

# حل جریان دائمی دو بعدی بر روی یک شبکه تطبیقی بی سازمان

کریم مظاهری\* و بامداد لسانی\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۲/۲۱ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۶/۸/۲۵)

چکیده - معادله‌های دو بعدی اویلر بر روی یک شبکه تطبیقی بی سازمان حل شده است. برای این منظور ابتدا یک شبکه بی سازمان اولیه شامل مثلثهای "دلانی" با استفاده از الگوریتم جابه جایی قطرها و جبهه پیشرونده تولید می‌شود. با به کارگیری روش حجم محدود، معادله‌های اویلر گسسته شده و با استفاده از روش جریان بالادست با تکنیک تجزیه تفاضل دبی و با بهره گیری از مقادیر توسط "رو" معادله‌ها بر روی شبکه مذکور حل می‌شوند. در نواحی از میدان که گرادیان بالایی دارند شبکه به صورت خودکار ریز می‌شود تا دقت جواب بالاتر رود. چگونگی عمل تطبیقی کردن و معیارهای مربوط به آن توضیح داده شده است. برای نشان دادن نتایج، جریان حول ایرفویل بررسی شده است. از نتایج به دست آمده بر روی جریان دائمی حول ایرفویل مشاهده می‌شود که فرایند موضعی تطبیقی کردن تا چه حد بر روی دقت جواب مؤثر است و چون شبکه فقط در محلی که موج ضربه‌ای قوی وجود دارد ریز شده است با کمترین تعداد سلول این عمل انجام شده است.

## Adaptive Solution of Steady Two Dimensional Flow on an Unstructured Grid

K. Mazaheri and B. Lesani

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

**ABSTRACT-** Two-dimensional Euler equations have been solved on an unstructured grid. An upwind finite volume scheme, based on Roe's flux difference splitting method, is used to discretize the equations. Using advancing front method, an initial Delaunay triangulation has been made. The adaptation procedure involves mesh enrichment coarsening in regions of flow with high low gradients of flow properties, according to an introduced adaptation criteria. To validate the procedure, a couple of internal and external steady flows are solved. One may see the effectiveness of introducing relatively few cells and the local adaptation algorithm on accuracy. Solution dependency on grid is also studied.

\* دانشیار      \*\* دانشجوی کارشناس ارشد

$A$	مساحت سلول، معادله (۳)، $m^2$	خارج عمود بر ضلع مثلث، معادله (۸)، بی بعد	$u_{  }$	مولفه موازی ضلع از سرعت کل، معادله (۸)، $\frac{m}{s}$
$c$	سرعت صوت، معادله (۸)، $\frac{m}{s}$	مولفه عمودی بردار یکه رو به خارج عمود بر ضلع مثلث، معادله (۸)، بی بعد	$v$	مولفه عمودی سرعت کل، معادله (۲)، $\frac{m}{s}$
$\vec{dS}$	بردارى به اندازه وجه سلول و جهت عمود بر آن، معادله (۲۱)، $m$	فشار سیال، معادله (۲)، $\frac{N}{m^2}$	$\rho$	چگالی سیال، معادله (۲)، $\frac{Kg}{m^3}$
$E$	انرژی کل واحد جرم سیال، معادله (۲)، $\frac{J}{Kg}$	مولفه افقی سرعت کل، معادله (۲)، $\frac{m}{s}$	$\lambda$	مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین، معادله (۱۰)، $\frac{m}{s}$
$h_0$	انتالی کل، معادله (۲)، $\frac{J}{Kg}$	مولفه عمود بر ضلع سرعت کل، معادله (۶)، $\frac{m}{s}$		
$n_j$	مولفه افقی برداریکه رو به			

### ۱- مقدمه

که مختصات هندسی این مثلثها در آن نگهداری می شود از نوع درختی است تا در صورت لزوم بتوان شبکه ریز شده را دوباره درشت کرد.

در چند سال اخیر استفاده از شبکه‌های بی سازمان در حل مسائل مکانیک سیالات گسترش زیادی یافته است. یکی از علتهای این موضوع سهولت شبکه بندی حول اجسام پیچیده است [۱-۴]. این مطلب در بسیاری از مسائل کاربردی دینامیک سیالات از قبیل دینامیک سیال تراکم پذیر غیر لزج، خصوصاً در صورتی که هندسه مسئله پیچیده باشد، اهمیت می یابد. در میان روشهای مثلثی کردن خودکار به روشی بر می خوریم که به مثلث بندی "دلانی" معروف است. این مثلث بندی با خواص ویژه اش توسط دلانی [۵] مطرح شد. برای ایجاد این نوع مثلث بندی نیز روشهای گوناگونی وجود دارد که روشی که در این مقاله از آن استفاده شده است از روش جابه جایی قطرها برای ایجاد مثلثهای دلانی [۶] و از روش جبهه پیشرونده [۷] برای تولید نقاط جدید استفاده می کند [۸ و ۹]. برای حل معادله‌های جریان بر روی شبکه‌های بی سازمان روشهای مختلفی ارائه شده که می توان به روشهای تفاضل محدود، اجزای محدود و حجم محدود اشاره کرد. روش اجزای محدود و حجم محدود در این زمینه کاربرد بیشتری دارند و روشی که در این مقاله از آن استفاده شده روش حجم محدود است که با استفاده از روش تجزیه تفاضل دبی و با بهره گیری از مقادیر متوسط "رو" معادله‌ها حل می شوند [۱۰]. بعد از حل معادله‌ها بر روی شبکه دلانی اولیه در نواحی از میدان که گرادیان کمیت‌های جریان زیاد است شبکه ریز می شود و این ریز شدن به صورتی است که مثلثهای جدید هم تا حد امکان به مثلثهای متساوی الاضلاع شبیه‌اند [۱۱]. سازمان اطلاعاتی

### ۲- معادله‌های حاکم

معادله‌های اویلر در دو بعد را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

که در آن:

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uh_0 \end{Bmatrix} \quad G = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vh_0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

### ۳- گسسته کردن معادله‌ها بر روی حجم محدود

در صورتی که از معادله اویلر روی سطح سلول انتگرال گرفته شود و انتگرال روی سطح به انتگرال روی مرز تبدیل شود خواهیم داشت:

$$\iint_{\Omega_{ij}} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \oint_{\partial\Omega_{ij}} (Fdy - Gdx) = 0 \quad (3)$$

عبارت اول را می توان به صورت میانگین تغییرات  $U$  روی سلول در نظر گرفت و عبارت دوم نیز به صورت مجموع روی

سه وجه در می آید:

$$A \frac{d\bar{U}}{dt} + \sum_{i=1}^3 (F\Delta y - G\Delta x)_i = 0 \quad (4)$$

سرعت موجها برابر خواهد بود با:

$$\lambda_1 = \hat{u}_\perp - \hat{c} \quad (10)$$

$$\lambda_2 = \hat{u}_\perp \quad (11)$$

$$\lambda_3 = \hat{u}_\perp \quad (12)$$

$$\lambda_4 = \hat{u}_\perp + \hat{c} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن اندیس L و R برای مقادیر چپ و راست سلول، مقادیر میانگین "رو" به این صورت تعریف می شوند:

$$w = \frac{\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (14)$$

$$\hat{\rho} = \left( \frac{w}{\rho_L} + \frac{(1-w)}{\rho_R} \right)^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{u} = u_L w + u_R (1-w) \quad (16)$$

$$\hat{v} = v_L w + v_R (1-w) \quad (17)$$

$$\hat{h}_\bullet = h_{\bullet L} w + h_{\bullet R} (1-w) \quad (18)$$

$$\hat{c} = \sqrt{(\gamma - 1) [\hat{h}_\bullet - (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)/2]} \quad (19)$$

