

## تعیین زمان سویچینگ رله، بررسی تأثیر اغتشاش و نویز و رفتار گذرا در کنترل دو وضعیتی مقاوم

غلامعلی منتظر\*، حمیدرضا مومنی\* و علی خاکی صدیق\*\*

بخش مهندسی برق دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت مقاله: ۱۳۷۶/۹/۱۲ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۷۸/۸/۵)

چکیده - طراحی کنترل سیستمهای توأم با عدم قطعیت همراه با کنترلگرهای رله‌ای برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم موسوم به «مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم» است که در طی آن برای ارضای هدفهای بالا، بهره‌های بالا و پایین رله مورد نیاز تعیین می‌شود. علاوه بر بهره رله، فرکانس قطع و وصل آن، بررسی تأثیر اغتشاش موجود در معادله حاکم بر سیستم و نیز آلودگی حالت‌های سیستم به نویز اندازه‌گیری بر بهره و زمان قطع و وصل رله و در نهایت بررسی ویژگیهای رفتار گذاری سیستم (در قالب درصد بیشینه فراجش و زمان نشست در پاسخ به پله واحد) و نیز بررسی پدیده وزوز از مهمترین نکات مطرح در فرایند کنترل است. این رو در مقاله حاضر با استناد به روش ابداعی نگارندگان در تعریف و تبیین روش «حالت میانجی» در حل مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم، با بیان قضایای جدید و جامع، تمامی نکات بالا مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج دقیقی در حالت کلی برای هر یک از آنها به دست می‌آید. در پایان نیز نتایج حاصل از قضایا، به مسئله‌ای عملی در خصوص طراحی خود رهنمای رله‌ای مربوط به موشکی توأم با عدم قطعیت، اعمال شده، با بررسی نمودارهای شبیه سازی، صحت نتایج مورد تدقیق قرار می‌گیرد.

## Determination of Relay Switching Time, Evaluation of Disturbance and Noise Effect and Transient Behavior in Robust Binary Control

Gh.A. Montazer, H.R. Momeni and A.Kh. Sedigh

School of Engineering, Tarbiat Modarres University

**ABSTRACT-** Design of uncertain control systems with relay controller to guarantee robust stability and performance has been considered as "Robust Binary Control Problem (RBCP)", which deals with determining upper and lower gains of necessary relay controller. The most important aspects of RBCP, in addition to the relay gains, are determination of relay switching time, evaluation of presence of disturbance in plant dynamic equation, effect of measurement noise on gains and on-off periods of relay, and also study of transient behaviour of the designed control system (which is considered as percent of overshoot and settling time in

\* - استادیار      \*\* - دانشیار

فهرست علائم

تابع نامطمئن از حالتها	$b$	$p$	عملگر تبدیل لاپلاس	$x_d^{(n)}$	مشق $n$ ام حالت میانجی
کران بالای $b$	$b_h$	$S$	تابع رویه لغزشی	$x_d$	بردار حالت میانجی
کران پایین $b$	$b_l$	$t$	زمان (ثانیه)	$\tilde{x}$	خطای ردیابی
کران بالای $x_d^{(i)}$	$d_h^i$	$T$	زمان سوئیچینگ رله (ثانیه)	$\tilde{x}^{(n)}$	مشق $n$ ام حالت میانجی
کران پایین $x_d^{(i)}$	$d_l^i$	$T_{max}$	حداکثر فاصله زمانی قطع و وصل رله (ثانیه)	$\tilde{x}$	بردار خطای ردیابی
تابع اغتشاش	$D$		و صل رله (ثانیه)	$x_i$	حالت $(i-1)$ ام آلوده به نویز
کران بالای $D$	$D_h$	$t_s$	زمان نشست (ثانیه)	$X$	تبدیل لاپلاس $x$
کران پایین $D$	$D_l$	$u$	سیگنال کنترل	$\alpha$	پارامتر معرف حالت میانجی
سیگنال خطا	$e$	$U$	بهره بالای کنترلگر	$\phi$	شعاع همسایگی حول رویه لغزشی
تابع نامطمئن از حالتها	$f$	$x$	حالت خروجی سیستم		
کران بالای $f$	$f^+$	$x^{(n)}$	مشق $n$ ام حالت سیستم	$\psi_i$	کران $\tilde{x}_i$
کران پایین $f$	$f^-$	$x$	بردار حالت سیستم	$\lambda$	پارامتر معرف رویه لغزشی
بهره پایین کنترلگر	$L$	$x_{d_1}$	حالت مطلوب سیستم	$\eta$	چند جمله ای برحسب $\lambda$ و $N$
درجه سیستم	$n$	$x_d^{(n)}$	مشق $n$ ام حالت مطلوب	$\eta_0$	کران بالای $\eta$
تابع نویز مربوط به $x_i$	$n_i$	$x_{d_1}$	بردار حالت مطلوب	$\tau$	پارامتر کمی جایگزین $\alpha t$
کران بالای $n_i$	$N_i$	$x_d$	حالت میانجی	$\eta_0$	کوچکترین کران بالای $\eta$

unit-step response). This paper defines an innovative method to explain the "mediator state" in solving RBCP. All of the above problems will be interpreted and solved with the help of a few new comprehensive theorems. At last, using these novel results, a robust relay autopilot will be designed for an actual uncertain missile and the simulation results will be considered and discussed.

