

# حل معادله‌های جریان تراکم ناپذیر آرام همراه با سطح آزاد در محورهای مختصات منحنی الخط

مهدی گل افشانی\* و امیر حسین شوشتري\*\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۴/۲۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۷/۵/۵)

چکیده - در این مقاله روشی برای حل معادله‌های دو بعدی جریان آرام تراکم ناپذیر و با خواص ثابت همراه با سطح آزاد در مختصات منحنی الخط به روش عددی ارائه شده است. برای حل معادله‌های میدان از شبکه تلفیقی<sup>۱</sup> استفاده شده است. در حل ضمنی معادله‌ها از روش گام زمانی مجازی<sup>۲</sup> استفاده شده که اساس آن بر روش صریح استوار است. معادله‌های جریان با استفاده از روش حجم محدود گسسته شده است و همچنین در گسسته سازی عبارتهای جابه‌جایی معادله‌های مومنتم دو روش با دقت درجه اول و درجه دوم مورد استفاده قرار گرفته است. ردیابی سطح آزاد با استفاده از تکنیک واف<sup>۳</sup> که یک روش اویلری است انجام پذیرفته و سطح آزاد توسط یک سری پاره خطهای شیبدار تقریب زده شده است. همچنین تعدادی از مسائل نمونه با استفاده از روش مورد استفاده حل شده است که نتایج به دست آمده در مقایسه با نتایج سایر مراجع قابل قبول است.

## The Solution of Laminar Incompressible Flow Equations with Free Surfaces in Curvilinear Coordinates

M. Golafshani and A. H. Shooshtari

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

**ABSTRACT-** In this paper a novel numerical approach is presented for solving the transient incompressible fluid flow problems with free surfaces in generalized two-dimensional curvilinear coordinate systems. Solution algorithm is a combination of implicit real-time steps and explicit pseudo-time steps. Governing fluid flow equations are discretized using a collocated finite-volume mesh. Convective terms are approximated with an accurate monotonicity preserving upwind scheme. Free surfaces are first approximated by lines of constant slope and then convected using the volume-of-fluid (VOF) technique. A number of problems, both with and without free surfaces, have been solved to demonstrate the ease and usefulness of the scheme. Accuracy of the results thus obtained is assessed by comparison with other numerical as well as analytical results in the literature.

\* استادیار \*\* کارشناس ارشد

فهرست علائم

$F$	کسر حجمی، معادله (۳)	$P_{surf}$	فشار بر روی سطح آزاد، معادله (۵۴)	$\tau$	گام زمانی مجازی، معادله (۳۶)
$f^+, f_-$	ضرایب وزنی، معادله (۱۷)	$P_a$	فشار گاز، معادله (۵۴)	$\phi$	یک کمیت دلخواه از سیال و جریان، معادله (۹)
$g$	بردار شتاب جاذبه، معادله (۱)	$P_{int}$	فشار در سلول میانمایی، معادله (۵۵)	$\omega$	ضرایب وزنی، معادله (۴۹)
$g_x$	شتاب جاذبه در راستای محور $x$ ، معادله (۱۳)	$r$	بردار متصل کننده دو نقطه در شبکه، معادله (۲۴)	علائم ریاضی	
$g_y$	شتاب جاذبه در راستای محور $y$ ، معادله (۱۴)	$S$	سطح وجوه حجم کنترل، معادله (۵۳)	$\nabla$	بردار عملگر گرادیان، معادله (۱)
$g_{11}, g_{12}, \dots$	اعضای تانسور کوورینت، معادله (۵)	$S$	عبارت چشمه، معادله (۹)	$div$	عملگر دیورژانس، معادله (۲)
$g^{11}, g^{12}, \dots$	اعضای تانسور کنتراورینت، معادله (۶)	$t$	زمان، معادله (۱)	اندیس پایینها	
$G_{\xi}, G_{\eta}$	شار حجمی، معادله (۱۰)	$u, v$	مؤلفه‌های اسکالر بردار سرعت، معادله (۱۱)	$e, n, p, E,$	
$H$	مجموعه عبارتهای جابه‌جایی و دیفیوژن، معادله (۳۴)	$v$	بردار سرعت، معادله (۱)	$ne, \dots$	نقاط مختلف شبکه مورد استفاده، معادله (۱۸)
$i, j$	بردارهای یکه کارتیزین، معادله (۲۶)	$V$	حجم سلول، معادله (۱۹)	$u, v$	مربوط به مؤلفه $v, u$ معادله‌های (۱۱، ۱۲، ۱۴، ۳۴، ۳۵ و ۳۷)
$i, j$	شماره سلول، معادله (۵۵)	$V_l$	حجم مایع، معادله (۴)	$x, y$	مشق نسبی نسبت به مختصات کارتیزین، معادله (۵)
$J$	ژاکوبین تبدیل مختصات، معادله (۷)	$V_g$	حجم گاز، معادله (۴)	$\xi, \eta$	مشق نسبی نسبت به مختصات منحنی الخط، معادله (۵)
$n$	بردار یکه عمود بر سطح آزاد، معادله (۵۰)	$x, y$	مختصات کارتیزین، معادله (۵)		
$n_x, n_y$	مؤلفه‌های بردار یکه عمود بر سطح آزاد، معادله (۵۱)	$\Gamma$	ضریب دیفیوژن و نفوذ، معادله (۹)	اندیس بالاها	
$p$	شیب سطح آزاد، معادله (۵۱)	$\delta$	تغییرات نمو، معادله (۱)	$k$	گام زمانی مجازی $k$ ام
$p$	فشار، معادله (۱)	$\eta$	مختصات منحنی الخط، معادله (۶)	*	مقادیر اولیه، معادله (۳۹)
$pe$	فاصله نقاط بردار $e$ و $p$ در شبکه، معادله (۱۹)	$\mu$	ضریب لزجت، معادله (۱۳)	/	مقادیر تصحیح‌کننده، معادله (۴)
		$\nu$	ضریب لزجت سینماتیکی، معادله (۱)	—	مقادیر متوسط، معادله (۴۹)
		$\rho$	چگالی، معادله (۱)		

۱- مقدمه

کاربردهای عملی بسیار زیادی است که در نتیجه انگیزه بسیار زیادی را برای تلاش در حل مسائل مربوط به آن ایجاد می‌کند. به عنوان مثال از بین کاربردهای بسیار زیاد این پدیده می‌توان به فرایند ذوب و ریخته‌گری فلزات، جریان سیال در لوله‌های موئین، تحلیل روغنکاری و سیالات روانساز، پاشش قطرات انتشار شعله، حرکت سیال در مخازن تحت حرکت، حرکت سیال در کانالهای باز، رشد کریستالها، ... اشاره کرد. از سوی دیگر بسیاری از موارد کاربرد جریان به همراه سطح آزاد در شرایطی است که هندسه جریان پیچیده بوده و مرزهای جریان خطوط مستقیم متعامد نیستند. بنابراین استفاده از روشهایی که در مقابل تغییرات هندسه جریان انعطاف پذیرتر باشند

در این مقاله، هدف ارائه روشی برای شبیه سازی جریان تراکم ناپذیر همراه با سطح آزاد و مرز متحرک است. شبیه سازی پدیده‌هایی که در آنها به نحوی یک نوع ناپیوستگی شدید وجود دارد مشکل بوده و تلاش مضاعفی را می‌طلبد. این گونه ناپیوستگیها و سطحهای واسطه<sup>۴</sup> به صورتهای مختلف در مسائل فیزیک سیالات ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال پدیده شوک و موج ضربه‌ای در سیالات تراکم پذیر، صفحه ورتکس در جریان غیرلزج، سطح آزاد و مرز بین دو سیال مخلوط نشدنی در جریان دو فازی سیالات همگی از این گونه مسائل اند. از سوی دیگر پدیده سطح آزاد و مرز متحرک دارای

بسیار مطلوب و با ارزش خواهد بود. چرا که استفاده از این روشها باعث می‌شود که الگوریتم حل معادله‌ها و نحوه اعمال شرایط مرزی وابسته به یک مسئله و هندسه خاص نباشد. لذا برای تعیین رفتار جریان در هندسه‌های پیچیده از حل معادله‌های جریان در مختصات منحنی الخط استفاده شده و در نتیجه معادله‌های حاکم به این مختصات انتقال یافته‌اند. در حالت کلی پیچیدگیهای بسیار زیاد در مسائل جریان به همراه سطح آزاد باعث شده است که برای حل عددی چنین جریانهایی روشها و تکنیکهایی متفاوت با آنچه برای سایر انواع جریان مرسوم است مورد استفاده قرار گیرد. بحث درباره هر یک از این روشها، خصوصیات، محاسن و معایب آنها یک بحث بسیار مفصل است که خارج از حوصله مقاله حاضر است. یکی از روشهای حل مسائل سطحهای واسطه، تکنیک ردیابی سطح واسطه<sup>۵</sup> و مرز آزاد است که خود به سه روش اصلی تقسیم می‌شود:

۱- روشهای اویلری

۲- روشهای لاگرانژی

۳- روشهای ترکیبی (اویلری - لاگرانژی)

هر یک از این روشها دارای معایب و محاسن مربوط به خود است که بررسی آن بحث مفصل و جداگانه‌ای را می‌طلبد. روشهای اویلری خود به زیر گروههای دیگری تقسیم می‌شود اما آنچه که در مقاله حاضر مورد توجه قرار گرفته است روش اویلری در شبکه ثابت است که به دو بخش تقسیم می‌شود:

۱- روش ردیابی سطحی<sup>۶</sup>

۲- روش ردیابی حجمی<sup>۷</sup>

در روش ردیابی سطحی، سطح واسطه توسط تعدادی نقاط نشانه که بر روی سطح واسطه قرار می‌گیرند مشخص می‌شود. سطح واسطه در فاصله بین این نقاط توسط منحنیهای حاصل از میانبایی معین می‌شود. در روش ردیابی حجمی اطلاعات در مورد محل سطح واسطه ذخیره نمی‌شود. بلکه سطح واسطه در هنگام نیاز بازسازی می‌شود. بازسازی سطح واسطه به صورت سلول به سلول و براساس یک کمیت نشانگر انجام می‌پذیرد. یکی از روشهای جدید ردیابی حجمی، روش کسر حجمی و یا روش واف است. در این روش کمیت نشانگر (که مورد نیاز روشهای ردیابی حجمی‌اند) عبارت از نسبت حجم اشغالی توسط یکی از سیالها در یک سلول به حجم کل سلول است. این کمیت با نماد  $F$  نشان داده

می‌شود که همواره  $0 \leq F \leq 1$  در کار حاضر نیز روش مورد استفاده برای ردیابی سطح آزاد، روش ردیابی براساس پارامتر کسر حجمی است. در این روش به هر سلول محاسباتی علاوه بر متغیرهای فشار و مؤلفه‌های سرعت یک متغیر دیگر به نام کسر حجمی ( $F$ ) نسبت داده می‌شود که این متغیر نیز مانند سایر متغیرها تابع زمان است و عملاً مکان سطح آزاد براساس مقادیر  $F$  تعیین می‌شود. روشهای مختلفی برای تعیین میدان  $F$  وجود دارد. به عنوان مثال مرجع [۱] برای این کار از روش سلولهای دهنده - گیرنده استفاده می‌کند، در کار حاضر از روش دیگری استفاده شده است که تا حدود زیادی مشابه روشی است که توسط مرجع [۲] مورد استفاده قرار گرفته است. مرجع [۳] در مورد انواع روشهای عددی حل مسایل مرزهای متحرک بحث کامل و مفصلي دارد که خواننده علاقه مند می‌تواند به آن رجوع کند. همچنین در مقاله حاضر معادله‌های جریان تراکم ناپذیر در فضای منحنی الخط حل شده و برای این کار از انتقال معادله‌ها استفاده شده است. شبکه مورد استفاده، شبکه سازمان یافته تلفیقی است و برای جلوگیری از انفصال میدان سرعت و فشار و در نتیجه ایجاد نوسانات غیر فیزیکی از روش میانبایی وزنی مومنت<sup>۸</sup> که توسط رای و چاو [۴] ارائه شده، استفاده شده است. ضمنی کردن معادله‌ها نیز به کمک روش زمان مجازی انجام گرفته است. تذکر این نکته ضروری است که در این بررسی از اثرات کشش سطحی، و در نتیجه نیاز به محاسبه انحنای آزاد صرف نظر شده است.

