rho_f \xi$  و  $\alpha_1 = \alpha - i\omega \rho_f \xi$  و کمیت‌های  $\bar{u}_i$  و  $\bar{p}$  معرف تبدیل یافته جابه جاییها و فشار حفره‌ای بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{u}_i(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} u_i(x, t) dt \quad (8)$$

$$\bar{p}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} p(x, t) dt$$

جالب توجه است که معادله‌های دیفرانسیل محیطهای متخلخل اشباع دارای شکل کلی مشابه معادله‌های عمومی ترموالاستیسیته است که توسط ساو و توساکا به دست آمده است [۲۴].

کوپل معادله‌های دیفرانسیل محیطهای متخلخل اشباع (۶) و (۷) را در شکل ماتریسی آن می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$L_{ij} \bar{U}_j = \bar{B}_i \quad (9)$$

که در آن  $[L_{ij}]$  ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی،  $\{\bar{B}_i\}$  بردار نیرو و  $\{\bar{U}_j\}$  بردار جابه جاییهای محیط سه بعدی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu \Delta + (\lambda + \mu) D_1^2 + \omega^2 \rho_1 & (\lambda + \mu) D_1 D_2 & (\lambda + \mu) D_1 D_3 & -\alpha_1 D_1 \\ (\lambda + \mu) D_2 D_1 & \mu \Delta + (\lambda + \mu) D_2^2 + \omega^2 \rho_1 & (\lambda + \mu) D_2 D_3 & -\alpha_1 D_2 \\ (\lambda + \mu) D_3 D_1 & (\lambda + \mu) D_3 D_2 & \mu \Delta + (\lambda + \mu) D_3^2 + \omega^2 \rho_1 & -\alpha_1 D_3 \\ -i\omega \alpha_1 D_1 & -i\omega \alpha_1 D_2 & -i\omega \alpha_1 D_3 & \xi \Delta - \frac{i\omega}{Q} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $p$  فشار حفره‌ای مایع ،  $u$  جابه جاییهای توده جامد و  $w$  جابه جایی متوسط مایع نسبت به جامد است، پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$  ثابتهای زهکشی شده لامه برای توده جامدند. همچنین در معادله‌های بالا  $\rho_f$  چگالی مایع و  $\rho$  چگالی مخلوط جامد و مایع است که ارتباط آن با چگالی توده جامد به صورت  $\rho_s = (1 - n)\rho_s + n\rho_f$  است و در آن  $n$  معرف تخلخل محیط است.  $m$  در معادله‌های بالا پارامتر جرم و معادل  $\rho_f/n$  است. ضرایب  $\alpha$  و  $Q$  پارامترهای مواد بیو بوده و معرف اثر فشار پذیری مرکب دانه‌های جامد و مایع اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s} \quad (5)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s}$$

که در آن  $K_d$  و  $K_s$ ،  $K_f$  به ترتیب مدول حجمی مایع، دانه‌های جامد و مدول حجمی زهکشی شده توده جامد است.  $b$  ضریب قابلیت مقاومت محیط بوده و معادل  $\gamma/k$  است که در آن  $\gamma$  وزن حجمی مخلوط جامد و مایع و  $k$  ضریب نفوذ پذیری محیط است. بالاخره  $\sigma_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$  و  $\varepsilon_{ij}$  تانسورهای تنش و تغییر شکل نسبی و  $f$  و  $q$  به ترتیب معرف نیروهای بدنه و سرعت تزریق مایع به داخل سیستم است.

به منظور تعیین سیستم معادلاتی بر حسب جابه جاییهای  $u_i$  و فشار حفره‌ای  $p$  (مدل  $u - p$ )، از تبدیل فوریه بر معادله‌های (۱) تا (۴) استفاده نموده، تحت یک ارتعاش هارمونیک با فرکانس  $\omega$

$$\{\bar{U}_i\} = \{\bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 \bar{p}\}^T \quad (11)$$

$$\{\bar{B}_i\} = \{-\bar{f}_1 -\bar{f}_2 -\bar{f}_3 -\bar{q}\}^T \quad (12)$$

که در آن  $D_i = \partial/\partial x_i$  و  $\Delta$  معرف لاپلاسین است.

### ۳- معادله‌های انتگرال مرزی

برای تعیین معادله‌های انتگرالی که فقط در مرزهای سیستم قابل تعریف باشد از تکنیک باقیمانده وزنی استفاده نموده و معادله دیفرانسیل (۹) را به یک معادله انتگرالی در میدان  $v$  تبدیل می‌نماییم. با تعریف تانسور وزنی  $G_{ik}^*$  عبارت باقیمانده وزنی معادله (۹) عبارت است از:

$$\int_v (L_{ij} \bar{U}_j - \bar{B}_i) G_{ik}^* dv = 0 \quad (13)$$

با جاگذاری معادله‌های (۱۰) - (۱۲) در معادله انتگرالی (۱۳) و سپس با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء بر روی میدان  $v$  از این عبارت انتگرالی، خواهیم داشت:

$$\int_v (A_{ij} G_{jk}^*) \bar{U}_i dv(x) + \int_s (\bar{\sigma}_\alpha G_{\alpha j}^* - \bar{u}_\alpha \tau_{\alpha j}^*) ds(x) + \int_s (\xi \bar{p}, n G_{rj}^* - \xi \bar{p} G_{rj, n}^*) ds(x) - \int_v \bar{B}_i G_{ij}^* dv(x) = 0 \quad (14)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2, 3)$

که در آن  $\bar{U}_\alpha = \bar{p}$  و  $\bar{U}_3 = \bar{u}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) بوده و  $v$  و  $s$  مشخص کننده میدان و مرز سیستم در عبارات انتگرالی بالاست. بردار تنش  $\bar{\sigma}_\alpha$  و کمیت نظیر آن  $\tau_{\alpha j}^*$  در عبارت بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_\beta = \{(\lambda \bar{u}_{\kappa, \kappa} - \alpha_1 \bar{p}) \delta_{\alpha\beta} + \mu(\bar{u}_{\alpha, \beta} + \bar{u}_{\beta, \alpha})\} n_\beta \quad (15)$$

$$\tau_{\alpha j}^* = \{(\lambda G_{kj, \kappa}^* + i\omega \alpha_1 G_{rj}^*) \delta_{\alpha\beta} + \mu(G_{\alpha j, \beta}^* + G_{\beta j, \alpha}^*)\} n_\beta \quad (16)$$

در معادله (۱۴) ماتریس دیفرانسیلی  $[A_{ij}]$  که اصطلاحاً به اپراتور اجونیت  $[L_{ij}]$  [معادله (۱۰)] موسوم است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & -L_{f1} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & -L_{f2} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & -L_{f3} \\ -L_{1f} & -L_{2f} & -L_{3f} & L_{ff} \end{bmatrix} \quad (17)$$