#### ۴- حل معادله‌ها

برای حل معادله‌ها ابتدا یک شرط اولیه برای کل میدان تعیین می شود. این شرط اولیه در کار حاضر همان شرایط مرز خارجی در نظر گرفته شده است. برای حل، از این شرط اولیه با قدمهای زمانی به جواب نهایی خواهیم رسید، به عبارت دیگر مانند اکثر روشهای عددی حل معادله‌های جریان، برای مسایل دائمی نیز روش حل عملاً روش غیر دائمی است. از معادله زیر برای گام برداشتن تا زمان نهایی استفاده می شود

در صورتی که طول ضلع را  $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  و بردار نرمال (یکه، عمود، برونسو) وجه مثلث را  $\hat{n} = n_i \hat{i} + n_j \hat{j}$  و بردار یکه موازی وجه مثلث را  $\hat{n}' = -n_j \hat{i} + n_i \hat{j}$  در نظر بگیریم می توان معادله (۴) را به صورت:

$$A \frac{d\bar{U}}{dt} + \sum_{i=1}^3 F_n^{(1)} \Delta_{s_i} = 0 \quad (5)$$

نوشت که در آن:

$$F_n = \begin{Bmatrix} \rho u_\perp \\ \rho u_\perp u + p n_i \\ \rho u_\perp v + p n_j \\ \rho u_\perp h_\bullet \end{Bmatrix} \quad (6)$$

در روش تجزیه تفاضل دبی "رو" شار اضلاع به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$F(U_L, U_R) = \frac{1}{\gamma} (F_L + F_R) - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^3 |\hat{\lambda}_k| \Delta V_k \hat{R}_k \quad (7)$$

اندیس L و R مربوط به مقادیر در طرف چپ و راست سلول است. در معادله بالا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\hat{R}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} n_i \\ \hat{v} - \hat{c} n_j \\ \hat{h}_\bullet - \hat{u}_\perp \hat{c} \end{Bmatrix} \quad \hat{R}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -n_j \\ n_i \\ \hat{u}_\parallel \end{Bmatrix}$$

$$\hat{R}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} n_i \\ \hat{v} - \hat{c} n_j \\ \hat{h}_\bullet - \hat{u}_\perp \hat{c} \end{Bmatrix} \quad \hat{R}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -n_j \\ n_i \\ \hat{u}_\parallel \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta V = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\gamma \hat{c}^\gamma} (\Delta p - \hat{p} \hat{c} \Delta u_\perp) \\ \hat{\rho} \Delta u_\parallel \\ -\frac{1}{\hat{c}^\gamma} (\Delta p - \hat{c}^\gamma \Delta \rho) \\ \frac{1}{\gamma \hat{c}^\gamma} (\Delta p + \hat{\rho} \hat{c} \Delta u_\parallel) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{\Delta A} \sum_{i=1}^2 FAS \quad (20)$$

الف - اگر  $M_\infty > 1$  باشد تمام خواص در این سلول مجازی برابر مقادیر جریان آزاد خواهد بود.

ب - اگر  $M_\infty < 1$  باشد شرایط آن سلول، حاصل برهم نهی جریان آزاد و اثرات یک گرده نقطه‌ای است که وسط ایرفویل قرار دارد و قدرت آن در هر لحظه با توجه به نیروی برای ایرفویل محاسبه می‌شود.

که  $U$  ماتریس مقادیر محافظه کارانه است که در معادله (۲) توضیح داده شده است و  $F$  ماتریس شار است که از معادله (۷) به دست می‌آید. برنامه هنگامی متوقف می‌شود که اختلاف  $U^{n+1}$  و  $U^n$  تا حد خطای ماشین کاهش پیدا کند.

#### ۶- تولید شبکه اولیه

برای تولید شبکه اولیه از الگوریتم جابه‌جایی قطرها و جبهه پیشرونده استفاده شده است. فرایند تولید نقطه توسط جبهه پیشرونده انجام شده [۷] سپس با چند فرایند میانی، مانند جستجوهای پیمانهای و قدم زدنی [۱] نقاط نزدیک به یکدیگر حذف یا ادغام می‌شوند.

در روش جستجوی پیمانهای تمام نقاط میدان را مرتب می‌کنند، یک روش ساده انجام این کار قرار دادن تمام نقاط میدان درون یک مربع مستطیل شطرنجی است که هر کدام از خانه‌های شطرنجی این مستطیل را یک پیمان می‌گویند و همه به یک اندازه هستند. حال در صورتی که یک نقطه جدید در این میدان وارد شود کافی است ابتدا تعیین کنیم که این نقطه در کدام یک از این پیمانها قرار دارد و فاصله این نقطه را از نقاط هم پیمانهاش یا حداکثر نقاط پیمانهای مجاورش تعیین شود و حداقل آنها به دست آید.

در روش جستجوی قدم زدنی از وسطهای سه ضلع مثلث دلخواهی به نقطه مورد نظر وصل می‌کنیم که سه بردار در این حالت به وجود می‌آید. حاصلضرب داخلی این سه بردار در بردارهای یکه عمود بوجه رو به خارج آن مثلث را به دست می‌آوریم. ضلعی از آن مثلث را که این حاصلضرب داخلی برای آن حداکثر است، تعیین می‌کنیم. همین عملیات برای مثلثی تکرار خواهد شد که مجاور ضلع مزبور است. ختم عملیات زمانی است که هر سه حاصلضرب داخلی منفی شوند و این بدان معنی است که نقطه درون مثلث قرار گرفته است.

با داشتن توزیع مطلوبی از نقاط با استفاده از الگوریتم جابه‌جایی اضلاع [۷] مثلثهایی دلانی تولید می‌شوند. به طور خیلی خلاصه می‌توان مثلث بندی دلانی را به این صورت تعریف کرد که

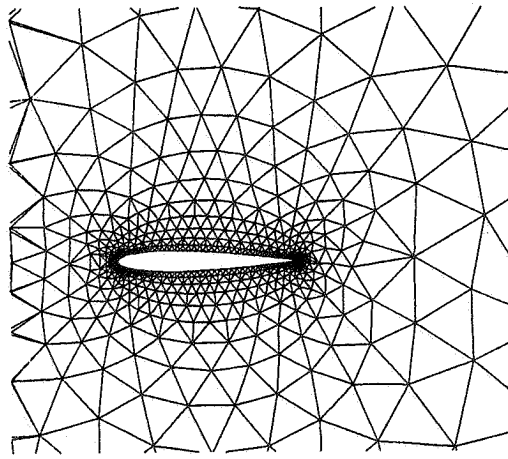
برای جریانهای لزج یا به عبارتی برای حل معادله‌های ناویر استوکس کافی است عبارتهای لزجی را به این معادله‌ها اضافه کنیم. در این حالت سیمای کلی روش تفاوتی نمی‌کند و باید علاوه بر محاسبه شارها از روش "رو" تأثیر این عبارتها هم به روش حل اضافه شوند. شکل شبکه در این حالت اندکی متفاوت خواهد بود، یعنی در این حالت مثلثهای درون لایه مرزی مثلثهای باریکی خواهند بود که ضلع بلندشان در امتداد جریان قرار خواهند گرفت.