## ۲- معادله‌های حاکم بر رفتار جریان

در جریان دو بعدی سیال تراکم ناپذیر نیوتنی و با لزجت ثابت معادله‌های حاکم بر رفتار جریان معادله‌های بقا و مومنت (ناویر-استوکس) و پیوستگی‌اند که شکل برداری-دیفرانسیلی آنها به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

در هنگام حضور سطح آزاد، معادله سوم نیز به دو معادله اخیر اضافه می‌شود که این معادله عبارت است از:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)F = 0 \quad (3)$$

$$g^{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2$$

$$g^{21} = g^{12} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y$$

$$g^{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

$$g^{13} = g^{31} = 0$$

$$g^{23} = g^{32} = 0$$

$$g^{33} = 1 \quad (6)$$

و در نتیجه ژاکوبین تبدیل مختصات نیز از معادله زیر به دست می‌آید:

$$J = \sqrt{g} = \sqrt{\det |g_{ij}|} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (7)$$

و همچنین روابط متریک زیر نیز برقرار است [6]:

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J} \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{J}$$

$$\xi_y = \frac{-x_\eta}{J} \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \quad (8)$$

معادله کلی جابه‌جایی - دیفیوژن را برای کمیت اسکالر دلخواه  $\phi$  در نظر بگیرید

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \phi = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + S_\phi \quad (9)$$

حال با استفاده از معادله‌های زنجیره‌ای مشتقات و معادله‌های متریک، شکل انتقال یافته این معادله در مختصات منحنی الخط به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho J \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho G_\xi \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho G_\eta \phi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\Gamma_\phi}{J} \left( g_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\Gamma_\phi}{J} \left( g_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - g_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] + JS_\phi \quad (10)$$

که در معادله بالا:

$$G_\xi = y_\eta u - x_\eta v \quad (11)$$

$$G_\eta = x_\xi v - y_\xi u \quad (12)$$

که  $G_\xi$  و  $G_\eta$  نمایانگر شار حجمی اند. در معادله (10) عبارتهایی که

که  $F$  همان کسر حجمی بوده که برای مایع برابر یک و برای گاز صفر فرض می‌شود و برای هر سلول محاسباتی از معادله زیر تعیین می‌شود:

$$F = \frac{\delta V_1}{\delta V_1 + \delta V_g} \quad (4)$$

که  $\delta V_g$  و  $\delta V_1$  در معادله بالا برابر حجم مایع و حجم گاز در یک سلول دلخواه و  $F$  نیز نسبت حجمی متناسب به آن سلول است. بنابراین با توجه به تعریف بالا می‌توان گفت که تابع  $F(x, y, t)$  یک تابع پله‌ای بوده به طوری که همواره  $0 \leq F(x, y, t) \leq 1$  و سلولهایی که برای آنها  $0 < F < 1$  همان سلولهای سطحی اند که سطح آزاد از این سلولها عبور کرده است. از معادله (3) در طول مقاله تحت عنوان معادله انتقال کسر حجمی نام برده می‌شود.

### ۳- انتقال معادله‌ها به مختصات منحنی الخط

در استفاده از مختصات منحنی الخط هدف انتقال از فضای فیزیکی با شکل پیچیده به فضای محاسباتی با شکل ساده و متعامد است. در این گزارش مختصات منحنی الخط عمومی دو بعدی با دو نماد  $\xi$  و  $\eta$  نشان داده می‌شوند. فضای مختصات منحنی الخط توسط خطوط منحنی شکل معین می‌شوند که بر هر یک از این خطوط یکی از مختصات منحنی الخط ثابت است.

در مختصات منحنی الخط دو بعدی اعضای تانسور متریک کوورینت<sup>۹</sup> به صورت زیر معرفی می‌شود [5]:

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$g_{13} = g_{31} = 0$$

$$g_{23} = g_{32} = 0$$

$$g_{33} = 1 \quad (5)$$

و همچنین اعضای تانسور متریک کنترا ورینت<sup>۱۰</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

دارای ضریب  $g_{12}$  و  $g_{21}$  هستند عبارتهای نامتعامدند که به دلیل تعامد نبودن مختصات منحنی الخط در معادله‌ها ظاهر می‌شوند. حال به طریق مشابه می‌توان شکل انتقال یافته معادله مومنتم مؤلفه‌های سرعت را نیز به دست آورد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho J u) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho G_{\xi} u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho G_{\eta} u) \\ &= \frac{-\partial}{\partial \xi}(P y_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(P y_{\xi}) + \rho J g_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\mu}{J} \left( g_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\mu}{J} \left( g_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} - g_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho J v) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho G_{\xi} v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho G_{\eta} v) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi}(P x_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta}(P x_{\xi}) + \rho J g_y \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\mu}{J} \left( g_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\mu}{J} \left( g_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta} - g_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

و صورت انتقال یافته معادله پیوستگی به شکل زیر

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(G_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(G_{\eta}) = 0 \quad (15)$$

و همچنین معادله (۳) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t}(J F) + \frac{\partial}{\partial \xi}(G_{\xi} F) + \frac{\partial}{\partial \eta}(G_{\eta} F) = 0 \quad (16)$$

#### ۴- گسسته سازی معادله‌های مومنتم و پیوستگی

در این قسمت به روش گسسته سازی معادله‌های مومنتم و پیوستگی پرداخته و موقتاً از تأثیر وجود سطح آزاد صرف‌نظر می‌شود. روش مورد استفاده برای گسسته سازی معادله‌ها، روش حجم محدود است. ویژگی این روش ماهیت بقایی آن است به نحوی که قوانین بقا را برای مجموعه‌ای از حجمهای کنترل و در نتیجه کل ناحیه محاسباتی به خوبی ارضا می‌کند. در مقاله حاضر نقاط ذخیره سازی متغیرهای

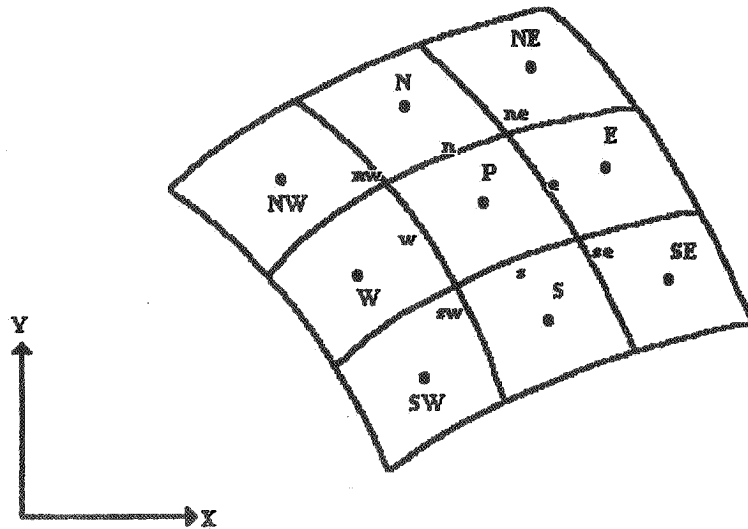
جریان (یعنی مؤلفه‌های سرعت و فشار) منطبق بر یکدیگر و در مراکز حجمهای کنترل انتخاب شده‌اند. به این نوع شبکه، شبکه تلفیقی گفته می‌شود. چنین آرایشی برای نقاط تعریف فشار و مؤلفه‌های سرعت باعث انفصال میدان فشار و سرعت و ایجاد میدان صفحه شطرنجی<sup>۱۰</sup> می‌شود. بنابراین لازم است از فن خاصی استفاده شود. روش مورد استفاده برای جلوگیری از انفصال پاسخ میدان فشار و سرعت روش پیشنهادی رای و چاو [۴] است. از این روش در تعدادی از مراجع تحت عنوان روش میانبایی وزنی مومنتم نام برده می‌شود. حسن شبکه تلفیقی در برابر سایر انواع شبکه‌ها عبارت است از سهولت بیشتر در گسسته سازی معادله‌ها و نیاز کمتر به محاسبه ضرایب هندسی و عدم نیاز به تعریف حجم کنترل‌های متفاوت و در نتیجه نیاز کمتر به حافظه پردازشگر برای ذخیره سازی ضرایب و مختصات حجم کنترل‌ها. به منظور شناسایی نقاط مختلف احجام کنترل از نماد گذاری مرجع [۶] استفاده شده است. در این نماد گذاری نقاط مرکزی احجام کنترل با حروف بزرگ لاتین و نقاط واقع بر روی وجوه احجام کنترل با حروف کوچک نشان داده می‌شوند. شکل (۱) فضای فیزیکی و فضای محاسباتی و احجام کنترل را نشان می‌دهد. برای درک بهتر مفهوم احجام کنترل در جریان دو بعدی توجه شود که بعد سوم عمود بر صفحه جریان برابر ۱ فرض شده است. به منظور تعریف مقادیر متغیرها بر روی سطوح حجم کنترل باید از میانبایی خطی بین دو نقطه مرکزی حجم کنترل‌های مجاور استفاده شود. به عنوان مثال، متغیر  $\phi$  بر روی وجه  $e$  از معادله زیر تعیین می‌شود.

$$\phi_e = f_e^+ \phi_E + f_e^- \phi_P \quad (17)$$

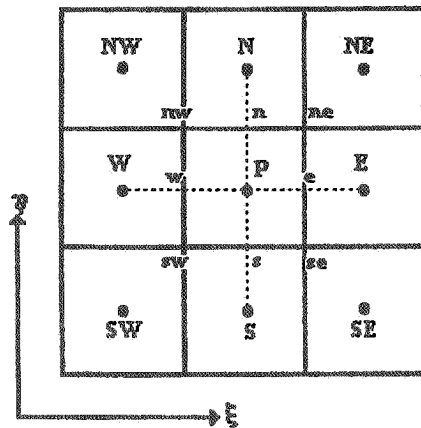
که در معادله (۱۷)  $\phi_P$  و  $\phi_E$  مقادیر متغیر  $\phi$  در مراکز  $E$  و  $P$  و  $f_e^+$  و  $f_e^-$  ضرایب وزنی بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$f_e^+ = \frac{pe}{Pe + eE} \quad f_e^- = \frac{eE}{Pe + eE} \quad (18)$$

بنابراین می‌توان شکل گسسته مؤلفه  $u$  سرعت را به صورت زیر نوشت:



شکل (۱-الف) فضای فیزیکی و تصویر احجام کنترل در این فضا و نحوه نامگذاری این احجام کنترل



شکل (۱-ب) فضای محاسباتی و تصویر احجام کنترل در مختصات انتقال یافته

و برای مؤلفه  $v$  نیز معادله مشابهی به دست می آید و معادله پیوستگی جرم (۱۵) نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left( G_e^{n+1} - G_w^{n+1} \right) + \left( G_n^{n+1} - G_s^{n+1} \right) = 0 \quad (20)$$

در تعیین عبارت جابه جایی برای محاسبه جمله هایی که داخل  $\langle \rangle$  قرار دارند نیاز به تعیین مقدار سرعت بر روی وجوه حجم کنترل است. محاسبه این مقادیر با استفاده از الگوهای مختلفی انجام می پذیرد که هر یک درجه دقت مخصوص خود را دارند. در مقاله حاضر دو الگوی درجه اول فراز جریان<sup>۱۱</sup> و درجه دوم با محدود کننده شیب حداقل<sup>۱۲</sup> مورد استفاده قرار گرفته اند که در این الگوها

$$\begin{aligned} & \rho \delta V_p \frac{(u_p^{n+1} - u_p^n)}{\delta t} + \rho \left( G_e^{n+1} \langle u_e^{n+1} \rangle - G_w^{n+1} \langle u_w^{n+1} \rangle \right. \\ & \left. + G_n^{n+1} \langle u_n^{n+1} \rangle - G_s^{n+1} \langle u_s^{n+1} \rangle \right) \\ & = - \left[ P_e^{n+1} (y_\eta)_e - P_w^{n+1} (y_\eta)_w \right] \\ & + \left[ p_n^{n+1} (y_\xi)_n - p_s^{n+1} (y_\xi)_s \right] + \rho \delta V_p g_x \\ & + \mu \left[ \frac{1}{\delta V_e} \left[ g_{11e} (u_E^{n+1} - u_p^{n+1}) - g_{12e} (u_{ne}^{n+1} - u_{se}^{n+1}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\delta V_w} \left[ g_{11w} (u_p^{n+1} - u_w^{n+1}) - g_{12w} (u_{nw}^{n+1} - u_{sw}^{n+1}) \right] \right] \\ & + \mu \left[ \frac{1}{\delta V_n} \left[ g_{21n} (u_N^{n+1} - u_p^{n+1}) - g_{21n} (u_{ne}^{n+1} - u_{nw}^{n+1}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\delta V_s} \left[ g_{22s} (u_p^{n+1} - u_s^{n+1}) - g_{12s} (u_{se}^{n+1} - u_{sw}^{n+1}) \right] \right] \quad (19) \end{aligned}$$

مقادیر مؤلفه سرعت بر روی وجوه حجم کنترل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف- روش درجه اول فواز جریان

$$\langle u_e \rangle = \begin{cases} u_p & \text{IF } G_e \geq 0 \\ u_E & \text{IF } G_e < 0 \end{cases} \quad (21)$$

و سایر عبارتهای همانند نیز به صورت مشابه به دست می‌آیند.

