# یک سطح تسلیم پنج پارامتری

محمدرضایی پژند* و هادی اصغری**
گروه عمران، دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد
(دریافت مقاله: ۱۳۷۴/۹/۲۰ - دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۷۵/۱/۲۰)

**چکیده** – *در بارهٔ رفتار کشسان[1] - مومسان[2] سازه‌های تنش مستوی[3] سخن به میان می‌آید. در این راستا، یک سطح تسلیم[4] پنج پارامتری[5] ارائه خواهد شد. معیار مزبور با قانون جریان[6] وابسته کار می‌کند. قانون سخت شوندگی ترکیبی[7] که از ترکیب قوانین سخت شوندگی همگن[8] و پویا[9] تشکیل می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. رابطه‌های سطح تسلیم پیشنهادی نوشته شده و بر آن اساس، برنامهٔ رایانه‌ای[10] برای تحلیل غیر خطی[11] مواد مهیا شده است. در پایان کار، تجربه های عددی حاصل از رابطه‌های پیشنهادی نیز به نظر خوانندگان می‌رسد.*

# A Five - Parameter Yield Surface

**M. Rezaiee - Pajand and H. Asghari**
Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

**ABSTRACT-** *This paper is on the elasto-plastic analysis of plane stress problems. A five-parameter yield surface is presented. This yield criterion uses associate flow along with mixed hardening rule. The analytical formulations are written and related computer program for non-linear analysis is prepared. Finally, based on the formulations, numerical examples are solved.*

## ۱- مقدمه

درتاریخ علم، نظریه[12] مومسانی از سال ۱۸۶۴ آغاز می‌شود که ترسکا نتایج تحقیقات و کارهای خودش را دربارهٔ سنبه زنی و حدیده کاری منتشر کرد. وی در آن زمان با آزمایشهای فراوانی که انجام داد، مبنای تسلیم را به صورت رابطه‌ای ارائه ساخت که بیانگر بسیاری از حقایق بود. از آن تاریخ تاکنون، کوششهای گسترده‌ای توسط بسیاری از دانشمندان انجام شده و زمینه‌های فراوان دیگری با سرعت زیادی در حال پیشرفت است. باید افزود که سطح تسلیم مزبور مستقل از فشار آب ایستا[13] (ثابت) بوده است و در فضای تنشهای اصلی، بایک منشور شش ضلعی منتظم نامحدود مشخص می‌شود [۱]. به دنبال آن، معیار تنش کششی بیشینهٔ رانکین در سال ۱۸۷۶ ارائه شد. باید دانست که امروزه این معیار برای تحلیل بتن به این دلیل که نوع شکست آن به‌طور معمول کششی و یا فشاری است، به کار گرفته می‌شود [۲]. یکی از ساده‌ترین سطحهای تسلیم را

* دانشیار   ** دانشجوی کارشناسی ارشد

### فهرست علائم

| | |
|---|---|
| $P$ | بار |
| $P_u$ | بار نهایی |
| $F$ | تابع تسلیم |
| $\{\sigma\}$ | تنش |
| $H'$ | شیب نمودار تنش وکرنش یک محوری |
| $\sigma_1$ و $\sigma_2$ | تنشهای اصلی |
| $\alpha$ | عامل سخت شوندگی پویا |
| $m$ | عامل سخت شوندگی ترکیبی |
| $\kappa$ | عامل سخت شوندگی همگن |
| $a_1$ تا $a_5$ | عاملهای معیار ترسکاگونه |
| $E$ | عامل کشسانی |
| $\{\varepsilon\}$ | کرنش |
| $[S]_{ep}$ | ماتریس سختی کشسان - مومسان |
| $[B]$ | ماتریس کرنش |
| $[D]_e$ | ماتریس کشسان |
| $[D]_{ep}$ | ماتریس کشسان - مومسان |
| $\nu$ | نسبت پواسان |

فون میسز در سال ۱۹۱۳ ارائه کرد که در آن تنش برشی هشت وجهی مسبب اصلی تسلیم مواد است. این معیار، افزون بر اینکه ساده است، دارای منحنی هموار نیز هست. در پژوهشی دیگر، یک معیار تقریبی صاف برای سطح تسلیم مور ـ کولمب در سال ۱۹۵۱ توسط دراکر و پراگر پیشنهاد شده است [۳].

برای اولین بار در سال ۱۹۶۸ میلادی، اناند با به‌کارگیری روش اجزای محدود به همراه جزء مثلثی کرنش ثابت (CST) از معیار ترسکا استفاده کرد [۴ و ۵]. او مسئلهٔ تنش در صفحه را با به کارگیری نظریه مومسان نموی، تجزیه و تحلیل کرد. روش حل مزبور،فقط توانایی تحلیل مواد با رفتار کشسان خطی و مومسان کامل را دارا بود. در سال ۱۹۶۹، زینکویچ ماتریسهای کشسان ـ مومسان[۱۴] را برای وضعیت تسلیم فون میسز ارائه داد [۶]. در سال ۱۹۷۰، آرمن تحلیل مسائل کشسان ـ مومسان دو بعدی زیر بار چرخه‌ای را با استفاده از سطح تسلیم فون میسز بررسی و مطالعه کرد. وی از قانون سخت شوندگی پویای پراگر که توسط زیگلر تعمیم یافته بود، استفاده کرد [۷].

در سال ۱۹۷۰، لوی کاری مشابه اناند را به انجام رسانید. در پژوهش مزبور، نمو کرنش مومسان در گوشه‌های سطح تسلیم تعریف نشده بود و مشکل می‌آفرید[۸]. برای حل این مشکل، گوشه‌های سطح تسلیم به وسیله نایاک و زینکویچ، در سال ۱۹۷۲، گرد شد و تحلیل تقریبی را ارائه کردند [۹]. همگام با دیگر پژوهشگران، ویلام و وارنک در سال ۱۹۷۵ یک سطح شکست سه پارامتری برای بتن در کشش و زیر فشار کم پیشنهاد کردند [۱۰]. همزمان با آن، چن و چن سطح تسلیمی با یک محور تقارن را در سال ۱۹۷۵ ارائه کردند. باید دانست، سطح تسلیم مزبور از دو تابع تشکیل شده که یکی از آنها برای ناحیه فشاری و دیگری برای دو ناحیه کششی و کششی – فشاری تعریف شده است [۱۱]. در همان سال، لید و دانکن سطح تسلیمی یک پارامتری برای خاکهای غیر چسبنده پیشنهاد کردند. معیار تسلیم[15] مزبور ساده و صاف بوده و فقط برای خاکهای غیر چسبنده اعتبار دارد [۳]. آتوسن معیار تسلیم چهار پارامتری برای بتن را در سال ۱۹۷۷ ارائه کرد. سطح تسلیم مزبور در برش طولی به صورت منحنی بوده و مقاطع عرضی غیره دایره‌ای را در بردارد [۱۲]. در این راستا، در همان سال، بایوکزترک از نظریه تعمیم یافتهٔ مور ـ کولمب برای پیش‌بینی تسلیم و شکست بتن هنگامی که زیر ترکیب تنشها قرار می‌گیرد استفاده کرد [۷].

همگام با این پژوهشگران، اناند و وایزگربر در سال ۱۹۷۷ مشتق رابطه‌های تنش ـ کرنش مومسان را برای مصالح با سخت شوندگی کرنشی گزارش کردند. آنها از سطح تسلیم ترسکا استفاده کرده و رابطه‌های خود را برای مسائل تنش در صفحه نوشتند [۱۳ و ۱۴]. در سال ۱۹۷۸، اناندبرای تحلیل کشسان ـ مومسان از شبکه بندی جزء مثلثی با کرنش خطی (LST) به چهار زیر جزء، استفاده کرد [۵]. گسترش معیار تسلیم ترسکا، سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع اول، در سال ۱۹۷۹ توسط رضایی پژند انجام گرفت. با معیار مزبور می‌توان افزون بر مواد با مقاومت فشاری[۱۶] و کششی یکسان، موادبا مقاومت فشاری و کششی متفاوت مانند بتن را نیز تحلیل کرد [۱۵]. همچنین، از معیار تسلیم مزبور در تحلیل کشسان ـ مومسان با قانون سخت شوندگی پویا نیز استفاده شده که مناسب بارهای چرخه‌ای است [۱۶ و ۱۷]. باید دانست که الگوی سخت شوندگی پویای این معیار، نخستین بار در سال ۱۹۸۲ ارائه شده است [۱۸].

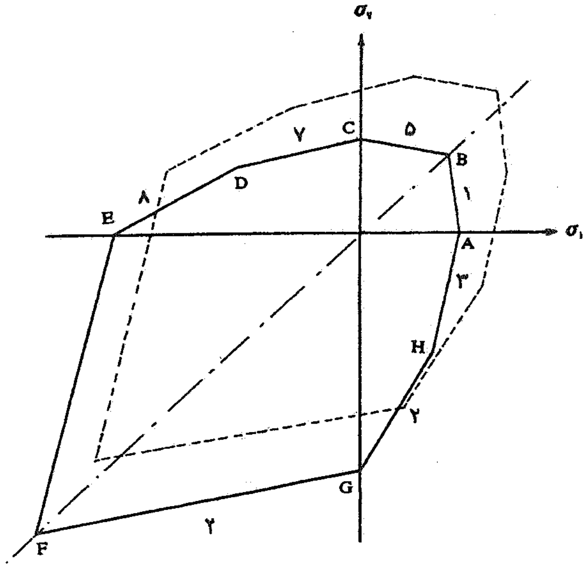
در سال ۱۹۸۱، وایزگربر با تغییراتی که انجام داد، سطح تسلیم

ترسکاگونهٔ نوع اول را برای مواد با مقاومت کششی کم به کار گرفت [۱۹]. در تحلیل مزبور از جزء مثلثی با کرنش ثابت و نیز قانون سخت شوندگی همگن استفاده شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده از تحلیل، وایزگربر یک سطح تسلیم ساده‌ای ارائه کرد، سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع دوم، که می‌توانست مورد استفادهٔ تحلیل غیر خطی بتن قرارگیرد [۲۰]. الصافی سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع اول را در سال ۱۹۸۴ به سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع سوم تغییر داده و آن را مناسب تحلیل مسائل تنش و کرنش مستوی ساخت [۲۱ و ۲۲]. از سوی دیگر، السانوسی سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع دوم را همراه با قانون سخت شوندگی ترکیبی (همگن و پویا) در سال ۱۹۸۷ به کار گرفت [۲۳ و ۲۴].

در سال ۱۹۸۶، چرن سطح تسلیمی برای خاک پیشنهاد کرد. این پژوهشگر الگوی خود را از سطح شکست پنج پارامتری ویلام - وارنک نتیجه گرفت. وی فرض کرد که این معیار بر سطح شکست در مقاومت بیشینهٔ مصالح منطبق شود [۲۵]. در سال ۱۹۸۹، هو و اسکنوبریچ بتن را با استفاده از جریان مومسانی[۱۷] ناپیوسته الگو سازی کردند [۲۶]. در ادامهٔ بحث یک سطح تسلیم جدید همراه با رابطه‌های مربوطه ارائه خواهد شد.

## ۲- سطح تسلیم پیشنهادی

نظر به این که شواهد تجربی نشان دهندهٔ گرایش سطح تسلیم به سوی ترکیبی از قسمتهای خطی است، بنابراین یک سطح تسلیم خطی مناسب می‌تواند به واقعیت نزدیک باشد. لازم است برای دستیابی به پاسخ دقیقتر، از سطح تسلیم با شمار قطعات خطی بیشتر استفاده کرد. از سوی دیگر، سطحهای تسلیم ترسکا، بر خلاف سطحهای تسلیمی مانند فون میسز و چن و پاره‌ای از معیارهای دیگر، در جهت اطمینان رفتار می‌کند. سطح تسلیم پیشنهادی، که سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع چهارم نامیده خواهد شد در ارتباط با نتایج تجربی دارای برآزش بسیار خوبی بوده و در جهت اطمینان نیز عمل می‌کند. خاطر نشان می‌شود که با معیار پیشنهادی می‌توان افزون بر مواد با مقاومت فشاری و کششی یکسان، موادی که دارای مقاومت فشاری و کششی متفاوت مانند بتن هستند را نیز تحلیل کرد. این معیار ترسکاگونه پنج پارامتری است و با یک مجموعه تابعهای هشت گانه تعریف شده است. شکل (۱) سطح تسلیم




**شکل ۱- سطح تسلیم ترسکاگونهٔ نوع چهارم با قانون سخت شوندگی ترکیبی**

ترسکاگونهٔ نوع چهارم و مختصات گوشه‌هایش را در حالت دو بعدی نشان می‌دهد. سطح تسلیم نامبرده در زیر فضای تنشهای اصلی $(\sigma_1 - \sigma_2)$ تعریف شده است. اگر $\sigma(k)$ که خود تابعی از عامل سخت شوندگی همگن k است، تنش تسلیم مواد در آزمایش کششی محوری باشد و عامل $a_3$ نسبت تنش تسلیم در فشار به تنش تسلیم در کشش تعریف شود، تابعهای هشت‌گانهٔ سطح تسلیم به صورت زیر خواهند بود:

| گوشه | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |
|---|---|---|
| A | $\sigma(k)$ | ۰ |
| B | $a_1\sigma(k)$ | $a_1\sigma(k)$ |
| C | ۰ | $\sigma(k)$ |
| D | $-a_2\sigma(k)$ | $a_4\sigma(k)$ |
| E | $-a_3\sigma(k)$ | ۰ |
| F | $-a_5a_3\sigma(k)$ | $-a_5a_3\sigma(k)$ |
| G | ۰ | $-a_3\sigma(k)$ |
| H | $a_4\sigma(k)$ | $-a_2\sigma(k)$ |

$$F^1 = a_1\sigma_1 + (1 - a_1)\sigma_2 - a_1\,\sigma(k) = 0$$

$$F^2 = (a_5 - 1)\sigma_1 - a_5\,\sigma_2 - a_5 a_3\,\sigma(k) = 0$$

$$F^3 = a_2\sigma_1 + (a_4 - 1)\sigma_2 - a_2\,\sigma(k) = 0$$

$$F^4 = (a_3 - a_2)\sigma_1 - a_4\sigma_2 - a_3 a_4\,\sigma(k) = 0$$

$$F^5 = (1 - a_1)\sigma_1 + a_1\sigma_2 - a_1\,\sigma(k) = 0$$

$$F^6 = - a_5\sigma_1 + (a_5 - 1)\sigma_2 - a_5 a_3\,\sigma(k) = 0$$

$$F^7 = (a_4 - 1)\sigma_1 + a_2\sigma_2 - a_2\,\sigma(k) = 0$$

$$F^8 = - a_4\sigma_1 + (a_3 - a_2)\sigma_2 - a_3 a_4\,\sigma(k) = 0 \qquad (1)$$

معیار تسلیم ارائه شده به پنج پارامتر $a_1$ تا $a_5$ نیاز دارد که با آزمایشهای تجربی تعیین می‌شوند. آزمایشهای مورد نظر، کشش یک محوری، فشار یک محوری، کشش دو محوری، فشار دو محوری و کشش و فشار دو محوری هستند. بنابراین، معیار مزبور را می‌توان معیار تسلیم خطی پنج پارامتری با یک محور تقارن خواند.