۱- مقدمه

در سیستمهای اتفاقی [۱۰]، کنترل دو وضعیتی در سیستمهای گسسته زمانی [۱۱] و کنترل دو وضعیتی وفقی [۱۲].  
به دلایل بالا، یکی از مسائل مهم در حیطه کنترل دو وضعیتی، اعمال چنین کنترلی به سیستمهای نامطمئن<sup>۸</sup> است. زیرا بسیاری از سیستمهای فیزیکی دارای محرک رله ای، دچار عدم قطعیت مشهودی اند و لازم است با اعمال شیوه ای مقاوم، کنترلگری رله ای برای تأمین شروط پایداری و عملکرد مناسب بیابیم. چنین موضوعی موسوم به مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم<sup>۹</sup> است که برای نخستین بار به طور جامع و فراگیر در [۱۳] مطرح شده است.

روش مواجه شدن با چنین مسئله ای مبتنی بر ایده کنترل مد لغزشی<sup>۱۰</sup> است که در طی آن با تعریف تابع خوش رفتاری از حالت های سیستم به عنوان رویه لغزشی<sup>۱۱</sup> و استفاده از شرط رشح طبیعی<sup>۱۲</sup>، با یافتن کرانه های عناصر بردار حالت سیستم، بهره های بالا و پایین

یکی از مهمترین مسائلی که راجع به کنترل دو وضعیتی<sup>۱</sup> مطرح می شود، امکان کنترل سیستمی توأم با عدم قطعیت<sup>۲</sup> به کمک کنترلگری رله ای<sup>۳</sup> برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم<sup>۴</sup> است. چنین مسئله ای از آن رو اهمیت دارد که به دلیل سادگی ساختمان و ارزانی کنترلگرهای دو وضعیتی، در بسیاری از فرایندهای صنعتی از قبیل: سیستمهای قدرت [۱]، دستگاههای تبدیل انرژی خورشیدی [۲]، کنترل دیسک گردانهای نوری [۳]، سیستمهای مخابراتی [۴]، سازه های فضایی [۵]، تسلیحات [۶] و... کاربرد فراوانی دارند. از سوی دیگر حل مسئله حداقل زمان<sup>۵</sup> به کنترلگرهای دو وضعیتی [۷] و حل مسئله حداقل سوخت<sup>۶</sup> به کنترلگر دو وضعیتی با ناحیه راکد<sup>۷</sup> [۸] منجر می شود و همین موضوع سبب می شود تا مباحث مختلفی در مورد این نوع کنترلگرها مطرح شود که از آن جمله می توان به موارد ذیل اشاره کرد: پیوند کنترل دو وضعیتی و کنترل بهینه [۹]، کنترل دو وضعیتی

به دست آورد. ضمناً فرض می‌شود حالت اولیه سیستم  $(x(0))$  نیز دارای عدم قطعیت است. هدف آن است که خروجی سیستم، با در نظر گرفتن رفتارگذرای خاصی، از سیگنال هدف مطلوبی  $(x_d(t))$  تبعیت کند، ضمن اینکه سیگنال کنترل نیز باید به شکل دو وضعیتی زیر باشد

$$u = \begin{cases} U & e \geq 0 \\ L & e < 0 \end{cases} \quad (2)$$

که  $U$  و  $L$  مقادیر ثابتی اند که به ترتیب بهره‌های بالا و پایین رله کاربردی را مشخص می‌کنند.  $e$  نیز سیگنال ورودی به کنترلگر است. شیوه حل مسئله بر این اساس است که ابتدا حالتی جدید موسوم به حالت میانجی  $(x_d(t))$  را چنان تعریف می‌کنیم که مقدار اولیه‌اش برابر با مقدار اولیه دستگاه باشد و در نهایت نیز به  $(x_d(t))$  برسد. معادله معرف چنین سیگنالی به شرح زیر است [۱۶]

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^n x_d(t) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^n x_{d1}(t) \\ x_d(0) = x(0), \dot{x}_d(0) = \dot{x}(0), \dots, x_d^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}(0) \end{cases} \quad (3)$$

که  $\alpha$  مقداری ثابت و مثبت است که شاخصی از سرعت رسیدن به حالت مطلوب را بیان می‌کند. بدین ترتیب با پاسخیابی معادله (۳)، در واقع حرکت حالتها و مسیر آنها را در فضای فاز تحت انقیاد خود در آورده، راهبرد<sup>۱۸</sup> مشخصی برای رسیدن مسیرهای حالت<sup>۱۹</sup> به مقدار مطلوب در نظر گرفته‌ایم.