ب- روش درجه دوم با محدود کننده شیب حداقل

در این روش داریم:

۱- اگر  $G_e \geq 0$

$$\langle u_e \rangle = u_p + \delta u \quad (22)$$

و

$$\delta u = \begin{cases} \text{sign}(\delta u^+) \text{Min} \{ |\delta u^+|, |\delta u^-| \} & \text{IF } \delta u^+ \cdot \delta u^- > 0 \\ \cdot & \text{IF } \delta u^+ \cdot \delta u^- < 0 \end{cases} \quad (23)$$

که در آن  $\delta u^+$  و  $\delta u^-$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta u^+ = (\nabla u)_e \cdot (\delta r_{ep}) \quad (24)$$

$$\delta u^- = (\nabla u)_w \cdot (\delta r_{ep}) \quad (25)$$

و همین طور

$$(\nabla u)_e = \frac{1}{J_e} \left\{ \left[ (u_E - u_p) (y_\eta)_e - (u_{ne} - u_{se}) (y_\xi)_e \right] i + \left[ - (u_E - u_p) (x_\eta)_e + (u_{ne} - u_{se}) (x_\xi)_e \right] j \right\} \quad (26)$$

$$(\nabla u)_w = \frac{1}{J_w} \left\{ \left[ (u_p - u_w) (y_\eta)_w - (u_{nw} - u_{sw}) (y_\xi)_w \right] i + \left[ - (u_p - u_w) (x_\eta)_w + (u_{nw} - u_{sw}) (x_\xi)_w \right] j \right\} \quad (27)$$

$$\delta r_{ep} = (x_e - x_p) i + (y_e - y_p) j \quad (28)$$

۲- اگر  $G_e < 0$  آن گاه

$$\langle u_e \rangle = u_E + \delta u \quad (29)$$

و

$$\delta u = \begin{cases} \text{sign}(\delta u^+) \text{Min} \{ |\delta u^+|, |\delta u^-| \} & \text{IF } \delta u^+ \cdot \delta u^- > 0 \\ \cdot & \text{IF } \delta u^+ \cdot \delta u^- \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

که در آن  $\delta u^+$  و  $\delta u^-$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta u^+ = (\nabla u)_e \cdot (\delta r_{eE}) \quad (31)$$

$$\delta u^- = (\nabla u)_{ee} \cdot (\delta r_{eE}) \quad (32)$$

که مقدار  $(\nabla u)_e$  در معادله (۲۶) داده شده است و مقدار  $(\nabla u)_{ee}$  نیز به صورت مشابه در نقطه  $ee$  محاسبه و بردار  $\delta r_{eE}$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta r_{eE} = (x_e - x_E) i + (y_e - y_E) j \quad (33)$$

دیفیوژن مجازی این روش کمتر از روش درجه اول فواز جریان است، بنابراین با مرتب کردن معادله‌های مومتم، معادله (۱۹) به معادله‌های زیر خواهیم رسید.

$$u_p^{n+1} = \delta t (H_u)_p^{n+1} + \delta t \left[ (D_u^1)_w p_w^{n+1} - (D_u^1)_e p_e^{n+1} \right] + \delta t \left[ (D_u^1)_s p_s^{n+1} - (D_u^1)_n p_n^{n+1} \right] + u_p^n \quad (34)$$

$$v_p^{n+1} = \delta t (H_v)_p^{n+1} + \delta t \left[ (D_v^1)_w p_w^{n+1} - (D_v^1)_e p_e^{n+1} \right] + \delta t \left[ (D_v^1)_s p_s^{n+1} - (D_v^1)_n p_n^{n+1} \right] + v_p^n \quad (35)$$

در معادله‌های بالا  $H_u$  و  $H_v$  شامل تمام عبارتها به جز گرادیان فشار و همچنین سرعت در گام زمانی قبل هستند.  $D_u$  و  $D_v$  نیز ضرایبی هستند که به هندسه شبکه و حجمهای کنترل بستگی دارند و مقدار آنها در مرجع [۵] تعیین شده است.

### ۵- روش حل ضمنی معادله‌ها بر اساس روش گام زمانی مجازی

با رجوع به معادله‌های (۳۴) و (۳۵) ملاحظه می‌شود که این معادله‌ها به شکل ضمنی گسسته شده‌اند. به عبارت دیگر تمام مقادیر سرعت و فشار که در عبارت دیفیوژن و جابه‌جایی و گرادیان فشار ظاهر شده‌اند در گام زمانی  $(n+1)$  باید مورد استفاده قرار گیرند. حال چنانچه میدان سرعت و فشار در گام زمانی  $n$  ام معین باشد باید به نحوی مقادیر این متغیرها را در گام زمانی  $(n+1)$  ام

$$v_p^* = \tau(H_v)_p^k + \tau \left[ (D_v^1)_w P_w^* - (D_v^1)_e P_e^* \right] + \tau \left[ (D_v^1)_s P_s^* - (D_v^1)_n P_n^* \right] + \left( 1 - \frac{\tau}{\delta t} \right) v_p^k + \frac{\tau v_p^k}{\delta t} \quad (40)$$

در تعیین مؤلفه‌های سرعت از معادله‌های بالا فرض می‌شود که مقادیر فشار و مؤلفه‌های سرعت در گام زمانی  $n$  و تکرار  $k$  معلوم باشد. مقدار  $P^*$  نیز برابر  $P^k$  فرض می‌شود و مقادیر تصحیح فشار که باید به  $P^*$  اضافه شود تا فشار در گام زمانی مجازی  $k+1$  حاصل شود از حل معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$A_E P'_E + A_N P'_N + A_P P'_P + A_W P'_W + A_S P'_S = \rho/\tau (G_e^* - G_w^* + G_n^* - G_s^*) + b_{NO} \quad (41)$$

که در آن:

$$A_E = \frac{g_e^{11}}{J_e} \quad A_N = \frac{g_n^{11}}{J_n} \quad A_W = \frac{g_w^{11}}{J_w} \quad A_S = \frac{g_s^{11}}{J_s} \quad A_P = -(A_E + A_N + A_W + A_S) \quad (42)$$

و  $b_{NO}$  نیز عبارت است از جمله‌ای که ناشی از نامتعامل بودن شبکه است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b_{NO} = \frac{g_e^{11}}{J_e} (P'_{ne} - P'_{se}) - \frac{g_w^{11}}{J_w} (P'_{nw} - P'_{sw}) + \frac{g_n^{11}}{J_n} (P'_{ne} - P'_{nw}) - \frac{g_s^{11}}{J_s} (P'_{se} - P'_{sw}) \quad (43)$$

در نتیجه برای به دست آوردن  $P'$  باید معادله بیضوی (۴۲) حل شود با در نظر گرفتن روش میانابایی وزنی مقادیر  $G_e^*$  و  $G_n^*$  و ... به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$G_e^* = \tau(H_G)_e^k + \tau(D_G^1)_e (P_p^* - P_e^*) + \tau(D_G^1)_e (P_{se}^* - P_{ne}^*) + (1 - \tau/\delta t) G_e^k + \tau G_e^n / \delta t \quad (44)$$

$$G_n^* = \tau(H_G)_n^k + \tau(D_G^1)_n (P_{wn}^* - P_{en}^*) + \tau(D_G^1)_n (P_p^* - P_n^*) + (1 - \tau/\delta t) G_n^k + \tau G_n^n / \delta t \quad (45)$$

که در آن:

تعیین کرد. از آنجا که معادله‌های مومنتم، معادله‌های غیر خطی اند لازم است از روشهای تکرار برای حل آنها استفاده کرد. در مقاله حاضر برای حل ضمنی معادله‌ها از روش زمان مجازی استفاده شده است این روش در حقیقت روشی است که برای برداشتن قیده‌های ناشی از وجود لزجت در حل مسائل همراه با سطح آزاد توسط مرجع [۷] ارائه شده است. اساس روش زمان مجازی بر اضافه کردن عبارت مشتق مؤلفه‌های سرعت نسبت به زمان مجازی به معادله‌های مومنتم است در نتیجه معادله‌ها به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{u_p^{k+1} - u_p^k}{\tau} = (H_u)_p^k + \left[ (D_u^1)_w P_w^{k+1} - (D_u^1)_e P_e^{k+1} \right] + \left[ (D_u^1)_s P_s^{k+1} - (D_u^1)_n P_n^{k+1} \right] - \frac{u_p^k - u_p^n}{\delta t} \quad (36)$$

$$\frac{v_p^{k+1} - v_p^k}{\tau} = (H_v)_p^k + \left[ (D_v^1)_w P_w^{k+1} - (D_v^1)_e P_e^{k+1} \right] + \left[ (D_v^1)_s P_s^{k+1} - (D_v^1)_n P_n^{k+1} \right] - \frac{v_p^k - v_p^n}{\delta t} \quad (37)$$

که در آنها  $\tau$  گام زمانی مجازی است. چنانچه ملاحظه می‌شود آنچه که موجب تفاوت معادله‌های (۳۶) و (۳۷) با معادله‌های (۳۴) و (۳۵) شده است افزوده شدن عبارت  $(u_p^{k+1} - u_p^k)/\tau$  و  $(v_p^{k+1} - v_p^k)/\tau$  است. اندیس بالای  $k$  و  $k+1$  نمایانگر دو تکرار متوالی یا به عبارت دیگر نمایانگر دو گام زمانی مجازی متوالی است و پاسخ پایدار در زمان مجازی همان پاسخ مورد نظر در گام زمانی حقیقی  $(n+1)$  است. باید توجه داشت که مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  در هر تکرار  $k+1$  ام باید معادله پیوستگی به شکل زیر را نیز ارضا کند:

$$(G_e^{k+1} - G_w^{k+1}) + (G_n^{k+1} - G_s^{k+1}) = 0 \quad (38)$$

## ۶- الگوریتم حل معادله‌های مومنتم و پیوستگی

الگوریتم حل معادله‌ها تا حدود زیادی مشابه روش مرجع [۶] است. ابتدا از معادله‌های زیر مؤلفه‌های سرعت تعیین می‌شود:

$$u_p^* = \tau(H_u)_p^k + \tau \left[ (D_u^1)_w P_w^* - (D_u^1)_e P_e^* \right] + \tau \left[ (D_u^1)_s P_s^* - (D_u^1)_n P_n^* \right] + \left( 1 - \frac{\tau}{\delta t} \right) u_p^k + \frac{\tau u_p^k}{\delta t} \quad (39)$$



$$(H_G)_e = (y_\eta)_e (H_u)_e - (x_\eta)_e (H_v)_e$$

$$(H_G)_n = (x_\xi)_n (H_v)_n - (y_\xi)_n (H_u)_n$$

$$(D_G)_e^1 = \frac{g_e^1}{\rho J_e}, \quad (D_G)_e^2 = \frac{-g_e^2}{\rho J_e}$$

$$(D_G)_n^1 = \frac{-g_n^1}{\rho J_n}, \quad (D_G)_n^2 = \frac{g_n^2}{\rho J_n} \quad (46)$$

پس از به دست آوردن مقادیر تصحیح فشار آن گاه از معادله‌های زیر مقادیر تصحیح سرعت به دست می‌آید:

$$u'_p = \tau \left[ (D_u)_w P'_w - (D_u)_e P'_e \right]$$

$$+ \tau \left[ (D_u)_s P'_s - (D_u)_n P'_n \right] \quad (47)$$

و مقدار  $v'_p$  نیز به صورت مشابه به دست می‌آید، حال مقادیر در گام زمانی  $K+1$  برابر است با:

$$P^{k+1} = P^* + P' \quad u^{k+1} = u^* + u' \quad v^{k+1} = v^* + v' \quad (48)$$

در صورتی که اختلاف بین متغیرهای گام زمانی مجازی  $k$  و  $k+1$  قابل ملاحظه باشد عملیات تکرار برای به دست آوردن مقادیر متغیرها در گام زمانی مجازی بعدی ادامه می‌یابد در غیر این صورت مقادیر متغیرهای جدید همان متغیرها در گام زمانی  $n+1$  خواهد بود و عملیات برای محاسبه متغیرها در گام زمانی بعدی انجام می‌پذیرد. باید توجه داشت در آغاز هر گام زمانی حقیقی  $u^k$  و  $v^k$  و  $P^k$  برابر مقادیر  $u^n$  و  $v^n$  و  $P^n$  هستند. در انتخاب گام زمانی مجازی  $\tau$  لازم به تذکر است که این گام زمانی باید به نحوی انتخاب شود که همگرایی پاسخ را تضمین کند. وجود عبارت جابه‌جایی و لزجت در معادله مومنتم باعث ایجاد محدودیت در انتخاب گام زمانی مجازی می‌شود. در مرجع [5] معیاری برای انتخاب این گام زمانی پیشنهاد شده است.