باید دانست، سطحهای تسلیم ترسکا، ترسکاگونهٔ نوع اول، و ترسکاگونهٔ نوع دوم حالتهای ویژهٔ سطح تسلیم پیشنهادی‌اند. چنانچه $a_1=a_3=a_4=a_5=1$ و $a_2=0$ باشد، معیار پیشنهادی به معیار ترسکا تبدیل می‌شود و اگر $a_1=a_4=a_5=1$ و $a_2=0$ باشد، معیار مزبور به معیار ترسکاگونهٔ نوع اول تغییر می‌یابد. همچنین، با در نظر گرفتن $a_4=1$ , $a_2=0$ معیار یاد شده به معیار ترسکاگونهٔ نوع دوم تبدیل می‌شود. از سطح تسلیم پیشنهادی به همراه قانون سخت شوندگی ترکیبی برای تحلیل مسائل تنش مستوی استفاده شده و نتایج بسیار خوبی نیز در پی داشته است. در ادامه ماتریسهای کشسان - مومسان پهلوها و گوشه‌های سطح تسلیم پیشنهادی برای استفاده در تحلیلهای اجزای محدود بر پا می‌شوند.

## ۳- ماتریس کشسان - مومسان برای پهلوها

مشکل بودن ماهیت تحلیل غیر خطی سازه‌ها، پژوهشگران را بر آن داشته تا از روش اجزای محدود که از قویترین روشهای عددی است استفاده کنند[۲۷]. در این روش، ماتریس سختی کشسان - مومسان مورد نیاز است. همچنان که در رابطهٔ (۲) آمده است، برای به دست آوردن ماتریس سختی کشسان - مومسان $[S]_{ep}$ نیاز به ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}$ و ماتریس تغییر مکان - کرنش $[B]$ خواهد بود:

$$[S]_{ep} = \int_V [B]^T [D]_{ep} [B]\, dv \qquad (2)$$

بنابراین، در اینجا کوشش خواهد شد که به صورت چکیده، چگونگی به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان با قانون سخت شوندگی ترکیبی (همگن و پویا) ارائه شود. سپس، ماتریسهای کشسان - مومسان مبتنی بر تابع تسلیم ترسکاگونه نوع چهارم بر پا می‌شوند.

## ۴- ماتریس عمومی کشسان - مومسان برای پهلوها

رابطهٔ عمومی سطح تسلیم برای قانون سخت شوندگی ترکیبی می‌تواند مانند رابطهٔ (۳) نوشته شود.همچنین، جزء کرنش کل قابل تجزیه به کرنشهای کشسان و مومسان است. رابطهٔ (۴) تجزیه مزبور را نشان می‌دهد.در نظریهٔ کشسانی، رابطهٔ (۵) نمو کرنشهای کشسان را با نمو تنشها مرتبط می‌سازد. باید دانست که در رابطهٔ یاد شده، ماتریس $[D]_e$ شامل مشخصات کشسانی مواد است و به نام ماتریس کشسان معروف است. از سوی دیگر، قانون جریان وابسته، نمو کرنش مومسانی را به مشتق تابع تسلیم[۱۸] به صورت رابطهٔ (۶) ارتباط می‌دهد:

$$F = F\left[(\sigma - \alpha)\,,\, \sigma(\kappa)\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \qquad (4)$$

$$\{d\sigma\} = [D]_e \{d\varepsilon^e\} \qquad (5)$$

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \qquad (6)$$

عامل $\lambda$ یک ضریب ثابت است که در ادامه تعیین می‌شود. باید دانست که اندازه و موقعیت تابع تسلیم در دوران بارگذاری تغییر می‌کند. میزان انتقال سطح تسلیم با قانون سخت شوندگی پویا در

فضای تنش به وسیله پراگر به صورت رابطهٔ (۷) فرض شده است.در رابطهٔ مزبور، H یک ثابت است. در حالت سخت شوندگی ترکیبی (همگن و پویا)، انتقال سطح تسلیم باید در نظریه منظور شود. بنابراین، رابطهٔ (۷) برای حالت سخت شوندگی ترکیبی به رابطهٔ (۸) تبدیل می‌شود:

$$d\alpha = H\, d\varepsilon^{p(\kappa)} \qquad \text{(۷)}$$

$$d\alpha = H\,(1-m)d\varepsilon^{p} \qquad \text{(۸)}$$

دانستنی است که برای سخت شوندگی همگن $m=1$ و برای سخت شوندگی پویا $m=0$ است. ضریب سخت شوندگی ترکیبی بایستی در محدودهٔ ($0 \leq m \leq 1$) قرار گیرد.اگر i و k نشان دهندهٔ سخت شوندگی همگن و پویا باشند، آنگاه، نمو کرنش مومسان به نمو کرنش همگن و نمو کرنش پویا به صورت زیر وابسته می‌شود:

$$d\varepsilon^{p} = d\varepsilon^{p(i)} + d\varepsilon^{p(\kappa)} \qquad \text{(۹)}$$

$$d\varepsilon^{p(i)} = m\,d\varepsilon^{p}$$

$$d\varepsilon^{p(\kappa)} = (1-m)d\varepsilon^{p} \qquad \text{(۱۰)}$$

بر طبق تغییرات زیگلر[19]، قانون سخت شوندگی پویا دو شرط دیگر، در بارهٔ قانون پراگر ارائه می‌دهد. یاداوری می‌شود که قانون سخت شوندگی پراگر نمو انتقال سطح تسلیم را متناسب با کرنش مومسان می‌داند. در صورتی که فرضیه زیگلر، نمو انتقال سطح مزبور را متناسب با تنش کل می‌پندارد. دو شرط مزبور با رابطه‌های زیر ارائه می‌شوند. اگر H عامل سخت شوندگی مصالح و $d\eta$ یک ثابت محاسباتی باشد، می‌توان نوشت:

$$d\alpha = (\sigma-\alpha)d\eta \qquad \text{(۱۱)}$$

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T} \{d\sigma - d\alpha\} = 0 \qquad \text{(۱۲)}$$

اکنون ثابت محاسباتی $d\eta$ باید تعیین شود. با استفاده از رابطه‌های (۸) و (۱۲) و همچنین با پیش ضرب رابطهٔ (۱۱) در $\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}$ ، رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T} \{d\sigma - H(1-m)d\varepsilon^{p}\} = 0 \qquad \text{(۱۳)}$$

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T} \{d\alpha\} = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T} \{(\sigma-\alpha)\}d\eta \qquad \text{(۱۴)}$$

با گرفتن مشتق کلی از تابع سطح یم ، رابطهٔ (۳)، وانجام عملیات ریاضی و سپس با جانشینی $\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\alpha\}$ از رابطهٔ (۱۵) در رابطهٔ (۱۴) مقدار $d\eta$ در دسترس قرار می‌گیرد. عامل‌مزبور بر حسب $\eta_1$ و $\eta_2$ داده شده است. در ادامه رابطه‌های یاد شده با توجه به جملهٔ $(\sigma-\alpha)$ در تابع F و $\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}=-\{\frac{\partial F}{\partial \alpha}\}$ و به‌کارگیری مشتق زنجیری به صورت زیر پیدا می‌شوند:

$$dF = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\sigma\} - \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa = 0 \qquad \text{(۱۵)}$$

$$d\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

$$\eta_1 = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa$$

$$\eta_2 = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{\sigma-\alpha\} \qquad \text{(۱۶)}$$

هدف به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}$ است. با پیش ضرب رابطهٔ (۴) در $[D]_e$ و استفاده از رابطهٔ (۵) و سرانجام با پیش ضرب رابطهٔ (۱۷) در $\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}$ رابطه‌های زیر برقرارند:

$$[D]_e\{d\varepsilon\} = \{d\sigma\} + \lambda[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad \text{(۱۷)}$$

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}[D]_e\{d\varepsilon\} = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\sigma\} \qquad \text{(۱۸)}$$

$$+\lambda\,\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}$$

رابطهٔ (۱۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T\{d\sigma\} = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T\{d\alpha\} - \frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa \qquad (۱۹)$$

با جانشینی رابطهٔ اخیر در رابطهٔ (۱۸)، مقدار $\lambda[M]$ پیدا می‌شود. مقدار مورد بحث، پس از فشرده سازی به صورت رابطهٔ (۲۲) نوشته می‌شود. به دنبال حذف $\lambda$، مقدار $[M]$ به دست می‌آید. در رابطه‌های ارائه شده زیر، منظور از بالانویس c، i و $\kappa$ به ترتیب: سخت شوندگی ترکیبی، سخت شوندگی همگن و سخت شوندگی پویاست. رابطه‌های یاد شده به قرار زیرند:

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T[D]_e\{d\varepsilon\} = \lambda[M] \qquad (۲۰)$$

$$\lambda[M] = \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T\{d\alpha\} - \frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa$$

$$+\lambda\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۲۱)$$

$$\lambda[M] = \lambda A^{(c)} + \lambda\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۲۲)$$

$$[M] = A^{(c)} + \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۲۳)$$

$$A^{(c)} = A^{(i)} - A^{(\kappa)} \qquad (۲۴)$$

$$A^{(i)} = -\frac{۱}{\lambda}\{\frac{\partial F}{\partial \kappa}\}d\kappa \qquad (۲۵)$$

$$A^{(\kappa)} = -\frac{۱}{\lambda}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T\{d\alpha\} \qquad (۲۶)$$

همچنین از رابطهٔ (۱۷) مقدار $\{d\sigma\}$ حساب می‌شود. از سوی دیگر، با محاسبهٔ $\lambda$ از رابطهٔ (۲۰) و جاگذاری در رابطهٔ (۲۷)، می‌توان نتیجه را پس از فشرده سازی با رابطهٔ (۲۸) نمایش داد. باید دانست ماتریس $[D]_{ep}$ همان ماتریس کشسان - مومسان است:

$$\{d\sigma\} = [D]_e\{d\varepsilon\} - \lambda[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۲۷)$$

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep}\{d\varepsilon\} \qquad (۲۸)$$

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}[M]^{-۱}$$

$$\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^T[D]_e \qquad (۲۹)$$

همان گونه که در رابطهٔ (۲۹) دیده می‌شود، ماتریس کشسان - مومسان برابر است با ماتریس کشسان منهای مقداری که مربوط به اثر مومسانی است. عامل سخت شوندگی، در رابطهٔ (۳)، به شکل ساده و برداری زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa = \int \sigma\, d\varepsilon^{p(i)} \qquad (۳۰)$$

$$\kappa = \int \{\sigma\}^T\{d\varepsilon^{p(i)}\} \qquad (۳۱)$$

بااستفاده از رابطه‌های (۶) و (۱۰) وجاگذاری آنها در رابطهٔ (۳۱) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d\kappa = \lambda m\{\sigma\}^T\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۳۲)$$

مقدار $\frac{\partial F}{\partial \kappa}$ به صورت رابطهٔ (۳۳) فرض می‌شود. با توجه به رابطهٔ مزبور، $\gamma$ برای سطحهای تسلیم خطی مختلف می‌تواند محاسبه شود. به عنوان نمونه، برای سطح تسلیم ترسکا $\gamma = ۱$ است. برای به دست آوردن ماتریس کشسان - مومسان، بایستی مقادیر $A^{(c)}$، $[M]$، $\lambda$، $d\kappa$، $d\eta$ و ثابت H معین شوند. محاسبهٔ $A^{(c)}$ نیاز به محاسبه $A^{(i)}$ و $A^{(K)}$ دارد. با توجه به رابطهٔ (۲۴) و جانشینی رابطهٔ (۳۲) در رابطهٔ (۲۵) رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -\gamma\,\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} \qquad (۳۳)$$

$$A^{(i)} = -m\{\sigma\}^T\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}\{\frac{\partial F}{\partial \kappa}\} \qquad (۳۴)$$

$$A^{(i)} = -m\gamma\{\sigma\}^T\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} \qquad (۳۵)$$

