

بررسی پایداری موضعی صفحات با استفاده از روش نوارهای محدود اسپلاین

مجتبی ازهری* و سینا هوشدار**

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۷۵/۷/۱۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۱/۲۶)

چکیده - روش نوارهای محدود اسپلاین برای تحلیل پایداری صفحات و ورقهای تا شده در اثر فشار و خمش طولی، فشار عرضی و برش بیان می‌شود. این روش قادر به منظور کردن شرایط مرزی مختلف است. ضرایب کمانش موضعی صفحات با شرایط مرزی مختلف تحت تأثیر فشار، خمش و برش محاسبه و همگرایی روش در مقابل افزایش تعداد گره‌ها در جهت طولی نشان داده می‌شود. اندرکنش پایداری صفحات با ابعاد گوناگون تحت تأثیر خمش و برش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

Local Buckling of Plates Using The Spline Finite Strip Method

M. Azhari and S. Hooshdar

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology

ABSTRACT- *The spline finite strip method (S.F.S.M.) for buckling analysis of plates and plate assemblies subjected to longitudinal compression and bending, transverse compression as well as shear is described. The method allows for the boundary conditions. Local buckling coefficients of plates with different boundary conditions under compression, bending and shear are calculated. Convergence studies with increasing number of section knots are described. The method is also applied to the study to the elastic local buckling interaction of bending and shear for plates with different aspect ratios.*

** کارشناس ارشد

* استادیار

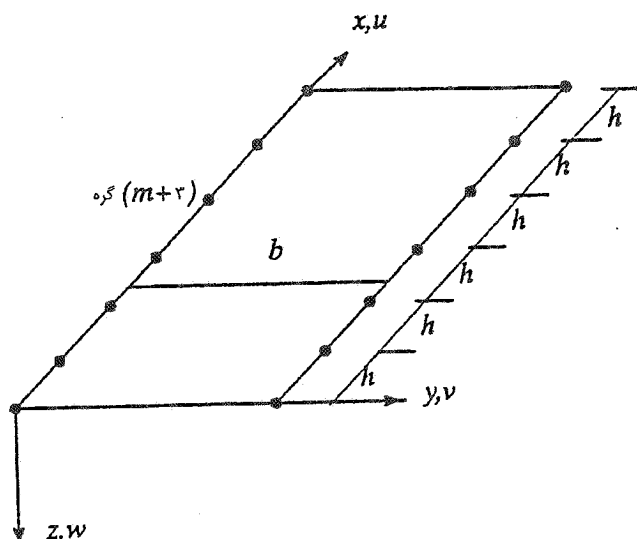
فهرست علائم	
نسبت طول به عرض ورق	a/b
عرض و ضخامت ورق	b, t
ماتریس کرنش خمشی	[B] _f
ماتریس صلبیت ورق	[D] _f
فواصل گره‌های طولی	h
ضریب کمانش موضعی	k
ماتریس سختی و ماتریس هندسی نوار	[k] _f , [g] _f
ماتریس سختی و ماتریس هندسی ورق	[K] _f , [G] _f
تعداد تقسیمات طولی	m
توابع شکل	[N] _f
انرژی کشسان خمش	U _f
حجم نوار	V
تغییر مکان ورق	w
کار نیروهای خارجی	W _f
دستگاه مختصات دکارتی	x, y, z
ضرایب توابع اسپلاین	a _i
بردارهای جابه‌جایی قائم و دوران در گره‌های z, k	{a _j }, {a _k }, {β _j }, {β _k }
بردار تغییر مکان خمشی نوار	{δ _f }
بردار کرنش خمشی	{ε _f }
ضریب معادله مقادیر ویژه	λ
ضریب پواسان	ν
انحنای ورق	ρ _x , ρ _y , ρ _{xy}
تشوهای طولی، عرضی و برشی	σ _x , σ _y , τ
بردار تنش	{σ _f }
توابع اسپلاین موضعی	ψ _i (x)

۱- مقدمه

با گسترش کاربرد صفحات نازک در اعضای سازه‌های فولادی مدرن، پیش بینی کمانش موضعی این گونه صفحات اهمیت ویژه‌ای یافته‌است. مثالهایی از این نمونه شامل مقاطع برجهای پلهای معلق، مقاطع I و نیز قوطی شکل در تیرورقهای پلها با دهانه های بزرگ است. نظریه های کمانش که معادلات دیفرانسیل آنها فرمولبندی شده بود تا مدتها برای مثالهای ساده با شرایط مرزی و نیرویی مشخص به صورت بسته قابل حل بودند. ترنر و همکارانش [۱] در سال ۱۹۶۰ برای اولین بار، ماتریس هندسی را برای حل مسائل کمانش مطرح کردند. آنها این مفهوم را برای سازه‌های خرابایی و همچنین صفحات با اجزای مثلثی تحت تنش غشایی به کار گرفتند. پیشگامان بعدی برای تحلیل عددی کمانش صفحات به روش اجزای محدود، گالاگر [۲] و [۳]، پرزمنیسکی [۴] و زینکوویچ و اندرسون [۵] بوده‌اند. اگرچه روش اجزای محدود از قابلیت خوبی در تحلیل پایداری صفحات برخوردار است لیکن به دلیل حجم زیاد عملیات، این روش دارای محدودیتهایی هست. برای سازه‌های خاص که از صفحات منشوری تشکیل شده‌اند روش نوارهای محدود از قابلیت و کارایی بهتری بهره مند است.