## ۶- ردیابی سطح آزاد و روش حل معادله انتقال کسر

### حجمی

در قسمتهای گذشته معادله انتقال کسر حجمی در مختصات

منحنی الخط ارائه شد، در این قسمت هدف ارائه روشی برای حل عددی این معادله است. روشهای گوناگونی برای حل این معادله در مختصات کارترین ارائه شده است که از میان آنها می‌توان به روش سلولهای دهنده - گیرنده<sup>۱۳</sup> که توسط مرجع [۱] مورد استفاده قرار گرفته است اشاره کرد. همچنین مرجع [۸] روش دیگری را تحت عنوان روش فلیر<sup>۱۴</sup> معرفی می‌کند که این روش نیز تنها برای مختصات کارترین مورد استفاده قرار گرفته است. روش دیگری نیز توسط مرجع [۹] ارائه شده است که این روش برای شبکه غیر کارترین و عمومی قابل استفاده است. در این روش یک زنجیره اتصال بین سلولهای سطحی (سلولهایی که سطح آزاد از میان آنها عبور می‌کند) ایجاد می‌شود و آنچه که باعث محدودیت در به کار بردن این روش می‌شود همان پیچیدگی الگوریتم جستجو برای ایجاد زنجیره اتصال بین سلولهای سطحی است. روش جدیدی که در مقاله حاضر مورد استفاده گرفته است تا حدودی مشابه روشی است که در مرجع [۲] ارائه شده است. در این روش سطح آزاد در هر سلول توسط یک پاره خط شیبدار به شکل  $y=px+q$  تقریب زده می‌شود به نحوی که این پاره خط در داخل سلول مورد نظر جای می‌گیرد. متأسفانه مرجع [۲] توضیح واضح و دقیقی در مورد نحوه تعیین شیب سطح آزاد نمی‌دهد. بنابراین لازم است به نحوی شیب سطح آزاد در هر سلول تعیین شود. فرض کنید که شیب سطح آزاد در یک سلول دلخواه معلوم باشد و می‌خواهیم یک پاره‌خط با شیب معلوم را چنان جابه‌جا کنیم که سلول مورد نظر را با توجه به کسر حجمی آن به صورتی تقسیم کند که در یک سمت آن مایع و در سمت دیگر آن گاز قرار گیرد. سوالی که در اینجا مطرح است آن است که در این حالت مایع باید در کدام سمت پاره‌خط مفروض قرار گیرد؟ به این سوال باید با توجه به کسر حجمی سلول مورد نظر و سلولهای همسایه آن پاسخ داد. حال چنانچه سمت قرار گرفتن مایع نسبت به پاره‌خط و همچنین شیب آن مشخص باشد می‌توان عرض از مبداء پاره خط مورد نظر را تعیین کرد و برای این کار باید از کسر حجمی سلول مورد نظر استفاده کرد. پس از آنکه معادله پاره‌خط مشخص شد می‌توان به حل معادله انتقال کسر حجمی مبادرت ورزید. در مورد هر یک از این مراحل در زیر توضیح داده خواهد شد. در روش مورد استفاده در این مقاله به منظور تعیین شیب سطح آزاد در هر سلول از این فرض استفاده شده است که بردار  $\nabla F$  همواره عمود بر سطح آزاد است و با داشتن جهت این بردار می‌توان

شیب سطح آزاد را تعیین کرد. برای به دست آوردن گرادیان  $F$  در مرکز سلول  $P$  از معادله زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla F})_p = & \omega_{ne}(\nabla F)_{ne} + \omega_{se}(\nabla F)_{se} \\ & + \omega_{nw}(\nabla F)_{nw} + \omega_{sw}(\nabla F)_{sw} \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن

$(\nabla F)_p$  متوسط گرادیان  $F$  منتسب به سلول  $P$

$(\nabla F)_{ne}$ ،  $(\nabla F)_{se}$ ،  $(\nabla F)_{nw}$ ،  $(\nabla F)_{sw}$  گرادیانهای  $F$  در رأسهای حجم کنترل

$\omega_{ne}$ ،  $\omega_{se}$ ،  $\omega_{nw}$ ،  $\omega_{sw}$  ضرایب وزنی متناسب با عکس فاصله تا سطح آزاد است.

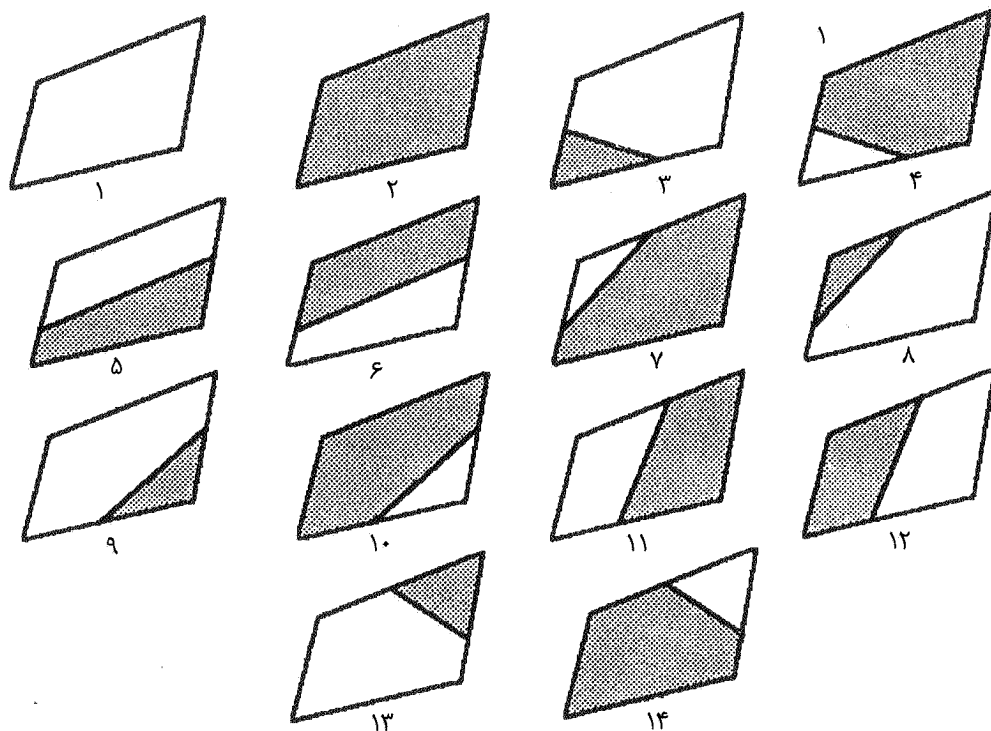
بنابراین به جای آنکه گرادیان  $F$  مستقیماً در مرکز سلول محاسبه شود از متوسط وزنی گرادیان در چهار راس حجم کنترل استفاده می‌شود. این عمل باعث می‌شود که از کسر حجمی سلول مرکزی و ۸ سلول مجاور آن در محاسبه گرادیان استفاده شود. محاسبه بردار گرادیان با استفاده از تبدیل مختصات انجام می‌پذیرد و از معادله ای مشابه معادله (۲۶) استفاده می‌شود. ضرایب وزنی  $\omega$  در معادله بالا نسبت عکس با فاصله عمودی رأسهای حجم کنترل تا پاره خط نمایانگر سطح آزاد دارد. به این ترتیب هر یک از رأسهای حجم کنترل که به سطح آزاد نزدیکتر باشد تأثیر تعیین کننده تری در محاسبه گرادیان  $F$  خواهد داشت. از آنجا که تا این مرحله معادله پاره خط نمایانگر سطح آزاد معین نیست لذا، امکان تعیین فاصله نقاط واقع بر رأسهای حجم کنترل تا این پاره خط و در نتیجه محاسبه ضرایب وزنی فوق وجود ندارد. بنابراین در ابتدای محاسبات این ضرایب وزنی همگی برابر  $1/4$  انتخاب شده و گرادیان  $F$  در نتیجه شیب سطح آزاد تعیین می‌شود و با تعیین معادله پاره خط نمایشگر سطح آزاد، بار دیگر ضرایب وزنی برحسب فاصله نقاط واقع بر گوشه‌های حجم کنترل تا سطح آزاد محاسبه شده و معادله پاره خط به دست می‌آید و این عمل تا آنجا تکرار می‌شود که معادله پاره خط به دست آمده تغییر نکند. با تعیین گرادیان  $F$  بردار یکه عمود بر سطح آزاد از معادله زیر تعیین می‌شود:

$$n_p = \frac{(\nabla F)_p}{|(\nabla F)_p|} \quad (50)$$

که مخرج کسر اندازه بردار گرادیان  $F$  است. حال اگر  $y=px+q$  نشان دهنده معادله سطح آزاد در داخل سلول مورد نظر باشد، مقدار شیب این پاره‌خط از معادله زیر محاسبه می‌شود:

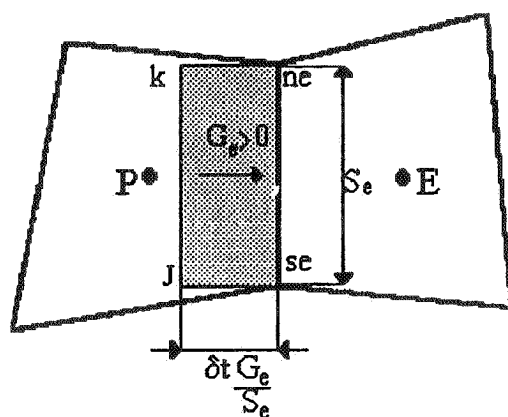
$$p = -\frac{(n_x)}{(n_y)} \quad (51)$$

که در آن  $(n_x)$  و  $(n_y)$  مؤلفه‌های بردار یکه عمود بر سطح آزاد است. پس از تعیین شیب پاره‌خط  $(p)$  باید عرض از مبدا آن  $(q)$  تعیین شود. برای تعیین عرض از مبدا پاره‌خط قرار گرفته در هر سلول، از کسر حجمی آن سلول استفاده می‌شود. اما پیش از تعیین عرض از مبدا باید سمت قرار گرفتن مایع و سمت قرار گرفتن گاز نسبت به پاره خط مورد نظر تعیین شود. برای این منظور از جهت بردار گرادیان  $F$  استفاده می‌شود. به این ترتیب که این بردار همواره بر سطح آزاد عمود بوده و جهت آن نیز از سمت گاز به سمت مایع است. بنابراین با داشتن جهت این بردار سمت قرار گرفتن مایع نسبت به پاره‌خط مورد نظر معین می‌شود. به این صورت که اگر این بردار از سمت چپ پاره‌خط به طرف سمت راست پاره‌خط باشد آن گاه مایع در سمت راست آن قرار می‌گیرد و برعکس اگر جهت این بردار از سمت راست پاره‌خط به طرف چپ باشد آن گاه مایع در سمت چپ پاره‌خط قرار خواهد گرفت. برای تعیین عرض از مبدا می‌دانیم که  $F_{i,j} \delta V_{i,j}$  برابر با حجم مایع در سلول  $i, j$  و  $(1-F_{i,j}) \delta V_{i,j}$  برابر با حجم گاز در آن سلول است ( $\delta V_{i,j}$  نمایانگر حجم کل سلول است). حال باید یک پاره خط با شیب معلوم را در سلول  $i$  و  $j$  با توجه به سمت قرار گرفتن مایع نسبت به آن چنان جابه‌جا شود تا حجم سلول را به دو قسمت تقسیم کند به نحوی که حجم یک قسمت برابر با حجم مایع و حجم قسمت دیگر آن برابر با حجم گاز باشد و از آنجا مقدار  $q$  تعیین می‌شود. در اینجا از توضیح جزئیات مراحل تعیین  $q$  صرف نظر می‌شود و خواننده علاقه مند می‌تواند به مرجع [۵] مراجعه کند. حال پس از آنکه معادله پاره‌خطی که به عنوان تقریبی برای سطح آزاد در هر سلول به کار می‌رود به دست آمد باید به حل معادله جابه‌جایی  $F$  یعنی معادله (۱۶) پرداخته شود. به جای آنکه معادله (۱۶) مستقیماً گسسته شود از شکل گسسته دیگری استفاده می‌شود که اگر چه از نظر ظاهر با شکل گسسته معادله (۱۶) متفاوت است اما در حقیقت نمایانگر همان مفهوم معادله (۱۶) است. در نتیجه می‌توان نوشت:



شکل ۲- ۱۴ وضعیت ممکن برای سطح آزاد در یک سلول دلخواه. سطح تیره نشان دهنده مایع و سطح روشن نشان دهنده گاز است

خالی از مایع باشد و یا قسمتی از آن پر بوده و سطح آزاد دو وجه سلول را قطع کند و اینکه این دو وجه کدام یک از وجه‌های آن باشد ۱۴ حالت قابل تشخیص است که این ۱۴ حالت در شکل (۲) نمایش داده شده است. لازم است که این ۱۴ حالت شناسایی شوند. در تعیین مقدار مایع جابه‌جا شده بدون آنکه به کلی بودن مسئله لطمه رسد فقط وجه شرقی سلول و مایع انتقال یافته از این وجه را مورد توجه قرار داده و شار حجمی عبوری از این وجه مثبت فرض می‌شود، ( $G_e > 0$ ). در اینجا لازم است به معرفی سطح جاروب شده پرداخته شود سطح جاروب شده برای یک وجه دلخواه یک سطح مستطیل شکل است که در گام زمانی  $\delta t$  تمام محتویات این سطح مستطیل شکل از وجه مورد نظر عبور کرده و به سلول مجاور انتقال می‌یابد. طول این سطح مستطیل شکل منطبق بر وجه مذکور و عرض آن برابر حاصلضرب سرعت عمود بر وجه در گام زمانی است. حال به هر میزان که در این سطح جاروب شده مایع قرار داشته باشد به همان میزان نیز مایع به سلول مجاور انتقال می‌یابد. این سطح جاروب شده در شکل (۳) برای وجه شرقی حجم کنترل و در حالتی که علامت شار حجمی مثبت است نشان داده شده است. مختصات نقاط  $k$  و  $j$  نشان داده شده، در این شکل به صورت زیر به دست می‌آید:



شکل ۳- تصویر سطح جاروب شده (مستطیل هاشور خورده)

$$F_p^{n+1} = F_p^n - \frac{1}{\delta V_p} [(\delta V_l)_e - (\delta V_l)_w - (\delta V_l)_n - (\delta V_l)_s] \quad (52)$$

در معادله بالا  $(\delta V_l)_e$  و  $(\delta V_l)_n$  نمایانگر حجم مایع خارج شده از وجه‌های شرقی و شمالی از سلول  $P$  در یک گام زمانی و  $(\delta V_l)_w$  و  $(\delta V_l)_s$  نمایانگر حجم مایع داخل شده از وجه‌های غربی و جنوبی سلول  $P$  در یک گام زمانی و  $\delta V_p$  نیز حجم سلول  $P$  است. یک سلول دلخواه را در نظر بگیرید برحسب آنکه این سلول دلخواه پر از مایع یا

آزاد بوده و  $\eta = d/d$  که در آن  $d_e$  فاصله مرکز سلول میانبایی تا مرکز سلول سطحی و  $d$  فاصله سطح آزاد تا مرکز سلول میانبایی است. سلول میانبایی یکی از ۸ سلول همسایه سلول  $i$  و  $j$  است که اولاً در داخل مایع بوده و ثانیاً خطی که مرکز این سلول را به مرکز سلول  $i$  و  $j$  وصل می‌کند، از خطوطی که مرکز سلولهای همسایه دیگر را به این نقطه وصل می‌کند به خط عمود بر سطح آزاد نزدیکتر باشد. سلولهای خالی که در مجاورت یک سلول نیمه پر قرار دارند نقش سلولهای مجازی را برای آن سلول در حل معادله‌های بقای اندازه حرکت ایفاء می‌کنند و باید مؤلفه‌های سرعت در مرکز این گونه سلولها به نحوی تعیین شود تا شرط لغزش آزاد در جهت مماس بر سطح آزاد را در سلولهای مرزی برآورده سازند.

### ۷- نتایج

به منظور بررسی عملکرد روش حل ارائه شده در این مقاله تعدادی از مسائل نمونه انتخاب شده و حل شده‌اند. این مسائل نمونه را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد، گروه اول شامل مسائلی است که در آنها سطح آزاد و پدیده مرزهای متحرک حضور ندارد. گروه دوم شامل مسائلی هستند که به منظور بررسی قابلیت و توانایی روش ردیابی سطح آزاد انتخاب شده‌اند. در این گروه از مسائل، میدان سرعت معلوم فرض می‌شود و با فرض یک شکل اولیه برای سطح آزاد میدان  $F$  اولیه تعیین شده و معادله انتقال میدان  $F$  حل می‌شود و قدرت روش در حفظ شکل اولیه سطح آزاد بررسی می‌شود. گروه سوم مسائلی هستند که در آن سطح آزاد و میدان سرعت بر روی یکدیگر تأثیر متقابل داشته و در حقیقت حالت کلی جریان به همراه سطح آزاد است.

### الف - جریان لزج در حفره مربع شکل

در این مسئله سیال در داخل حفره مربع شکل با ضلع  $L = 1$  واحد در حالت سکون قرار دارد و صفحه بالایی حفره به طور ناگهانی در جهت مختصه  $x$  با سرعت افقی  $U$  شروع به حرکت می‌کند. تحت اثر حرکت صفحه بالایی، سیال به چرخش در می‌آید که جهت حرکت صفحه تعیین کننده جهت چرخش سیال است. این مسئله برای عدد رینولدز  $UL/\nu = 400$  با استفاده از شبکه کارترین یکنواخت  $30 \times 30$  حل شده است و با نتایج عددی مرجع [۱۰] که با استفاده از شبکه  $129 \times 129$  به دست آمده، مقایسه شده است. در

$$\begin{cases} x_k = x_{ne} - \frac{G_e \delta t n_{xe}}{S_e} \\ y_k = y_{ne} - \frac{G_e \delta t n_{ye}}{S_e} \end{cases} \quad \begin{cases} x_j = x_{se} - \frac{G_e \delta t n_{xe}}{S_e} \\ y_j = y_{ne} - \frac{G_e \delta t n_{ye}}{S_e} \end{cases}$$

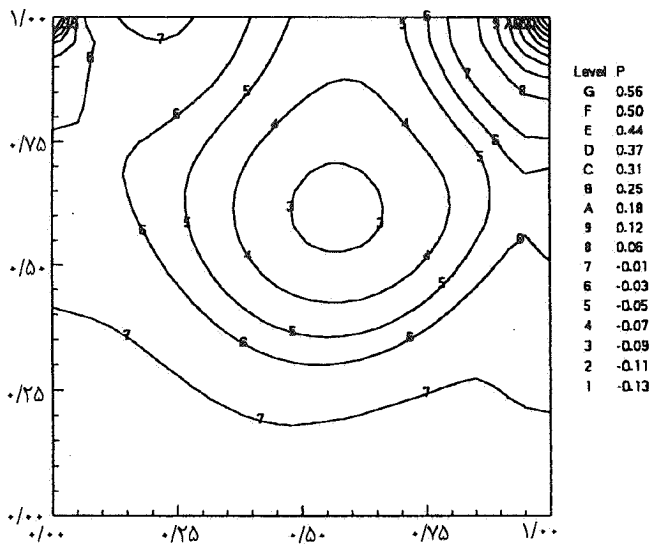
که در آن  $n_{xe}$  و  $n_{ye}$  مؤلفه‌های بردار عمود بوجه شرقی و  $S_e$  سطح وجه شرقی است. بنابراین با داشتن مختصات چهار رأس این مستطیل موقعیت سطح جاروب شده کاملاً مشخص است و با داشتن مختصات رأسها و معادله پاره خطی که معرف سطح آزاد است می‌توان محل تقاطع این پاره خط با اضلاع مستطیل را در صورت وجود تعیین کرد. در نتیجه اگر این پاره خط مستطیل را قطع کند آن را به دو بخش تقسیم می‌کند که یک بخش نمایانگر میزان مایع انتقال یافته به سلول مجاور (در حقیقت  $(\delta V_I)_e$ ) و بخش دیگر نیز نمایانگر میزان گاز جابه‌جا شده است. در صورتی که پاره خط معرف سطح آزاد اضلاع سطح مستطیل شکل جاروب شده را قطع نکند، آن گاه بسته به اینکه کدامیک از حالت‌های چهارده گانه اتفاق افتاده باشد، حجم مایع جابه‌جا شده برابر تمام سطح جاروب شده بوده و یا حجم مایع جابه‌جا شده از آن وجه برابر صفر است. بنابراین با تعیین میزان مایع جابه‌جا شده از هر وجه و از معادله (۵۲) می‌توان میدان  $F$  در گام زمانی جدید  $(n+1)$  را تعیین کرد. از میدان  $F$  به منظور تعیین شکل و محل سطح آزاد استفاده می‌شود که در اعمال شرایط مرزی بر روی سطح آزاد نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اعمال شرایط مرزی با اعمال ساده سازی و صرف نظر از تنش سطحی فرض می‌شود که معادله زیر برقرار است:

$$P_{surf} = P_a \quad (54)$$

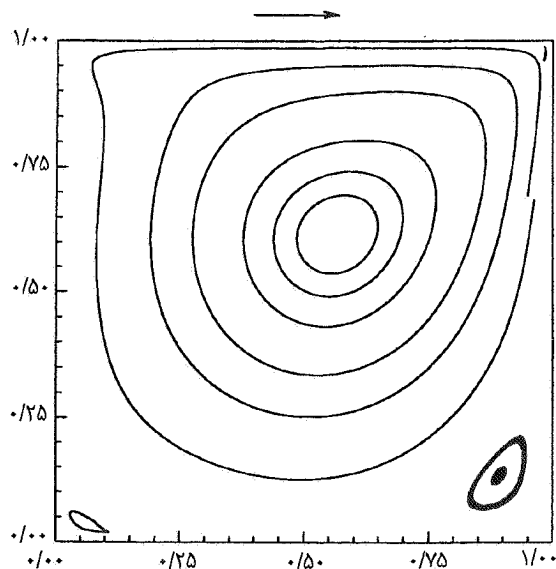
که  $P_a$  فشار گاز و  $P_{surf}$  فشار بر روی سطح آزاد است. حال برای آنکه معادله (۵۴) ارضا شود مقادیر تصحیح فشار در سلول سطحی ( $i$  و  $j$ ) از معادله زیر به دست می‌آید:

$$P'_{ij} = (1 - \eta)P_{int} + \eta P_{surf} - P_{ij}^n \quad (55)$$

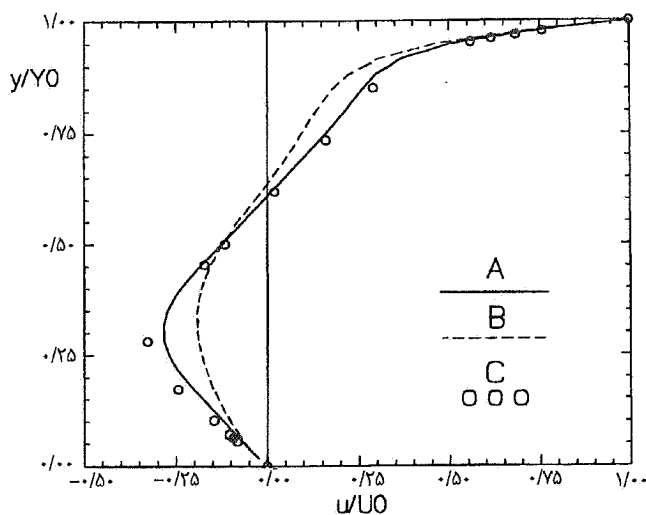
که در آن  $P'_{ij}$  مقدار تصحیح فشار در سلول  $i, j$  و  $P_{ij}^n$  مقدار فشار در سلول سطحی و  $P_{int}$  فشار در سلول میانبایی و  $P_{surf}$  فشار در سطح