در اجـرا، نسبت تـجربی تـنش وکـرنش از مـنحنی آزمـایش یک مـحوری کششـی کـه حـالت خـاصی از رابـطهٔ (۳) است، برای محاسبات کار مومسان معادل استفاده می‌شود. در این حالت و در نـبودن نـمو کشسـانی، $d\kappa$ بـه صـورت $d\kappa=\sigma(\kappa)d\varepsilon^{p}$ ارائـه مـی‌شود. در ضـمن $\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa}$ تـوسط رابـطهٔ (۳۶) حساب می‌شود. در رابطهٔ به دست آمده $\bar{H}=\frac{d\sigma(\kappa)}{d\varepsilon^{p(1)}}$ همان شیب منحنی تنش - کرنش یک محوری کششی است. با قرار دادن رابطهٔ (۳۷) در رابطهٔ (۳۵) مقدار $A^{(i)}$، و با گذاشتن رابـطهٔ (۸) در رابطهٔ (۲۶)، $A^{(\kappa)}$ پیدا می‌شود:

$$\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\sigma(\kappa)}\frac{d\sigma(\kappa)}{d\varepsilon^{p(1)}} \qquad (۳۶)$$

$$\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa} = \frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)} \qquad (۳۷)$$

$$A^{(i)} = -m\gamma\frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)}\{\sigma\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۳۸)$$

$$A^{(\kappa)} = -H(1-m)\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۳۹)$$

رابطهٔ (۲۴)، مقدار $A^{(c)}$ را به صورت رابـطهٔ (۴۰) در اخـتیار می‌گذارد که با جـانشینی آن در رابـطهٔ (۲۳) مـقدار $[M]$ بـه دست می‌آید. باید دانست که برای $m=1$ یا $m=0$، $[M]$ به ترتیب برای حالات سـخت شـوندگی هـمگن یـا سـخت شـوندگی پـویا ارائـه می‌شود. نسبت تـناسب $\lambda$، از رابـطهٔ (۲۰)، و $d\eta$ از رابـطهٔ (۱۶) به دست می‌آید:

$$A^{(c)} = H(1-m)\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} + m\gamma\frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)}\{\sigma\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۴۰)$$

$$[M] = H(1-m)\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} + m\gamma\frac{\bar{H}}{\sigma(\kappa)}\{\sigma\}^{T}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} + \{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}[D]_e\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\} \qquad (۴۱)$$

$$\lambda = [M]^{-1}\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\}^{T}[D]_e\{d\varepsilon\} \qquad (۴۲)$$

$\{d\varepsilon\}$ را از رابطهٔ (۲۸) می‌توان یافت. هنگامی کـه $\lambda$ مـحاسبه شد، $d\kappa$ از رابطهٔ (۳۲) به دست خواهد آمد. معادله های مشخصهٔ چهار پهلو و پنج گوشه سطح تسلیم خطی پیشنهادی و ثابت H که مورد نیاز تحلیل کشسان - مومسان است، در ادامه ارائه خواهد شد.

## ۵- ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۳

در اینجا، برای نمونه، ماتریس کشسان - مومسان دو پـهلو بـا جزئیات نوشته می‌شود. سایر مـاتریسهای مـورد نیاز تـحلیل، در پیوست درج خواهند شد. اگر $\theta$ زاویـه بـین مـحورهای اصـلی و محورهای کلی فرض شود، نخست، تـابع تسـلیم پـهلوی AH بـر حسب تنشها در دسـتگاه مـختصات دکـارتی ($\sigma_x$، $\sigma_y$ و $\sigma_{xy}$) بـر حسب کسینوس و سینوس زاویه $\theta$ (C و S) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$F^{(3)} = [a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]\sigma_x + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\sigma_y + 2(1 + a_2 - a_4)CS\sigma_{xy} - a_2\sigma(\kappa) = 0 \qquad (۴۳)$$

برای دستیابی به ماتریس کشسان - مومسان، مقدار $M^{(3)}$ مورد نیاز است. باید افزود، بـا اسـتفاده از رابـطهٔ (۴۱) بـه مـقدار $M^{(3)}$ می‌توان رسید:

$$[M^{(3)}] = H_3(1 - m)[2C^2S^2(a_2 - a_4 - 1)^2 + a_2 + (a_4 - 1)^2] + \frac{E}{(1 - \nu^2)}[a_2^2 + 2\nu a_2(a_4 - 1) + (a_4 - 1)^2] + \bar{H}ma_2^2 \qquad (۴۴)$$

ماتریس کشسان - مومسان با قرار دادن $M^{(3)}$ در رابطهٔ (۲۹) به دست می‌آید. در ادامه، ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۳ همراه با ضریبها و درایه‌های آن درج می‌شود:

$$[D]_{ep}^{(3)} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} - G_3 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{sym.} & & d_{33} \end{bmatrix}\right] \qquad (۴۵)$$

$$G_3 = \frac{E}{M^{(3)}(1-\nu^2)}$$

$$d_{11} = \{[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\}^2$$

$$d_{12} = \nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]^2 + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]^2 + (1 + \nu^2)[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2][a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]$$

$$d_{13} = (1 - \nu)[(1 + a_2 - a_4)CS]\{[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\}$$

$$d_{22} = \{\nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\}^2$$

$$d_{23} = (1 - \nu)[(1 + a_2 - a_4)CS]\{\nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\}$$

$$d_{33} = [(1-\nu)(1 + a_2 - a_4)CS]^2 \qquad (۴۶)$$

ثابت $d\eta$ برای پهلوی ۳ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$d\eta = \frac{\eta_1^{(3)}}{\eta_2^{(3)}} \qquad (۴۷)$$

$$\eta_1^{(3)} = \{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T\{d\sigma\} + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \kappa}\, d\kappa \qquad (۴۸)$$

$$\eta_2^{(3)} = \{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T\{\sigma - \alpha\} \qquad (۴۹)$$

پس از محاسبهٔ مقادیر سمت راست رابطه‌های (۴۸) و (۴۹)، و جاگذاری آنها، نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$\eta_1^{(3)} = [a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]d\sigma_x + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]d\sigma_y + [2(1 + a_2 - a_4)CS]d\sigma_{xy} - \bar{H}ma_2^2\lambda^{(3)} \qquad (۵۰)$$

$$\eta_2^{(3)} = [a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2](\sigma_x - \alpha_x) + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2](\sigma_y - \alpha_y) + [2(1 + a_2 - a_4)CS](\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \qquad (۵۱)$$

از سوی دیگر، $\lambda^{(3)}$ را می‌توان از رابطهٔ (۴۲) محاسبه کرد. برای سادگی کار، حاصل‌ضرب $\{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T[D]_e$ به صورت ماتریس $\frac{E}{(1-\nu^2)}[S^{(3)}]$ نمایش داده شده که در ادامه می‌آید:

$$\lambda^{(3)} = [M^{(3)}]^{-1}\{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T[D]_e\{d\varepsilon\} \qquad (۵۲)$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{E}{(1-\nu^2)M^{(3)}}[S^{(3)}]\{d\varepsilon\} \qquad (۵۳)$$

درایه‌های ماتریس $[S^{(3)}]$ به صورت زیرند:

$$[S^{(3)}] = [\, S_1 \quad S_2 \quad S_3 \,]$$

$$S_1 = [a_2 + \nu(a_4 - 1)]C^2 + [(a_4 - 1) + \nu a_2]S^2 \qquad (۵۴)$$

$$S_2 = [\nu a_2 + (a_4 - 1)]C^2 + [\nu(a_4 - 1) + a_2]S^2 \qquad (۵۵)$$

$$S_3 = (1 - \nu)(1 + a_2 - a_4)CS \qquad (۵۶)$$

ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}$ بستگی به پارامتر سخت شوندگی H دارد. از این رو، باید مقدار ثابت H محاسبه شود. با به کارگیری همزمان سه جزء تنش $\sigma_x$، $\sigma_y$ و $\sigma_{xy}$، H تعیین می‌شود. برای هر جزء تنش، یک پارامتر سخت شوندگی تعریف می‌شود. به سخن دیگر، $H_x=\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x^p}$، $H_y=\frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_y^p}$، $H_{xy}=\frac{d\sigma_{xy}}{d\varepsilon_{xy}^p}$ و $\bar{H}=\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}$ فرض شده و با توجه به حالت تنش یک محوری شرایط زیر به دست می‌آیند:

۱- در حالت $d\sigma_y=d\sigma_{xy}=0$ ، $H_x=A_1\bar{H}_x$ می‌شود.

۲- در حالت $d\sigma_x=d\sigma_{xy}=0$ ، $H_y=A_2\bar{H}_y$ می‌شود.

۳- در حالت $d\sigma_x=d\sigma_y=0$ ، $H_{xy}=A_3\bar{H}_{xy}$ می‌شود.

در رابطه‌های درج شده، $A_i$ یک ثابت است. با فرض یک مقدار میانگین برای H، می‌توان آن را به صورت زیر حساب کرد:

$$H = \frac{H_x + H_y + H_{xy}}{3} \qquad (۵۷)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_x = \bar{H}_y = \bar{H}_{xy} \qquad (۵۸)$$

بنابراین پارامتر سخت شوندگی برای پهلوی ۳ به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$H_3 = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)\ \bar{H}}{3} \qquad (۵۹)$$

از سوی دیگر، محاسبهٔ $A_i$ برای پهلوی ۳ مقدار $H_3$ را به دست می‌دهد:

$$H_3 = \frac{\bar{H}}{3} \qquad (۶۰)$$

و به صورت همانندی $H_1=H_2=H_3=H_4=\frac{\bar{H}}{3}$ حساب می‌شوند.

## ۶- ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۴

اینک به ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۴ از سطح تسلیم جدید پرداخته می‌شود. برای این کار، تابع تسلیم پهلوی GH بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$F^{(4)} = [(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]\sigma_x + [(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]\sigma_y + [2(a_3 - a_2 + a_4)CS]\sigma_{xy} - a_3a_4\sigma(\kappa) = 0 \qquad (۶۱)$$

اکنون برای محاسبهٔ $[M^{(4)}]$ می‌توان از رابطه‌های (۴۰) و (۴۱) سود جست:

$$[M^{(4)}] = H_4(1 - m)[2C^2S^2(a_2 - a_3 - a_4)^2 + a_4^2 + (a_3 - a_2)^2] + \frac{E}{(1-\nu^2)}[(a_3 - a_2)(a_3 - a_2 - 2\nu a_4) + a_4^2] + \bar{H}ma_3^2a_4^2 \qquad (۶۲)$$

با در دست داشتن $[M^{(4)}]$، ثابت $\lambda^{(4)}$ به کمک رابطهٔ (۴۲) به دست می‌آید:

$$\lambda^{(4)} = \frac{E}{(1-\nu^2)M^{(4)}}[S^{(4)}]\{d\varepsilon\} \qquad (۶۳)$$

اینک ماتریس $[S^{(4)}]$ بر حسب پارامترهای معلوم نوشته خواهد شد:

$$[S^{(4)}] = [\ S_1 \quad S_2 \quad S_3\ ]$$

$$S_1 = [(a_3 - a_2) - \nu a_4]C^2 + [\nu(a_3 - a_2) - a_4]S^2$$

$$S_2 = [\nu(a_3 - a_2) - a_4]C^2 + [(a_3 - a_2) - \nu a_4]S^2$$

$$S_3 = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS \qquad (۶۴)$$

مقادیر $\eta_1^{(4)}$ و $\eta_2^{(4)}$ به صورت زیرند:

$$\eta_{۱}^{(۴)} = [(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}]\, d\sigma_{x} + [(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}]\, d\sigma_{y} + [۲(a_{۳} - a_{۲} + a_{۴})CS]\, d\sigma_{xy} - \overline{H} m a_{۳}^{۲} a_{۴}^{۲} \lambda^{(۴)} \qquad (۶۵)$$

$$\eta_{۲}^{(۴)} = [(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}](\sigma_{x} - \alpha_{x}) + [(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}](\sigma_{y} - \alpha_{y}) + ۲(a_{۳} - a_{۲} + a_{۴}) CS(\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \qquad (۶۶)$$

سرانجام، درایه‌های ماتریس سختی کشسان – مومسان را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$G_{۴} = \frac{E}{M^{(۴)}(۱ - \nu^{۲})}$$

$$d_{۱۱} = \{[(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}] + \nu[(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}]\}^{۲}$$

$$d_{۱۲} = d_{۲۱} = \{[(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}] + \nu[(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}]\}\{\nu[(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}] + [(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}]\}$$

$$d_{۱۳} = d_{۳۱} = (۱-\nu)(a_{۳} - a_{۲} + a_{۴})CS\{[(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}] + \nu[(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}]\}$$

$$d_{۲۲} = \{[(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}] + \nu[(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}]\}^{۲}$$

$$d_{۲۳} = d_{۳۲} = (۱-\nu)(a_{۳} - a_{۲} + a_{۴})CS\{\nu[(a_{۳} - a_{۲})C^{۲} - a_{۴}S^{۲}] + [(a_{۳} - a_{۲})S^{۲} - a_{۴}C^{۲}]\}$$

$$d_{۳۳} = [(۱-\nu)(a_{۳} - a_{۲} + a_{۴})CS]^{۲} \qquad (۶۷)$$

باید دانست، نمو تنش تسلیم که عامل گسترش همگن سطح تسلیم است را نیز می‌توان به صورت زیر پیدا کرد:

$$d\sigma(\kappa) = \overline{H} m \{\frac{\partial F^{(۴)}}{\partial \sigma}\}\{\lambda^{(۴)}\} \qquad (۶۸)$$