مبدع روش نوارهای محدود را می‌توان چونگ [۶] دانست که با ارائه آن، کارایی روش در تحلیل صفحات مورد توجه محققان قرار گرفت. پرزمنیسکی [۷] برای اولین بار با استفاده از روش نوارهای

محدود به بررسی رفتار کمانش صفحات پرداخت و بدین ترتیب روش نوارهای محدود وارد حوزه مسائل عددی مربوط به کمانش شد. روش ارائه شده توسط پرزمنیسکی محدود به کمانش موضعی صفحات بود که توسط هنکوک [۸] برای کمانشهای جانبی^۲ و تغییر شکلی^۳ دنبال شد. پلانک و ویتربیک [۹] روش نوارهای محدود مختلط^۴ را گسترش دادند. در این روش جابجایی طولی المان که در نوارهای محدود عادی از توابع مثلثاتی استفاده می‌شد به صورت توابع مختلط در نظر گرفته شدند. از محاسن این روش، مدل کردن برش برای صفحات طویل را می‌توان نام برد. روش نوارهای محدود مختلط به طور مبسوط برای بررسی انواع کمانشها در تیرهای ساخته شده I شکل از ورق توسط ازهری و برادفورد [۱۰] مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۹۴ میلادی توسط این افراد المانهای حبابی توسعه داده شد و برای بررسی کمانش صفحات و مقاطع فولادی به کار گرفته شد [۱۱]. در کلیه مراجع ذکر شده قبلی شرایط مرزی صفحات و مقاطع در لبه های بارگذاری شده به صورت مفصلی در نظر گرفته شده بودند. در سال ۱۹۹۵ میلادی ازهری و برادفورد [۱۲] با به کارگیری دو نوع توابع مختلف این محدودیت را برطرف کردند. یکی از راههای از بین بردن محدودیتهای ذکر شده استفاده از توابع اسپلاین است که خصوصیات آن از سالها پیش شناخته شده بود، لیکن شروع کاربرد این توابع در مهندسی سازه را می‌توان از کارهای فن و چونگ [۱۳] دانست. آنها برای اولین بار از این توابع



شکل ۱- تقسیمات طولی نوار اسپلین

خارج از صفحه ورق در جهت طول آن با این توابع درونیابی شود، در این صورت این میدان جابه‌جایی به صورت جمع $m+3$ جمله از توابع B_m اسپلین خواهد بود

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i \Psi_i(x) \quad (1)$$

که در آن $\psi_i(x)$ یک تابع اسپلین موضعی است و a_i کمیت‌هایی هستند که بایستی تعیین شوند. یک تابع اسپلین موضعی تابعی درجه سه است که به صورت قطعه‌ای^۸ به شکل زیر بیان می‌شود و دارای دو مرتبه مشتق پیوسته است.

$$\Psi(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ (x_{i+2} - x)^3 & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ \text{در غیر این صورت} & \end{cases} \quad (2)$$

شکل تابع اسپلین موضعی و مشتقات آن در شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) آورده شده‌اند. تابع $\psi(x)$ برای ارضای شرایط سرحدی

اسپلین موضعی برای درونیابی طولی نوارها در تحلیل صفحات استفاده کردند. توابع اسپلین بعدها نیز توسط یانگ و چنگ [۱۴] و میوزاوا [۱۵] با کاربردهای متفاوت در تحلیل سازه‌ها به کار گرفته شدند. تفاوت اصلی بین روش نوارهای محدود اسپلین با روش نوارهای محدود و عادی و نیز مختلط در وجود گره‌های متفاوت در طول هر نوار است که در واقع روش نوارهای محدود اسپلین را به روش اجزای محدود نزدیک می‌کنند. روش نوارهای محدود اسپلین توسط هنکوک و لاو [۱۶] و نیز وان ارپ و میکن [۱۷] برای تعیین بارکمانش صفحات به کار رفته است. این روش به علت داشتن گره‌های طولی دارای درجات آزادی بیشتری نسبت به سایر روش‌های موجود نوارهای محدود است و بالطبع به امکانات کامپیوتری قویتری نیاز دارد. توانایی روش نوارهای محدود اسپلین در مدل کردن سازه با اعمال شرایط مرزی مختلف و نیز تعیین کمانش برشی صفحات با طولهای محدود از مزایای عمده این روش است.

در این مقاله با استفاده از روش نوارهای محدود اسپلین و برطرف کردن محدودیتهای شرایط مرزی لبه‌های بارگذاری شده، یک نرم افزار کامپیوتری تهیه شده که بر اساس آن می‌توان کمانش صفحات را تحت بارگذاریها و شرایط مرزی مختلف تعیین کرد. مثالهایی برای تعیین صحت جوابها ارائه و نیز بار بحرانی صفحات مختلفی تعیین می‌شوند. اندرکنش^۵ برش و خمش برای صفحات با ابعاد مختلف تعیین و به صورت نمودار نشان داده خواهند شد.

۲- سنجش نظری

چون هدف این مقاله بررسی کمانش موضعی^۶ صفحات و مقاطع است لذا در این بخش به تعیین نظریه مربوط به این نوع کمانش که دارای درجات آزادی خارج صفحه‌ای^۷ است پرداخته خواهد شد. در این روش سازه متشکل از ورق به نوارهایی که دارای $m+3$ گره به فواصل h در جهت طولی هستند مطابق شکل (۱) تقسیم می‌شود.