برای تعیین تانسور وزنی  $G_{jk}^*$  که با جایگزینی در معادله (۱۴)، عبارت انتگرالی  $\int_v (A_{ij} G_{jk}^*) \bar{U}_i dv(x)$  را به عبارتی مستقل از انتگرال روی میدان  $v$  تبدیل نموده و معادله انتگرالی که فقط در مرز سیستم فرموله شده حاصل نماید، با فرض منبعی در نقطه  $c$  که در داخل ناحیه  $v$  متمرکز شده باشد، می‌توان نوشت:

$$A_{ij} G_{jk}^* + \delta_{ik} \delta(x-y) = 0 \quad (18)$$

که  $\delta(x-y)$  تابع دلتای دیراک است. با کاربرد روش باقیمانده وزنی بر معادله بالا می‌توان به جای اولین عبارت معادله (۱۴)،  $-C_{kj} \bar{U}_k(y)$  را قرار داد [۲۳]. که  $C_{kj}$  تانسور ضریب شکل است و برای نقاط واقع در داخل ناحیه  $v$ ،  $C_{kj} = \delta_{kj}$  و در نقاط واقع بر مرز سیستم برای سطوح هموار  $C_{kj} = 1/2 \delta_{kj}$  است. نقاط  $x$  و  $y$  نشان دهنده نقاط میدان و نقاط منفرد در توابع انتگرالی است. در نتیجه، معادله (۱۴) با چشمپوشی از اثرات نیروهای بدنه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_{kj} \bar{U}_k + \int_s \bar{u}_\alpha \tau_{\alpha j}^* ds + \int_s \xi \bar{p} G_{rj, n}^* ds = \int_s \bar{\sigma}_\alpha G_{\alpha j}^* ds + \int_s \xi \bar{p}, n G_{rj}^* ds \quad (19)$$

معادله (۱۹) را می‌توان به شکل ماتریسی آن به صورت زیر نشان داد:

$$C \bar{U} + \int_s P^* \bar{U} ds = \int_s U^* \bar{P} ds \quad (20)$$

که ماتریسهای  $U^*$  و  $P^*$  و بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  در معادله (۲۰) عبارت اند از:

که در آن  $\lambda_1^2 = -\rho_1 \omega^2 / \mu$  و  $\lambda_2^2$  و  $\lambda_3^2$  ریشه‌های معادله‌های زیرند:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_1^2 + \frac{i\omega}{\xi} \left( \frac{1}{Q} + \frac{\alpha_1^2}{\lambda + 2\mu} \right) \\ \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{Q\xi} k_1^2 \end{cases} \quad (26)$$

که  $k_1^2 = -\omega^2 \rho_1 / (\lambda + \mu)$ . نهایتاً ماتریس توابع گرین برای حالت سه بعدی به صورت زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^* &= \sum_{L=1}^3 \{ \psi_L(r) \delta_{\alpha\beta} - \chi_L(r) r_{,\alpha} r_{,\beta} \} \\ G_{\alpha\gamma}^* &= \sum_{L=1}^3 i\omega r_{,\alpha} \xi_L(r) \\ G_{\gamma\beta}^* &= \sum_{L=1}^3 r_{,\beta} \xi_L(r) \\ G_{\gamma\gamma}^* &= \sum_{L=1}^3 \phi_L(r) \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $r$  فاصله بین نقطه اثر بار (یادبی تزریقی) تا نقطه‌ای است که تغییر مکانها (یا فشار منفذی) اندازه‌گیری می‌شود  $[r = |x - y|]$  و توابع  $r_{,\alpha} = \partial r / \partial x_\alpha$  و  $\phi(r)$ ،  $\xi(r)$  و  $\chi(r)$  در معادله (۲۷) عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \psi_L(r) &= \left[ \frac{\delta_{rL}}{4\pi\mu} - \eta_L \left( \frac{\lambda_L}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \frac{1}{r} e^{-\lambda_L r} \\ \chi_L(r) &= -\eta_L \left( \lambda_L^2 + \frac{3\lambda_L}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \frac{1}{r} e^{-\lambda_L r} \\ \xi_L(r) &= \phi_L \left( \lambda_L + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} e^{-\lambda_L r} \\ \phi_L(r) &= \gamma_L \frac{1}{r} e^{-\lambda_L r} \end{aligned} \quad (28)$$

ضرایب  $\eta_L$  و  $\gamma_L$  در معادله (۲۸) عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \eta_L &= \frac{(-1)^L \left( 1 - \frac{i\omega}{Q\xi} \lambda_L^{-2} \right) (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{4\pi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\delta_{rL}}{4\pi\omega^2 \rho_1} \\ \phi_L &= \alpha_1 \frac{(-1)^L (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{4\pi\xi(\lambda + 2\mu)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \gamma_L &= \frac{(-1)^L (\lambda_L^2 - k_1^2) (\delta_{1L} + \delta_{2L})}{4\pi\xi (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \end{aligned} \quad (29)$$

$$U^* = \begin{pmatrix} G_{11}^* & G_{21}^* & G_{31}^* & \xi G_{\gamma 1}^* \\ G_{12}^* & G_{22}^* & G_{32}^* & \xi G_{\gamma 2}^* \\ G_{13}^* & G_{23}^* & G_{33}^* & \xi G_{\gamma 3}^* \\ G_{1\gamma}^* & G_{2\gamma}^* & G_{3\gamma}^* & \xi G_{\gamma\gamma}^* \end{pmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{p} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$P^* = \begin{pmatrix} \tau_{11}^* & \tau_{21}^* & \tau_{31}^* & \xi G_{\gamma 1,n}^* \\ \tau_{12}^* & \tau_{22}^* & \tau_{32}^* & \xi G_{\gamma 2,n}^* \\ \tau_{13}^* & \tau_{23}^* & \tau_{33}^* & \xi G_{\gamma 3,n}^* \\ \tau_{1\gamma}^* & \tau_{2\gamma}^* & \tau_{3\gamma}^* & \xi G_{\gamma\gamma,n}^* \end{pmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{p},n \end{pmatrix} \quad (22)$$

برای حل معادله انتگرال مرزی (۲۰) و تعیین مقادیر مجهول جابه جایها و فشار منفذی در بردار  $\bar{U}$  و مقادیر بردارهای تنش و دبی خروجی در بردار  $\bar{P}$ ، با محاسبه توابع  $G_{ij}^*$  و  $\tau_{ij}^*$ ، ماتریسهای  $U^*$  و  $P^*$  را تشکیل می‌دهیم و چون حل تحلیلی معادله (۲۰) ناممکن است با استفاده از روش عددی همچون روش المان مرزی، معادله انتگرال مرزی (۲۰) را حل می‌کنیم.