اینک با استفاده از اصول کنترل مد لغزشی، می‌توان مکان هندسی مورد نظر برای سیستم را به شکل تابعی با تعریف زیر در نظر گرفت.

$$S(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i)}(t) \quad (4)$$

که

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t) \quad (5)$$

بیانگر خطای ردیابی<sup>۲۰</sup> میان خروجی و حالت میانجی است،  $\lambda$  نیز پارامتری مثبت است که براساس ویژگیهای عملکرد سیستم حاصل می‌شود؛ لذا واضح است اگر  $S = 0$  شود، آن‌گاه عملاً انتهای مسیر همه حالتها بر روی لغزشی قرار گرفته و لذا هدف ردیابی سیگنال

رله کاربردی مشخص می‌شود. این روش گرچه بسیار کاراست و در بسیاری از مسائل عملی به خوبی پاسخ می‌دهد [۱۴ و ۱۵]، لیکن در همه مسائل مطرحه در آن، فرض بر این است که رله کاربردی ایده‌آل است، یعنی رله می‌تواند بدون هیچ تأخیری در آن واحد تغییر وضعیت داده، از حالت روشن به خاموش (یا بالعکس) درآید. اما در عمل، رله‌های واقعی دارای میزان تأخیری در تغییر حالت (موسوم به زمان سوئیچینگ<sup>۱۳</sup>) هستند و از این رو در تعیین رله مورد نیاز در حل مسئله کنترل مقاوم دو وضعیتی لازم است علاوه بر بهره رله، زمان قطع و وصل<sup>۱۴</sup> آن نیز مشخص شود که این هر دو (بهره و زمان سوئیچینگ)، در واقع شرط وجود کنترلگر رله‌ای برای دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم را بیان می‌کند.

با توجه به نکات مذکور، در طی این مقاله سعی می‌شود با تشریح مسئله کنترل مقاوم دو وضعیتی، با اثبات قضیه‌ای، در حالت کلی، زمان قطع و وصل رله کاربردی نیز تعیین شود. علاوه بر این چگونگی تأثیر اغتشاش و نویز اندازه‌گیری حالتها در حل مسئله و نیز ویژگیهای پاسخ‌گذاری سیستم، مورد بحث قرار گرفته، با اثبات قضایایی تأثیر آنها بر بهره و زمان قطع و وصل رله، فرمولبندی می‌شود. علاوه براین، پدیده وزوز<sup>۱۵</sup> در این نوع کنترلگر بررسی شده و رابطه دامنه و فرکانس آن محاسبه می‌شود. در پایان نیز برای مسئله واقعی مربوط به طراحی خود رهنمای<sup>۱۶</sup> موشکهای بالستیکی<sup>۱۷</sup> از نوع HPS، قضایای مطرحه به کار گرفته شده، نتایج حاصل از شبیه سازی مورد توجه و تدقیق قرار می‌گیرد.

## ۲- تبیین مسئله

سیستمی در حالت کلی غیر خطی، تک ورودی- تک خروجی و توأم با عدم قطعیت به شکل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(x) \cdot u(t) \quad (1)$$

که  $x = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T$  بردار حالت سیستم،  $n$  درجه سیستم،  $x$  خروجی و  $u$  سیگنال کنترل است.  $f(x)$  و  $b(x)$  نیز توابعی نامطمئن از عناصر بردار حالت است که فرض می‌شود با مشخص بودن بازه عدم قطعیت عناصر بردار  $x$ ، می‌توان کرانه‌های  $f$  و  $b$  را نیز

می توان کرانه‌های عناصر بردار  $\tilde{x}$  را نیز به صورت زیر محاسبه کرد [۱۸]

$$|\tilde{x}^{(i)}(t)| < \frac{\phi}{\lambda^{m-i}} \cdot B(m, i+1) \quad (11)$$

که

$$B(m, i+1) \triangleq \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left| \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{(-u)^{m-1-k}}{(m-1-k)!} \right| \cdot du \quad (12)$$

و

$$|\tilde{x}^{(m)}(t)| < \phi \cdot [1 + B(m, m+1)] \quad (13)$$

که

$$B(m, m+1) \triangleq \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left| \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{(-u)^{m-1-k}}{(m-1-k)!} \right| \cdot du \quad (14)$$

که در روابط بالا  $m \triangleq n-1$  و  $i = 0, 1, \dots, m-1$  یافتن کرانه‌های عناصر بردارهای  $\tilde{x}$  و  $\tilde{x}_d$  در اصل به معنای مشخص شدن کرانه‌های عناصر بردار حالت سیستم  $(\tilde{x})$  است. لذا واضح است کرانه‌های  $f(x)$  و  $b(x)$  نیز مشخص خواهد شد، برای این کار از نمادهای ساده‌تر زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} -\psi_i < \tilde{x}^{(i)} < \psi_i \\ d_h^i < x_d^{(i)} \leq d_h^i \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (15)$$

که  $\psi_i$  معادل سمت راست عبارتهای (۱۱) و (۱۳) است.  $d_h^i$  نیز با استفاده از معادله (۱۰) به دست می‌آید. اینک می‌توان نوشت

$$\begin{cases} f^- < f(x) < f^+ \\ d_l < b(x) < d_h \end{cases} \quad (16)$$

که  $f^+$ ،  $f^-$ ،  $b_h$  و  $b_l$  مقادیر ثابت و مشخصی‌اند که براساس مشخص بودن کران عناصر  $x$  به دست آمده‌اند. حال می‌توان نوشت (با فرض اینکه  $f^+$ ، مثبت و  $f^-$ ، منفی باشد)

$$f^- + bu - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + bu - d_l^n + \psi \quad (17)$$

که

$$\psi \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \psi_i \quad (18)$$

و در نتیجه برای تأمین شرط رسش باید داشته باشیم

مطلوب برآورده شده است. اما در عمل به دلیل حضور تأخیر در سیستم واقعی و نیز ایده‌آل نبودن برخورد مسیر حالتها با رویه لغزشی [۱۷]،  $S$  دقیقاً صفر نمی‌شود بلکه در حالت مانا، خواهیم داشت:  $|S| < \phi$  که  $\phi$  مقدار مثبتی است که بیانگر شعاع همسایگی استقرار حالتها حول رویه لغزشی می‌باشد و واضح است هر چه  $\phi$  کوچکتر باشد، نزدیکی به حالت ایده‌آل نیز بیشتر است.