۳- تابع اسپلین

تابع B_m اسپلین یک چند جمله‌ای از درجه سه است که در ریاضیات برای درونیابی استفاده می‌شود. چنانچه میدان جابه‌جایی

۴- میدان جابه جایی

میدان جابه جایی خارج از صفحه، w برای یک نوار که در جهت طولی با توابع اسپلاین و در جهت عرضی با توابع هرمیت درونیایی شده به صورت زیر است.

$$w = [N_f] [\Psi] \{ \delta_f \} \quad (3)$$

که در آن

$$N_1 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad N_2 = \eta(1 - 2\eta + \eta^2) \quad (4)$$

$$N_3 = 3\eta^2 - 2\eta^3 \quad N_4 = \eta(\eta^2 - \eta) \quad \eta = \frac{y}{b}$$

ماتریس $[\Psi]$ متشکل از بردارهای سطر $\langle \psi_i \rangle$ است که دارای $m+3$ عضو به شرح زیر است.

$$\langle \Psi_i \rangle = \langle \Psi_{-1} \Psi_0 \Psi_1 \dots \Psi_{m+1} \rangle \quad (5)$$

همچنین متغیرهای موجود در $[\delta_f]$ بردارهای ستونی هستند که هر یک $m+3$ عضو به شرح زیر دارند

جابه جایی قائم برای گره‌های مقطعی روی خط گره j

$$[a_j] = [a_{-1} a_0 \dots a_{m+1}]_j^T \quad (6)$$

دوران حول گره‌های مقطعی در خط گره j

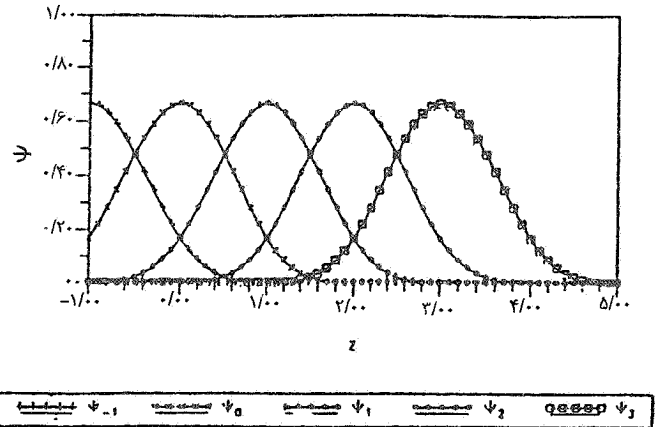
$$[\beta_j] = [\beta_{-1} \beta_0 \dots \beta_{m+1}]_j^T \quad (7)$$

جابه جایی قائم برای گره‌های مقطعی روی خط گره k

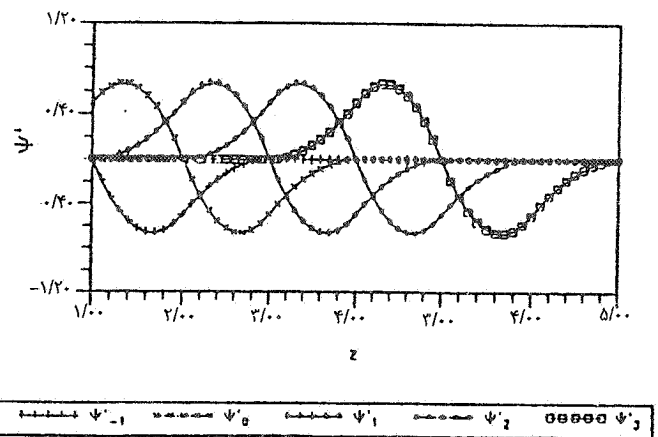
$$[a_k] = [a_{-1} a_0 \dots a_{m+1}]_k^T \quad (8)$$

دوران حول گره‌های مقطعی در خط گره k

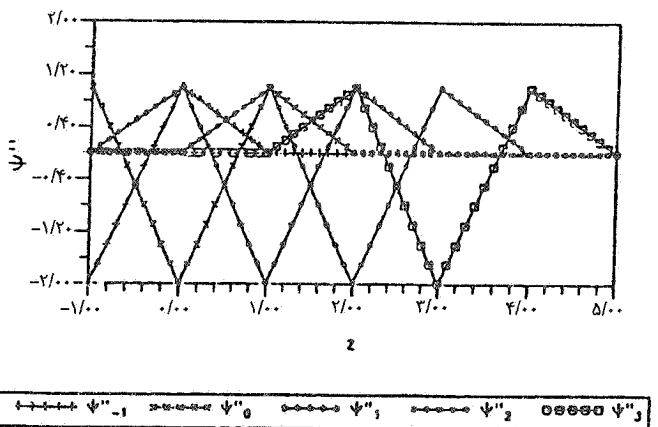
$$[\beta_k] = [\beta_{-1} \beta_0 \dots \beta_{m+1}]_k^T \quad (9)$$



شکل ۲- تابع اسپلاین موضعی



شکل ۳- مشتق مرتبه اول تابع اسپلاین موضعی



شکل ۴- مشتق مرتبه دوم تابع اسپلاین

مختلف در لبه های بارگذاری شده بایستی تصحیح شود. این تصحیح بسته به شرایط سرحدی مختلف که با حذف ضرایب a_i انجام می‌گیرد به طور مبسوط در مرجع [۱۸] آمده است.