#### ۴- حل اساسی

برای تعیین حل اساسی (توابع گرین)  $G_{ij}^*$  که با استفاده از آن توابع تنش نظیر  $\tau_{ij}^*$  تعیین گردیده و بتوان ماتریسهای  $U^*$  و  $P^*$  را تشکیل داد، از معادله (۱۸) استفاده می‌کنیم. با نمایش تانسور وزنی  $G_{ij}^*$  به صورت زیر:

$$G_{ij}^* = B_{ij} \Phi^* \quad (23)$$

که در آن  $B_{ij}$  اپراتور هم‌عامل ترانواده  $A_{ij}$  و  $\Phi^*$  یک تابع اسکالر (عددی) است. با جاگذاری معادله (۲۳) در معادله (۱۸) خواهیم داشت:

$$A\Phi^* + \delta(x - y) = 0 \quad (24)$$

که:

$$\begin{aligned} A &= \det(A_{ij}) \\ &= \xi\mu^2 (\lambda + 2\mu) (\Delta - \lambda_1^2) (\Delta - \lambda_2^2) (\Delta - \lambda_3^2)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

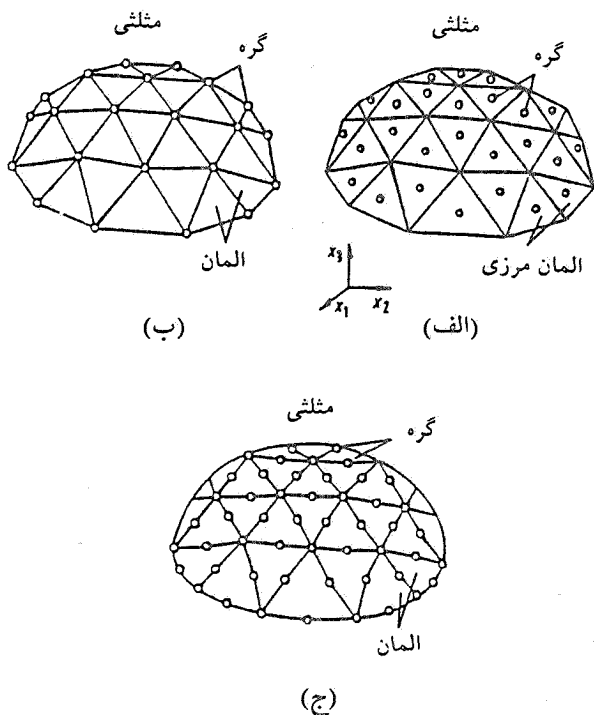
با جاگذاری توابع گرین  $G_{ij}^*$  از معادله (۲۷) در معادله (۱۶)، توابع تنش نظیر  $\tau_{ij}^*$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^* &= \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ \lambda r_{,\beta} n_{\alpha} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \chi \right) + i \omega \alpha_{\nu} r_{,\beta} n_{\alpha} \xi \right. \\ &\quad - \nu \mu \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} r_{,\alpha} r_{,\beta} + \mu \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} n_{\beta} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \chi \right) \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{r} \chi \mu (n_{\alpha} r_{,\beta} - \nu \frac{\partial r}{\partial n} r_{,\alpha} r_{,\beta}) \right\} \\ \tau_{\alpha\varphi}^* &= \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ \lambda n_{\alpha} i \omega \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \xi \right) + i \omega \alpha_{\nu} n_{\alpha} \phi \right. \\ &\quad \left. + \nu \mu i \omega n_{\alpha} \frac{1}{r} \xi + \nu \mu i \omega r_{,\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r} \xi \right) \right\} \\ \tau_{\varphi\beta}^* &= \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ n_{\beta} \frac{1}{r} \xi + r_{,\beta} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r} \xi \right) \right\} \\ \tau_{\varphi\varphi}^* &= G_{\varphi\varphi,n}^* = \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن  $\partial r / \partial n = (\partial r / \partial x_i) (\partial x_i / \partial n) = (x_i / r) n_i = r_{,i} n_i$  است.

## ۵- روش المانهای مرزی

از جمله روشهای عددی که کاربرد فراوانی در مسائل مکانیک محیطهای پیوسته همچون تحلیلهای استاتیکی و یا مسائل دینامیکی دارد و در حل معادله‌های انتگرال مرزی مناسب است، روش المان مرزی است. کاربرد این روش عددی در حل معادله‌های انتگرال مرزی که خود یک فرمولبندی دقیق مسأله است باعث می‌شود تا تقریبها فقط در حل عددی معادله‌های انتگرالی وارد گردد. اهمیت روش المان مرزی نسبت به سایر روشهای عددی در کاهش ابعاد مسأله است که این به دلیل استفاده از المانبندی تنها در مرزهای ناحیه مورد نظر است. این روش به خصوص در حل مسائل محیطهای نامتناهی و یا نیمه نامتناهی مناسب است، زیرا توابع گرین مورد استفاده در فرمولبندی روش المان مرزی به صورت خودکار شرایط تشعشی نواحی دور - میدان را ارضاء می‌کند. توابع گرین یا حل اساسی برای بار نقطه‌ای در یک جسم نامتناهی، از اعمال نیرو با مقدار و جهت معلوم به نقطه‌ای از جسم که از همه سو به نامتناهی ممتد است همراه با حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیل حاکم برای تنش و تغییر مکانهای جسم، به دست می‌آید. در مورد اجزای فیزیکی که این جسم نامتناهی را به قسمتهایی محدود



شکل ۱- المانبندی یک جسم سه بعدی: (الف) ثابت، (ب) خطی، (ج) درجه دوم

می‌کند، بارهای اعمالی در این بخشها از مرز جسم اعمال می‌شود. به علت طبیعت بار نقطه‌ای مورد استفاده در تعیین توابع گرین، شکل حلها منفرد بوده و نیاز به تدابیر خاصی برای انتگرال گیری حلهای اساسی منفرد در محدوده‌های شامل نقاط منفرد است.

تحلیل سه بعدی محیطهای متخلخل اشباع از حل معادله‌های انتگرال مرزی مربوطه [معادله (۲۰)] و تعیین مقادیر مرزی که شامل تغییر مکانها، فشار منفذی، و بردارهای تنش و دبی خروجی است، صورت می‌گیرد. چون حل تحلیلی معادله انتگرالی (۲۰) در مسائل محیطهای سه بعدی با مرزهای نامنظم ناممکن است، لذا مرز را به المانهای صفحه‌ای از نوع مثلثی یا مستطیلی تقسیمبندی می‌کنیم. هر یک از این المانها می‌تواند به صورت ثابت، خطی، درجه دوم و یا رسته‌های بالاتر مورد استفاده قرار گیرد. شکل (۱- الف) جسمی را که توسط المانهای ثابت مجزا سازی شده، نمایش می‌دهد. برای این المانها مقادیر مجهول در مرکز المان بوده و برای کل المان این مقدار ثابت است در شکل (۱- ب) المان خطی که مقادیر مجهول به صورت یک تابع خطی روی آن تغییر می‌کند

نشان داده شده است. بالاخره در شکل (۱ - ج) ضمن آنکه شکل هندسی المان دارای تغییرات درجه دوم است، تغییرات متغیرها (نظیر جابه جایی، فشار منفذی، تنش و دبی خروجی) بر روی المان نیز تابعی درجه دوم است.