#### ۵- شرایط مرزی

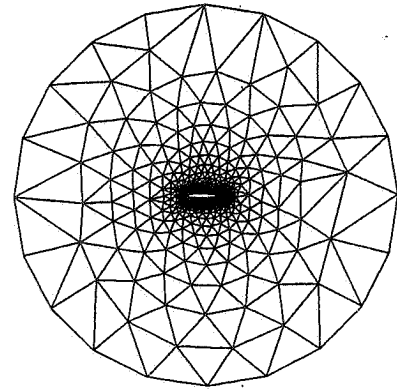
اعمال شرایط مرزی در مسائل دینامیک سیالات بیانگر فیزیک مسئله بوده و با اهمیت ترین قسمت حل است. یکی از حالتی که این مسئله روی آن امتحان شده است و تقریباً حالت استاندارد دارد حل جریان حول مقطع بال (ایرفویل) است. در این حالت دو شرط مرزی وجود دارد:

۱- شرط مرزی دیوار صلب: در سلولهایی که مجاور بدنه ایرفویل هستند مولفه سرعت عمود بر دیواره برابر صفر است. بنابراین در عبارت دبی فقط مولفه فشاری دبی می‌ماند. برای اعمال این شرط به ازای هر سلولی که مجاور دیواره صلب است یک سلول مجازی در همسایگی آن در نظر می‌گیریم در این حالت مقادیر چگالی و انرژی کل سلول مجازی برابر سلول مرزی است، ولی مولفه سرعت کل آن، تصویر آینه ای مولفه سرعت کل سلول مرزی است.

۲- شرط مرزی دور دست: برای اعمال شرط مرزی دور دست به ازای هر سلول در آخرین ردیف سلولها یک سلول مجازی در نظر می‌گیریم. شرایط این سلول مجازی به صورت زیر تعیین می‌شود:



(ب)



(الف)

شکل ۱- مثلث بندی دلانی حول ایرفویل، (الف) شکل کلی شبکه، (ب) شبکه اطراف ایرفویل از نزدیک

این معیار از این جهت انتخاب شده است که با توجه به مرتبه اول بودن معادله می توان اختلاف جواب حقیقی و عددی در یک بعد را به صورت  $p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$  نشان داد. با بسط همین مطلب در دو بعد به معیاری مانند  $|\nabla p| \sqrt{A}$  می توان رسید.

اصولاً برای ریز کردن شبکه روشهای بسیاری وجود دارد [۱۱ و ۱۲]، آنچه که دشوار است بزرگ کردن مجدد این شبکه است که با روش حاضر این مشکل حل می شود. اساس ریز کردن شبکه بر این الگوریتم استوار است که هر مثلثی را که قرار است ریز شود و سطوح سه ضلعش را به یکدیگر وصل می کنیم. البته از آنجایی که هر مثلث فقط باید سه همسایه داشته باشد، بنابراین لازم است همسایه های مثلثی که تقسیم بر چهار شده است نیز به دو قسمت تقسیم شوند (مانند مثلث T در شکل ۲ - الف). البته این قانون در مورد مثلثی که دو همسایه اش به چهار تقسیم می شوند صادق نیست چون در این صورت آن مثلث باید سه قسمت شود که موجب به وجود آمدن مثلثهای تیز می شود، شکل (۲ - ب). بنابراین برای جلوگیری از این مشکل اگر دو یا سه همسایه مثلثی به چهار تقسیم شوند آن مثلث نیز به ناچار تقسیم به چهار خواهد شد، شکل های (۲ - ج و د). با استفاده از الگوریتم بالا هر چند بار که لازم باشد می توان مثلثها را ریز کرد. ساختمان داده این مثلثها به صورتی است که مثلثهایی که از چهار قسمت کردن یک مثلث اولیه (سطح ۵) به وجود می آیند به عنوان پسرهای (سطح ۱) آن مثلث در نظر گرفته می شوند و یک سطح از سطح پدرشان بالاتر هستند و باز

در مثلث بندی دلانی در دایره محیطی هر مثلث هیچ نقطه دیگری وجود ندارد. برای کنترل چگالی نقاط از یک تابع خطی استفاده می شود به این صورت که روی ایرفویل چگالی نقاط زیاد و در خارج میدان چگالی آنها کم است و در میدان بین این دو از یک تابع توزیع خطی برای تعیین چگالی استفاده شده است. روش تولید نقطه به گونه ای است که مثلثهای تولیدی تا حد امکان به مثلثهای متساوی الاضلاع نزدیک است و تغییر اندازه ها بسیار هموار صورت می گیرد. شکل (۱) دو نمای دور و نزدیک شبکه تولید شده حول ایرفویل را نشان می دهد در این حالت تعداد نقاط داخلی ۱۰۰ و نقاط خارجی ۲۰ هستند.

#### ۷- تطبیقی کردن

لزوم استفاده بهینه از خانه های شبکه، مستلزم توزیع یکنواخت خطا در تمامی میدان حل است. بدین منظور با استفاده از نمایانگرهای خطا، توزیع مطلوبی از خطا ایجاد می کنیم. اولین قدم در تطبیقی کردن پیدا کردن ناحیه ای است که در آن خطای گسسته سازی زیاد است که به دنبال آن بتوان شبکه را به صورت موضعی ریز کرد تا خطا کم شود. این حالتها معمولاً در نزدیک شوک، نقاط سکون، خطوط لغزش و فنهای انبساطی به وجود می آید. معیارهای مختلفی برای این کار وجود دارد مانند تغییرات چگالی، فشار، عدد ماخ، ... چون این پارامترها همگی روی شوک ناپیوسته خواهند بود. معیاری که در این مقاله از آن استفاده شده  $|\nabla p| \sqrt{A}$  است.

اگر این پسرها هم به چهار تقسیم شوند مثلثهای به وجود آمده نوه‌های (سطح ۲) مثلثهای اولیه و پسرهای مثلثهای قبلی هستند. به این ترتیب یک سازمان اطلاعات درختی بوجود خواهد آورد که در آن آدرس مثلث قبلی (پدر) و مثلثهای بعدی (پسرها) را خواهد داشت و با داشتن این سازمان اطلاعات درشت کردن شبکه امکانپذیر خواهد شد. چند نکته در ارتباط با ریز کردن شبکه لازم است بیان شود:

۱- برای به دست آوردن شبکه ای هموار در صورتی که مثلثی  $n + 1$  بار ریز شود همسایه‌های آن باید حداقل  $n$  بار ریز شوند.

۲- در صورتی که بخواهیم مثلثی را که تنها یک برادر دارد (پدرشان دو پسر دارد) را به چهار قسمت تقسیم کنیم مثلثهای تیزی به وجود خواهند آمد و شکل شبکه ناهموار خواهد شد به این جهت در این حالت به جای این مثلث پدرش را تقسیم به چهار می‌کنیم.

۳- محاسبات روی سلولهایی انجام می‌شود که هیچ پسری نداشته باشند.

۴- در مورد مثلثهای مرزی باید توجه کرد که مثلثهای مجازی فقط به دو تقسیم شوند و الگوریتم باعث تقسیم بر چهار شدن مثلثهای مجازی نشود.