شکل (۴-ب) خطوط فشار ثابت برای جریان  
حفره مربعی ( $R=400$ )

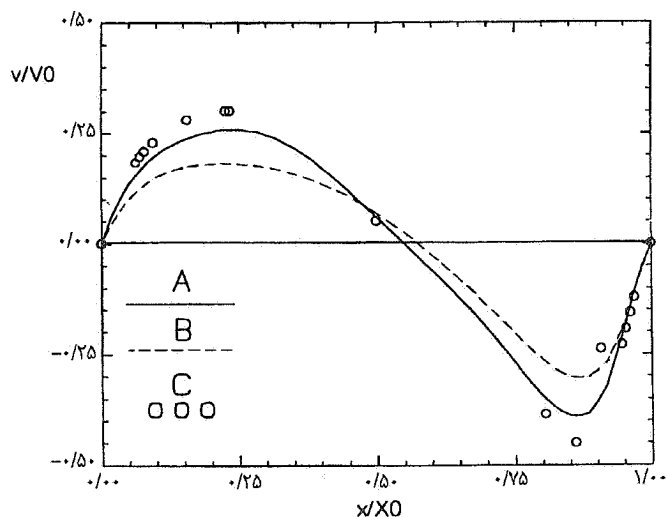


شکل (۴-الف) خطوط جریان برای حرکت سیال در  
حفره مربعی ( $R=400$ )



شکل (۴-د) پروفیل مولفه عمودی سرعت در امتداد خط افقی  
گذرنده از مرکز حفره ( $R=400$ )

(A) کار حاضر (روش درجه دوم)، (B) کار حاضر (روش درجه اول  
فراز جریان)، (C) نتایج از مرجع [۱۰]

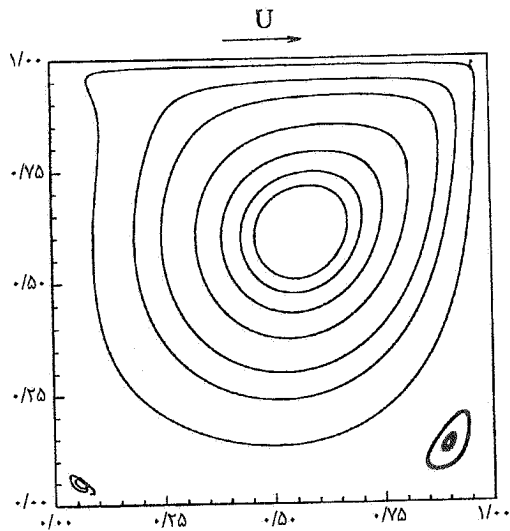


شکل (۴-ج) پروفیل مولفه افقی سرعت در امتداد خط قائم  
گذرنده از مرکز حفره ( $R=400$ )

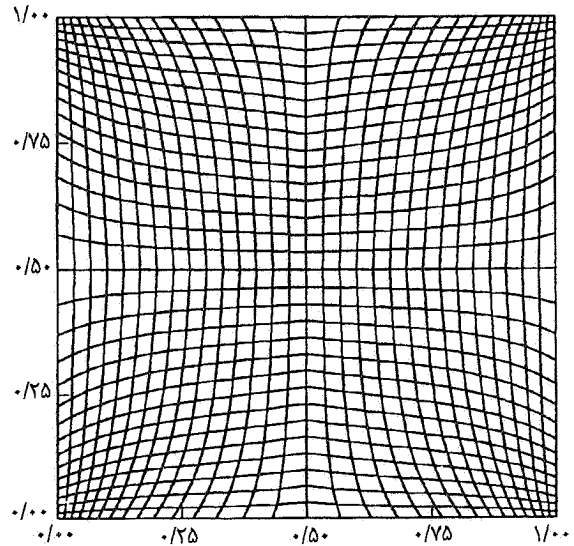
(A) کار حاضر (روش درجه دوم)، (B) کار حاضر (روش درجه اول  
فراز جریان)، (C) نتایج از مرجع [۱۰]

برای حل معادله‌های جابه‌جایی جریان از دو روش درجه اول و  
درجه دوم استفاده شده است. چنانکه از شکل‌های (۴-ج)  
و (۴-د) ملاحظه می‌شود دقت روش درجه دوم در مقایسه با  
روش درجه اول بسیار مطلوبتر است همین مسئله برای عدد  
رینولدز ۴۰۰ با استفاده از شبکه منحنی الخط نیز حل شده است که

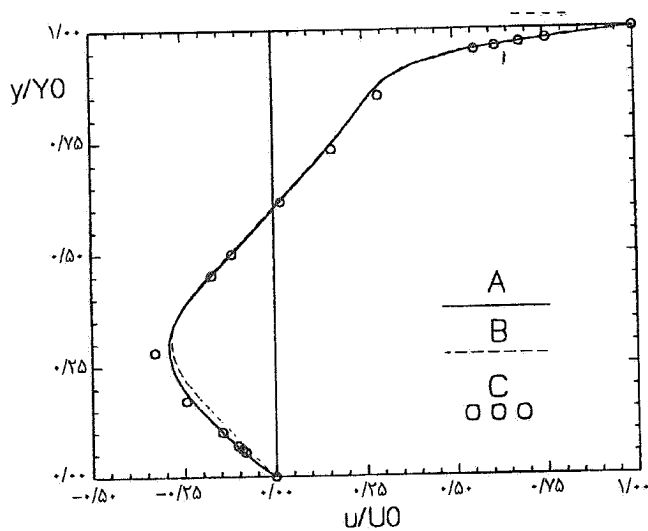
شکل (۴) نتایج به دست آمده برای سرعت و فشار و مقایسه آن با  
نتایج مرجع [۱۰] نشان داده شده است. در شکل (۴-الف) خطوط  
جریان، در شکل (۴-ب) خطوط هم فشار در داخل حفره و در  
شکل‌های (۴-ج) و (۴-د) نیز پروفیل مؤلفه عمودی و افقی  
سرعت در امتداد خط قائم گذرنده از مرکز حفره ارائه شده است.



شکل (ب - ۵) خطوط جریان برای جریان حفره مربعی با استفاده از شبکه منحنی الخط ( $R=400$ )



شکل (الف - ۵) شبکه  $30 \times 30$  منحنی الخط مورد استفاده برای حل جریان حفره مربعی

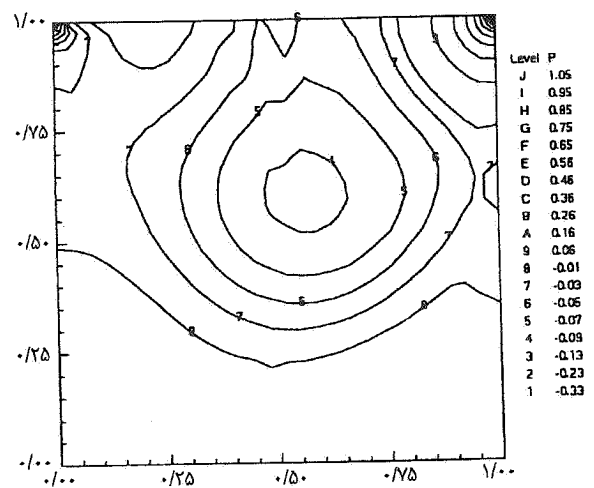


شکل (د - ۵) پروفیل مولفه افقی سرعت در امتداد خط قائم گذرنده از مرکز حفره ( $R=400$ )

(A) کار حاضر (با استفاده از شبکه منحنی الخط)، (B) کار حاضر (با استفاده از شبکه کارترین)، (C) نتایج از مرجع [۱۰]

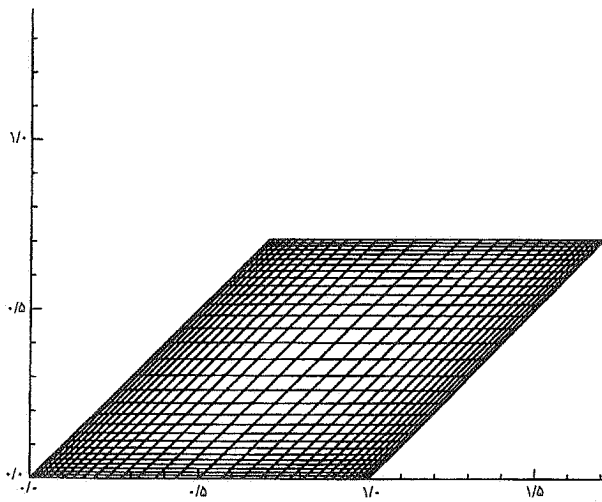
### ب - جریان لزج در حفره لوزی مایل

این مسئله نیز مانند مسئله قبلی است با این تفاوت که در این حالت دیواره‌های حفره با افق زاویه  $45^\circ$  می‌سازند. در حل این مسئله از شبکه  $30 \times 30$  نامتعامد و نایکنواخت استفاده شده است و نتایج آن برای عدد رینولدز ۱۰۰ در مقایسه با نتایج مرجع [۱۱] که

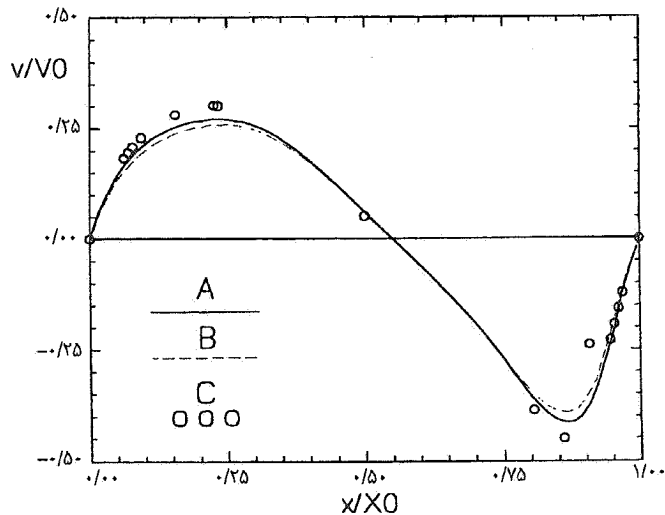


شکل (ج - ۵) خطوط فشار ثابت برای جریان حفره مربعی با استفاده از شبکه منحنی الخط ( $R=400$ )

نتایج آن در شکل‌های (۵) ارائه شده است. شبکه مورد استفاده در شکل (۵-الف) نشان داده شده و در شکل‌های (ب-۵) و (ج-۵) به ترتیب خطوط جریان و خطوط فشار ثابت برای این جریان آورده شده‌اند. در شکل‌های (د-۵) و (ه-۵) مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل در شبکه منحنی الخط و شبکه کارترین و نتایج مرجع [۱۰] ارائه شده است. چنانکه ملاحظه می‌شود نتایج حل در شبکه منحنی الخط نسبت به نتایج حل در شبکه کارترین به نتایج مرجع [۱۰] نزدیکتر است.