با تقسیم مرز به  $n$  المان صفحه ای، معادله انتگرال مرزی (۲۰) به صورت مجموع انتگرالهای المان مرزی به شکل زیر نوشته می شود:

$$C_i \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} P^* \bar{U} ds = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} U^* \bar{P} ds \quad (31)$$

که  $s_j$  سطح المان  $j$ ام است. مفهوم معادله (۳۱) آن است که در هر مرحله با قرار گرفتن بر یک گره مرزی (گره  $i$ ) و حرکت بر روی سایر المانها، معادله (۳۱) را تشکیل داد. در این صورت برای کلیه گرهها،  $n$  دسته از این معادله ها به دست می آیند. در این مقاله برای حل عددی معادله بالا از المان ثابت مثلثی ( $C_i = \frac{1}{3}$ ) استفاده گردیده است. در این صورت مقادیر بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  در طول المان ثابت بوده و می توان نوشت:

$$\frac{1}{3} \bar{U}_i + \sum_{j=1}^n \left( \int_{s_j} P^* ds \right) \bar{U}_j = \sum_{j=1}^n \left( \int_{s_j} U^* ds \right) \bar{P}_j \quad (32)$$

معادله (۳۲) نمایشی از شکل مجزا شده بر روی مرز است که ارتباط بین گره  $i$  که توابع گرین در آن استفاده شده را با تمام المانهای  $j$  که شامل  $j = i$  نیز هست) بر روی مرز برقرار می کند. عبارتهای  $\int_{s_j} P^* ds$  و  $\int_{s_j} U^* ds$  ارتباط گره  $i$  را با المان  $j$  توسط عمل انتگرال گیری نشان می دهد. برای ارزیابی عددی این انتگرالها می توان معادله های (۲۷) و (۳۰) را جایگزین نمود. نهایتاً کاربرد معادله (۳۲) برای  $n$  گره مرزی، که در هر گره چهار مجهول (شامل تغییر مکان در سه راستا و فشار منفذی در بردار  $\bar{U}$  و یا بردارهای تنش سه راستا و دبی خروجی در بردار  $\bar{P}$ ) وجود دارد با حل دستگاه معادله ای از مرتبه  $4N$  به شکل زیر به دست می آید:

$$H_1 \bar{u} + H_2 \bar{p} = G_1 \bar{\sigma} + G_2 \bar{p}, n \quad (33)$$

یا

$$H \bar{U} = G \bar{P} \quad (34)$$

بامرتب کردن دستگاه معادله (۳۴) به صورتی که کلیه مجهولها به سمت چپ معادله انتقال یابند، در این صورت خواهیم داشت:

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (35)$$

که در آن  $[A]$  ماتریس ضرایب و  $\{B\}$  برداری است که مقادیر آن بر اساس شرایط مرزی معلوم در سیستم به دست آمده و  $\{X\}$  بردار مجهولها شامل  $\bar{U}_i^N, \bar{\sigma}_i^N, \bar{P}_i^N$  است. با حل دستگاه معادله های (۳۵) به یکی از روشهای متداول نظیر روش گوس، مجهولهای هر گره به دست می آیند.

### ۶- رفتار انتگرالهای منفرد

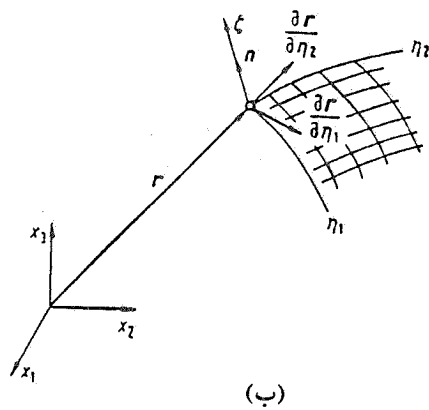
برای تشکیل دستگاه معادله های (۳۵) که با حل آن مقادیر مجهولهای گره های مرزی به دست آیند، نیاز به محاسبه انتگرالهای معادله (۳۲) در هر گره و سپس ادغام آنها در کلیه گره های مرزی است. در مقاله حاضر با استفاده از المانهای ثابت مثلثی تغییرات زیر بردارهای  $\bar{U}$  و  $\bar{P}$  در سطح هر المان مقداری ثابت گرفته شده و بر اساس آن انتگرالهای  $\int_{s_j} U^* ds$  و  $\int_{s_j} P^* ds$  محاسبه می گردند. محاسبه هر یک از جمله های زیر ماتریسهای  $U^*$  و  $P^*$  با انتگرال گیری از توابع  $G_{ij}^*$  و  $\tau_{ij}^*$  هنگامی که در گره مرزی قرار داشته و بر روی المانهای مرزی حرکت می کنیم، صورت می گیرد.

برای حالتی که گره  $i$  المان مرزی  $j$  را شامل نشود ( $i \neq j$ )، محاسبه انتگرالها با تبدیل سطح المان  $ds$  از سیستم مختصات کارتیزین به سیستم مختصات اصلی المان مثلثی (شکل ۲) و با استفاده از روشهای انتگرال گیری عددی نظیر روش هامر [۲۵] محاسبه می گردد. در این حالت ضرایب غیر قطری ماتریس  $H$  عبارت اند از:

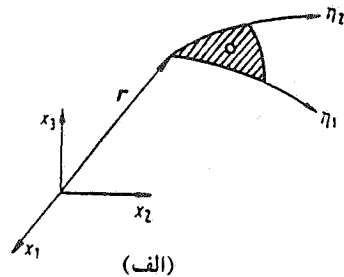
$$\int_{s_j} \tau_{ij}^*(r) ds = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} \tau_{ij}^*(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 \\ = |J| \sum_{m=1}^k \tau_{ij}^*(\eta_1^m, \eta_2^m, \eta_3^m) \omega_m \quad (36)$$

که در آن ژاکوبین  $|J|$  معادل دو برابر سطح مثلث است. به طور مشابه برای انتگرالهای  $\int_{s_j} G_{ij}^*(r) ds$  نیز به همین ترتیب عمل می شود.

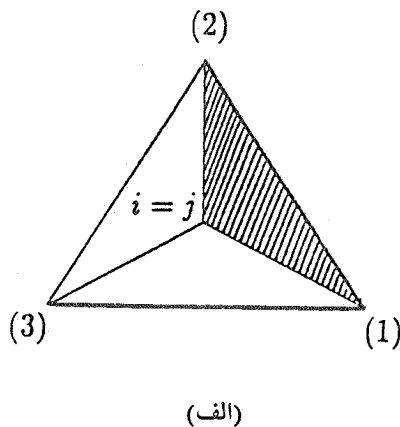




$$ds = |J| d\eta_1 d\eta_2$$

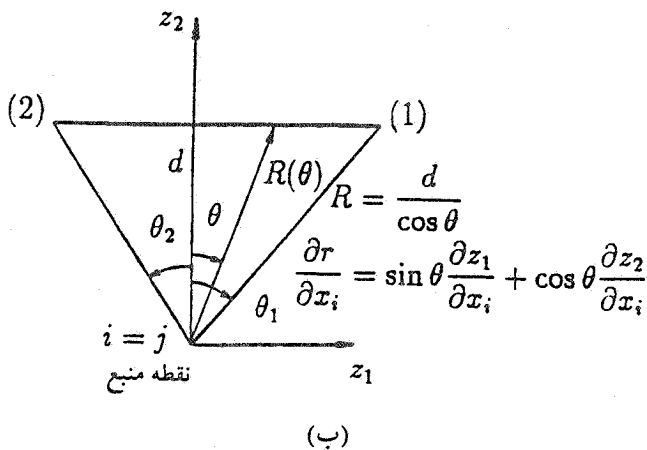


شکل ۲ - (الف) المان جسم سه بعدی، (ب) دستگاه مختصات



در حالت  $i = j$  یعنی وقتی گره  $i$  المان  $j$  را در برگیرد، انتگرالها دارای رفتار خاصی بوده زیرا حلهای اساسی شامل نقاط منفردند. رفتار جملات حلهای اساسی در نقاط منفرد برای حالت سه بعدی به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^* &\propto \frac{1}{r} & G_{\alpha\beta}^* &= \text{غیر منفرد} \\ G_{\alpha\alpha}^* &= \text{غیر منفرد} & G_{\alpha\alpha}^* &\propto \frac{1}{r} \\ \tau_{\alpha\beta}^* &\propto \frac{1}{r^2} & \tau_{\alpha\beta}^* &= \text{غیر منفرد} \\ \tau_{\alpha\alpha}^* &\propto \frac{1}{r} & \tau_{\alpha\alpha}^* &\propto \frac{1}{r^2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (37)$$