رسیدن حالتها به رویه لغزشی، مستلزم ارضای شرط رسش طبیعی است؛ یعنی

$$\forall t \neq 0 \quad S(x, t) \cdot \dot{S}(x, t) < 0 \quad (6)$$

با ترکیب تعریف (۴) با معادله سیستم، معادله (۱) می‌توان نوشت

$$\dot{S}(x, t) = f(x) + b(x)u(t) - \frac{d}{dt} \tilde{x}_d(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i)}(t) \quad (7)$$

بنابراین به کمک این معادله، می‌توان سیگنال کنترل  $u$  را چنان یافت که شرط (۶) را برآورده سازد و چون باید سیگنال  $u$  به صورت رله‌ای باشد، لذا لازم است بتوان کرانه‌های عناصر بردار  $x$  و بردار:  $\tilde{x} = [\tilde{x}^{(0)} \ \tilde{x}^{(1)} \ \dots \ \tilde{x}^{(n-1)}]^T$  را یافت که انجام این مهم برای  $\tilde{x}$ ، مستلزم داشتن پاسخ بسته معادله (۳) است که از معادله زیر حاصل می‌شود [۱۳]:

$$x_d(t) = x_{d1}(t) + e^{-\alpha t} \sum_{i=0}^{n-1} A_i t^i \quad (8)$$

که

$$A_i = \frac{x^{(i)}(0) - x_d^{(i)}(0)}{i!} + \sum_{m=0}^{i-1} - \frac{(-\alpha)^{i-1}}{(i-m)!} A_m, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

$$x_d^{(k)}(t) = x_d^{(k)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha t} [A_i (-\alpha)^k t^i + \dots] \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^k A_i (-\alpha)^{k-m} \binom{k}{m} i(i-1) \dots (i-m+1) t^{i-m}$$

که  $k=1, 2, \dots, n-1$

مشخص است که از معادله‌های بالا، تمامی کرانه‌های عناصر بردار حالت میانجی:  $x_d = [x_d \ \tilde{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T$  حاصل می‌آید. ضمناً

برهان نامساوی (۱۷) را باز می‌نویسیم

$$f^- + bu - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + bu - d_1^n + \psi$$

برای برآوردن شرط رسش، باید سیگنال  $U$  به یکی از دو حالت معادله (۱۹) باشد، لذا از ترکیب نامساوی بالا با معادله (۱۹) نتیجه می‌شود

$$f^- + b_h L - d_h^n - \psi < \dot{S} < f^+ + b_h U - d_1^n + \psi$$

و لذا می‌توان نوشت

$$|\dot{S}| < \text{Max}(f^+ + b_h U + \psi - d_1^n, -f^- - b_h L + \psi + d_h^n)$$

به منظور ساده نویسی، معرفی می‌کنیم

$$|\dot{S}|_{\text{Max}} \triangleq \text{Max}(f^+ + b_h M + \psi - d_1^n, -f^- - b_h L + \psi + d_h^n) \quad (21)$$

اینک فرض می‌کنیم فاصله زمانی بین دو سویچینگ متوالی رله از مقداری چون  $T$  ثانیه کمتر نباشد و  $T$  به اندازه‌ای کوچک است که رله بتواند شرط  $|S| < \phi$  را همچنان ارضا کند. واضح است وقتی  $\dot{S} u = U$  منفی و وقتی  $\dot{S} u = L$  مثبت است. اگر فرض کنیم در یک لحظه  $S = 0$  شود (و مثلاً قبل از آن  $S < 0$  و در نتیجه  $u = U$  باشد) و در همان لحظه به محض اینکه  $S$  مثبت شد، رله تغییر وضع دهد. بدین ترتیب باید تا  $T$  ثانیه دیگر  $u = L$  بماند. حال برای اینکه  $|S|$  از  $\phi$  تجاوز نکند، اگر  $T$  را کمتر از مقداری بگیریم که به دنبال به دست می‌آید، مطمئن خواهیم بود که  $S$  از  $-\phi$  کمتر نخواهد شد

$$|\dot{S}| < |\dot{S}|_{\text{Max}} \Rightarrow -\dot{S} < |\dot{S}|_{\text{Max}}$$

پس

$$-dS < |\dot{S}|_{\text{Max}} \cdot dt$$

و با توجه به شکل (۱) می‌توان نوشت

$$-\int_{s=0}^{s=-\phi} ds < |\dot{S}|_{\text{Max}} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} dt$$

لذا

$$T > \frac{\phi}{|\dot{S}|_{\text{Max}}}$$

$$u = \begin{cases} U = (-f^- + d_h^n + \psi)/b_1 & S > 0 \\ L = (-f^+ - d_1^n + \psi)/b_1 & S < 0 \end{cases} \quad (19)$$

که در روابط بالا، بی آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض شده  $b_1 < 0$  باشد.