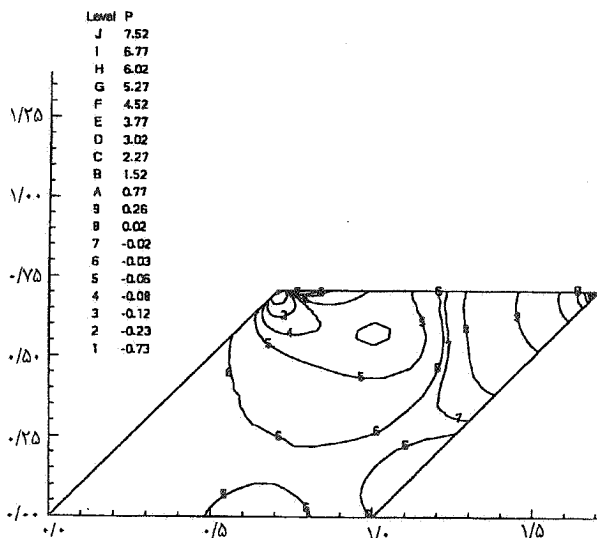


شکل (۶- الف) شبکه  $30 \times 30$  نامتعامد و نایکنواخت مورد استفاده برای جریان حفره لوزی شکل مایل ( $R=100$ )

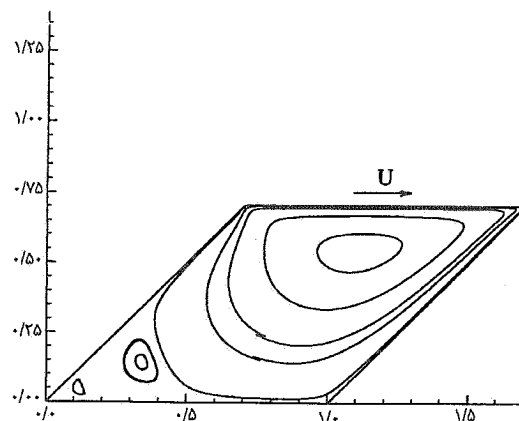


شکل (۵- ه) پروفیل مولفه عمودی سرعت در امتداد خط افقی گذرنده از مرکز حفره ( $R=400$ )

(A) کار حاضر (با استفاده از شبکه منحنی الخط)، (B) کار حاضر (با استفاده از شبکه کارتیزین)، (C) نتایج از مرجع [۱۰]



شکل (۶- ج) خطوط فشار ثابت برای جریان حفره لوزی شکل ( $R=100$ )

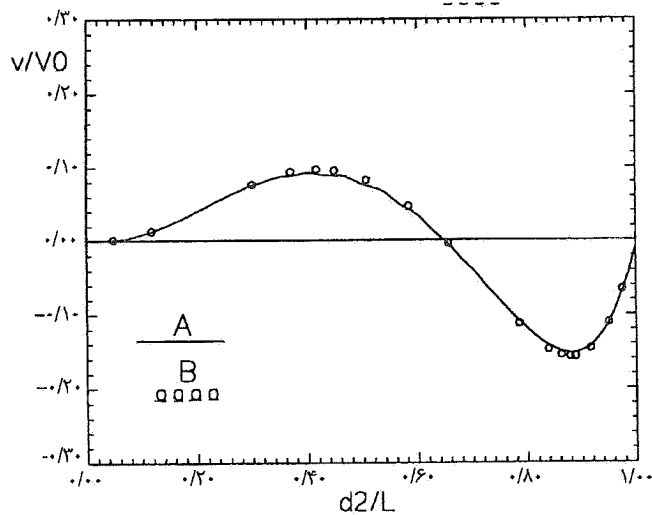


شکل (۶- ب) خطوط جریان برای حرکت سیال در حفره لوزی شکل ( $R=100$ )

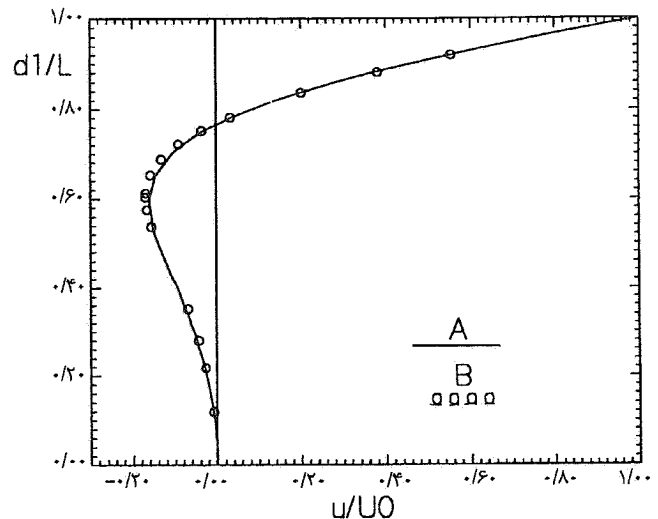
می شود تطبیق نتایج، بسیار خوب است.

ج- جابه جایی یک دایره در میدان سرعت یکنواخت در این مسئله یک میدان یکنواخت با زاویه  $45^\circ$  نسبت به افق در نظر گرفته می شود ( $u, v = 1$ ) و تغییر محل یک دایره در این میدان یکنواخت بررسی می شود. شبکه مورد استفاده در این مسئله

با استفاده از یک شبکه  $320 \times 320$  به دست آمده ارائه شده است. بدیهی است که مایل بودن دیواره باعث افزایش قدرت و تعداد گردابه های ثانویه می شود. در شکل (۶- الف) شبکه مورد استفاده و در شکل (۶- ب) و (۶- ج) به ترتیب خطوط جریان و خطوط هم فشار نشان داده شده است. مقایسه نتایج با نتایج مرجع [۱۱] نیز در شکل های (۶- د) و (۶- ه) ارائه شده است. همان طور که مشاهده



شکل (۶-۵) پروفیل مولفه عمودی سرعت در امتداد خطی افقی گذرنده از مرکز حفرة مایل ( $R=100$ )  
 (A) کار حاضر (روش درجه دوم)، (B) نتایج از مرجع [۱۱]



شکل (۶-۴) پروفیل مولفه افقی سرعت در امتداد خطی که از وسط دو ضلع بالا و پایین حفرة لوزی شکل می‌گذرد ( $R=100$ )  
 (A) کار حاضر (روش درجه دوم)، (B) نتایج از مرجع [۱۱]

مرجع [۱] موجود است. در شکل (۸-ب) مقایسه‌ای بین این نتایج و نتایج کار حاضر انجام گرفته است. در این شکل تغییرات طول بدون بعد که توسط آب طی می‌شود در مقابل زمان بدون بعد رسم شده است.

### ح - توقف ناگهانی یک ستون سیال

در این مثال فرض شده است که جریان یکنواخت سیال از سمت چپ به سمت راست در حال حرکت است و به طور ناگهانی یک دیواره در مسیر جریان قرار می‌گیرد که در نتیجه برخورد سیال با دیواره یک موج ایجاد شده که در خلاف جهت حرکت اولیه سیال به حرکت در می‌آید، میزان ارتفاع موج تابعی از شتاب جاذبه و سرعت اولیه سیال است. نتایج حاصل از حل این مسئله در شکل (۹) ارائه شده است. در این مثال سرعت اولیه برابر  $1 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است.

### ۸- نتیجه گیری

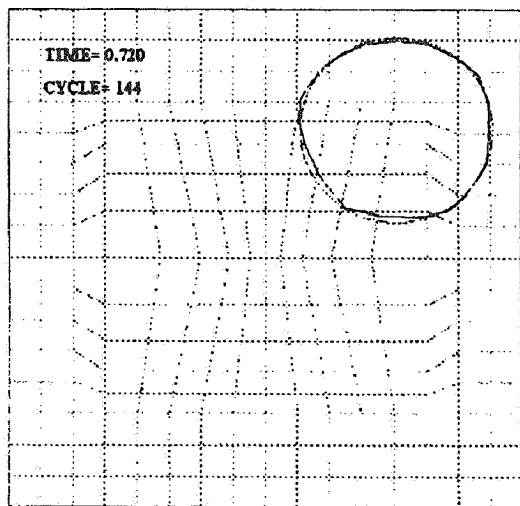
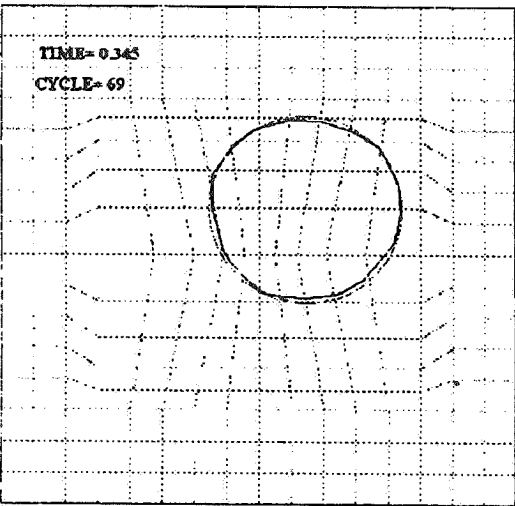
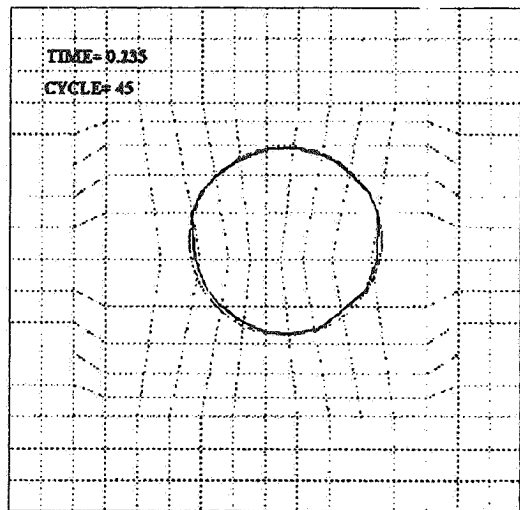
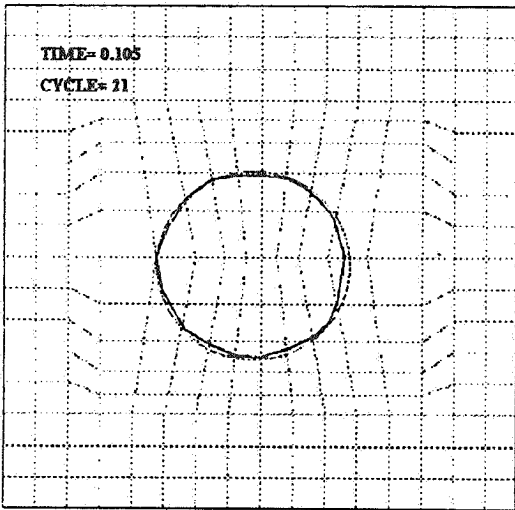
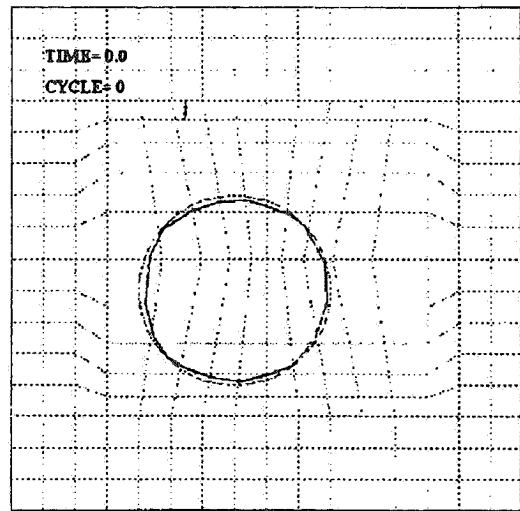
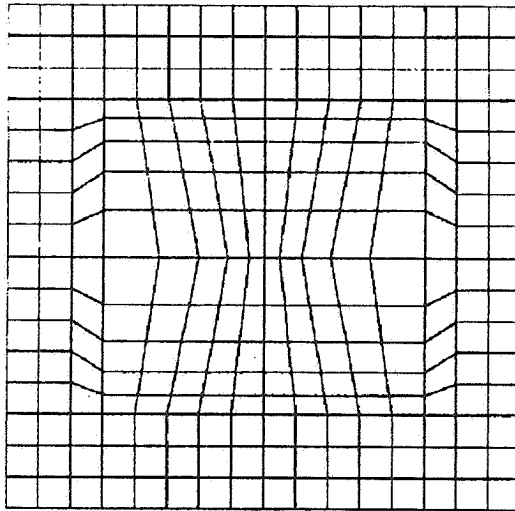
در این مقاله معادله‌های جریان آرام و دو بعدی به همراه سطح آزاد در مختصات منحنی الخط با استفاده از روش ضمنی زمان مجازی حل شده‌اند. دقت روش ارائه شده در حل مسائل نمونه و تطابق

یک شبکه منحنی الخط است. در هر مرحله میزان تغییر مساحت دایره نسبت به مساحت اولیه و قدرت روش در حفظ شکل دایره بررسی می‌شود. در حال حاضر میزان تغییر مساحت کمتر از  $0.3\%$  درصد محاسبه شده است که بسیار قابل قبول است. در شکل (۷) مراحل مختلف جابه‌جایی دایره نشان داده شده است. خطوط کم‌رنگتر نشان دهنده مکان مورد انتظار دایره و خطوط پررنگتر نشان دهنده مکان محاسبه شده است.