که $[B_f]$ ، ماتریس کرنش خمشی و $\{\delta_f\}$ بردار تغییر مکان خمشی نوار است. از طرفی رابطه بین میدان تنش و میدان کرنش برای صفحات ایزوتروپیک به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{\sigma_f\} = [D_f] \{\epsilon_f\} \quad (15)$$

که در آن

$$D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

با گذاشتن معادله های (14) و (15) در معادله (10) خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{\gamma} \{\delta_f\}^T [k_f] \{\delta_f\} \quad (17)$$

که در آن $[k_f]$ ماتریس سختی است که از معادله زیر تعیین می شود

$$[k_f] = \int_V [B_f^T] [D_f] [B_f] dV \quad (18)$$

کار نیروهای خارجی در اثر اعمال تنشهای غشایی برابر خواهد بود

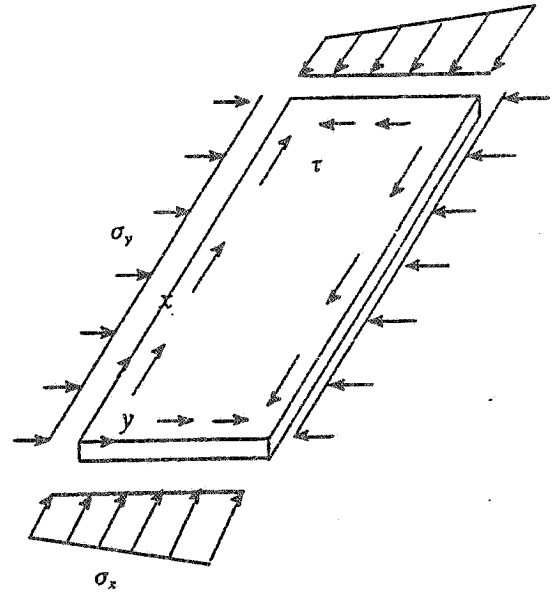
$$W_f = -\frac{1}{\gamma} \int_V \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dV \quad (19)$$

با گذاشتن معادله (3) برای جابه جایی w و مشتقات نسبی آن، در معادله (19) خواهیم داشت

$$W_f = -\frac{1}{\gamma} \{\delta_f\}^T [g_f] \{\delta_f\} \quad (20)$$

که در آن $[g_f]$ ماتریس پایداری نوار اسپلاین بوده و برابر است با

$$[g_f] = [g_{f1}] + [g_{f2}] + [g_{f3}] \quad (21)$$



شکل ۵- میدان تنش در نوار اسپلاین

۵- ماتریسهای سختی و پایداری

شکل (۵) میدان تنش اعمالی روی یک نوار منفرد را در آستانه کنانش نشان می دهد. این میدان شامل تنشهای فشاری طولی است که به صورت خطی در عرض ورق تغییر می کنند، تنش برشی و نیز تنش عرضی فشاری هستند. انرژی خمشی نوار در اثر تغییر شکلهای کمانش به صورت زیر است

$$U_f = \frac{1}{\gamma} \int_V \{\sigma_f\}^T \{\epsilon_f\} dV \quad (10)$$

که در آن V حجم نوار و

$$\{\sigma_f\} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T \quad (11)$$

$$\{\epsilon_f\} = [\rho_x, \rho_y, \rho_{xy}]^T \quad (12)$$



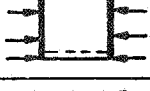

$$\rho_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \rho_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \rho_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (13)$$

با مشتقگیری از معادله (3) بردار کرنش به صورت زیر خواهد شد

$$\{\epsilon_f\} = [B_f] \{\delta_f\} \quad (14)$$

که اجزای آن به ترتیب زیر است

جدول ۱- ضریب کمانش موضعی ورق مربعی تحت فشار

ضریب کمانش موضعی (k)		شرایط مرزی ورق
مرجع [۱۲]	روش نوارهای محدود اسپلاین	$\frac{a}{b}=1$
۴/۰۰۰	۴/۰۰۰۶	
۷/۶۸۴	۷/۷۱۵	
۶/۶۴۰	۶/۶۴۹	
۱۰/۰۷	۱۰/۰۸	

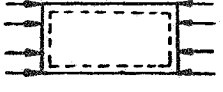

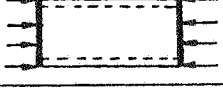

$$[g_{f1}] = \int_v \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} [N_f]^T \sigma_x [N_f] \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dV$$

$$[g_{f2}] = \int_v [\psi] \frac{\partial [N_f]^T}{\partial y} \sigma_y \frac{\partial [N_f]}{\partial y} [\Psi]^T dV$$

$$[g_{f3}] = \int_v [\psi] \frac{\partial [N_f]^T}{\partial y} \tau_{xz} [N_f] \frac{\partial[\Psi]}{\partial x} dV \quad (22)$$

با اعمال مناسب شرایط سرحدی سازگاری و تعادل برای نوارها، ماتریس سختی کل $[K_f]$ و ماتریس پایداری کل $[G_f]$ از مونتاژ کردن $[k_f]$ و $[g_f]$ حاصل خواهند شد و نهایتاً معادله کمانش صفحه یا مقطع به صورت معادله مقادیر مشخصه زیر خواهد بود که در آن مقادیر λ ضرایب بار کمانش موضعی عضو سازه‌ای برای درجات آزادی خمشی است.

جدول ۲- ضریب کمانش موضعی ورق مستطیلی تحت فشار

ضریب کمانش موضعی (k)		شرایط مرزی ورق
مرجع [۱۲]	روش نوارهای محدود اسپلاین	$\frac{a}{b}=2$
۴/۰۰۰	۴/۰۰۰۷	
۶/۸۵۲	۶/۸۵۵	
۴/۸۵۱	۴/۸۴۱	
۷/۸۸۴	۷/۸۹۱	