## ۸- نتایج

### ۸-۱- جریانهای خارجی

#### ۸-۱-۱- جریان گذر صوتی حول ایرفویل

برای نشان دادن تواناییها و قابلیت‌های روش ارائه شده، نتایج استفاده از این روش در حل یک مسئله کاربردی در مکانیک سیالات تراکم پذیر غیر لزج ارائه می‌شود. می‌خواهیم میدان جریان غیر لزج حول یک ایرفویل را حل کنیم. ایرفویل مورد استفاده، NACA0012 و عدد ماخ  $0.85$  و زاویه حمله  $1/0$  است. این مسئله از این جهت انتخاب شده چون نتایج آزمایشگاهی و عددی فراوانی برای آن وجود دارد. با استفاده از روش جبهه پیشرونده، میدان جریان حول ایرفویل به طور خودکار شبکه بندی می‌شود. مرز بیرونی دایره‌ای با شعاع  $5C$  است که  $C$  طول وتر ایرفویل است. مرز بیرونی در واقع بیانگر شرایط در نقطه بسیار دوری است. جریان سیال از چپ به راست است. در صورتی که روی سطح ایرفویل  $45$

سلول با توزیع کسینوسی و روی مرز خارجی نیز  $45$  سلول با توزیع یکنواخت قرار دهیم، بر اساس تعریف تابع فاصله به صورت خطی، مثلث بندی اولیه (دلانی) به دست می‌آید. هر چند که توزیع سلولها از نقطه نظر هندسی بسیار مناسب است، بدیهی است که این توزیع با فیزیک مسئله به طور کامل همساز نیست. برای به دست آوردن توزیع متناسب با فیزیک مسئله به این صورت رفتار می‌شود. ابتدا بر روی شبکه اولیه معادله‌های اویلر حل می‌شوند، شکل (۴)، بعد با استفاده از معادله

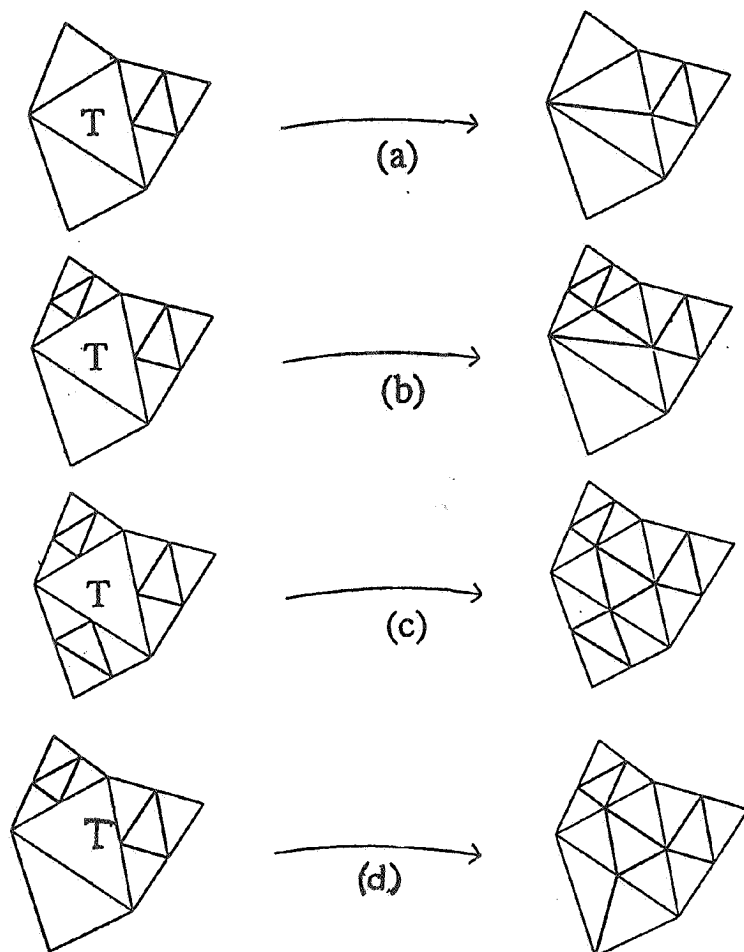
$$\int \nabla p dA = \int p d\vec{S} \quad (21)$$

$\nabla p$  تمام سلولها محاسبه شده مقدار  $(\sqrt{A})_{\max} |\nabla p|$  حداکثر میدان به دست می‌آید، سپس سلولهایی که در آنها

$$|\nabla p| \sqrt{A} > 0.3 (\sqrt{A})_{\max} |\nabla p| \quad (22)$$

است ریز می‌شوند. ضریب  $0.3$  در نامعادله بالا تقریباً اختیاری بوده و بستگی به این دارد که در چه نواحی از میدان می‌خواهیم شبکه ریزی داشته باشیم. برای تسریع همگرایی روش، مقادیر متغیرهای جریان در سلولهای ریز شده به این صورت به دست می‌آید که ابتدا گرادیان متغیرهای جریان (مقادیر  $U$  در معادله ۲) در سلول پدر محاسبه می‌شوند، سپس با در نظر گرفتن یک مقدار متوسط در مرکز مثلث قبلی (پدر) مقادیر  $U$  برای سلولهای جدید (پسرها) با یک تقریب خطی محاسبه می‌شود. با انجام چنین کاری بعد از ریز شدن شبکه و صدا زدن مجدد زیر برنامه حل معادله اویلر مسئله با زمان کمتری به جواب نهایی نزدیک می‌شود. فرایند ریز کردن را می‌توان به دفعات تکرار کرد و به دقت بالاتری رسید. البته محدودیتی بر روی مساحت سلولها وجود دارد و مساحت آنها نمی‌تواند از خطای ماشین کمتر شود. با پنج بار ریز کردن شبکه در کار حاضر اندازه سلولها تقریباً به اندازه خطای ماشین رسید و عملیات متوقف شد.

چون با هر بار ریز کردن مساحت سلولها به یک چهارم مقدار اولیه می‌رسد و با پنج بار ریز کردن این مقدار به  $\frac{1}{1024} = \frac{1}{45}$  مقدار اولیه خواهد رسید که با توجه به اینکه در مسئله حاضر بزرگترین سلول



شکل ۲- حالت‌های مختلفی که در حین تطبیقی کردن به وجود می‌آید

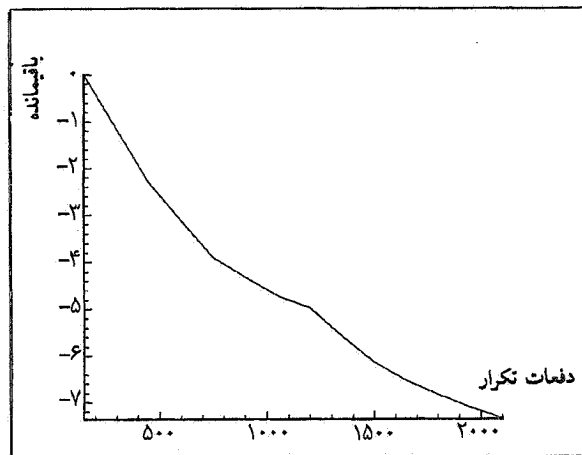
نشان داده شده است و در ضمن در روش حل نیز همگرایی کامل مشاهده می‌شود. نکته قابل ذکر دیگر ریز شدن شبکه در سر و دم ایرفویل است. چون نه تنها در حوالی موج ضربه تغییرات خواص جریان زیاد است در نوک ایرفویل نیز که اولین محل تلاقی سیال و جسم جامد است نیز تغییرات خواص شدید است بنابراین به صورت خودکار شبکه در آن نواحی نیز ریز شده است. برای مقایسه، نتایج مرجع [۴] در شکل (۱۱) آورده شده است که با مقایسه آن با کار حاضر هماهنگی زیادی مشاهده می‌شود و در ضمن نوساناتی که در حوالی موج ضربه در آن شکل به وجود آمده در کار حاضر وجود ندارد.