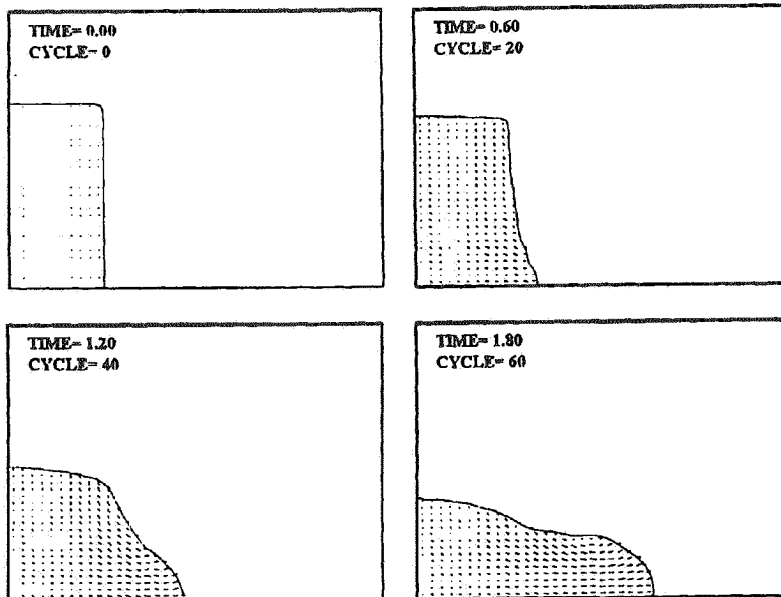
### د - سد شکسته

در این مسئله یک ستون سیال به ارتفاع ۳ واحد و عرض واحد در نظر گرفته شده است که بین دو دیواره در حال سکون قرار دارد. در زمان صفر دیواره سمت راست که مانند یک سد مانع از حرکت سیال می‌شود برداشته می‌شود و سیال تحت تأثیر نیروی جاذبه به حرکت در آمده و شروع به حرکت می‌کند. نتایج حاصل از حل این مسئله در زمانهای مختلف در شکل (۸) ارائه شده است. در حل این مسئله از شبکه  $30 \times 40$  استفاده شده است و گام زمانی برابر  $0.30$  انتخاب شده است و شتاب جاذبه نیز برابر واحد ( $1 \text{ m/s}^2$ ) در نظر گرفته شده است. برای این مسئله نتایج تجربی نیز ارائه شده است که در

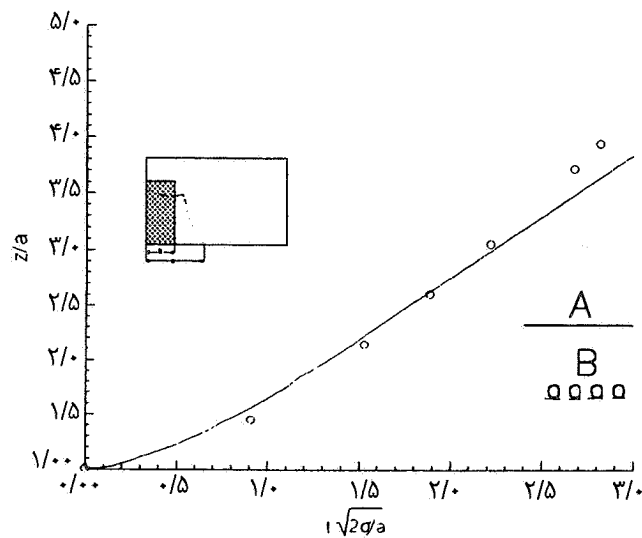
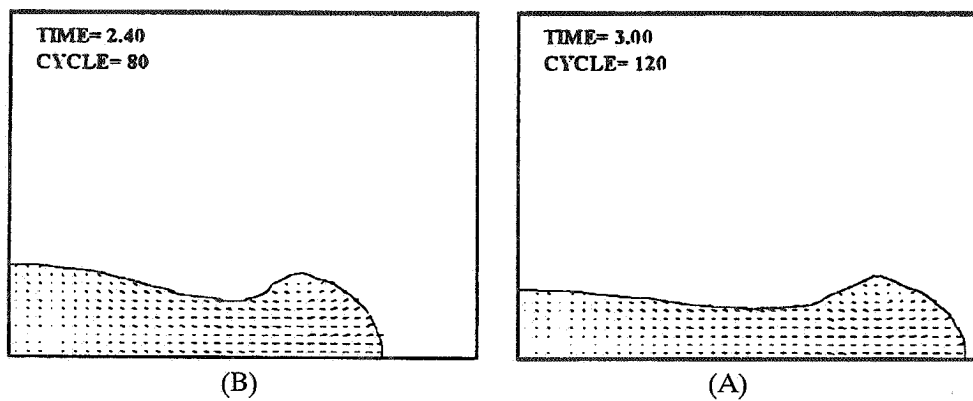




شکل ۷- مراحل مختلف جابه‌جایی یک دایره در یک میدان سرعت یکنواخت تحت زاویه  $45^\circ$  با استفاده از شبکه منحنی الخط نامتعامد به همراه شبکه مورد استفاده

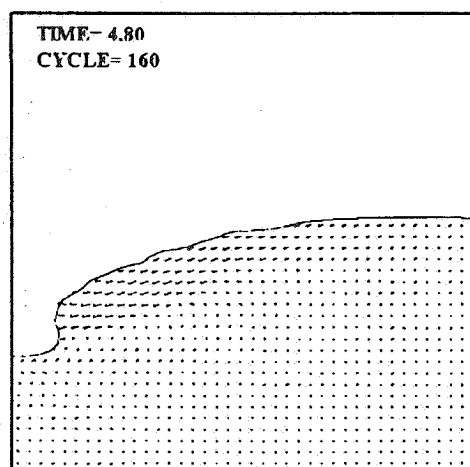
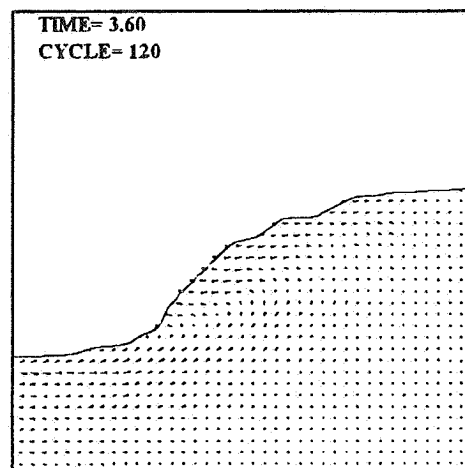
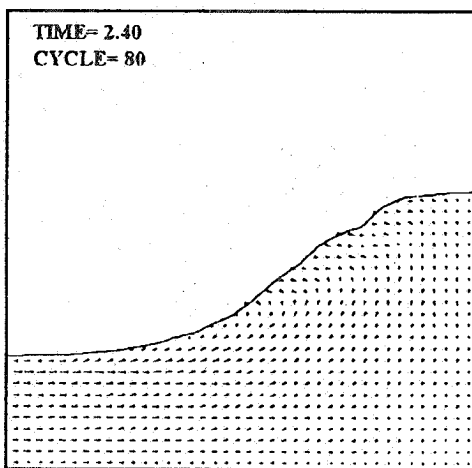
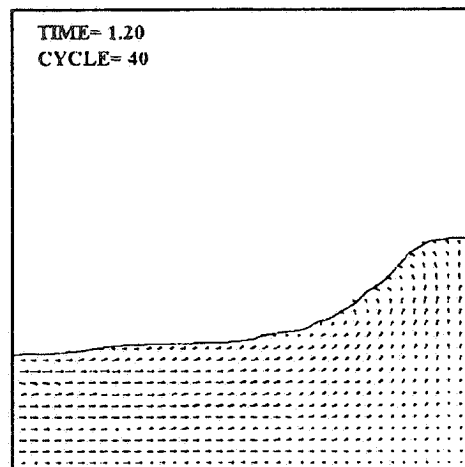
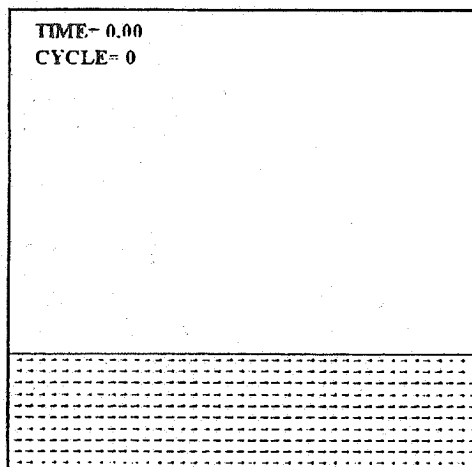


شکل (۸-الف) شکل میدان سد شکسته



شکل (۸-ب) مقایسه نتایج کار حاضر با نتایج تجربی برای مسئله سد شکسته

(A) کار حاضر (B) نتایج تجربی از مرجع [۱]



شکل ۹- توقف ناگهانی یک ستون سیال با سرعت اولیه ۱ m/s

ردیابی سطح آزاد، روشهای نسبتاً جدیدی هستند لذا برای رسیدن به یک روش مطلوب با قدرت حل مسائل پیچیده کاربردی نیاز به بررسیهای بیشتر است.

خوب آن با نتایج دیگر محققان و همچنین انعطاف پذیری استفاده از مختصات منحنی الخط برای حل مسائل پیچیده ارزش کاربردی زیادی را برای این روش ایجاد می کند. اما با توجه به آنکه روشهای

- |                          |   |                           |
|--------------------------|---|---------------------------|
| 1. collocated grid       | 7. volume tracking                        | 12. minimum slope limiter |
| 2. pseudo time step      | 8. momentum weighted interpolation method | 13. donor-acceptor cells  |
| 3. VOF: volume of fluids | 9. covariant metric tensor                | 14. FLAIR                 |
| 4. interfaces            | 10. checker board field                   |                           |
| 5. interface tracking    | 11. first order upwind                    |                           |
| 6. surface tracking      |   |                           |

## مراجع

- Nichols, B. D., Hirt, C. W., and Hothkiss, R.S., "SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries," Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report LA-8355, August 1980.
- Youngs, D. L., "Time Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion," *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Edited by K.W. Morton and M. J. Baines, pp. 273-285 Academic Press, New York, 1982.
- Floryan, J. M., and Rasmussen, H., "Numerical Methods for Viscous Flows with Moving Boundaries," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 8, No. 12, pp. 323-340, 1989.
- Rhie, C. M., and Chow, W. I., "Numerical study of The Turbulent Flow Past and Airfoil with Trailing Edge Separation," *ALAA J.*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525-1983.
- شوشتری. ا.ح.، "حل معادلات جریان تراکم ناپذیر همراه با سطح آزاد در محورهای مختصات منحنی الخط" پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، تهران. ۱۳۷۴.
- Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, Hemisphere Publishing Co., 1980.
- Golafshani, M., "A Simple Numerical Method for Calculating Creep Flows with Free Surface," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 897-912, 1988.
- Ashgriz, N., and Poo, J.Y., "FLAIR: Flux line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction," *J. Comput. Phys.*, Vol. 93, pp. 449-468, 1991.
- Liang, P.Y., "Numerical Method for Calculation of Surface Tension Flows in Arbitrary Grids," *ALAA J.*, Vol. 29, No. 2, pp. 161-167, 1991.
- Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T, "High Resolution for Incompressible Flow Using The Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- Demirdzic, I., Lilck, Z., and Peric, M., "Fluid Flow and Heat Transfer Test Problems for Non-orthogonal Grids: Bench-Mark Solutions," *Int. J. Num. Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 329-354, 1992.