همان گونه که دیده می شود  $G_{\alpha\alpha}^*$  و  $G_{\alpha\beta}^*$  از ماتریس  $G_{ij}^*$  غیر منفرد بوده و نوع نقاط منفرد  $G_{\alpha\beta}^*$  و  $\tau_{\alpha\beta}^*$  از نوع نقاط منفرد الاستو-استاتیک و در مورد  $G_{\alpha\alpha}^*$  و  $\tau_{\alpha\alpha}^*$  از نوع مسأله نفوذ است. برای مسائل سه بعدی، هر المان مطابق شکل (۳-الف) به سه زیر المان تقسیم می شود و در هر زیر المان، انتگرالها به طریق تحلیلی با انتخاب  $r$  در دستگاه مختصات قطبی محلی با استفاده از شکل (۳-ب) به صورت زیر محاسبه می گردد:

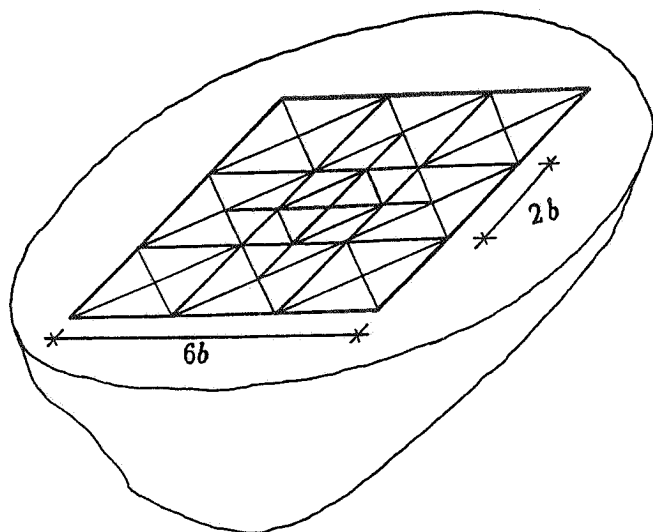
شکل ۳ - مختصات محلی در المان مثلثی: الف) المان مثلثی ثابت، ب) زیر المان

$$\begin{aligned} [H_{\alpha\beta}]_{ii} &= \sum_{c=1}^3 \int_{s_c} \tau_{\beta\alpha}^* ds \\ &= \sum_{c=1}^3 \int_{-\theta_r}^{\theta_1} \int_0^{R(\theta)} \tau_{\beta\alpha}^*(r) r dr d\theta \end{aligned} \quad (38)$$

$$\theta = \frac{\rho}{r} (\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{r} (\theta_1 - \theta_2) \quad (39)$$

بنابراین:

با تعریف تغییر متغیر  $\theta$  به صورت زیر:



شکل ۴ - مدل المان مرزی یک پی صلب مربعی واقع بر نیم - فضای خاکی اشباع

محیط خاکی اشباع واقع در زیر پی عبارت اند از [۱۴]:

$$\lambda = 0.274 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \mu = 0.585 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$Q = 0.997 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \alpha = 0.83, n = 0.195$$

$$\rho_f = 1000, \rho = 2270 \quad \& \quad m = 5130 \text{ Kg/m}^3$$

خواص الاستیک خاک زهکشی شده ( $\lambda$  و  $\mu$ ) براساس مقادیر  $E = 1/357 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$  و  $\nu = 0.16$  محیط قابل محاسبه اند. پارامترهای بالامقادیر اندازه گیری شده توسط ویو و جاگی (۱۹۸۷) بوده که با پارامترهای ارائه شده در معادله های (۱) تا (۴) منطبق است.

المانبندی در روش المان مرزی در محل هایی که مرز بین دو محیط دارای خواص فیزیکی متفاوت است، صورت می گیرد. برای پی مورد نظر واقع بر محیط نیم - فضا، المانبندی در محل تماس خاک - پی و بخشی از میدان - آزاد سطح زمین مجاور پی مطابق شکل (۴) خواهد بود که بر اساس مطالعات همگرایی صورت گرفته، کل پهنای لازم برای المانبندی برابر  $6b$  بوده که در آن  $b$  نصف پهنای پی مربعی است. برای تعیین تابع نرمی قائم دینامیکی پی صلب مربعی، تغییر مکان ناشی از اعمال بار واحد دینامیکی بر روی دیسک صفحه ای صلب بدون جرم واقع بر محیط نیم - فضا را در درجه آزادی قائم آن به صورت تابعی از فرکانس به دست می آوریم. با

$$[H_{\alpha\beta}]_{ii} = \sum_{e=1}^r \int_{-\theta_r}^{\theta_1} F_{\beta\alpha(R(\theta))} d\theta$$

$$= \sum_{e=1}^r \int_{-1}^{+1} F_{\beta\alpha(R(\rho))} \frac{1}{r} (\theta_1 + \theta_r) d\rho \quad (40)$$

ارزیابی انتگرال یک متغیره (۴۰) را به روشهای استاندارد عددی نظیر روش گوس می توان انجام داد. در این صورت می توان نوشت:

$$[H_{\alpha\beta}]_{ii} = \sum_{e=1}^r \left\{ \sum_{m=1}^k F_{\beta\alpha(R(\rho_m))} \frac{1}{r} (\theta_1 + \theta_r) \omega_m \right\} \quad (41)$$

که در آن:

$$F_{\beta\alpha(R(\theta_m))} = \int_0^{R(\theta_m)} \tau_{\beta\alpha}^*(r) r dr \quad (42)$$

انتگرالهای  $[G_{\alpha\beta}]_{ii}$  نیز به طریق مشابه قابل محاسبه اند. نهایتاً طبق معادله (۴۲) نتایج انتگرالهای منفرد  $[G_{\alpha\beta}]_{ii}$  و  $[H_{\alpha\beta}]_{ii}$  برای حالت سه بعدی منجر به انتگرالهایی از نوع  $\exp(-hr)/r^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) می شود که مقادیر آنها به صورت عددی محاسبه می گردد.