#### ۸-۱-۲ جریان فراصوت حول ایرفویل

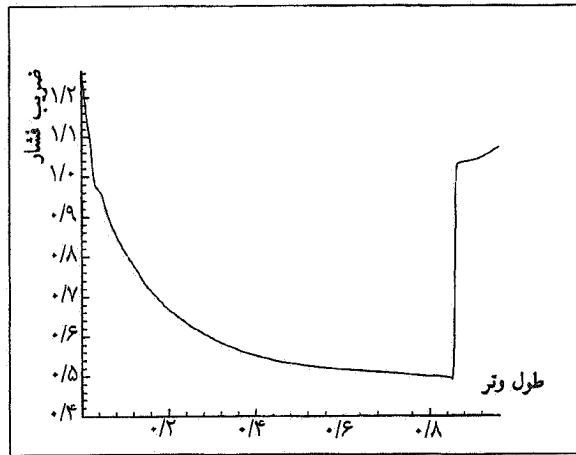
در این حالت تمام شرایط بالا ثابت است تنها زاویه حمله به

شبکه مساحتی حدود  $10^{-3}$  دارد با پنج بار ریز کردن مساحت آن به حدود  $10^{-6}$  می‌رسد.

نتایج به دست آمده در مراحل مختلف ریز شدن شبکه در شکل‌های (۴) تا (۹) آمده است. همان طور که مشاهده می‌شود در هر مرحله که شبکه ریزتر می‌شود خطوط ماخ ثابت به یکدیگر نزدیکتر شده و موج ضربه به صورت دقیقتری نشان داده می‌شود. ضریب برا نیز در اثر ریز کردن شبکه و زیاد شدن تعداد سلولها به مقدار حدی خود می‌رسد که تغییرات آن نسبت به تعداد سلولها در شکل (۱۰) نشان داده شده است. منحنی تغییرات فشار روی بدنه فوقانی ایرفویل و همچنین منحنی تاریخچه باقیمانده برای نشان دادن همگرایی روش نیز در شکل‌های (۳) وجود دارد. همان طوری که از منحنی تغییرات فشار روی سطح فوقانی مشاهده می‌شود در اثر ریز شدن شبکه، تغییرات فشار در دو طرف موج ضربه به صورت دقیقی



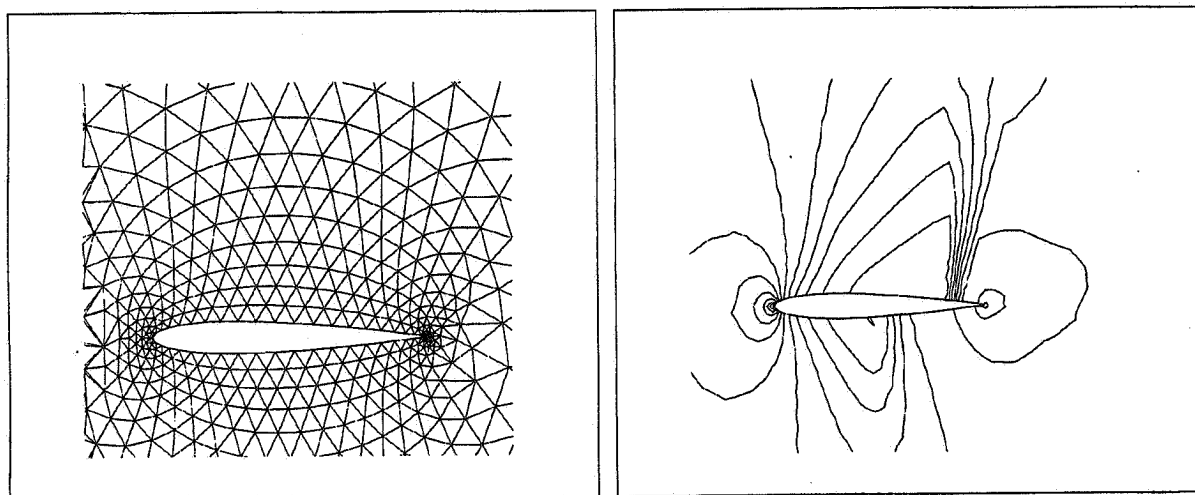
(ب)



(الف)

شکل ۳

(الف) روند تغییرات فشار روی سطح فوقانی ایرفویل، (ب) منحنی تغییرات باقیمانده



شکل ۴- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه اولیه

کار رفته مانند قسمت قبل به فشار حساس بوده است، همان طور که مشاهده می شود در نواحی که امواج ضربه و انبساطی وجود دارد، شبکه به طور خودکار ریز شده است، شکل (۱۲) را ببینید.

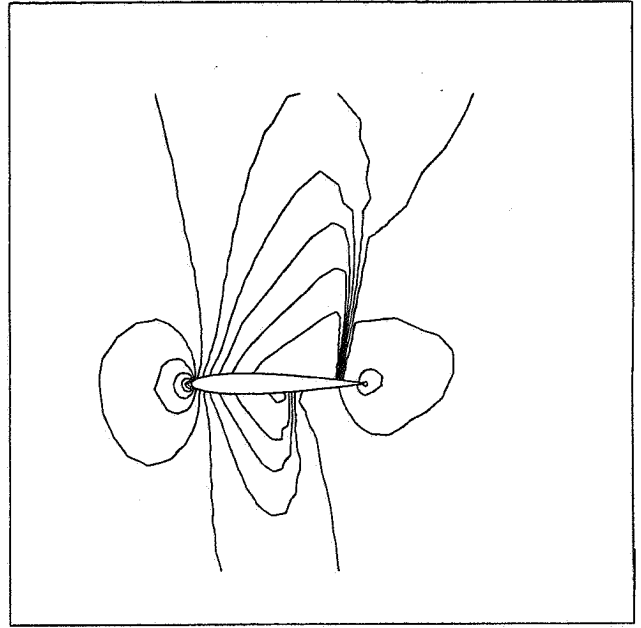
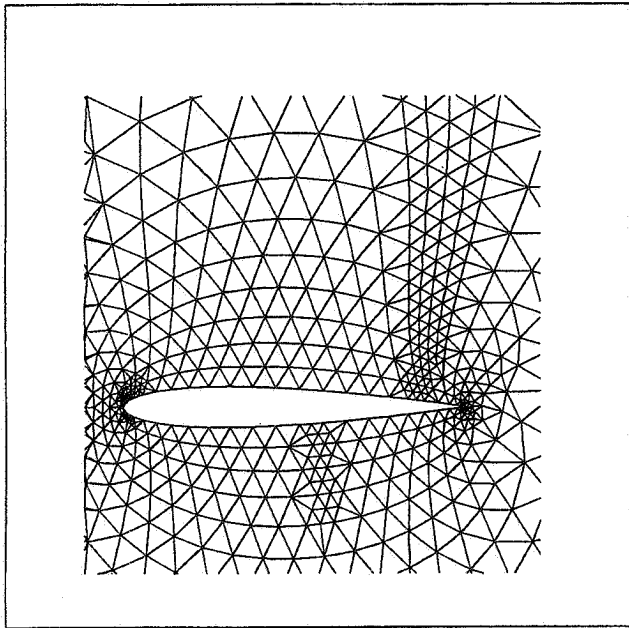
#### ۲-۸ جریان داخلی