$$(\{K_f\} - \lambda \{G_f\}) = 0. \quad (23)$$

۶- مطالعه‌های موردی

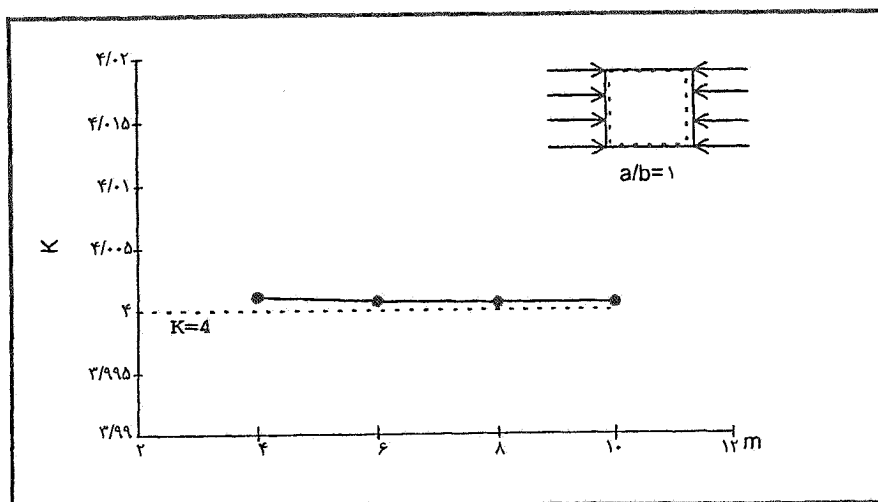
کلیات: براساس نظریه ارائه شده، یک برنامه کامپیوتری به نام SPLN3DL برای تعیین بار کمانش صفحات و مقاطع با شرایط مرزی و انواع بارگذاریهای مختلف تدوین شده است. ساختار کلی برنامه و نیز زیر برنامه های آن همراه با بلوکهای مختلف اطلاعاتی و محاسباتی به طور مشروح در مرجع [۱۸] آمده است. این برنامه قادر است بار بحرانی ناشی از تنشهای غشایی را برای صفحات و صفحات تا شده محاسبه کند. برای حل مسئله مقادیر ویژه از برنامه مؤثر متمتیکا^۹ استفاده می شود که به صورت مناسب با برنامه فوق ارتباط پیدا می کند.

۷- ورق تحت تأثیر تنشهای فشاری

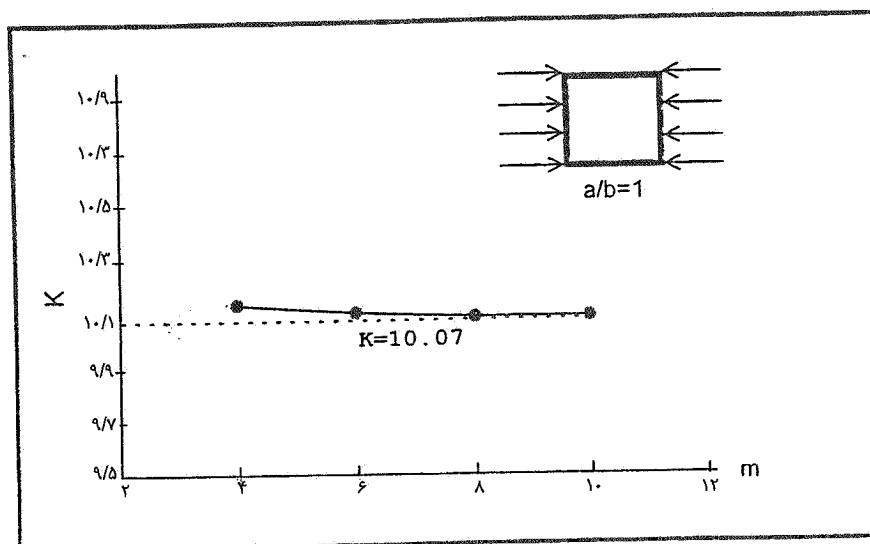
تنش بحرانی صفحات در محدوده کشسان از معادله زیر تعیین می شود [۲۰].

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E t^3 k}{12(1 - \nu^2) b^3} \quad (24)$$

که در آن b و t به ترتیب عرض و ضخامت صفحه، E و ν مدول کشسانی و ضریب پواسون و k نیز ضریب کمانش موضعی صفحه اند. k یک کمیت بدون بعد است و در واقع تعیین کننده مقاومت ورق در مقابل ناپایداری موضعی است. ضریب k بستگی به هندسه ورق، بارگذاری و شرایط سرحدی دارد. جدولهای (۱) و (۲) مقادیر k را برای صفحات مربعی و مستطیلی با شرایط مرزی



شکل ۶- منحنی تغییرات ضریب k برحسب m برای ورق چهار طرف مفصلی تحت فشار



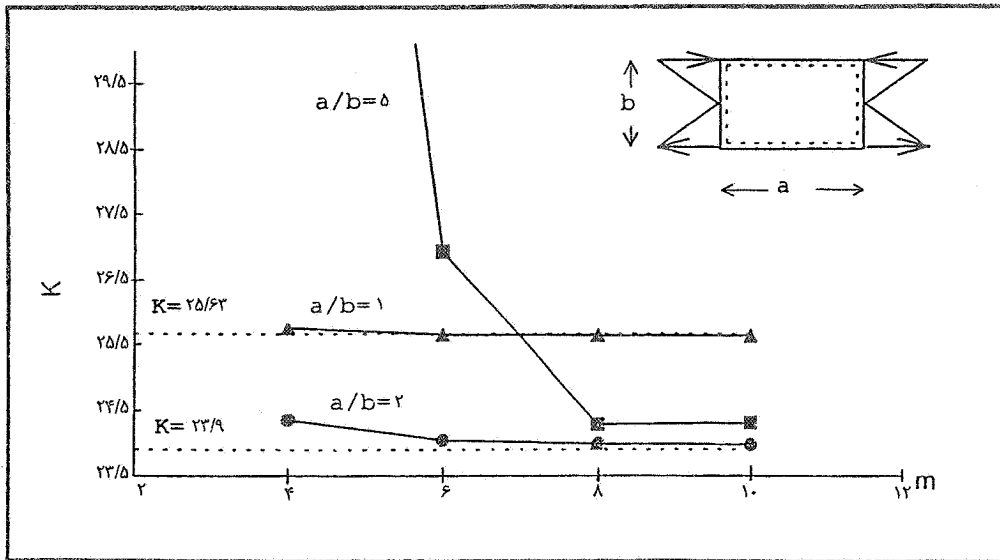
شکل ۷- منحنی تغییرات ضریب k برحسب m برای ورق چهار طرف گیردار تحت فشار