### ۷- ماتریس عمومی کشسان – مومسان برای گوشه‌ها

در مورد گوشه‌ها نیز از روشی مشابه پهلوها استفاده می‌شود. تابع تسلیم برای گوشه j شامل تابعهای تسلیم پهلوهای مجاور m و n است. این تابعها و مشتقهای کلی آنها به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$F^{n}\,[(\sigma - \alpha)\,,\, \sigma(\kappa)] = ۰ \qquad (۶۹)$$

$$F^{m}\,[(\sigma - \alpha)\,,\, \sigma(\kappa)] = ۰ \qquad (۷۰)$$

$$\{\frac{\partial F^{n}}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\sigma\} - \{\frac{\partial F^{n}}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\alpha\} + \{\frac{\partial F^{n}}{\partial \kappa}\}d\kappa = ۰ \qquad (۷۱)$$

$$\{\frac{\partial F^{m}}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\sigma\} - \{\frac{\partial F^{m}}{\partial \sigma}\}^{T}\{d\alpha\} + \{\frac{\partial F^{m}}{\partial \kappa}\}d\kappa = ۰ \qquad (۷۲)$$

اگر رابطه های (۶۹) و (۷۰) در یک بردار ترکیب شوند، می‌توان آن را به صورت رابطهٔ (۷۳) ارائه کرد. همچنین، با فرض اینکه مشتقهای $\{F^{j}\}$ نسبت به تنشها و پارامتر سخت شوندگی به ترتیب با رابطه‌های (۷۴) و (۷۵) نوشته شوند، می‌توان رابطه های (۷۱) و (۷۲) را به صورت رابطهٔ (۷۶) یا (۷۷) نمایش داد.

$$\{F^{j}\} = \{\ F^{n} \quad F^{m}\ \} \qquad (۷۳)$$

$$[\frac{\partial F^{j}}{\partial \sigma}] = [\ \{\frac{\partial F^{n}}{\partial \sigma}\} \quad \{\frac{\partial F^{m}}{\partial \sigma}\}\ ] \qquad (۷۴)$$

$$[\frac{\partial F^{j}}{\partial \kappa}] = [\ \frac{\partial F^{n}}{\partial \kappa} \quad \frac{\partial F^{m}}{\partial \kappa}\ ] \qquad (۷۵)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} - [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\alpha\} + [\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa = ۰ \quad (۷۶)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\alpha\} - [\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa \quad (۷۷)$$

با استفاده از قانون جریان کویتر، قانون جریان برای گوشه j به صورت رابطهٔ (۷۸) ارائه می‌شود. عاملهای $\{\lambda^j\}$، که در رابطهٔ (۷۹) نوشته شده‌اند، ضریبهای ثابت‌اند که در ادامه تعیین می‌شوند. با قرار دادن رابطه‌های (۵) و (۷۷) در رابطهٔ (۴) و پیش ضرب نتیجه در $[D]_e$، رابطهٔ (۸۰) به دست می‌آید:

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda^n \{\frac{\partial F^n}{\partial \sigma}\} + \lambda^m \{\frac{\partial F^m}{\partial \sigma}\} = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]\{\lambda^j\} \quad (۷۸)$$

$$\{\lambda^j\}^T = \{\ \lambda^n \quad \lambda^m\ \} \quad (۷۹)$$

$$[D]_e\{d\varepsilon\} = \{d\sigma\} + [D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]\{\lambda^j\} \quad (۸۰)$$

با پیش ضرب رابطهٔ (۸۰) در $[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T$، رابطهٔ (۸۱) نتیجه می‌شود که با جاگذاری رابطهٔ (۷۷) در آن، رابطهٔ (۸۲) پیدا می‌شود. سپس برای ساده سازی، رابطه‌های (۸۳) و (۸۴) تعریف می شوند:

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e\{d\varepsilon\} = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} + [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]\{\lambda^j\} \quad (۸۱)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e\{d\varepsilon\} = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\alpha\} - [\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa + [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]\{\lambda^j\} \quad (۸۲)$$

$$[A]^{(c)}\{\lambda^j\} = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\alpha\} - [\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa \quad (۸۳)$$

$$[M^j] = [A]^{(c)} + [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}] \quad (۸۴)$$

با توجه به رابطه های (۸۴) و (۸۲) می‌توان رابطهٔ (۸۵) را نوشت و با جاگذاری آن در رابطهٔ (۸۰)، رابطهٔ (۸۶) نتیجه خواهد شد. باید دانست که رابطهٔ (۸۶) رابطهٔ تنش - کرنش را در حالت کشسان - مومسان برای گوشهٔ کلی j مشخص می‌سازد. به این ترتیب ماتریس کشسان - مومسان به صورت رابطهٔ (۸۷) ارائه می‌شود:

$$\{\lambda^j\} = [M^j]^{-۱}\ [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e\{d\varepsilon\} \quad (۸۵)$$

$$\{d\sigma\} = (\ [D]_e - [D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}][M^j]^{-۱} [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e\ )\{d\varepsilon\} \quad (۸۶)$$

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}][M^j]^{-۱}\ [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T[D]_e \quad (۸۷)$$

از سوی دیگر، قانون سخت شوندگی پویا به صورت رابطه‌های (۸۸) و (۸۹) نوشته می‌شوند. با پیش ضرب رابطهٔ (۸۸) در $[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T$ و سپس جاگذاری مقدار $[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\alpha\}$ از رابطهٔ (۷۷)، رابطهٔ (۹۰) را در اختیار قرار می‌دهد.

$$\{d\alpha\} = \{\sigma - \alpha\}\ d\eta \quad (۸۸)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma - d\alpha\} = \{۰\} \quad (۸۹)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} + [\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa = [\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{\sigma - \alpha\}\ d\eta \quad (۹۰)$$

با پیش ضرب رابطهٔ به دست آمده در $\{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]$ و حل آن برای $d\eta$ نتیجه زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$d\eta = \frac{\eta_۱^j}{\eta_۲^j} \quad (۹۱)$$

$$\eta_۱^j = \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} + \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^j}{\partial \kappa}]^T d\kappa \quad (۹۲)$$

$$\eta_2^{j} = \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}][\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T\{\sigma - \alpha\} \qquad (۹۳)$$

برای بـه دست آوردن مـاتریس کشسـان - مـومسان، نـیاز بـه محاسبهٔ $[A]^{(c)}$ و سپس $[M^j]$ است. از سوی دیگر، برای محاسبهٔ $[A]^{(c)}$ باید $\lambda^j$ تعیین شود. از رابـطهٔ (۸) مـی‌توان رابـطهٔ (۹۴) را نتیجه گرفت که با توجه به رابطهٔ (۷۸) می‌تواند به صـورت رابـطهٔ (۹۵) نوشته شود. همچنین، رابطهٔ (۹۶) از رابطهٔ (۸۹) نـتیجه مـی شود. اکنون با قرار دادن رابطهٔ (۹۵) در سمت راست رابطهٔ (۹۶) و حل آن، $\{\lambda^j\}$ به دست می‌آید. رابطهٔ (۹۷)، مقدار $\{\lambda^j\}$ را در اختیار قرار می‌دهد:

$$\{d\alpha\} = H\{d\varepsilon\}^{p(\kappa)} = H(1-m)\{d\varepsilon^p\} \qquad (۹۴)$$

$$\{d\alpha\} = H(1-m)[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]\{\lambda^j\} \qquad (۹۵)$$

$$[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T\{d\sigma\} = [\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T\{d\alpha\} \qquad (۹۶)$$

$$\{\lambda^j\} = \frac{1}{H(1-m)}\,[\,[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]\,]^{-1}\,[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T\{d\sigma\} \qquad (۹۷)$$

رابطهٔ (۹۷) برای حالت سخت شوندگی همگن معتبر نـیست، زیرا که تنها از وضعیت سخت شوندگی پویا نتیجه شـده است. در رابطهٔ (۸۳)، فرض بر برقراری رابطه‌های زیر است:

$$[A]^{(c)} = [A]^{(i)} - [A]^{(\kappa)} \qquad (۹۸)$$

$$[A]^{(i)}\{\lambda^j\} = -[\frac{\partial F^j}{\partial\kappa}]^T d\kappa \qquad (۹۹)$$

$$[A]^{(\kappa)}\{\lambda^j\} = -[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T\{d\alpha\} \qquad (۱۰۰)$$

اگر رابطهٔ (۹۵)، در سمت راست رابطهٔ (۱۰۰) جاگـذاری شـود و $\{\lambda^j\}$ از دو طرف رابطه حذف شود، نتیجه به صورت رابطهٔ (۱۰۱) خواهد بود. برای محاسبهٔ $[A]^{(i)}$، اگر از تعریف رابطهٔ (۳۳) استفاده کرده و در رابطهٔ (۹۹) به کار برده شود، نتیجه به شکل رابطهٔ (۱۰۲) به دست می‌آید. از سوی دیگر، رابطهٔ (۳۱) مقدار $\kappa$ را به صورت رابطهٔ (۱۰۳) ارائه می‌دهد.

$$[A]^{(\kappa)} = -H(1-m)\,[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] \qquad (۱۰۱)$$

$$[A]^{(i)}\{\lambda^j\} = -[\frac{\partial F^j}{\partial\kappa}]^T d\kappa = [\gamma^j]^T\,\frac{d\sigma(\kappa)}{d\kappa}\,d\kappa \qquad (۱۰۲)$$

$$\kappa = m\int\{\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]\,\{\lambda^j\} \qquad (۱۰۳)$$

$$d\kappa = m\,\{\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]\,\{\lambda^j\} \qquad (۱۰۴)$$

اینک با جاگذاری رابطه‌های (۱۰۳) و (۱۰۴) در رابطهٔ (۱۰۲) وحذف کردن $\{\lambda^j\}$ از دو طرف رابطه، مـقدار $[A]^{(i)}$ بـه صـورت رابطهٔ (۱۰۵) تعیین می شـود. هـمچنین، بـا قـرار دادن رابـطه‌های (۱۰۱) و (۱۰۵) در رابطهٔ (۹۸)، مقدار $[A]^{(c)}$ به دست می آید و با رابطهٔ (۱۰۶) ارائه می‌شود. سرانجام، با گـذاشـتن رابـطهٔ (۱۰۶) در رابطهٔ (۸۴)، ماتریس $[M^j]$ به دست می‌آید. بـه ایـن تـرتیب هـمهٔ عاملها تعیین شدند. اکنون می‌توان ماتریس کشسان - مـومسان را برای گوشه‌های مختلف سطح تسلیم به دست آورد.

$$[A]^{(i)} = \frac{\overline{H}m}{\sigma(\kappa)}\,[\gamma^j]^T\,\{\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] \qquad (۱۰۵)$$

$$[A]^{(c)} = H(1-m)\,[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] + \frac{\overline{H}m}{\sigma(\kappa)}\,[\gamma^j]^T\,\{\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] \qquad (۱۰۶)$$

$$[M^j] = H(1-m)\,[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] + \frac{\overline{H}m}{\sigma(\kappa)}\,[\gamma^j]^T\,\{\sigma\}^T[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] + [\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^j}{\partial\sigma}] \qquad (۱۰۷)$$

## ۸- ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ H

تنها جزئیات محاسباتی ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ H در متن ارائه می‌شود. بـه دلیـل طـولانی بـودن رابـطه‌ها، بـرای سـایر گوشه های سطح تسلیم نتایج محاسبات در پیوست درج می شوند. قانون جریان گوشه H را می‌توان به دو صورت زیر نشان داد:





[ DOR: 20.1001.1.22287698.1375.15.2.1.3 ]

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda^3 \{\frac{\partial F^3}{\partial \sigma}\} + \lambda^4 \{\frac{\partial F^4}{\partial \sigma}\} \qquad (۱۰۸)$$

$$\{d\varepsilon^p\} = [\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]\{\lambda^H\} \qquad (۱۰۹)$$

عوامل زیر برای رابطه‌های درج شده مورد نیاز است:

$$\{\lambda^H\}^T = \{\ \lambda^{(3)} \quad \lambda^{(4)}\ \} \qquad (۱۱۰)$$

باید دانست، $\lambda^H$ واقعی به صورت رابطهٔ سادهٔ فوق نیست. اما تأثیر متقابل موجود بین $\lambda^{(3)}$ و $\lambda^{(4)}$ باید به صورتی در نظر گرفته شود. این حقیقت برای گوشهٔ H و دیگر گوشه‌ها وجود دارد. رابطه‌های (۷۶) و (۷۷) به صورت زیر ارائه می شوند:

$$[A]^{(c)} = H^H(1 - m) \begin{bmatrix} W_{11}^H & W_{12}^H \\ W_{21}^H & W_{22}^H \end{bmatrix} + \overline{H}m \begin{bmatrix} a_2^2 & a_2^2 \\ a_3^2 a_4^2 & a_3^2 a_4^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۱۱)$$

$$W_{11}{}^H = \{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T\{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}$$

$$W_{12}{}^H = W_{21}{}^H = \{\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\}^T\{\frac{\partial F^{(4)}}{\partial \sigma}\}$$

$$W_{22}{}^H = \{\frac{\partial F^{(4)}}{\partial \sigma}\}^T\{\frac{\partial F^{(4)}}{\partial \sigma}\} \qquad (۱۱۲)$$