#### ۱-۲-۸ جریان مافوق صوت درون کانال

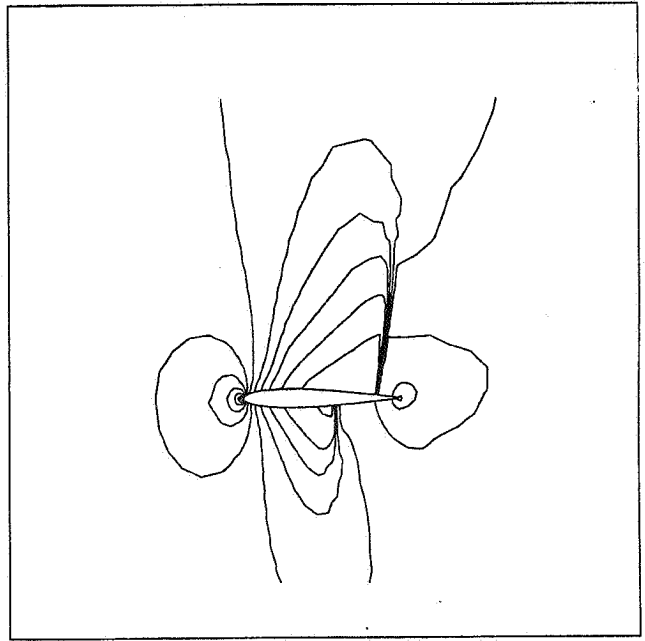
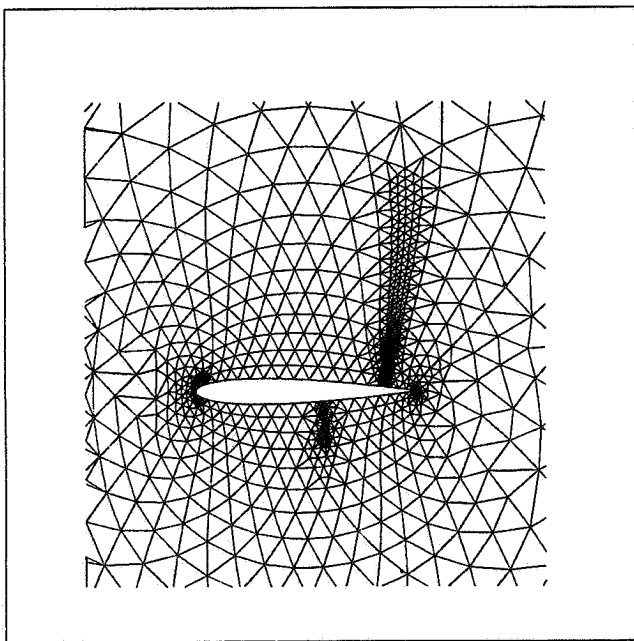
در این حالت جریان مافوق صوت درون کانالی با یک زاویه

صفر و ماخ جریان آزاد به  $1/2$  افزایش پیدا کرده است. در این حالت یک موج ضربه ای کماتی در فاصله ای از نوک ایرفویل به وجود می آید که این موج قوی هم در شکل شبکه و هم در خطوط ماخ ثابت به خوبی مشاهده می شود. ماخ جریان بعد از این موج کاهش پیدا می کند تا جایی که در نزدیکی سر ایرفویل در اثر امواج انبساطی دوباره ماخ بالا می رود، سپس در دم ایرفویل باز در اثر امواج ضربه ای ماخ کاهش پیدا می کند. از آنجایی که معیار تطبیق به





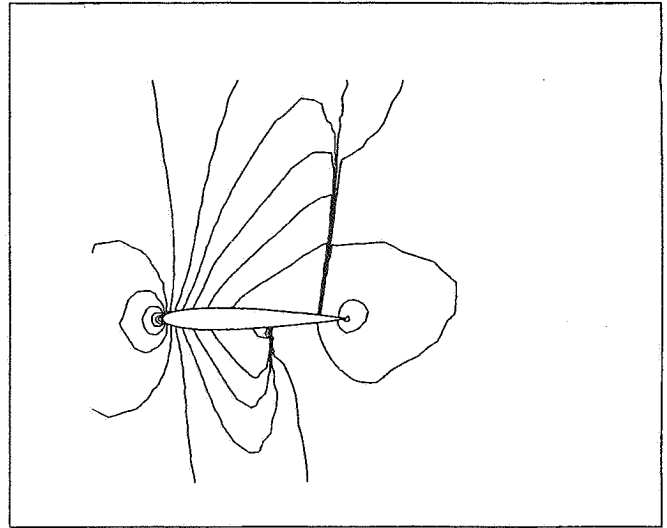
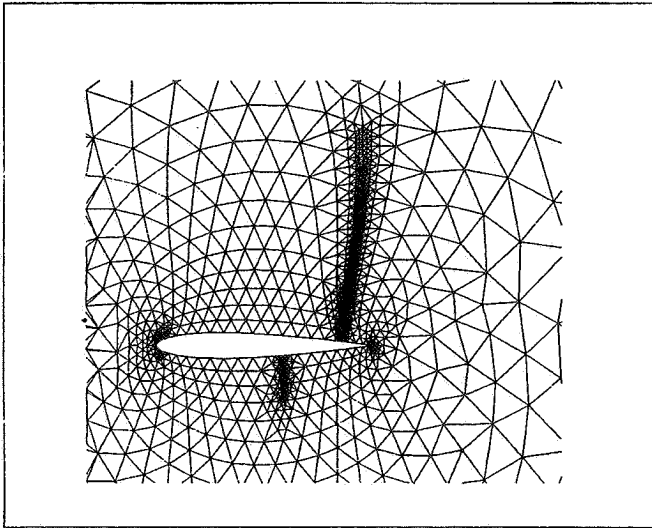
شکل ۵- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه یک بار تطبیق یافته



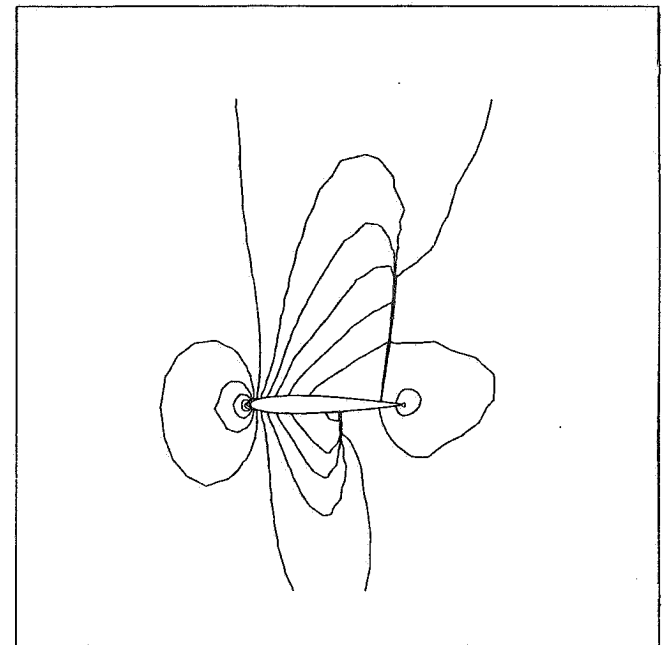
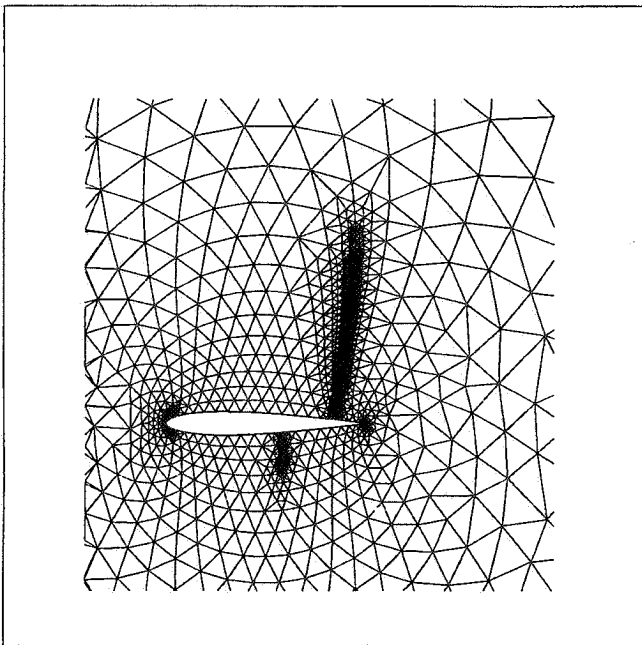
شکل ۶- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه دو بار تطبیق یافته