نوارها در جهت عرضی را تغییر داد. نمودارهای (۶) و (۷) برای دو نمونه ورق با شرایط هندسی و مرزی مختلف و تحت تأثیر تنشهای فشاری، منحنی تغییرات ضریب k برحسب m را نشان می‌دهند. همان گونه که نمودارها نشان می‌دهند همگرایی جوابها حساسیت زیادی به تقسیمبندی در جهت طولی ندارد. بررسی همگرایی صفحات با شرایط مرزی و هندسی گوناگون تحت تأثیر خمش و برش درشکلهای (۸) تا (۱۰) نشان داده شده است. برخلاف ورقهای تحت فشاریکنواخت، همگرایی نتایج بستگی زیادی به تعداد تقسیمبندی در جهت طولی دارد در حالی که افزایش تعداد نوارها در جهت عرضی اثر قابل توجهی برهمگرایی و رسیدن به جوابهای دقیق ندارد.

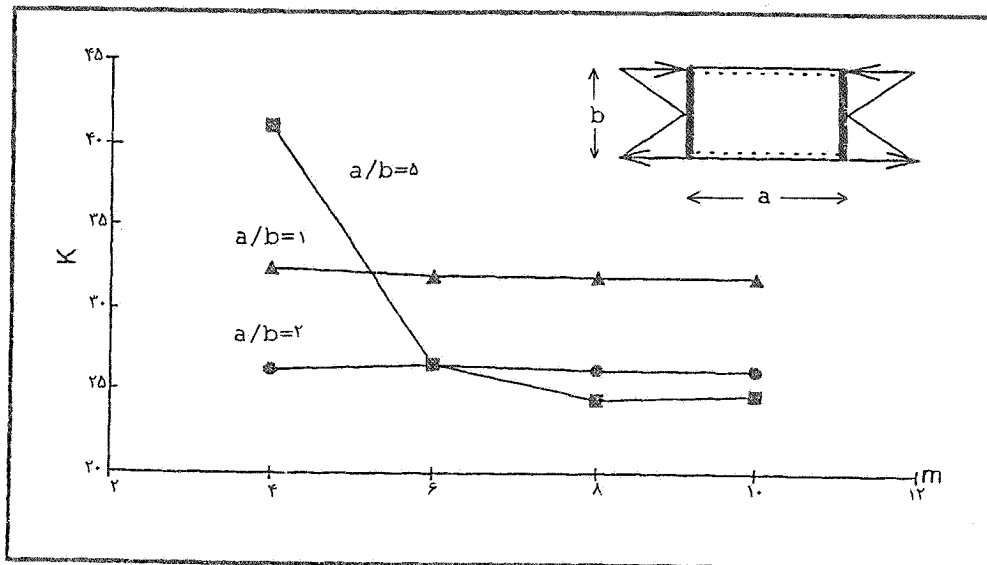
مقاومیت تحت بار طولی در یک جهت نشان می‌دهد. مقادیر محاسباتی با مقادیر دقیق از مراجع مربوطه مقایسه شده است. نتایج حاصله از روش نوارهای محدود اسپلاین دارای دقت بسیار خوبی در مقایسه با نتایج حاصله از روشهای دیگر است. در کلیه حالات جدولهای (۱) و (۲) مقدار m برای تقسیمات طولی عدد ۴ و تعداد نوارها با رعایت تقارن در جهت عرض ۲ در نظر گرفته شده اند.

۸- تأثیرات تقسیمبندیهای طولی در همگرایی

برای همگرا شدن نتایج در روش نوارهای محدود اسپلاین می‌توان دو پارامتر m (تعداد تقسیمات در جهت طولی) و تعداد



شکل ۸- منحنی تغییرات ضریب k برحسب m برای ورق چهار طرف مفصلی تحت خمش

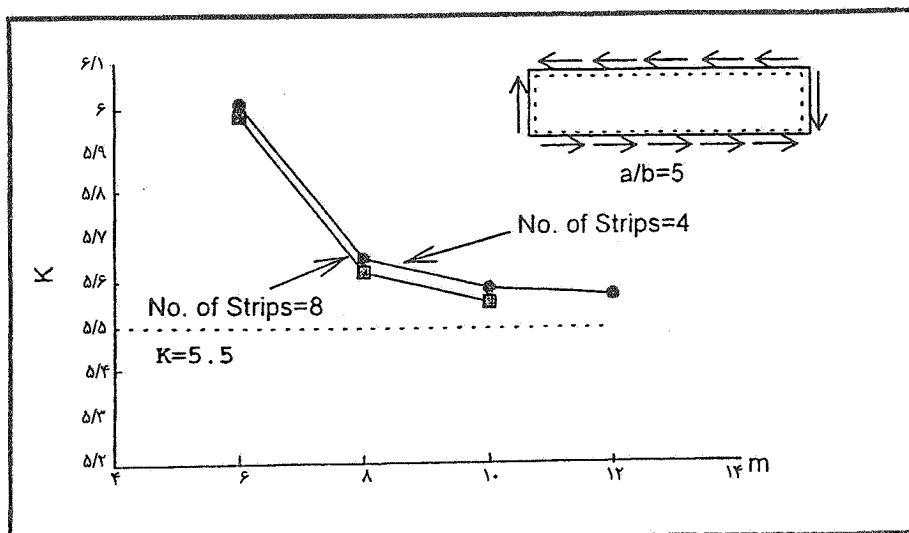


شکل ۹- منحنی تغییرات ضریب k برحسب m برای ورق دو طرف مفصلی و دو طرف گیردار تحت خمش