#### ۷- نتایج عددی

به عنوان نتایجی از کاربردهای فرمولبندی انتگرال مرزی در محیطهای متخلخل اشباع سه بعدی که با استفاده از روش المان مرزی به صورت عددی ارائه گردید، توابع نرمی دینامیکی پی صلب مربعی واقع بر محیط نیم فضای خاکی اشباع تحت اثر ارتعاشات قائم، افقی و چرخشی بررسی گردیده است، (شکل ۴). اهمیت روش المان مرزی در مدل کردن محیطهای نیم - فضا به این علت است که اثر استهلاک تشعشعی به طور خودکار در مسأله وارد می شود و اثر استهلاک هیسترتیک خطی در فرمولبندی روش المان مرزی را می توان به صورت ساده با تبدیل ثابتهای لامه به شکل مختلط زیر در نظر گرفت:

$$\lambda^* = \lambda(1 + 2\xi i) \quad (43)$$

$$\mu^* = \mu(1 + 2\xi i)$$

که در آن  $\xi$  نسبت استهلاک خواص مواد است و برای محیطهای خاکی برابر  $0.05$  در نظر گرفته شده است. مشخصات خواص

تعریف تابع نرمی به صورت بی بعد زیر:

$$C_{VV}(a.) = \mu b \frac{\Delta_T}{P_T} \quad (44)$$

که در آن تابع  $C_{VV}$  متشکل از دو جزء حقیقی و موهومی بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_{VV}(a.) = \text{Re}(C_{VV}) + i\text{Im}(C_{VV}) \quad (45)$$

در معادله های بالا  $a. = \omega b/V_s$  فرکانس بدون بعد و  $V_s$  سرعت موج برشی و برابر  $\sqrt{\mu/\rho_s}$  است. در شکل های (۵- الف) و (۵- ب) تغییرات جزء حقیقی و موهومی نرمی قائم یک پی مربعی بر روی محیط خاکی اشباع برای نفوذپذیریهای  $k = 20, 0/2, 0/002$  cm/sec رسم گردیده است، در این منحنیها همچنین نتایج حاصل از یک محیط زهکشی نشده تکفاز معادل (منحنی خط پر با نقاط مشخصه) نمایش داده شده است. این منحنی بر اساس رفتار دینامیکی یک محیط با نفوذ پذیری کم (کی نیا و بانرجی [۲۶]) که قابل انطباق بر یک محیط تکفاز با پارامترهای الاستیسیته معادل زیرند، به دست آمده است:

$$\lambda_u = \lambda + \alpha^2 Q$$

$$\nu_u = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \alpha^2 Q}{\lambda + \mu + \alpha^2 Q} \quad (46)$$

بر اساس نتایج حاصل از منحنیهای (۵- الف) و (۵- ب) با کاهش نفوذ پذیری محیط مقادیر جزء حقیقی و موهومی نرمی قائم دینامیکی کاهش می یابد. جالب توجه است که توابع نرمی محیط تکفاز و منحنیهای مربوط به محیط با نفوذپذیری کم دارای نتایج مشابه اند. در شکل (۵- ج) نتایج حاصل از جزءهای حقیقی و موهومی نرمی قائم دینامیکی محیط متخلخل اشباع با نفوذپذیری بالا (محیط زهکشی شده) و محیط خشک الاستو-دینامیک تکفاز مقایسه گردیده است، از این نتایج دیده می شود در نفوذپذیریهای بالا آب موجود در محیط نقشی در رفتار محیط خاکی نداشته و معادل یک محیط تکفاز خشک است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل از منحنیهای شکل (۵) در حالت های تکفاز که برای مقایسه با

محیط متخلخل اشباع در شرایط حدی استفاده گردیده است، منطبق بر نتایج حاصل از سایر محققین با پارامترهای الاستیسیته مشابه است [۲۷].

به طور مشابه توابع نرمی دینامیکی افقی و چرخشی پی صلب واقع بر محیط خاکی اشباع را می توان بر حسب تابعی از فرکانس رسم نمود. با تعریف توابع نرمی افقی و چرخشی به صورت بی بعد زیر:

$$C_{HH}(a.) = \mu b \frac{\Delta_1}{P_1} \quad (47)$$

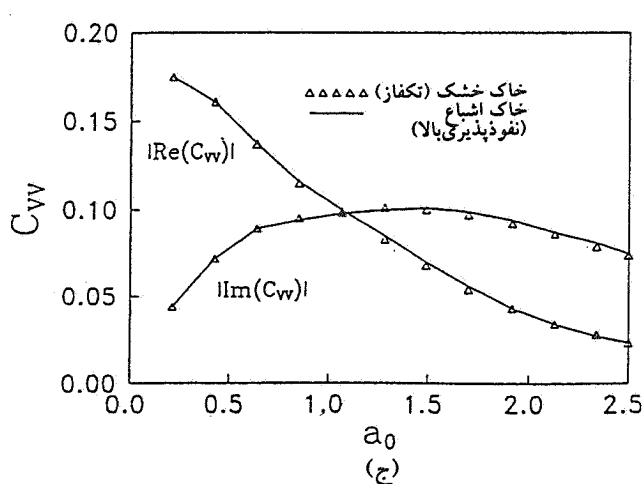
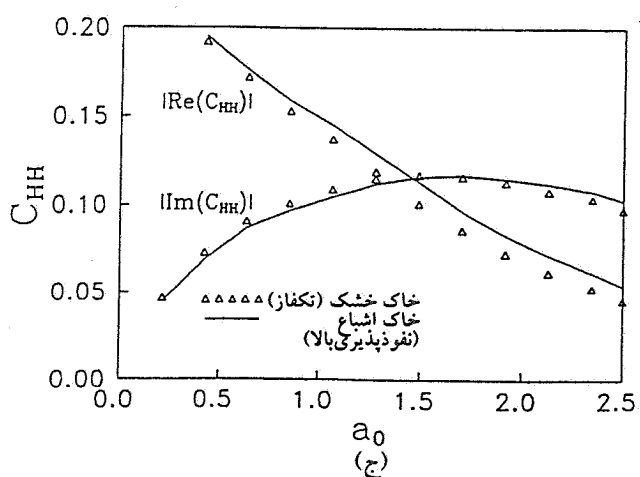
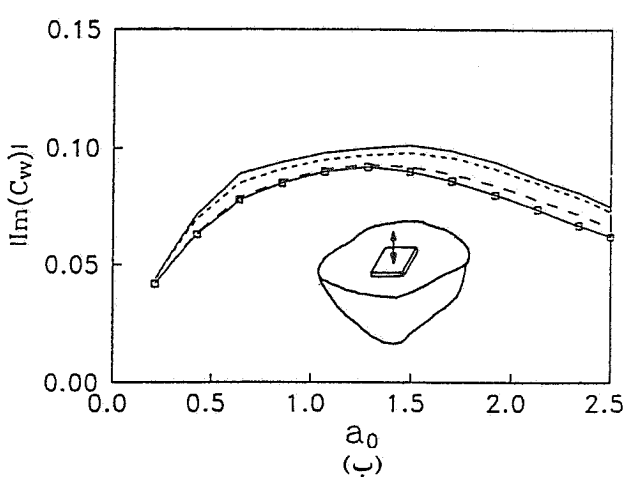
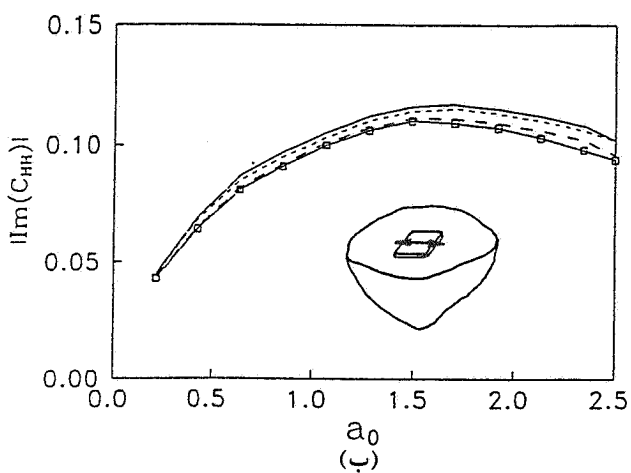
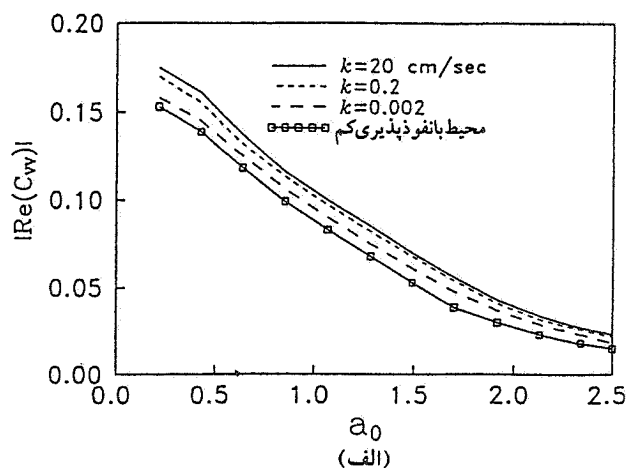
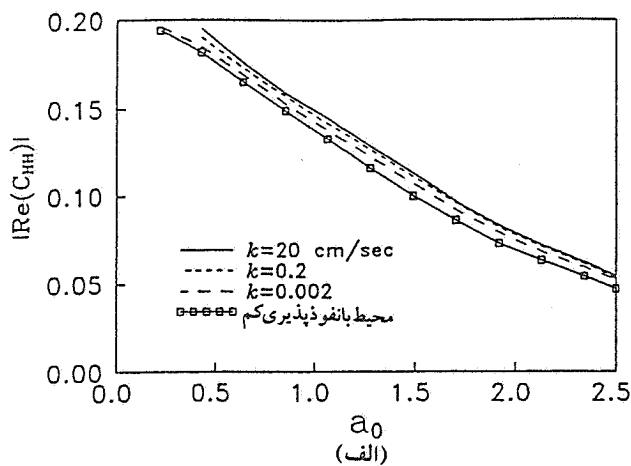
$$C_{MM}(a.) = \mu b^2 \frac{\alpha_T}{M_T}$$