وجود می آورد، این موج انعکاس یافته نیز خود دوباره به صفحه پایینی برخورد می کند و قبل از خروج دوباره منعکس می شود. در اثر وجود فن انبساطی که از گوشه انبساطی به وجود آمده امواج

تراکم و انبساط ۱۵ درجه و ماخ ورودی ۲ بررسی شده است. یک موج ضربه ای متصل در گوشه تراکمی به وجود می آید و این موج از دیواره بالایی انعکاس پیدا می کند و یک ساقه ماخ<sup>۱</sup> به



شکل ۷- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه سه بار تطبیق یافته



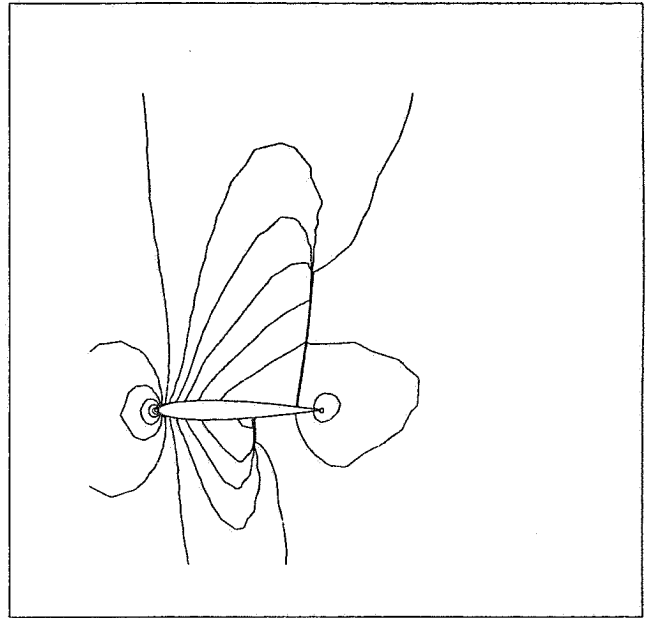
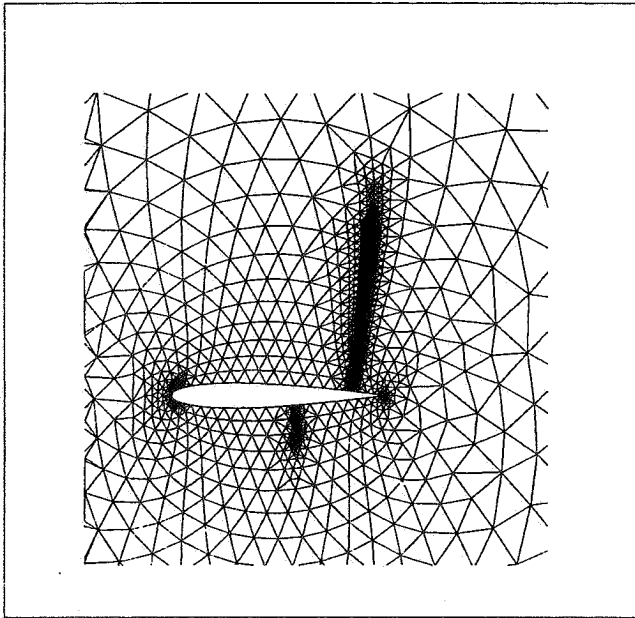
شکل ۸- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه چهار بار تطبیق یافته

#### ۹- خلاصه و نتیجه گیری

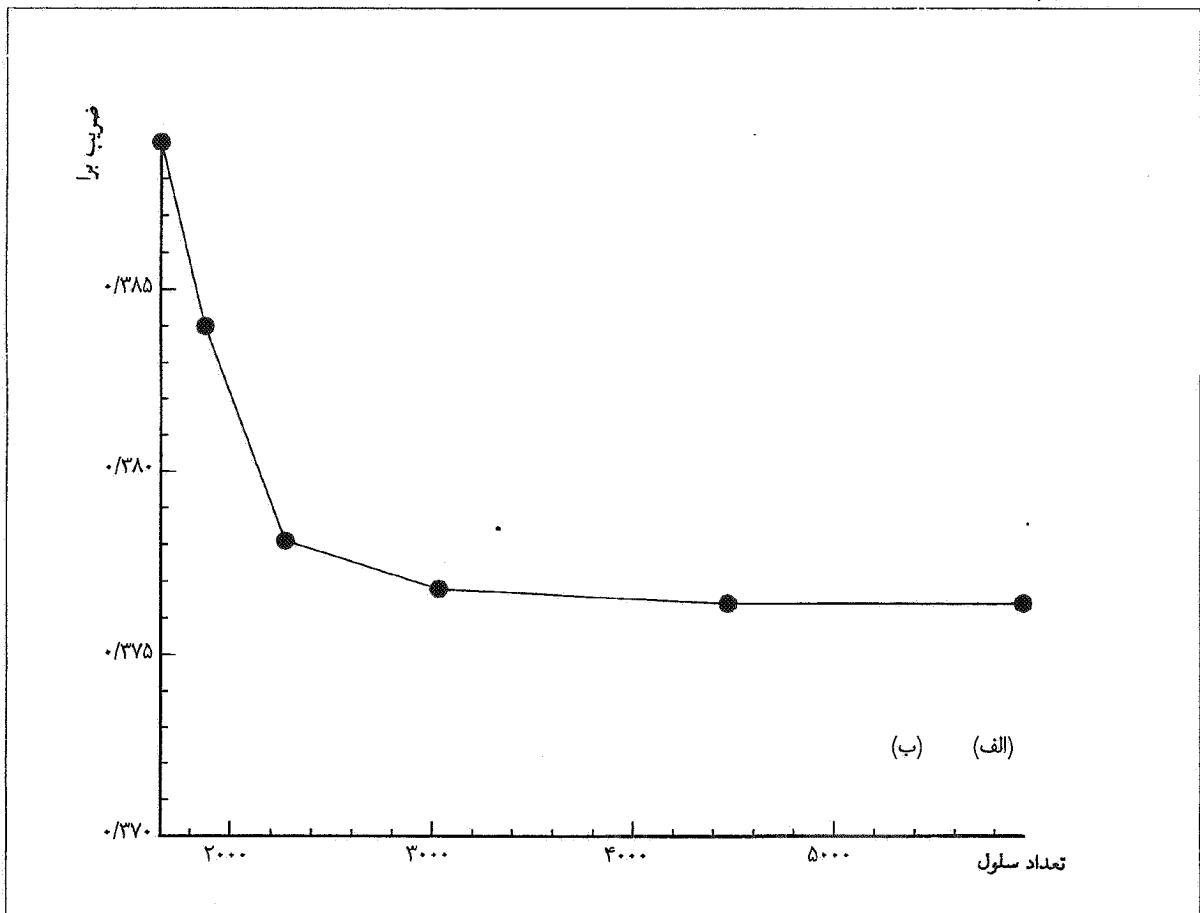
توسط یک شبکه تطبیقی بی‌سازمان معادله‌های اویلر در حالت دائم حل شدند و نتایج مختلف برای جریانهای داخلی و خارجی به دست آمد. حالتی که امتحان شدند شامل جریان فراصوتی و گذر صوتی حول ایرفویل و جریان داخلی فراصوت درون کانال بود. با استفاده از نتایج به دست آمده نشان داده شد که عمل تطبیق تا چه

ضربه‌ای انعکاس یافته ضعیف می‌شوند.