با جاگذاری مشتقهای تنش پهلوهای ۳ و ۴ ، درایه‌های ماتریس $[W]^H$ به دست می‌آید:

$$W_{11}{}^H = 2C^2S^2(a_2 - a_4 + 1)^2 + (a_4 - 1)^2 + a_2^2$$

$$W_{12}{}^H = W_{21}{}^H = 2C^2S^2[a_3(1 + a_2) + a_4(1 - a_3)$$

$$- a_2(1 + a_4) - (a_2 + a_4)^2] + a_2(a_3$$

$$- a_2) - a_4(a_4 - 1)$$

$$W_{22}{}^H = 2C^2S^2(a_3 - a_2 + a_4)^2 + (a_3$$

$$- a_2)^2 + a_4^2 \qquad (۱۱۳)$$

با داشتن $A^{(c)}$ ، می‌توان از رابطهٔ (۱۱۴) مقدار $[M^{(H)}]$ را محاسبه کرد. برای تعیین ماتریس $[M^H]$ در رابطهٔ به دست آمده، نیازمند ضرب سه ماتریس است. ضرب این سه ماتریس، ماتریس جدیدی به نام ماتریس $[J]^H$ می‌سازند. ماتریس $[J]^H$ و درایه‌های آن در ادامه آمده‌اند:

$$[M^H] = [A]^{(c)} + [\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}] \qquad (۱۱۴)$$

$$[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}] = \frac{E}{(1-\nu^2)}\,[J]^H$$

$$[J]^H = \begin{bmatrix} J_{11}^H & J_{12}^H \\ J_{21}^H & J_{22}^H \end{bmatrix} \qquad (۱۱۵)$$

$$J_{11}{}^H = (a_2 - a_4)^2 + 2a_4(a_2 - 1) + 2\nu a_2(a_4 - 1) + 1$$

$$J_{12}{}^H = J_{21}{}^H = (a_3 - a_2)(a_2 + \nu a_4) + (\nu a_2 + a_4)$$

$$(1 - a_4) - \nu a_3$$

$$J_{22}{}^H = (a_2 - a_3)^2 + a_4^2 + 2\nu a_4(a_2 - a_3) \qquad (۱۱۶)$$

اکنون با داشتن ماتریس $[M^H]$ ، می‌توان مقدار $\lambda^H$ را از رابطهٔ (۱۱۷) به دست آورد. وارون ماتریس $[M^H]$ را می‌توان به صورت $[Y]^H$ نمایش داد:

$$\{\lambda^H\} = [M^H]^{-1}\,[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T[D]_e\{d\varepsilon\} \qquad (۱۱۷)$$

$$\{\lambda^H\}^T = \{\ \lambda_1{}^H \quad \lambda_2{}^H\ \}$$





[ DOR: 20.1001.1.22287698.1375.15.2.1.3 ]

$$[Y]^H = [M^H]^{-1} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \qquad (118)$$

اگر $Q = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ باشد، حاصل‌ضرب $[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T[D]_e\{d\varepsilon^p\}$، Q برابر بردار دیگری به نام $\{X^{(H)}\}$ است. درایه‌های بردار $\{X^H\}$ و $\lambda^H$ در ادامه آمده‌اند:

$$\{X^{(H)}\}^T = \{\, x_1 \quad x_2 \}\ ،\ Q = \frac{E}{(1-\nu^2)} \qquad (119)$$

$$\{\lambda^H\} = \frac{E}{(1-\nu^2)}[Y^H]\{X^H\} \qquad (120)$$

$$\lambda_1^H = \frac{E}{(1-\nu^2)}(y_{11}x_1 + y_{12}x_2) \qquad (121)$$

$$\lambda_2^H = \frac{E}{(1-\nu^2)}(y_{21}x_1 + y_{22}x_2) \qquad (122)$$

$$x_1 = \{a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2 + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\}d\varepsilon_x + \{\nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2\}d\varepsilon_y + [(1 - \nu)(1 + a_2 - a_4)CS]\, d\varepsilon_{xy}$$

$$x_2 = \{(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2 + \nu[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]\}\, d\varepsilon_x + \{\nu[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2] + (a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2\}\, d\varepsilon_y + [(1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS]\, d\varepsilon_{xy} \qquad (123)$$

محاسبهٔ $d\eta$ به قرار زیر است:

$$d\eta^H = \frac{\eta_1^H}{\eta_2^H} \qquad (124)$$

$$\eta_1^H = \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} + \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^H}{\partial \kappa}]^T d\kappa \qquad (125)$$

$$\eta_2^H = \{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T\{\sigma - \alpha\} \qquad (126)$$

قسمت دوم رابطهٔ (۱۲۵) نیزبه صورت زیر است:

$$\{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^H}{\partial \kappa}]^T d\kappa = -\ \bar{H} m a_2^2\, \lambda^{(3)}\, \{\, [a_2C^2 - (a_4 - 1)S^2]\, d\sigma_x + [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]\, d\sigma_y + [2(1 + a_2 - a_4)CS]\, d\sigma_{xy} - \bar{H} m a_3^2 a_4^2\, \lambda^{(4)}\, \{[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]\, d\sigma_x + [(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]\, d\sigma_y + [2(a_3 - a_2 + a_4)CS]\, d\sigma_{xy}\} \qquad (127)$$

همچنین، قسمت اول رابطهٔ (۱۲۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\{d\sigma\}^T[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T\{d\sigma\} = L_1\, d\sigma_x + L_2\, d\sigma_y + L_3\, d\sigma_{xy} \qquad (128)$$

$$L_1 = Z_{11}d\sigma_x + Z_{21}d\sigma_y + Z_{31}d\sigma_{xy}$$

$$L_2 = Z_{12}d\sigma_x + Z_{22}d\sigma_y + Z_{32}d\sigma_{xy}$$

$$L_3 = Z_{13}d\sigma_x + Z_{23}d\sigma_y + Z_{33}d\sigma_{xy} \qquad (129)$$

$$Z_{11} = [a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]^2 + [(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]^2$$

$$Z_{12} = Z_{21} = [a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2][a_2S^2$$

$$+ (a_4 - 1)C^2] + [(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$Z_{13} = Z_{31} = [2(1 + a_2 - a_4)CS][a_2C^2$$

$$+ (a_4 - 1)S^2] + [2(a_3 - a_2 + a_4)CS][(a_3$$

$$- a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$Z_{22} = [a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]^2 + [(a_3$$

$$- a_2)S^2 - a_4C^2]^2$$

$$Z_{23} = Z_{32} = [2(1 + a_2 - a_4)CS][a_2S^2$$

$$+ (a_4 - 1)C^2] + [2(a_3 - a_2 + a_4)CS][(a_3$$

$$- a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$Z_{33} = [2(1 + a_2 - a_4)CS]^2 + [2(a_3 - a_2$$

$$+ a_4)CS]^2 \qquad (۱۳۰)$$

رابطهٔ (۱۲۶) مقدار $\eta_2^H$ را در اختیار قرار می‌دهد:

$$\eta_2^H = L_1\ \{\sigma_x - \alpha_x\} + L_2\ \{\sigma_y - \alpha_y\}$$

$$+ L_3\ \{\sigma_{xy} - \alpha_{xy}\} \qquad (۱۳۱)$$

با داشتن $\lambda^H$ می‌توان $[D]_{ep}^H$ را محاسبه کرد:

$$[D]_{ep}^H = [D]_e - [D]_e[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}][M^H]^{-1}$$

$$[\frac{\partial F^H}{\partial \sigma}]^T[D]_e \qquad (۱۳۲)$$

از حاصل ضرب $[D]_e$ در $[\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\ \ \frac{\partial F^{(4)}}{\partial \sigma}]$، ماتریس $[g]^H$ به دست می‌آید که درایه‌های آن به قرار زیر است:

$$g_{11}^H = a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2 + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]$$

$$g_{12}^H = (a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2 + \nu[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$g_{21}^H = a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2 + \nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]$$

$$g_{22}^H = (a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2 + \nu[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$g_{31}^H = (1 - \nu)(1 + a_2 - a_4)CS$$

$$g_{32}^H = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS \qquad (۱۳۳)$$

حاصل ضرب $[\frac{\partial F^{(3)}}{\partial \sigma}\ \ \frac{\partial F^{(4)}}{\partial \sigma}]$ در $[D]_e$ ماتریس $[h]^H$ را نتیجه می‌دهد که درایه‌های آن عبارت‌اند از:

$$h_{11}^H = a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2 + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]$$

$$h_{12}^H = a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2 + \nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2]$$

$$h_{13}^H = (1 - \nu)(1 + a_2 - a_4)CS$$

$$h_{21}^H = (a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2 + \nu[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$h_{22}^H = (a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2 + \nu[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$h_{23}^H = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS \qquad (۱۳۴)$$

اکنون با فرض $G=\frac{E}{(1 - \nu^2)}$، ماتریس کشسان - مومسان $[D]_{ep}^H$ از رابطهٔ (۱۳۵) به دست می‌آید. باید دانست که نمو تنش

تسلیم که عامل گسترش همگن سطح تسلیم است، به صورت رابطه‌های (۱۳۷) و (۱۳۸) دردسترس‌اند :

$$[D]_{ep}^{H} = [D]_{e} - G^{۲}[g]^{H} [M^{H}]^{-۱} [h]^{H} \quad (۱۳۵)$$

$$d\sigma(\kappa) = \bar{H}m \, d\varepsilon^{p} = \bar{H}m\{\lambda^{H}\}\{\frac{\partial F^{H}}{\partial \sigma}\} \quad (۱۳۶)$$

$$d\sigma(\kappa) = \frac{\bar{H}m}{۳} (H_x + H_y + H_{xy}) \quad (۱۳۷)$$

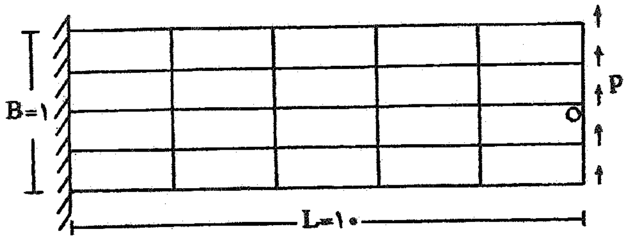
$$I_x = [a_۲C^۲ + (a_۴ - ۱)S^۲] \lambda_۱^{H} + [(a_۳ - a_۲)C^۲ - a_۴S^۲] \lambda_۲^{H}$$

$$I_y = [a_۲S^۲ + (a_۴ - ۱)C^۲] \lambda_۱^{H} + [(a_۳ - a_۲)S^۲ - a_۴C^۲] \lambda_۲^{H}$$

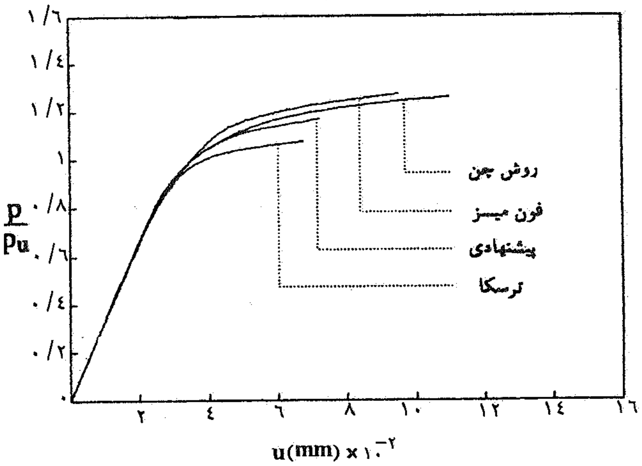
$$H_{xy} = [۲(۱ + a_۲ - a_۴)CS] \lambda_۱^{H} + [۲(a_۳ - a_۲ + a_۴)CS] \lambda_۲^{H} \quad (۱۳۸)$$

## ۹- نمونه خمشی تیریکسرگیردار

پژوهشگران برای ارزیابی معیارهای مختلف تسلیم و یا روشهای مختلف تحلیل غیر خطی، پاره‌ای از سازه‌های معروف را مورد تحلیل قرار می‌دهند. هدف از تحلیل این مسائل، یافتن اشتباهات فراوانی است که در کارهای عددی، به‌ویژه برنامه های رایانه‌ای، وارد می شود. از سوی دیگر، تحلیل این سازه‌ها اطمینان لازم برای روشهای پیشنهادی را به دست می‌دهد. اینک برای اطمینان از درستی کار برنامه، یکی از این سازه‌ها که تحلیل کشسان - مومسان آن در دسترس است ارائه می شود [۲۵]. این مسئله، تیر یکسر گیردار است وپاسخ آن را چن به دست آورده است. اندازه و مشخصات مواد تیر مورد نظر بدون بعد است. این تیر در شکل (۲) رسم شده است. تیر مزبور به ۲۰ جزء هشت گرهی هم عامل تقسیم شده و بار گسترده‌ای در سر آزاد، بـه‌طور قائم بـه آن وارد



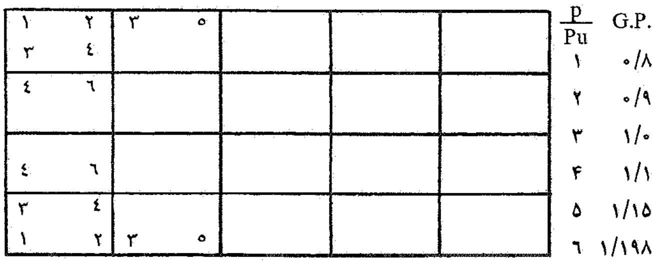

شکل ۲- نمونه خمشی تیریکسرگیردار



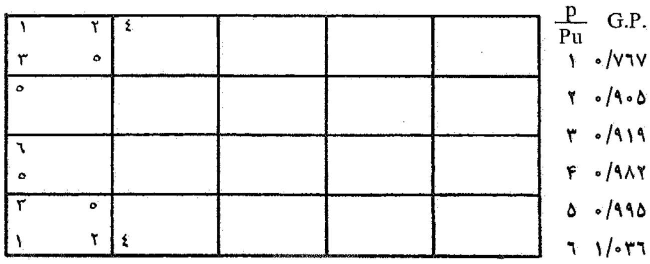

شکل ۳- نمودار بار تغییر مکان نمونهٔ خمشی تیریکسرگیردار

می شود. مشخصات مواد سازه از این قرار است: تنش تسلیم $\sigma_y = ۶۰$ ، عامل کشسانی $E = ۲۰۰۰۰۰$ ، نسبت پواسان[۲۰] $\nu = ۰/۳$ ، عامل سخت شوندگی $H' = ۰$ و ضخامت تیر برابر $t = ۱$.