این توابع بر اساس دو جزء حقیقی و موهومی به صورت تغییراتی از فرکانس بدون بعد قابل بیان اند.

در شکل های (۶- الف) و (۶- ب) توابع نرمی افقی پی صلب و (۷- الف) و (۷- ب) توابع نرمی چرخشی پی صلب برای نفوذپذیریهای مختلف و همچنین مقایسه محیط با نفوذ پذیری کم و محیط تکفاز زهکشی نشده با پارامترهای معادل نشان داده شده است. همچنین در شکل های (۶- ج) و (۷- ج) نیز نتایج حاصل از محیط اشباع با نفوذ پذیری بالا و خشک تکفاز در نرمی افقی و چرخشی پی صلب مقایسه گردیده است.

#### ۸- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، یک فرمولبندی المان مرزی سه بعدی برای حل مسائل مقادیر مرزی محیطهای متخلخل اشباع ارائه گردید. معادله های انتگرال مرزی از کاربرد تکنیک باقیمانده وزنی بر کوپل معادله های دیفرانسیل دینامیکی محیطهای متخلخل الاستیک اشباع به دست آمد. در ادامه برای تعیین توابع گرین یا حلهای اساسی معادله های، انتگرال مرزی از روش کوپرادز و سپس برای حل این معادله های انتگرالی که تنها در مرزهای سیستم فرموله شده اند از روش المان مرزی با المان بندی سیستم در محلهایی که دارای تغییرات خواص فیزیکی است، استفاده گردید. نهایتاً، به منظور نمایشی از مدل المان مرزی ارائه شده، توابع نرمی دینامیکی یک پی صلب مربعی بر محیط نیم - فضای متخلخل اشباع به دست آمد. از نتایج حاصل مشاهده گردید که با افزایش نفوذپذیری محیط، تابع



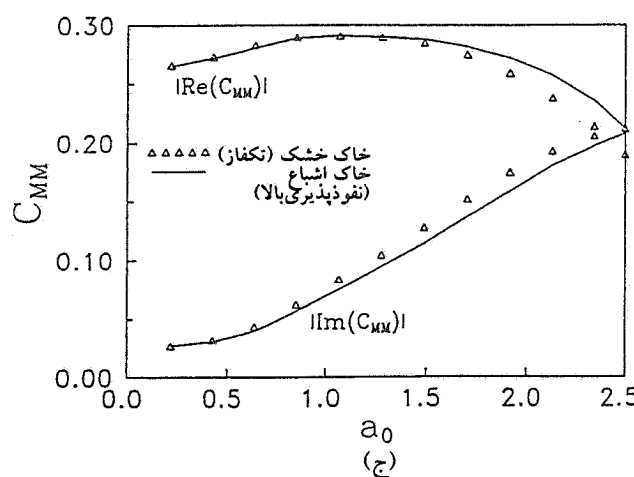
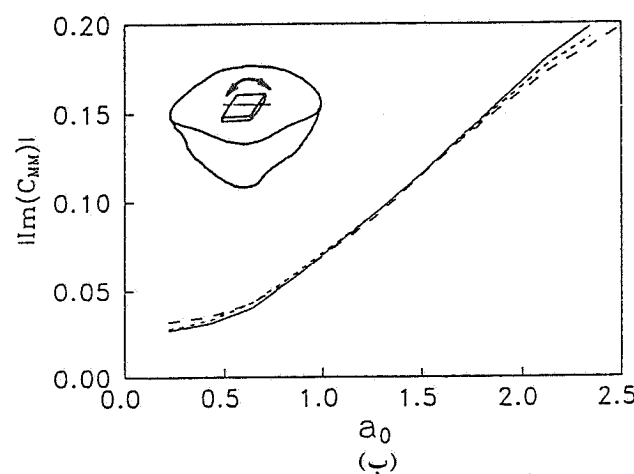
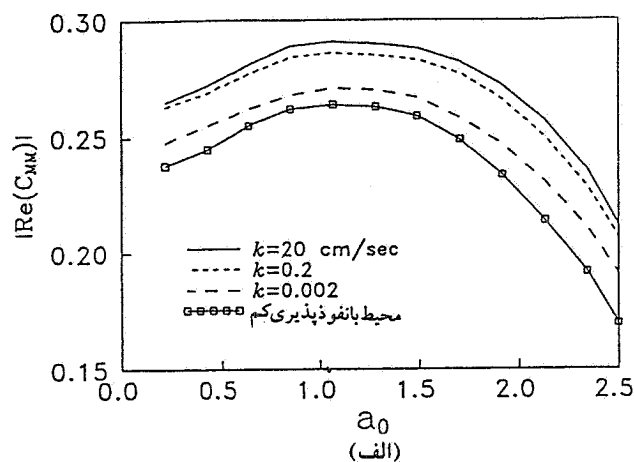
شکل ۶ - توابع نرمی افقی دینامیکی پی صلب مربعی: (الف) جزء حقیقی، (ب) جزء موهومی، (ج) مقایسه محیط اشباع زهکشی شده با نفوذپذیری بالا با یک محیط خشک تکفاز