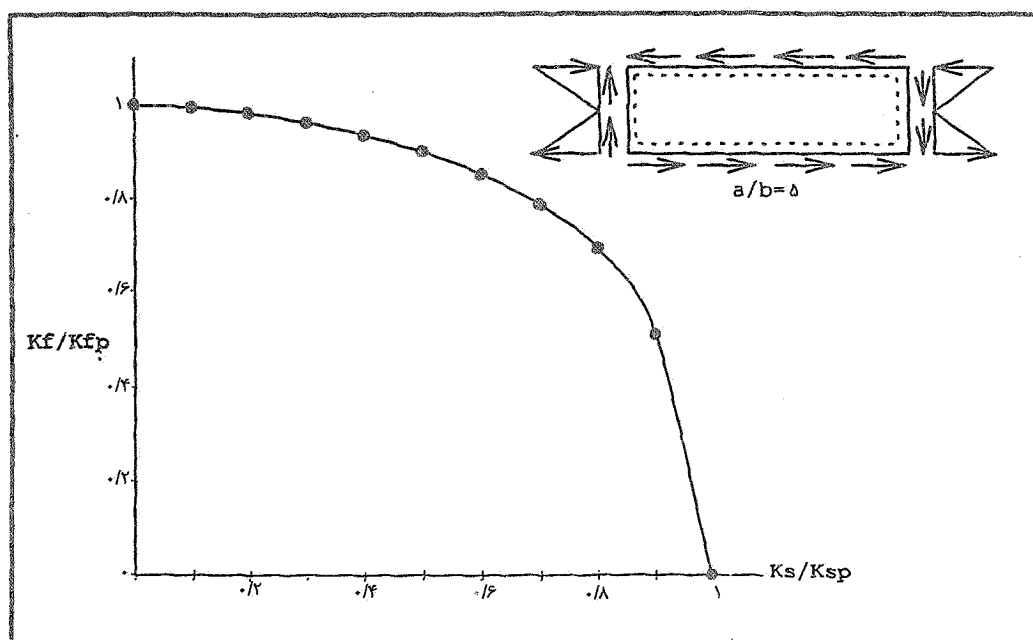
از تنشها (به عنوان مثال تنش خمشی) ماتریس سختی سازه را برای این درصد تنش تصحیح کرد. در این حالت سختی ورق با اعمال این درصد تنش کاهش خواهد یافت. سپس با حل یک مسئله مقادیر ویژه نسبت به تعیین تنش بحرانی دیگر (به عنوان مثال تنش برشی) اقدام کرد. این کار را می توان برای درصدهای مختلفی از هر کدام از تنشها انجام داد. منحنیهای (۱۱) و (۱۲) اندرکنش بین خمش و برش را برای صفحات با شرایط سرحدی مفصلی و نیز با ابعاد

۹- اندرکنش خمش و برش در صفحات

معمولاً ورقهای جان تیروورقهای I شکل در سازه های پل و ساختمانهای صنعتی تحت تأثیر عملکرد توأم خمش و برش هستند. لذا تعیین عملکرد و اثر متقابل دو پدیده کمانش خمشی و کمانش برشی از اهمیت ویژه ای برخوردارند. برای تعیین اندرکنش اصولاً بایستی تنش بحرانی صفحه را در حالت خمش و برش خالص به دست آورد. سپس با اعمال درصدی از تنش بحرانی یکی



شکل ۱۰- منحنی تغییرات ضریب k بر حسب m برای ورق تحت برش

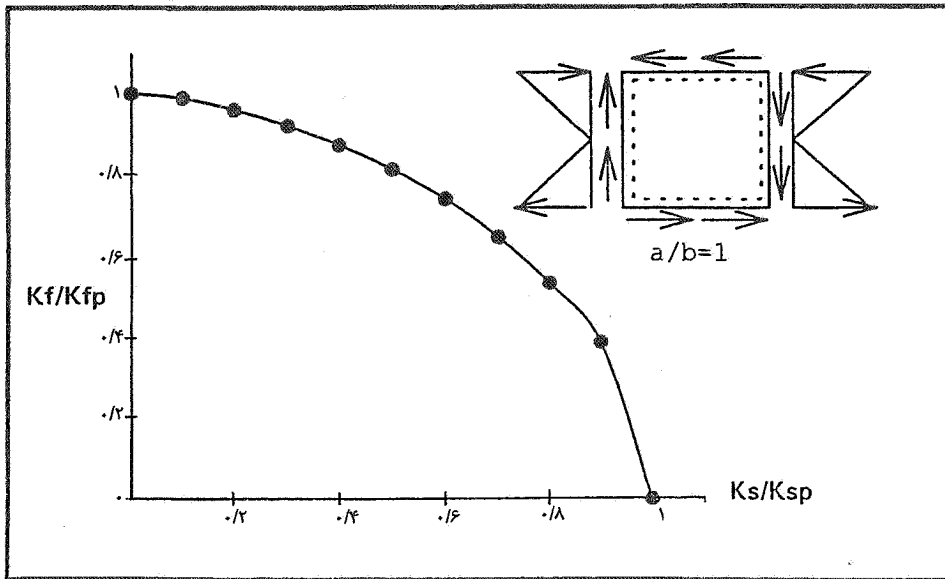


شکل ۱۱- اندرکنش خمش و برش برای ورق مستطیلی

۱۰- نتیجه گیری

با توسعه روش نوارهای محدود اسپلین با به حساب آوردن شرایط مرزی مختلف و تدوین یک برنامه کامپیوتری، صفحات مختلفی با ابعاد و شرایط بارگذاری و سرحدی گوناگون مورد بررسی ناپایداری موضعی قرار گرفتند. نتایج حاصله دارای همخوانی بسیار مناسبی با مقادیر نظری در حالات موجود بود. تخییر شرایط