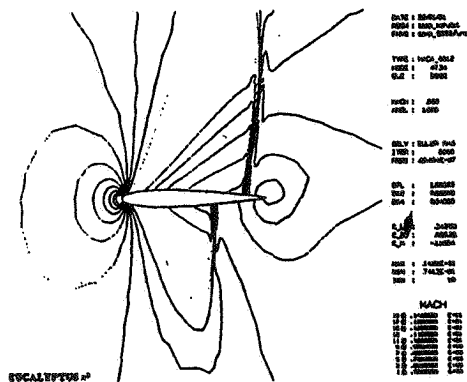
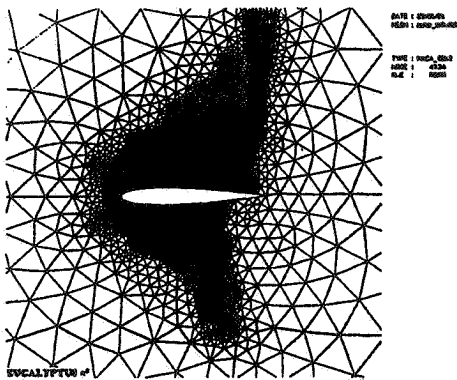
در بالای کانال و بعد از ساقه ماخ یک خط لغزش<sup>۲</sup> به وجود می‌آید. در شکل (۱۳) خطوط ماخ ثابت و شبکه تطبیق یافته نشان داده شده‌اند.



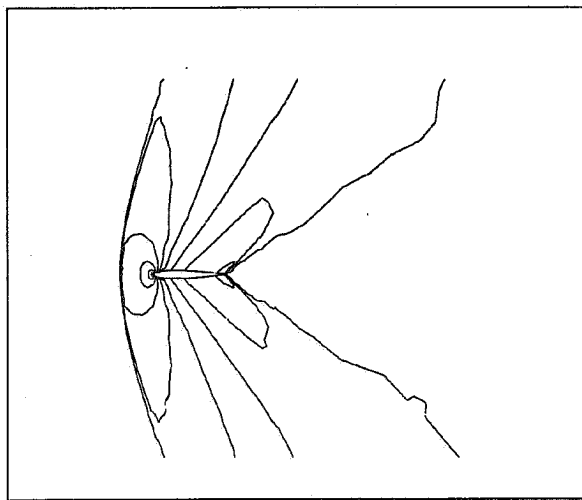
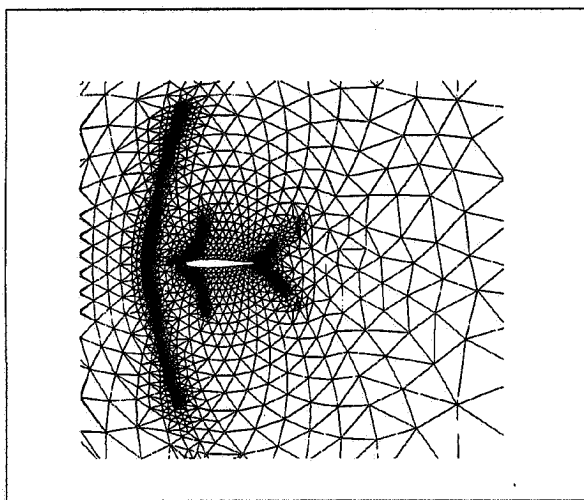
شکل ۹- شبکه و خطوط ماخ ثابت برای شبکه پنج بار تطبیق یافته



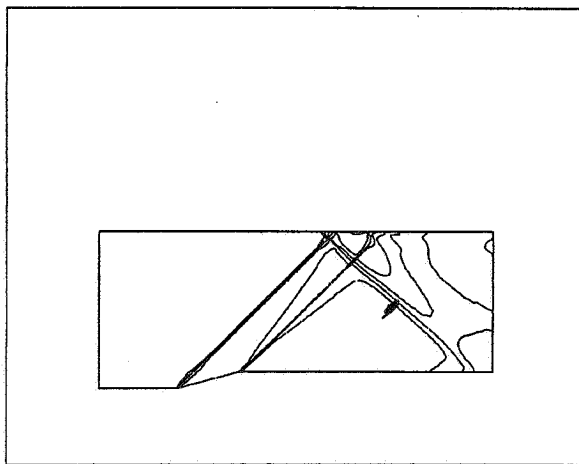
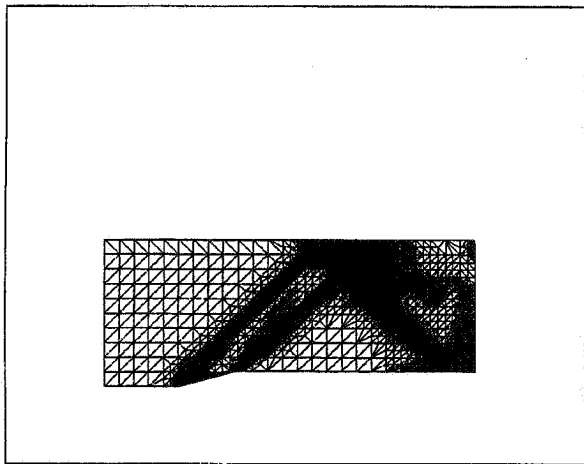
شکل ۱۰- تغییرات ضریب برا بر حسب تعداد سلول



شکل ۱۱- شبکه و خطوط مایخ ثابت حول ایرفویل از مرجع [۴]



شکل ۱۲- شبکه و خطوط مایخ ثابت برای جریان فراصوت خارجی



شکل ۱۳- شبکه و خطوط فشار ثابت برای جریان داخلی درون کانال

1. Mach stem

2. slip line

مراجع

1. Barth, T. J., "On Unstructured Grids and Solvers," *In Computational Fluid Dynamics Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Lecture series 1990-04, 1990.
2. Lohner, R., and Parikh, P., "Generation of Three Dimensional Unstructured Grids by the Advancing Front Method," *ALAA Paper* 88-0515, 1988.
3. Mavripllis, D. J., "Adaptive Mesh Generation for Viscous Flows Using Delaunay Triangulation," *Journal of Computational Physics*, vol. 90, 1990.
4. Richter, R., and Leyland, P., "Mesh Adaptation for 2D Transonic Euler Flows on Unstructured Meshes," *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, pp. 27-39, Barcelona, Spain, 3-7 june, 1991.
5. Delaunay, B., "Sur La Sphere Vide," *Bull. Acad. Science USSR VII: Class. Sci. Mat. Nat.* 793-800, 1934.
6. Thompson, J. F., and Watherill, N. P., "Structured and Unstructured Grid Generation," *Critical Reviews in Biomedical Eng.*, 20(1,2): 73-120, 1992.
7. Muller, J. D., Roe, P. L. and Deconick, H., "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations," *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, March 20, 1992.
8. Watson, D. F., "Computing the N-Dimensional Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes," *The Computer Journal*, Vol. 24, No. 2, 1981.
9. مظاهری، ک. جدیدی، م.، "تولید شبکه بی‌سازمان با ترکیبی از مثلث بندی دلانی و جبهه پیشرونده،" سومین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، دی ۷۳، دانشگاه صنعتی شریف، ۳۸۱-۳۹۳.
10. Roe, P. L., "Approximate Rieman Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, vol. 43, 1981.
11. Maman, N., and Larrouturou, B., "Dynamical Mesh Adaption for Two Dimensional Reactive Flow Simulation," *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, pp. 13-26, Barcelona, Spain, 3-7 June, 1991.
12. Zeeuw, D., and Powell, K.G., "An Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equation," *ALAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference*, pp. 166-180, Honolulu, Hawaii, 24-27 june, 1991.