شکل (۳) نمودار بار - تغییر مکان تیر مزبور را نشان می‌دهد. محور افقی در این نمودار، تغییر مکان قائم میان تار سر آزاد تیر یعنی نقطه O در شکل (۲) را مشخص می‌سازد. محور قائم نیز نسبت بار وارده به بار نهایی تیر(P/Pu) را نشان می‌دهد. منظور از بار نهایی باری است که اگر به تیر وارد شود، ناحیه فشاری وکششی مقطع سر گیردار تیر از نظر محاسباتی به‌طورکامل جاری شوند. بر این اساس، بار نهایی Pu=۱/۵ خواهد شد. از نظر محاسباتی این مقطع توان تحمل لنگر خمشی بیشتری را ندارد، در صورتی که بررسی رفتار کشسان - مومسان در شکل (۳) نشان می‌دهد که سازه توانایی تحمل بار بیشتر را دارد. همان گونه که مشاهده می شود، سطح تسلیم پیشنهادی ضمن اینکه در جهت اطمینان رفتار می‌کند ولی نسبت به ترسکا از موقعیت بهتری برخوردار است. سطح تسلیم فون میسز نیز در خلاف جهت اطمینان رفتار می‌کند. به سخن دیگر،




**شکل ۴- ترتیب نقاط گوس مومسان شده در نمونهٔ خمشی تیر یکسرگیردار با استفاده از سطح تسلیم فون میسز**



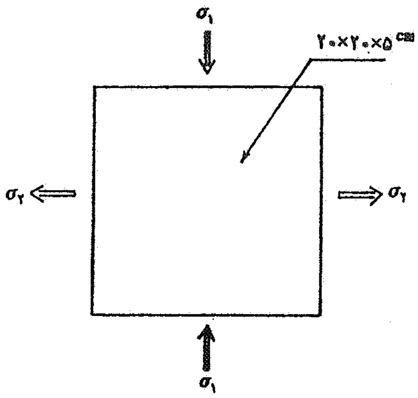

**شکل ۵- ترتیب نقاط گوس مومسان شده در نمونهٔ خمشی تیریکسرگیردار بااستفاده از سطح تسلیم پیشنهادی**

معیار فون میسز توانایی بارگیری تیر را بیشتر از مقدار واقعی نشان می‌دهد.

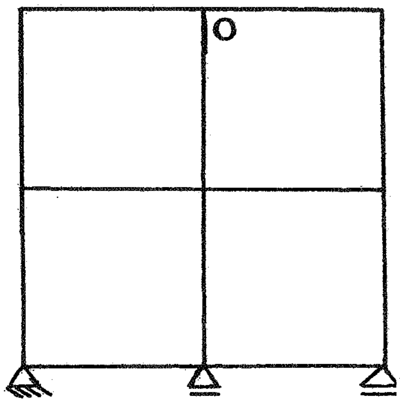
شکل (۴) ترتیب نقاط گوس مومسان شده در روند تحلیل را نشان می‌دهد. تعداد نقاط گوس در هر جزء ۲×۲ بوده و بارگذاری تا ۲۰ درصد بیش از بار نهایی محاسباتی به تیر وارد شده است. مقایسهٔ شکلهای (۴) و (۵) نشان می‌دهد که سطح تسلیم فون میسز، ظرفیت باربری تیر را بیشتر می‌پندارد و در بار بزرگتری نقاط مومسان می‌شوند.

## ۱۰- نمونه بتنی کاپفر

نتایج آزمایشگاهی کاپفر که در سال ۱۹۶۹ انجام گرفت [۲۸]، یکی از نمونه‌های قابل توجه برای تأیید سطح تسلیم پیشنهادی است. نمونه‌های بتنی مزبور به شکل مکعب مستطیل بوده و ابعاد آن ۵×۲۰×۲۰ سانتی‌متر است. هو و اسکنوبریچ این نمونه را به وسیلهٔ یک جزء نه گرهی و با استفاده از سطح تسلیم فون میسز و قانون سخت شوندگی همگن مورد تحلیل قرار دادند[۲۶]. شکل(۶) نمونهٔ مزبور را نشان می‌دهد. اینک از جزء هم عامل هشت‌گرهی و



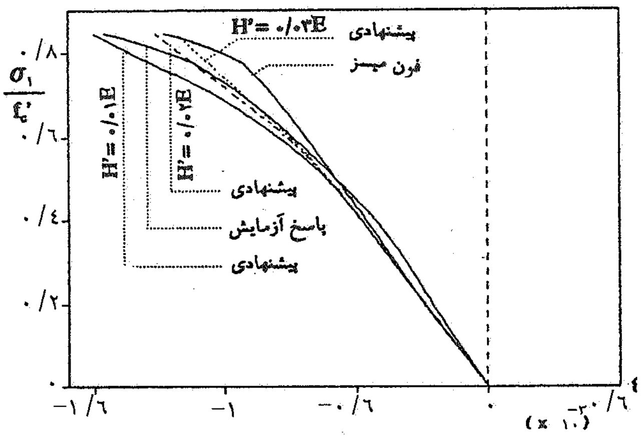

**شکل ۶- نمونهٔ بتنی آزمایش کاپفر**




**شکل ۷- شبکه‌بندی و تکیه‌گاهها در نمونهٔ بتنی**

شبکه‌بندی چهار جزئی برای تحلیل استفاده شده است. چگونگی شبکه‌بندی و تکیه‌گاهها در شکل (۷) نشان داده شده است. تنش فشاری $\sigma_1$ به صورت عمودی و تنش کششی $\sigma_2$ به صورت افقی بر نمونه وارد شده‌اند. نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-۱}{۰/۰۵۲}$ فرض شده است. مشخصات مصالح عبارت‌اند از: ضریب کشسانی مماسی اولیه $E_t$=۲۹۴۹۰۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع، ضریب کشسانی فرض شده E=۲۷۲۶۴۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع، نسبت پواسان برابر $\nu$=۰/۱۹ ، مقاومت کششی بتن برابر $f'_t$=۲۹/۴ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع و مقاومت فشاری بتن برابر $f'_c$=۳۲۶ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع .

این مسئله با استفاده از سطح تسلیم پیشنهادی و قانون سخت شوندگی همگن با سه پارامتر سخت شوندگی مختلف تحلیل شده است. نخست، پارامتر سخت شوندگی، H'= ۰/۰۱ E=۲۷۲۶ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع فرض شده‌است و پس از آن به ترتیب،



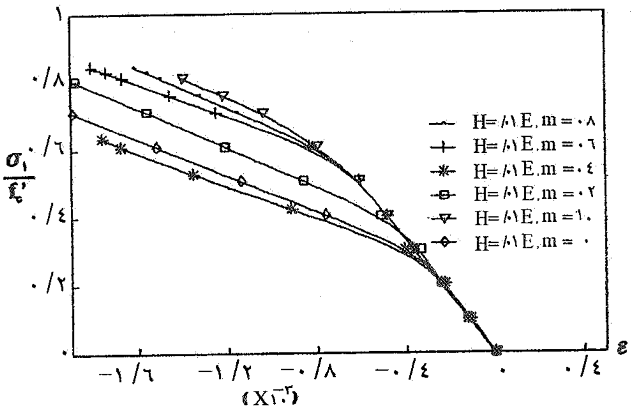

**شکل ۸- مقایسهٔ نتایج تحلیل کشسان - مومسان نمونهٔ بتنی کاپفر**

H'= ۰/۰۲ E=۵۴۵۲ و H'=۰/۰۳E=۸۱۷۸ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع مورد نظر قرارگرفته است. شکل (۸) نتایج حاصل از این تحلیل را نشان می‌دهد. محور افقی این نمودار کرنش و محور قائم نسبت تنش $\sigma_1$ به مقاومت فشاری بتن $f'_c$، را نمایش می‌دهد. نمودار مزبور استفاده از سطح تسلیم پیشنهادی و هر یک از پارامترهای سخت شوندگی را نسبت به معیار فون میسز ایمنتر نشان داده‌است ولی در حالت H'=۰/۰۱ E مناسبتر عمل کرده است. به سخن دیگر، در این حالت پاسخ معیار پیشنهادی در جهت اطمینان بوده و از سوی دیگر به حد مطلوبی به پاسخ واقعی نزدیک است.

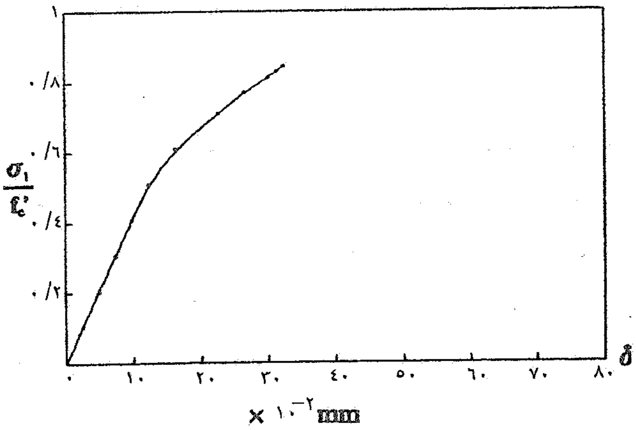
بایدخاطرنشان کردکه‌رابطه‌های‌ارائه‌شده‌و برنامهٔ‌وابسته‌قادراست که رفتارهای مختلف سخت شوندگی را در بر گیرد. از این رو، این مسئله با حالت سخت شوندگی ترکیبی نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. اگر m نسبت ترکیب دو حالت سخت شوندگی همگن و پویا باشد($۰ \le m \le ۱$) به‌گونه‌ای که m=۰ نشانگر سخت شوندگی پویاو m=۱ بیانگر سخت شوندگی همگن است، نتایج تحلیل ترکیبهای مختلف سخت شوندگی در شکل (۹) ارائه شده است. محور قائم در این نمودار نسبت $\frac{\sigma_1}{f'_c}$ و محور افقی کرنش را نشان می‌دهد. نمودار بار تغییر مکان نمونه بتنی کاپفر، درحالت سخت شوندگی همگن و عامل سخت شوندگی H´ = ٪۱E = ۲۷۲۶ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع، در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

## ۱۱- نتیجه گیری

در نظریهٔ مومسان نموی برای تحلیل غیرخطی یک سازه، بارهای وارده بر آن به صورت نموی[۲۱] وارد شده و در هر گام پاره‌ای کوچک از بار به سازه اثر داده می‌شود. در هر یک از این نموها، رابطهٔ حاکم بر رفتار سازه خطی در نظر گرفته می‌شود. در تحلیلهای نموی - تکراری[۲۲] بار وارده چند قسمت شده‌است و در هر گام یک قسمت به سازه اثر داده می‌شود.در این مقاله، سطح تسلیمی برای مواد با مقاومت فشاری و کششی یکسان و یا متفاوت همراه با رابطه‌هایی برای محاسبهٔ ماتریسهای کشسان - مومسان مبتنی بر سطح تسلیم پیشنهادی ارائه شده‌است. در ادامه، بر پایه این رابطه‌ها یک برنامهٔ رایانه‌ای تهیه و به عنوان تجربهٔ کارایی سطح تسلیم جدید، نمونه‌های عددی متفاوت مورد تحلیل قرار گرفت که به دلیل حجم محدود مقاله نمی‌توان همهٔ آنها را ارائه کرد. مقایسه نتایج به دست آمده از این تحلیل، با نتایج تحلیل دیگر پژوهشگران، کارایی سطح تسلیم پیشنهادی و برنامه رایانه‌ای را نمایان می‌سازد.