هندسی متفاوت نشان می دهند. منحنی اثر متقابل برش و خمش در صفحات طولیل به شکل دایره است و سختی سیستم پس از اعمال درصدهای بالاتری از تنش (حدود ۸۰٪) به طور ناگهانی کاهش می یابد در حالی که منحنی اندرکنش در صفحات مربعی شکل به صورت سهمی بوده و به صورت تدریجی سختی صفحه با اعمال تنشها کاهش پیدا می کند.



شکل ۱۲- اندرکنش خمش و برش برای ورق مربعی

صفحات تحت اعمال خمش و برش دارای اثر قابل ملاحظه‌ای در همگرایی بود. منحنی اندرکنش صفحه تحت تأثیر برش و خمش برای صفحات مربعی شکل به صفحات طویل، از دایره به سمت سهمی میل کرد. این منحنیها کاربرد زیادی در طراحی جان تیرهای ساخته شده از ورق دارند.

سرحدی در لبه‌های بارگذاری شده صفحات تغییر محسوسی در تعیین بار کمانش صفحات طویل نداشته در حالی که برای صفحات کوتاه این تأثیر قابل ملاحظه بود. با در نظر گرفتن دو نوار طولی در حالت متقارن و چهار نوار طولی در حالت نامتقارن، همگرایی مناسبی حاصل می‌شد در حالی که تقسیمبندیهای طولی نوار اسپلین، علی‌رغم تأثیر ناچیز برای صفحات تحت فشار، برای

واژه نامه:

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|----------------|
| 1- spline finite strip | 5- interaction | 8- piecewise |
| 2- lateral buckling | 6- local buckling | 9- mathematica |
| 3- distortional buckling | 7- out-of-plane degrees of freedom | |
| 4- complex finite strip | | |

مراجع

- Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Nelson, R. J., "Large Deflection of Structures Subjected to Heating and External Loads", *Journal of Aerospace Science*, Vol. 27, No. 2, pp. 97-106, 1960.
- Gallager, R. H., Padlog, J., "Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 6, 1963.
- Gallager, R. H., Gellaty, R. A., Padlog, J., and Mallett, R. H., "A Discrete Element Procedure for Thin-Shell Instability Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 1, pp. 138-145, 1976.
- Przemieniecki, J. S., "Discrete Element Method for Stability Analysis of Complex Structures," *Aeronautical Journal*, Vol. 72, No. 696, pp. 1077-1086, 1968.
- Anderson, R. G., Iron, B.M., Zienkiewicz, O. C., "Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements," *International Journal of Solids Structures*, Vol. 4, No. 10, 1968.
- Cheung, Y. K., *Finite Strip Method in Structural*

- Analysis*, Pergoman Press, New York, 1976.
7. Przemieniecki, J. S., "Finite Element Structural Analysis of Local Instability," *AIAA, Journal*, Vol. 11, pp. 33-39, 1973.
 8. Hancock, G. H., "Local, Distortional and Lateral Buckling of I-beams," *Journal of Structural Div., ASCE*, Vol. 104, pp. 1787-1798, 1978.
 9. Plank, R. J., and Wittrick, W. H., "Buckling Under Combined Loading of Thin Flat-Walled Structures by a Complex Finite Strip Method," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 323-339, 1974.
 10. Bradford, M. A., and Azhari, M. "Buckling Modes in I-Beams by a Complex Finite Strip Method," *Australian Civil Engineering Transaction*, Vol., CE36, No. 3, pp. 219-225, 1994.
 11. Azhari, M., and Bradford, M. A., "Local Buckling by the Complex Finite Strip Method Using Bubble Functions," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 120, pp. 43-57, 1994.
 12. Azhari, M., and Bradford, M. A., "Buckling of Plates with Different End Conditions Using The Finite Strip Method," *Computers and Structures*, Vol. 56, No. 1., pp. 75-83, 1995.
 13. Fan, S. C., and Cheung, Y. K., "Analysis of Shallow Shells by Spline Finite Strip Method," *Engineering Structures*, Vol. 5, pp. 225-262, 1983.
 14. Yang, H. Y., and Chong, K. P., "Finite strip Method with X-Spline Functions", *Computers and Structures*, Vol. 18, No. 1, pp. 127-132. 1984.
 15. Mizusawa, T., Kajita, T., and Naruoka, M., "Buckling of Skew Plate Structures Using B-Spline Functions," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 15, pp. 87-96, 1980.
 16. Lau, S. C. W., and Hancock, G. J., "Buckling of Thing Flat-Walled Structures by a Spline Finite Strip Method," *Thin-Walled Structures*, Vol. 4, pp. 269-294, 1986.
 17. Van Erp, G. M., and Menken, C. M., "The Spline Finite Strip Method in the Buckling Analysis of Thin-Walled Structures," *Communication in Applied Numerical Methods*, Vol. 6, pp. 477-484, 1990.
 ۱۸. هوشدار، سینا، کمانش محلی ورقهای تا شده به کمک روش نوارهای محدود اسپلاین، تز کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۳۷۵
 19. Handbook of Structural Stability, Edited by Column Research Committee of Japan, Corona Publication, Company, Tokyo, 1971.
 20. Allen, H. B., Bulson, P. S., *Background to Buckling*, McGraw-Hill, London, 1980.