ایده به کارگیری بردار حالت میانجی سبب می‌شود حل مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم، تا حد امکان کمتر محافظه کار باشد [۱۸] و کنترلگر حاصل دارای دامنه بسیار کوچکتري در مقایسه با روشی که از این ایده استفاده نشده باشد [۱۹]. ضمناً این شیوه در پاسخگویی به مسائل متنوعی از قبیل کنترل پرتابه‌های زمین به زمین [۱۴]، روباتهای غیر خطی [۱۵] و فرایندهای شیمیایی [۲۰] با قوت تمام به کار می‌آید. اما چند موضوع اساسی در خصوص این شیوه، شایان توجه است.

الف - تعیین زمان قطع و وصل رله کاربردی

ب - تأثیر حضور اغتشاش موجود در معادله سیستم و نویز اندازه‌گیری حالتها

ج - بررسی ویژگیهای رفتار گذاری سیستم

د - تحلیل پدیده وزوز

از این رو تمرکز اصلی مقاله حاضر بر این نکته استوار است که با توجه به ایده مطرح شده برای تحصیل سیگنال کنترل، مسائل بالا را مورد بررسی و حل قرار دهد.

### ۳- بررسی در حالت غیر ایده‌ال

رله‌های کاربردی در حالت کلی غیر ایده‌ال اند، بدین معنا که تبدیل حالت رله از خاموش به روشن (و یا برعکس)، مستلزم گذر زمانی موسوم به زمان سویچینگ است و در واقع برای تعیین رله، علاوه بر دامنه، لازم است زمان سویچینگ آن را نیز مشخص کنیم. برای این منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱ - اگر برای سیستمی با معادله (۱) رویه لغزشی با معادله‌های (۴) و (۵) تعریف شود و روابط (۱۵) تا (۱۹) نیز برقرار باشد، آن گاه حداکثر فاصله زمانی بین دو سویچینگ متوالی رله برابر است با

$$T_{\text{Max}} = \frac{\phi}{\text{Max}(f^+ + b_h U + \phi - d_1^n, -f^- - b_h L + \psi + d_h^n)} \quad (20)$$

عناصر بردار  $x$  معلوم است به سادگی می توان حدود مترتب بر  $D$  را نیز محاسبه کرد که در نتیجه خواهیم داشت

$$D_l \leq D(x, t) \leq D_h \quad (23)$$

که  $D_l$  و  $D_h$  مقادیر ثابت و معلوم اند.

با توجه به تعریف رویه لغزشی، معادله های (۴) و (۵)، نتیجه می شود (بدون کاستن از کلیت موضوع، فرض می شود  $D_l$  منفی باشد)

$$f^- + bu - d_h^n - \psi + D_l < \dot{S} < f^+ + bu - d_l^n + \psi + D_h$$

و بنابراین

$$U = \begin{cases} U = (-f^- + D_l + d_h^n + \psi)/b_l & S > 0 \\ L = -(f^+ + D_h - d_l^n + \psi)/b_l & S < 0 \end{cases} \quad (24)$$

بدین ترتیب مشاهده می شود حضور اغتشاش سبب می شود تا بهره کنترلگر افزایش یابد و چون  $|S|_{Max}$  نیز زیاد می شود، لذا بر فرکانس کار رله نیز نسبت به حالت عدم حضور اغتشاش، افزوده می شود، زیرا در این حالت داریم

$$T_{Max} = \frac{\phi}{\text{Max}(f^+ + b_h U + \psi - d_l^n + D_h, -f^- - b_n L + \psi + d_h^n - D_l)} \quad (25)$$

#### ۵- بررسی اثر نویز اندازه گیری

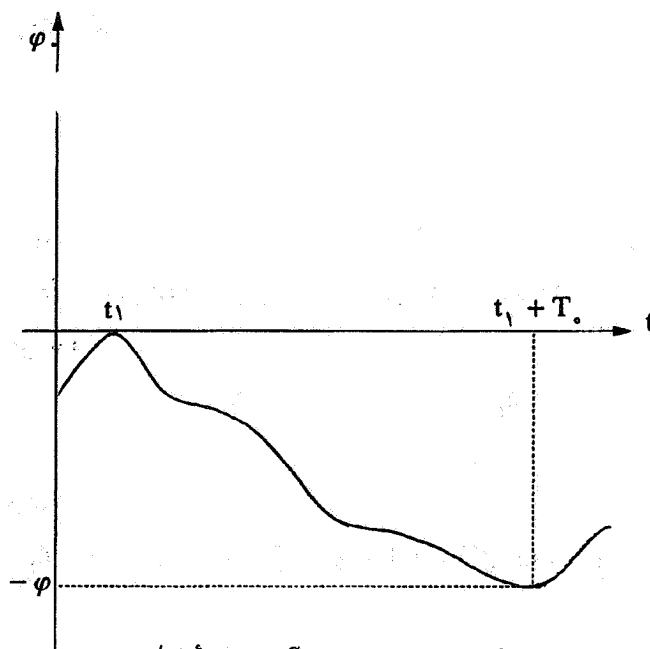
یکی از موارد مهم در تحلیل کنترلگر دو وضعیتی مقاوم، مسئله آلودگی حالتها به نویز است. برای تشریح این موضوع، فرض می کنیم در اندازه گیری حالت  $x(t)$ ، نویز  $n_1(t)$  با آن جمع شود و در اندازه گیری  $\dot{x}(t)$ ، نویز  $n_2(t)$  و... بدین ترتیب می توان در حالت کلی حالت موجود سیستم را به شکل زیر انگاشت

$$\dot{x}_i(t) \triangleq \dot{x}(t) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