**شکل ۹- مقایسهٔ نتایج تحلیل ترکیبهای مختلف سخت شوندگی نمونهٔ بتنی کاپفر**




**شکل ۱۰- نمودار بار - تغییرمکان نمونهٔ بتنی کاپفر**

## واژه‌نامه

1. elastic
2. plastic
3. plane stress
4. yield surface
5. parameter
6. flow rule
7. mixed hardening
8. isotropic hardening
9. kinematic hardening
10. computer
11. non - linear analysis
12. theory
13. hydrostatic pressure
14. elasto - plastic matrix
15. yield criterion
16. strength
17. plastic flow
18. yield function
19. Ziegler's modifications
20. Poisson's ratio
21. incremental load
22. incremental - iterative methods

## مراجع


1. Chakrabarty , J. , *Theory of Plasticity* , McGraw - Hill, New York, 1987.
2. Chen, W. F., *Plasticity in Reinforced Concrete,* McGraw - Hill, New York, 1982.
3. Chen, W. F., and Baladi, G. Y., *Soil Plasticity Theory and Implementation,* Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam, The Netherlands, 1985.
4. Anand, S. C., "Finite Element Analysis of Elasto - Plastic Plane Stress Problems Based Upon Tresca Yield Criterion," Ph.D. Dissertation, Northwestern, University, 1968.
5. Anand, S. C., "Constitutive Relations and Solution Schems in Plastic Analysis," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM1, pp. 21-35, February 1980.
6. Anand, S. C., and Weisgerber, F. E., "Usage of the Tresca Yield Condition in Finite Element Plane Strain Analysis," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No.8, pp. 625-637, 1978.
7. Torkamani, M. A. M., "A Linear Yield Surface in Plastic Cyclic Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 3, pp. 499-516, 1986.
8. Levy, N., "Finite Element Formulation of Stress - Strain Matrix for an Elastically- Perfectly- Plastic-Tresca Yield Material," Technical Report NG1 40-002-08012, Brown University, 1970.
9. Owen & Hinton, "Finite Elements in Plasticity," Department of Civil Engineering, University College of Swansea, U. K., 1986.
10. Willam, K. J., and Warnke, E. P., "Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete," *Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc.* Vol. 19, pp. 1-30, 1975.
11. Chen, C. T., and Chen, W. F., "Constitutive Relations for Concrete," *Journal of The Engineering Mechanics Division,* Vol. 101, No. EM4 , pp. 465-481, August 1975.
12. Ottosen, N. S., "Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete," *Journal of the Engineering Mechanics Division,* Vol. 105, No. EM1 , pp. 127-141, February 1979.
13. Anand, S. C., and Weisgerber, F. E., "Inelastic Finite Element Analysis Using Tresca Yield Condition," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, No. EM1, pp. 1-16, February 1977.
14. Weisgerber, F. E., "Tresca Yield Condition in Elastic - Plastic Finite Element Analysis," Ph.D. Dissertation, Clemson University, May 1976.
15. Rezaiee - Pajand, M., "Uniaxial Symmetrical Tresca Yield Condition in Elastic - Plastic Finite Element Analysis," Master's Thesis, University of Pittsburg, 1979.
16. Torkamani, M. A. M., and Rezaiee - Pajand, M., "Elastic - Plastic Analysis for Cyclic Loading and Tresca Yield Condition," Research Report SETEC-CE-82-009, University of Pittsburg, Department of Civil Engineering, Pittsburg,




[ DOR: 20.1001.1.22287698.1375.15.2.1.3 ]

Pennsylvania, July 1982.

17. Torkamani, M. A. M. and Rezaiee - Pajand, M., "Plastic Cyclic Analysis Using Linear Yield Surface," *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 110, No. 5, pp. 776-793, May 1984.
18. Rezaiee - Pajand, M., "Elasto - Plastic Analysis of Plane Stress Problems Using Uniaxial Symmetric Tresca Yield Surface and Kinematic Hardening," Ph.D. Dissertation , University of Pittsburg, Pennsylvania, 1982.
19. Weisgerber, F. E., "Elastic - Plastic Analysis for Tension - Weak Materials Using a Linearized Yield Surface," Research Report Performed While Occupying a Junior Morrow Research Chair, Summer / Autumn Quarters, 1981.
20. Weisgerber, F. E., "A Linearized Yield Surface for Tension - Weak Materials," *Recent Advances in Engineering Mechanics,* Vol. 2, pp. 964-967, 1983.
21. Elsafi, O. Y. H., "Analysis of Plane Elasto-Plastic Problems Using a Modified Tresca Yield Condition with Kinematic Hardening," Master's Thesis, University of Pittsburgh, 1984.
22. Torkamani, M. A. M., and Elsafi, O. Y. H., "A Unified Approach to the Solution of Plane Elasto - Plastic Problems: Criteria of Yielding," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 5, pp. 1167-1181, 1989.
23. Alsanusi, S. K., "Elasto - Plastic Analysis of Plane Stress Problems Using Linearized Yield Surface and Mixed Hardening," Ph.D. Dissertation, University of Pittsburgh, 1987.
24. Torkamani, M. A. M., and Alsanusi, S. K., "Elasto-Plastic Analysis of Plane Stress Problem Using Linearized Yield Surface and Mixed Hardening Rule," *Computers & Structures* , Vol. 31, No. 6, pp. 935-956, 1989.
25. Chern, J. C., Lin, F. B., and Marchertas, A. H., "A Two-Surface Plastic Model for Concrete and Geomaterials," pp. 267-272, *In International Conference on Computational Mechanics* (1986: Tokyo, Japan), ( ED. Yagawa, G., and Atluri, S. N. ), NewYork : Springer - Verlag, 1986.
26. Hu, Hsuan - Teh, and Schnobrich, William C., "Constitutive Modeling of Concrete By Using Nonassociated Plasticity," *Journal of Materials in Civil Engineering,* Vol. 1, No. 4, pp. 199-215, November 1989.
27. Owen, D. R. J., Hinton, E., and Onate, E., *Computational Plasticity*, Pineridge press , 1987.
28. Kupfer, H. B., and Gerstle, K. H., "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 99, No. EM4, pp. 853-866, August 1973.

## پیوست

### ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۱

تابع تسلیم پهلوی AB بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی ($\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_{xy}$) به صورت زیر ارائه می شود:

$$F^{(1)} = [a_1 C^{۲} + (۱ - a_1) S^{۲}]\, \sigma_x + [a_1 S^{۲} + (۱ - a_1) C^{۲}]\, \sigma_y + ۲(۲a_1 - ۱) CS\, \sigma_{xy}$$

$$- a_1 \sigma(\kappa) = ۰ \qquad (۱۳۹)$$

برای دستیابی به ماتریس کشسان - مومسان مقدار $M^{(1)}$ موردنیاز است. با استفاده از رابطهٔ (۴۱) به مقدار $M^{(1)}$ می‌توان رسید. ماتریس کشسان - مومسان با قرار دادن $M^{(1)}$ در رابطهٔ (۲۹) به دست می‌آید. در ادامه ماتریس کشسان-مومسان پهلوی ۱ همراه با ضریبها و درایه‌های آن درج می‌شود:

$$M^{(۱)} = H_۱(۱ - m)[۸a_۱(a_۱ - ۱)C^۲S^۲ + ۲C^۲S^۲ + a_۱^۲ + (۱ - a_۱)^۲] + \frac{E}{(۱ - \nu^۲)}[۱ - ۲a_۱(۱ - \nu)(۱ - a_۱)] + m\ \bar{H}a_۱^۲ \qquad (۱۴۰)$$

$$[D]_{ep}^{(۱)} = \frac{E}{(۱ - \nu^۲)} [ \begin{bmatrix} ۱ & \nu & ۰ \\ \nu & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & (۱-\nu)/۲ \end{bmatrix} - G_۱ \begin{bmatrix} d_{۱۱} & d_{۱۲} & d_{۱۳} \\ & d_{۲۲} & d_{۲۳} \\ Sym. & & d_{۳۳} \end{bmatrix} ] \qquad (۱۴۱)$$

$$G_۱ = \frac{E}{M^{(۱)}(۱ - \nu^۲)}$$

$$d_{۱۱} = a_۱^۲ + (۱ - ۲a_۱)(۲a_۱C^۲ + S^۲)S^۲ + ۲\nu[a_۱(۱ - a_۱)(۱ - ۴C^۲S^۲) + C^۲S^۲] + \nu^۲[a_۱^۲ + (۱ - ۲a_۱)(۲a_۱S^۲ + C^۲)C^۲]$$

$$d_{۱۲} = d_{۲۱} = a_۱(۱ - a_۱)(۱ - ۴C^۲S^۲) + C^۲S^۲ + \nu[C^۴ + S^۴ - ۲a_۱(۱ - a_۱)(۱ - ۴C^۲S^۲)] + \nu^۲[a_۱(۱ - a_۱)(۱ - ۴C^۲S^۲) + C^۲S^۲]$$

$$d_{۱۳} = d_{۳۱} = \frac{(۱ - \nu)}{۲}[-۲a_۱(۱ - ۲a_۱)C^۳S - (۴a_۱^۲ - ۶a_۱ + ۲)CS^۳] + \frac{\nu(۱ - \nu)}{۲}[-۲a_۱(۱ - ۲a_۱)CS^۳ - (۴a_۱^۲ - ۶a_۱ + ۲)C^۳S]$$

$$d_{۲۲} = a_۱^۲ + (۱ - ۲a_۱)(۲a_۱S^۲ + C^۲)C^۲ + ۲\nu[a_۱(۱ - a_۱)(۱ - ۴C^۲S^۲) + C^۲S^۲] + \nu^۲[a_۱^۲ + (۱ - ۲a_۱)(۲a_۱C^۲ + S^۲)S^۲]$$

$$d_{۲۳} = d_{۳۲} = \frac{(۱ - \nu)}{۲}[-۲a_۱(۱ - ۲a_۱)CS^۳ - (۴a_۱^۲ - ۶a_۱ + ۲)C^۳S] + \frac{\nu(۱ - \nu)}{۲}[-۲a_۱(۱ - ۲a_۱)C^۳S - (۴a_۱^۲ - ۶a_۱ + ۲)CS^۳]$$

$$d_{۳۳} = (۱ - \nu)^۲[C^۲S^۲ - ۴a_۱C^۲S^۲(۱ - a_۱)] \qquad (۱۴۲)$$

### ماتریس کشسان - مومسان پهلوی ۲

تابع تسلیم پهلوی FG بر حسب تنشها در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر ارائه می شود:

$$F^{(۲)} = [(a_۵ - ۱)C^۲ - a_۵S^۲]\sigma_x + [(a_۵ - ۱)S^۲ - a_۵C^۲]\sigma_y + ۲(۲a_۵ - ۱)CS\sigma_{xy} - a_۳a_۵\sigma(\kappa) = ۰ \qquad (۱۴۳)$$

در ادامه ماتریس کشسان-مومسان پهلوی ۱ همراه با ضریبها و درایه‌های آن درج می شود:

$$[M^{(۲)}] = H_۲(۱ - m)[۱ + ۲C^۲S^۲ - ۲a_۵(۱ - a_۵)(۱ + ۴C^۲S^۲)] + \frac{E}{(۱ - \nu^۲)}[۱ - ۲a_۵(۱ - \nu)(۱ - a_۵) + \bar{H}ma_۳^۲a_۵^۲ \qquad (۱۴۴)$$

$$G_۲ = \frac{E}{M^{(۲)}(۱ - \nu^۲)}$$

$$d_{۱۱} = a_۵^۲ + (۱ - ۲a_۵)(C^۲ + ۲a_۵S^۲)C^۲$$

$$+\,2\nu[a_5(1-a_5)(1-4C^2S^2)+C^2S^2\,]$$

$$+\,\nu^2[a_5^{\,2}+(1-2a_5)(S^2+2a_5C^2)S^2\,]$$

$$d_{12}=d_{21}=a_5(1-a_5)(1-4C^2S^2)+C^2S^2+$$

$$\nu[C^4+S^4-2a_5(1-a_5)(1-4C^2S^2)\,]$$

$$+\,\nu^2[a_5(1-a_5)(1-4C^2S^2)+C^2S^2\,]$$

$$d_{13}=d_{31}=\frac{(1-\nu)}{2}\,[2a_5(1-2a_5)CS^3$$

$$+\,(4a_5^{\,2}-6a_5+2)C^3S\,]+\frac{\nu(1-\nu)}{2}$$

$$[2a_5(1-2a_5)C^3S+(4a_5^{\,2}-6a_5+2)CS^3\,]$$

$$d_{22}=a_5^{\,2}+(1-2a_5)(S^2+2a_5C^2)S^2$$

$$+\,2\nu[a_5(1-a_5)(1-4C^2S^2)+C^2S^2\,]$$

$$+\,\nu^2[a_5^{\,2}+(1-2a_5)(C^2+2a_5S^2)C^2\,]$$

$$d_{23}=d_{32}=\frac{(1-\nu)}{2}\,[2a_5(1-2a_5)C^3S$$

$$+\,(4a_5^{\,2}-6a_5+2)CS^3\,]+\frac{\nu(1-\nu)}{2}$$

$$[2a_5(1-2a_5)CS^3+(4a_5^{\,2}-6a_5+2)C^3S\,]$$

$$d_{33}=(1-\nu)^2[C^2S^2-4a_5C^2S^2(1-a_5)] \tag{۱۴۵}$$

### ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ A

مقادیر $[A]^{(c)}$، $[M^A]$ و $[J]^A$ برای گوشهٔ A به‌صورت زیرنوشته می‌شوند:

$$[A]^{(c)}=H^A(1-m)\begin{bmatrix}W_{11}^A & W_{12}^A\\ W_{21}^A & W_{22}^A\end{bmatrix}+\overline{H}m\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1^2\\ a_2^2 & a_2^2\end{bmatrix} \tag{۱۴۶}$$