شکل ۵ - توابع نرمی قائم دینامیکی پی صلب مربعی: (الف) جزء حقیقی، (ب) جزء موهومی، (ج) مقایسه محیط اشباع زهکشی شده با نفوذپذیری بالا با یک محیط خشک تکفاز

نرمی پی افزایش می‌یابد. همچنین رفتار یک محیط متخلخل اشباع زهکشی شده (با نفوذپذیری بالا) را می‌توان معادل با یک محیط دینامیکی تکفاز در نظر گرفت. به علاوه دیده شد که رفتار یک محیط اشباع نفوذ ناپذیر (یا نفوذ پذیری کم) قابل انطباق بر یک محیط تکفاز با پارمترهای الاستیسیته معادل است که توسط کی‌نیا و بانرجی [۲۶] به دست آمده‌اند.

#### قدردانی

این مقاله حاصل طرح تحقیقاتی بوده که از محل اعتبارات شورای پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان پشتیبانی گردیده است. در این رابطه نویسندگان از حمایت دانشگاه صنعتی اصفهان تشکر می‌نمایند.



شکل ۷ - توابع نرمی چرخشی دینامیکی پی صلب مربعی: (الف) جزء حقیقی، (ب) جزء موهومی، (ج) مقایسه محیط اشباع زهکشی شده با نفوذپذیری بالا با یک محیط خشک تکفاز

1. Kupradze, V.D., *Three Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Thermoelasticity*, Amsterdam, North-Holland, 1979.
2. Biot, M.A., "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid," *J. of Acous. Soc. of America*, Vol. 28, No. 2, pp. 168-191, 1956.
3. Biot, M.A., "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media," *J. Appl. Phys.*, Vol. 33, No. 4, pp. 1482-1498, 1962.
4. Truesdell, C., and Toupin, R.A., "The Classical Field Theories," in *Handbuch der Physik* (Edited by S. Flugge), Vol. 3, Berlin, Springer-Verlag, 1960.
5. Bowen, R.M., "Theory of Mixtures," in *Continuum Physics* (Edited by A.C. Eringen), New York: Academic Press, 1976.
6. Garg, S.K., "Wave Propagation Effect in a Fluid-Saturated Porous Solid," *J. Geophys. Res.*, Vol. 76, pp. 7947-7962, 1971.
7. Prevost, J.H., "Mechanics of Continuous Porous Media," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 18, pp. 787-800, 1980.
8. Bowen, R.M., "Compressional Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 20, pp. 697-735, 1982.
9. Auriault, J.L., "Dynamic Behavior of a Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid," *Int. J. of Eng. Sci.*, Vol. 18, pp. 775-785, 1980.
10. Burridge, R., and Vargas, C.A., "The Fundamental Solution in Dynamic Poroelasticity," *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, Vol. 58, pp. 61-90, 1979.
11. Simon, B.R., Wu, J.S.S., Zienkiewicz, O.C., and Paul, D.K., "Evaluation of u-w and u- $\pi$  Finite Element Methods for the Dynamic Response of Saturated Porous Media Using One-Dimensional Model," *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 10, pp. 461-482, 1986.
12. Bonnet, G., "Basic Singular Solutions for a Poroelastic Medium in the Dynamic Range," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 82, pp. 1758-1762, 1987.
13. Boutin, C., Bonnet, G., and Bard, P.Y., "Green Functions and Associated Sources in Infinite and Stratified Poroelastic Media," *J. R. Astr. Soc.*, Vol. 90, pp. 521-550, 1987.
14. Kaynia, A.M., "Transient Green's Functions of Fluid-Saturated Porous Media," *Computers and Structures*, Vol. 44, pp. 19-27, 1992.
15. Zienkiewicz, O.C., and Shiomi, T., "Dynamic Behavior of Saturated Porous Media: the Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution," *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 8, pp. 71-96, 1984.
16. Zienkiewicz, O. C., Chan, A.H., Pastor, M., and Shiomi, T., "Computational Approach to Soil Dynamics," in *Soil Dynamics and Liquefaction* (Edited by: A.S. Cakmak), *Developments in Geotechnical Engineering*, Vol. 42, Elsevier, 1987.
17. Bougacha, S. and Tassoulas, J.L., "Effects of Sedimentary Material on the Response of Concrete Gravity Dams," *Earthq. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 20, pp. 849-858, 1991.
18. Hirai, H., "Analysis of Rayleigh Waves in Saturated Porous Elastic Media by Finite Element Method," *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, Vol. 11, pp. 311-326, 1992.

19. Cheng, A.H.D., Badmus, T., and Beskos, D.E., "Integral Equation for Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution," *J. Eng. Mech.*, 117, pp. 1136-1157, 1991.
20. Kaynia, A.M., and Khoei, A.R., "Impedance Functions of Strip Foundations on Fluid-Saturated Porous Media," *Proc. Tenth World Cong. Earthquake Eng.*, Madrid, Spain, Vol. 3, pp. 1967-1972, 1992.
21. Gazetas, G., and Petrakis, E., "Offshore Caissons on Porous Saturated Soil," *Proc. Int. Conf. Recent Adv. Geotech. Eng. Soil Dyn.*, University of Missouri, pp. 381-386, 1987.
22. Halpern, M.C., and Christiano, P., "Response of Poroelastic Half Space to Steady-State Harmonic Surface Traction," *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 10, pp. 609-632, 1986.
- 23- خوثی، امیررضا و کی نیا، امیرمسعود، "کاربرد روش المان مرزی در حل دو بعدی مسائل دینامیکی محیطهای متخلخل اشباع،" نشریه استقلال، شماره ۱۴، ص ۸۱-۱۱۶، ۱۳۷۲.
24. Suh, I.G., and Tosaka, N., "Application of the Boundary Element Method to Three Dimensional Linear Coupled Thermoelasticity Problems," *Proc. 38th Japan Cong. Applied Mech.*, pp. 169-175, 1988.
25. Hammer, P.C., Marlowe, O.P., and Stroud, A.H., "Numerical Integration over Simplexes and Cones," *Math. Tables Aids Comp.*, 10, pp. 130-137, 1956.
26. Kaynia, A.M., and Banerjee, P.K., "Fundamental Solutions of Biot's Equation of Dynamic Poroelasticity," *Int. J. of Eng. Science*, Vol. 31, No. 5, 1993.
27. Ahmad, S., and Manolis, G.D., "Dynamic Analysis of 3-D Structures by a Transformed Boundary Element Method," *Compu., Mech.*, Vol. 2, pp. 185-196, 1987.