که دامنه نویز مقداری معلوم است؛ یعنی

$$|n_i(t)| \leq N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

که  $N_i$ ها مقادیری ثابت اند. در این صورت قضیه زیر، تأثیر نویز را بر



شکل ۱- تغییرات تابع  $S$  در صفحه  $\phi-t$

بنابراین پس از زمان  $t_1$  اگر  $u = L$  بماند حداقل  $\phi/|S|_{Max}$  طول می کشد که  $S$  به  $-\phi$  برسد. پس حداکثر فاصله بین دو سویچینگ متوالی رله باید برابر با  $T_{Max} = \phi/|S|_{Max}$  باشد که با جایگزینی مقدار  $|S|_{Max}$  از معادله (۲۱)، معادله (۲۰) حاصل می شود.

نکته پر اهمیت در این قضیه آن است که در واقع نتیجه این قضیه به همراه مقادیر بهره های بالا و پایین کنترلگر، معادله (۱۹)، شرط وجود کنترلگر رله ای برای کنترل مقاوم دو وضعیتی را بیان می کند. چه در مواجه شدن با مسئله توأم با عدم قطعیت و همراه با کنترلگر دو وضعیتی اگر بتوان رله ای یافت که شروط (۱۹) و (۲۰) را تأمین کند، آن گاه امکان دستیابی به پایداری و عملکرد مقاوم وجود خواهد داشت.

#### ۴- بررسی اثر اغتشاش

برای تحلیل تأثیر اغتشاش در طراحی کنترلگر، معادله سیستم مورد بحث را به شکل زیر در نظر می گیریم [۲۱]

$$\dot{x}^{(n)}(t) = f(x) + b(x)u(t) + D(x) \quad (22)$$

که تابع  $D$ ، بیانگر دینامیک اغتشاش است و با توجه به اینکه کران

دامنه و زمان سویچینگ کنترلگر رله‌ای بیان می‌کند.

قضیه ۲- اگر معادله سیستمی به شکل (۱) رویه لغزشی با معادله‌های (۴) و (۵) و حالت‌های آلوده به نویز با معادله‌های (۲۶) و (۲۷) تعریف شوند، آن گاه برای دستیابی به کنترلگر مقاوم دو وضعیت، بهره کنترلگر از معادله

$$u = \begin{cases} U = (-f^- + d_h^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_1 & \hat{S} > 0 \\ L = -(f^+ + d_l^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_1 & \hat{S} < 0 \end{cases} \quad (28)$$

و حداکثر زمان سویچینگ متوالی رله نیز از معادله

$$T_{Max} = \frac{\gamma(\phi - \eta_0)}{\text{Max}[-(f^- + b_h L - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \psi), (f^+ + b_h U - d_l^n + \dot{\eta}_0 + \psi)]} \quad (29)$$

به دست می‌آیند که در این معادله‌ها  $\dot{\eta}_0$ ، کوچکترین کران بالای تابع  $\dot{\eta}(t)$  است که  $\eta(t)$  نیز طبق معادله زیر تعریف می‌شود

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} n_{i+1}(t) \quad (30)$$

همچنین برای  $\eta_0$  داریم

$$\eta_0(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} N_{i+1} \quad (31)$$

$\hat{S}$  نیز تابع رویه لغزشی با در نظر گرفتن سیگنالهای آغشته به نویز است. ضمناً مقادیر  $f^-$ ،  $d_h^n$ ،  $b_1$ ،  $b_n$ ،  $f^+$  و  $d_l^n$  همگی طبق روابط مربوط به قضیه (۱) تعریف می‌شود.

برهان با توجه به معادله (۲۶)، می‌توان تابع جدید رویه لغزشی را برحسب حالت‌های آلوده به نویز به صورت زیر بازنوشت

$$\hat{S}(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}(t), \quad \tilde{x} = x_1 - x_d \quad \text{و یا}$$

$$\hat{S}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \left[ x^{(i)}(t) + n_{i+1}(t) \right]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} x_d^{(i)}(t) =$$

$$S + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} n_{i+1}$$

که با توجه به معادله (۳۰) می‌توان نوشت

$$\hat{S}(t) = S(t) + \eta(t) \quad (32)$$

باید دقت کرد که در این روابط، بردار حالت میانجی را چنان تعریف می‌کنیم که شروط اولیه زیر را برآورد کند

$$x_d(0) = x_1(0); \dot{x}_d(0) = x_2(0); \dots; x_d^{(n-1)}(0) = x_n(0)$$

اینک داریم

$$\dot{\hat{S}} = \dot{S} + \dot{\eta} = x^{(n)} - x_d^{(n)} + \dot{\eta} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \tilde{x}^{(i+1)}$$