$$W_{11}^{\;A}=1+2C^2S^2-2a_1(1-a_1)(1+4C^2S^2)$$

$$W_{12}^{\;A}=W_{21}^{\;A}=2C^2S^2(2a_1-1)(a_2-a_4+1)$$

$$+\,a_1(1+a_2)+a_4(1-a_1)-1$$

$$W_{22}^{\;A}=[a_2^{\,2}+(a_4-1)^2](2C^2S^2+1)$$

$$+\,4a_2(1-a_4)C^2S^2 \tag{۱۴۷}$$

$$[M^A]=[A]^{(c)}+[\frac{\partial F^A}{\partial\sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^A}{\partial\sigma}]$$

$$=[A]^{(c)}+\frac{E}{(1-\nu^2)}\,[J]^A \tag{۱۴۸}$$

$$[J]^A=\begin{bmatrix}J_{11}^A & J_{12}^A\\ J_{21}^A & J_{22}^A\end{bmatrix} \tag{۱۴۹}$$

$$J_{11}^{\;A}=a_1^{\,2}+(1-a_1)^2+2\nu a_1(1-a_1)$$

$$J_{12}^{\;A}=J_{21}^{\;A}=a_1a_2+\nu a_1(a_4-1)$$

$$+\,(1-a_1)(a_4-1+\nu a_2)$$

$$J_{22}^{\;A}=(1-a_4)^2+a_2^{\,2}+2\nu a_2(a_4-1) \tag{۱۵۰}$$

بافرض $G=\frac{E}{(1-\nu^2)}$، ماتریس کشسان - مومسان برای گوشهٔ A از رابطهٔ زیربه دست می‌آید. درایه‌های ماتریسهای $[g]^A$ و $[h]^A$ نیز در ادامه‌آمده‌اند:

$$[D]_{ep}^{\;A}=[D]_e-G^2[g]^A\,[M^A]^{-1}\,[h]^A \tag{۱۵۱}$$

$$g_{11}^{\;A}=a_1C^2+(1-a_1)S^2+\nu[a_1S^2+(1-a_1)C^2]$$

$$g_{12}^{\;A}=a_2C^2+(a_4-1)S^2+\nu[a_2S^2+(a_4-1)C^2]$$

$$g_{21}^{\;A}=\nu[a_1C^2+(1-a_1)S^2]+a_1S^2+(1-a_1)C^2$$

$$g_{22}^{\;A}=\nu[a_2C^2+(a_4-1)S^2]+a_2S^2+(a_4-1)C^2$$

$$g_{31}{}^{A} = (1-\nu)(2a_1 - 1)CS$$

$$g_{32}{}^{A} = (1-\nu)(1 + a_2 - a_4)CS \qquad (۱۵۲)$$

$$h_{11}{}^{A} = a_1C^2 + (1-a_1)S^2 + \nu[a_1S^2 + (1-a_1)C^2]$$

$$h_{12}{}^{A} = \nu[a_1C^2 + (1-a_1)S^2] + a_1S^2 + (1-a_1)C^2$$

$$h_{13}{}^{A} = (1-\nu)(2a_1 - 1)CS$$

$$h_{21}{}^{A} = a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2 + \nu[a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2]$$

$$h_{22}{}^{A} = \nu[a_2C^2 + (a_4 - 1)S^2] + a_2S^2 + (a_4 - 1)C^2$$

$$h_{23}{}^{A} = (1-\nu)(1 + a_2 - a_4)CS \qquad (۱۵۳)$$

### ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ B

مقادیر $[A]^{(c)}$، $[M^B]$ و $[J]^B$ برای گوشهٔ B، مانند گوشه های دیگر به صورت زیر نوشته خواهند شد:

$$[A]^{(c)} = H^B(1 - m)\begin{bmatrix} W^B_{11} & W^B_{12} \\ W^B_{21} & W^B_{22} \end{bmatrix} + \overline{H}m\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1^2 \\ a_1^2 & a_1^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۵۴)$$

$$W_{11}{}^{B} = 2C^2S^2 + a_1{}^2 + (1-a_1)^2 - 8a_1C^2S^2(1-a_1)$$

$$W_{12}{}^{B} = W_{21}{}^{B} = -2C^2S^2 + 2a_1(1-a_1) + 8a_1C^2S^2(1-a_1)$$

$$W_{22}{}^{B} = 2C^2S^2 + a_1{}^2 + (1-a_1)^2 - 8a_1C^2S^2(1-a_1) \qquad (۱۵۵)$$

$$[M^B] = [A]^{(c)} + [\frac{\partial F^B}{\partial \sigma}]^T[D]_e[\frac{\partial F^B}{\partial \sigma}] = [A]^{(c)} + \frac{E}{(1-\nu^2)}[J]^B \qquad (۱۵۶)$$

$$J_{11}{}^{B} = a_1{}^2 + (1-a_1)^2 + 2\nu a_1(1-a_1)$$

$$J_{12}{}^{B} = J_{21}{}^{B} = 2a_1(1-a_1) + \nu[a_1{}^2 + (1-a_1)^2]$$

$$J_{22}{}^{B} = a_1{}^2 + (1-a_1)^2 + 2\nu a_1(1-a_1) \qquad (۱۵۷)$$

ماتریس کشسان - مومسان برای گوشه B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. درایه های ماتریسهای $[g]^B$ و $[h]^B$ نیز در ادامه آمده‌اند:

$$g_{11}{}^{B} = a_1C^2 + (1-a_1)S^2 + \nu[a_1S^2 + (1-a_1)C^2]$$

$$g_{12}{}^{B} = \nu[a_1C^2 + (1-a_1)S^2] + a_1S^2 + (1-a_1)C^2$$

$$g_{21}{}^{B} = \nu[a_1C^2 + (1-a_1)S^2] + a_1S^2 + (1-a_1)C^2$$

$$g_{22}{}^{B} = a_1C^2 + (1-a_1)S^2 + \nu[a_1S^2 + (1-a_1)C^2]$$

$$g_{31}{}^{B} = (1-\nu)(2a_1 - 1)CS$$

$$g_{32}{}^{B} = (1-\nu)(1 - 2a_1)CS \qquad (۱۵۸)$$

$$h_{11}{}^{B} = a_1C^2 + (1-a_1)S^2 + \nu[a_1S^2 + (1-a_1)C^2]$$

$$h_{12}{}^{B} = \nu[a_1C^2 + (1-a_1)S^2] + a_1S^2 + (1-a_1)C^2$$

$$h_{13}{}^{B} = (1-\nu)(2a_1 - 1)CS$$

$$h_{21}{}^{B} = \nu[a_1C^2 + (1-a_1)S^2] + a_1S^2 + (1-a_1)C^2$$

$$h_{22}{}^{B} = a_1C^2 + (1-a_1)S^2 + \nu[a_1S^2 + (1-a_1)C^2]$$

$$h_{23}^{B} = (1-\nu)(1-2a_{1})CS \qquad (۱۵۹)$$

## ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ F

مقادیر $[A]^{(c)}$ ، $[M^{F}]$ و $[J]^{F}$ برای گوشهٔ F که از برخورد پهلوهای ۲ و ۶ به وجود آمده است - مانند گوشه های دیگر، به صورت زیر ارائه می شود:

$$[A]^{(c)} = H^{F}(1-m)\begin{bmatrix} W_{11}^{F} & W_{12}^{F} \\ W_{21}^{F} & W_{22}^{F} \end{bmatrix} + \overline{H} m a_{3}^{2} a_{5}^{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱۶۰)$$

$$W_{11}^{F} = 2C^{2}S^{2} + a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2} - 8a_{5}C^{2}S^{2}(1-a_{5})$$

$$W_{12}^{F} = W_{21}^{F} = -2C^{2}S^{2} + 2a_{5}(1-a_{5}) + 8a_{5}C^{2}S^{2}(1-a_{5})$$

$$W_{22}^{F} = 2C^{2}S^{2} + a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2} - 8a_{5}C^{2}S^{2}(1-a_{5}) \qquad (۱۶۱)$$

$$[M^{F}] = \frac{E}{(1-\nu^{2})}[J]^{(F)} + [A]^{(c)} \qquad (۱۶۲)$$

$$J_{11}^{F} = a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2} + 2\nu a_{5}(1-a_{5})$$

$$J_{12}^{F} = J_{21}^{F} = 2a_{5}(1-a_{5}) + \nu[a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2}]$$

$$J_{22}^{F} = a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2} + 2\nu a_{5}(1-a_{5}) \qquad (۱۶۳)$$

ماتریس کشسان - مومسان برای گوشهٔ F از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. درایه های ماتریسهای $[g]^{F}$ و $[h]^{F}$ نیز در ادامه آمده‌اند:

$$[D]_{ep}^{F} = [D]_{e} - G^{2}[g]^{F}[M^{F}]^{-1}[h]^{F} \qquad (۱۶۴)$$

$$g_{11}^{F} = (a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2} + \nu[(a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2}]$$

$$g_{12}^{F} = (a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2} + \nu[(a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2}]$$

$$g_{21}^{F} = (a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2} + \nu[(a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2}]$$

$$g_{22}^{F} = (a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2} + \nu[(a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2}]$$

$$g_{31}^{F} = (1-\nu)(2a_{5}-1)CS$$

$$g_{32}^{F} = (1-\nu)(1-2a_{5})CS \qquad (۱۶۵)$$

$$h_{11}^{F} = (a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2} + \nu[(a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2}]$$

$$h_{12}^{F} = (a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2} + \nu[(a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2}]$$

$$h_{13}^{F} = (1-\nu)(2a_{5}-1)CS$$

$$h_{21}^{F} = (a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2} + \nu[(a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2}]$$

$$h_{22}^{F} = (a_{5}-1)C^{2} - a_{5}S^{2} + \nu[(a_{5}-1)S^{2} - a_{5}C^{2}]$$

$$h_{23}^{F} = (1-\nu)(1-2a_{5})CS \qquad (۱۶۶)$$

## ماتریس کشسان - مومسان گوشهٔ G

مقادیر $[A]^{(c)}$ ، $[M^{G}]$ و $[J]^{G}$ برای گوشهٔ G به صورت زیر است:

$$[A]^{(c)} = H^{G}(1-m)\begin{bmatrix} W_{11}^{G} & W_{12}^{G} \\ W_{21}^{G} & W_{22}^{G} \end{bmatrix} + \overline{H} m a_{3}^{2}\begin{bmatrix} a_{5}^{2} & a_{5}^{2} \\ a_{4}^{2} & a_{4}^{2} \end{bmatrix} \qquad (۱۶۷)$$

$$W_{11}^{G} = a_{5}^{2} + (1-a_{5})^{2} + 2C^{2}S^{2}[1 + 4a_{5}(1-a_{5}) + 4a_{2}(2a_{2}-1)]$$

$$W_{12}{}^{G} = W_{21}{}^{G} = (a_2 - a_3)[a_5(1 - 4C^2S^2) + 1] - 2a_4C^2S^2$$

$$W_{22}{}^{G} = a_4{}^2 + (a_3 - a_2)^2 + 2C^2S^2 (a_3 - a_2 + a_4)^2 \tag{۱۶۸}$$

$$[M^G] = \frac{E}{(1-\nu^2)} [J]^G + [A]^{(c)} \tag{۱۶۹}$$

$$J_{11}{}^{G} = a_5{}^2 + (1 - a_5)^2 + 2\nu a_5(1 - a_5)$$

$$J_{12}{}^{G} = J_{21}{}^{G} = a_5(1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4) + a_2 - a_3 + \nu a_4$$

$$J_{22}{}^{G} = (a_2 - a_3)^2 + a_4{}^2 + 2\nu a_4 (a_2 - a_3) \tag{۱۷۰}$$

ماتریس کشسان-مومسان برای گوشهٔ G از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. درایه‌های ماتریسهای $[g]^G$ و $[h]^G$ نیز درادامه درج خواهند شد:

$$[D]_{ep}{}^{G} = [D]_e - G^2[g]^G[M^G]^{-1}[h]^G \tag{۱۷۱}$$

$$g_{11}{}^{G} = (a_5 - 1)C^2 - a_5S^2 + \nu[(a_5 - 1)S^2 - a_5C^2]$$

$$g_{12}{}^{G} = (a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2 + \nu[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$g_{21}{}^{G} = (a_5 - 1)S^2 - a_5C^2 + \nu[(a_5 - 1)C^2 - a_5S^2]$$

$$g_{22}{}^{G} = (a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2 + \nu[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$g_{31}{}^{G} = (1 - \nu)(2a_5 - 1)CS$$

$$g_{32}{}^{G} = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS \tag{۱۷۲}$$

$$h_{11}{}^{G} = (a_5 - 1)C^2 - a_5S^2 + \nu[(a_5 - 1)S^2 - a_5C^2]$$

$$h_{12}{}^{G} = (a_5 - 1)S^2 - a_5C^2 + \nu[(a_5 - 1)C^2 - a_5S^2]$$

$$h_{13}{}^{G} = (1 - \nu)(2a_5 - 1)CS$$

$$h_{21}{}^{G} = (a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2 + \nu[(a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2]$$

$$h_{22}{}^{G} = (a_3 - a_2)S^2 - a_4C^2 + \nu[(a_3 - a_2)C^2 - a_4S^2]$$

$$h_{23}{}^{G} = (1 - \nu)(a_3 - a_2 + a_4)CS \tag{۱۷۳}$$