که در این رابطه  $x = x - x_d$  است، اما با توجه به شرط (۲۷) می‌توان نوشت

$$|\eta(t)| \leq \eta_0 \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} N_{i+1}$$

بنابراین واضح است اگر  $\hat{S} = 0$  باشد،  $S = -\eta$  خواهد بود؛ یعنی در این حالت (حتی اگر رله، ایده‌ال نیز باشد)،  $S = 0$  نگهداشته نمی‌شود، اما اندازه آن هیچ گاه از  $\eta_0$  تجاوز نمی‌کند. حال اگر بخواهیم  $|S| < \phi$  شود، باید قانون کنترل به نحوی انتخاب شود که  $|\hat{S}| \leq \phi - \eta_0$ ،  $\forall t > 0$  باشد، زیرا با جایگزینی معادله (۳۲) در این عبارت داریم

$$|S + \eta| \leq \phi - \eta_0 \Rightarrow |S| - |\eta| \leq \phi - \eta_0$$

پس

$$|S| - \eta_0 \leq \phi - \eta_0 \Rightarrow |S| \leq \phi$$

بنابراین شرط همگرایی حالتها به سوی رویه برآورده می‌شود. حال برای برقراری شرط  $|\hat{S}| \leq \phi - \eta_0$ ، از قانون ذیل پیروی می‌کنیم «اگر  $\hat{S}(t)$  بخواهد بزرگتر از (یا حتی مساوی با)  $\phi - \eta_0$  شود، بی هیچ درنگی رله به  $L$  سویچ شود (تا  $\hat{S}$  منفی شود)، به منحنی اینکه  $\hat{S}(t)$  بخواهد به  $(\phi - \eta_0)$  برسد، رله به  $U$  سویچ شود (تا  $\hat{S}$  مثبت شود)».

اگر  $\dot{\eta}(t)$ ، کراندار بماند،  $\hat{S}(t)$  تابعی پیوسته از زمان خواهد بود، از این رو فرض می‌کنیم:  $|\dot{\eta}(t)| \leq \dot{\eta}_0$  که مقدار معلوم فرض می‌شود. در این صورت خواهیم داشت

باشد، آنگاه پاسخ سیستم هیچ فراجشی ندارد و زمان نشست (ts) نیز از حل معادله غیر خطی ذیل به دست می آید

$$\left[ 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \cdot e^{-\alpha t} = 0.1, t > 0 \quad (34)$$

برهان - با توجه به تعریف بردار حالت میانجی برای این حالت خاص (خروجی، مقدار ثابت و شروط اولیه صفر) می توان نوشت

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} + \alpha \right)^n x_d(t) &= \alpha^n x_{d1} \\ x_d(0) = \dot{x}_d(0) = \dots = x_d^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{و یا با معرفی } \tau = \alpha t$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{d}{d\tau} + 1 \right)^n x_d(\tau) &= x_{d1} \\ x_d(0) = \frac{dx_d(0)}{d\tau} = \dots = \frac{d^{n-1}x_d(0)}{d\tau^{n-1}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

و با محاسبه تبدیل لاپلاس معادله اخیر می توان نوشت (p عملگر لاپلاس است)

$$(p + 1)^n X_d(p) = \frac{x_{d1}}{p}$$

$$X_d(p) = \frac{x_{d1}}{p(p+1)^n} = \frac{B}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i-1}}{(p+1)^i}$$

که در این رابطه

$$-B = A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = -x_{d1}$$

و می دانیم

$$x^{-1} \left[ \frac{1}{(p+1)^k} \right] = \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\tau}$$

پس

$$x_d(\tau) = \left[ e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} + \frac{\tau^2}{2!} e^{-\tau} + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\tau} \right]$$

و یا

$$x_d(\tau) = x_{d1} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \cdot e^{-\alpha t} \right\}$$

(35)

به راحتی می توان نشان داد که پاسخ بالا، هیچ فراجشی ندارد زیرا

$$f^- + b(x)u - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \psi < \hat{s} < f^+ + b(x)u - d_1^n + \dot{\eta}_0 + \psi$$

بنابراین با انتخاب U و L به شکل زیر، مطمئن خواهیم بود که شرط رسش طبیعی ارضا می شود.

$$u = \begin{cases} U = (f^- + d_h^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_1 & \hat{s} > 0 \\ L = -(f^+ - d_0^n + \dot{\eta}_0 + \psi)/b_1 & \hat{s} < 0 \end{cases}$$

که همان معادله (28) است. علاوه بر این می توان نوشت

$$\left| \hat{s} \right|_{\text{Max}} = \text{Max} \left[ -(f^- + b_h L - d_h^n - \dot{\eta}_0 - \phi), (f^+ + b_h U - d_1^n + \dot{\eta}_0 + \psi) \right] \quad (33)$$

و چون  $|\hat{s}| \leq \phi - \eta_0$  است، با توجه به قضیه (1) خواهیم داشت

$$T_{\text{Max}} = \frac{2(\phi - \eta_0)}{\left| \dot{\hat{s}} \right|_{\text{Max}}}$$

که با جایگذاری معادله (33) در این عبارت، معادله (29) حاصل می شود.

با توجه به نتایج این قضیه، باز ملاحظه می شود که در حالت کلی حضور نویز اندازه گیری سبب می شود تا بهره کنترلگر افزایش یابد. اما گرچه فرکانس قطع و وصل رله تغییر می کند، اما صریحاً نمی توان راجع به کم یا زیاد شدن آن اظهار نظر کرد.

## ۶- بررسی عملکرد گذرا

یکی از مواردی که شاخص مناسبی در بررسی عملکرد سیستم است، ویژگیهای رفتار گذرای سیستم کنترل است. این ویژگیها را اغلب با دو پارامتر درصد بیشینه فراجش ۲۲ و زمان نشست ۲۳ می سنجد که اولی متناظر با حداکثر بالادگی پاسخ نسبت به پله واحد و دومی متناظر با زمانی است که با فرض صفر بودن شروط اولیه سیستم، پاسخ سیستم به ورودی پله واحد به ۹۰٪ مقدار مانای خود برسد. محاسبه این مقادیر در حالت کلی به کمک قضیه زیر امکانپذیر است.

قضیه ۳ - اگر سیستم تحت بررسی، مشخصات قضیه (۱) را داشته



جدول ۱- مقادیر زمان نشست برای درجات مختلف سیستم

درجه سیستم (n)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	
$\alpha t_s$	۲/۳۱	۳/۸۹	۵/۳۳	۶/۶۸	۸	۹/۲۸	۱۰/۵۲	۱۱/۷۷	۱۳	۱۴/۲۱	۱۵/۲۹	۱۶/۳۶	۱۷/۴۳	۱۸/۵۱	۱۹/۶۰	۲۰/۷۰	۲۱/۸۱	۲۲/۹۴	۲۳/۱۱۰	۲۴/۱۲۸	۲۵/۱۴۸

یکی از مشکلات مهم شرط ریش طبیعی (که عدم تضمین رسیدن به رویه در زمان متناهی است [۲۲]) حل می‌شود، زیرا طراح با تحت انقیاد در آوردن مسیر حالت‌های سیستم، معبر مناسبی را برای گذر حالتها مشخص می‌کند که نه تنها تضمین کننده رسیدن به رویه لغزشی است بلکه ضامن این نکته نیز هست که این وصال در مدت زمان معینی که انتخاب آن به عهده خود طراح است) انجام پذیرد.

### ۷- بررسی پدیده وزوز

«وزوز» مفهومی کیفی است که در کنترل مد لغزشی، اغلب از آن به میزان ناپیوستگی سیگنال کنترل در هنگام برخورد با رویه لغزشی تعبیر می‌شود [۲۳]، چه این ناپیوستگی، شامل مؤلفه‌های فرکانس زیاد است که سبب تحریک دینامیک مدل نشده سیستم می‌شود [۲۴]. اما در مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم، سیگنال کنترل اصولاً پیوسته نیست بلکه دارای دو حالت گسسته است از این رو تعبیر بالا در این مورد چندان بجا نیست، لیکن می‌توان این مفهوم را به معنای میزان تموج و اعوجاج حالت سیستم، حول حالت میانجی در نظر گرفت. لذا در این قسمت وزوز را به این معنا در نظر گرفته، دو جنبه از آن را یکی دامنه و دیگری فرکانس تموجات را مورد بحث قرار می‌دهیم.

همچنان که پیش از این اشاره شد سیگنال کنترل چنان طرح می‌شود که |S| همواره کمتر از  $\phi$  بماند و در این صورت دیدیم که عناصر بردار خطای ردیابی دارای کرانهایی به شکل روابط (۱۱) تا (۱۴) است که در حالت کلی با کمی اغماض می‌توان این روابط را به شکل زیرنوشت

$$\left| \tilde{x}(i) \right| < \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \cdot B(n-1, i+2) \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (36)$$

در نظر گرفت که تابع B برای تمام مقادیر i از معادله (۱۲) به دست می‌آید. این معادله خود شاخصی از میزان وزوز است، زیرا براساس مقادیر تابع B، میزان تموج حالت سیستم حول حالت

$$\frac{dx_d}{d(\alpha t)} = x_{d1} e^{-\alpha t} \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} \right.$$

$$\left. \left[ 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-2}}{(n-2)!} \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\alpha} \dot{x}_d = x_{d1} e^{-\alpha t} \cdot \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

و در نتیجه

$$\dot{x}_d = x_{d1} \cdot \frac{\alpha^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که  $\forall t > 0$ ،  $\dot{x}_d(t)$  مثبت است ( $x_{d1}$  دارای دامنه‌ای مثبت فرض شده)، بنابراین  $x_d$  تابعی صعودی است و در نتیجه هیچ فراجحشی ندارد. برای محاسبه زمان نشست، طبق تعریف  $t_s$  داریم

$$x_d(t_s) = 0.9 x_{d1}$$

و با توجه به معادله (۳۵) نتیجه می‌شود

$$\left[ 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{-\alpha t} \Big|_{t=t_s} = 0.9$$

و قضیه اثبات می‌شود

نکته - حل تحلیلی معادله (۳۴) در حالت کلی موجود نیست؛ اما با استفاده از روشهای عددی برای درجه‌های مختلف سیستم، جدول (۱) حاصل می‌شود:

حسن این قضیه در این نکته است که به هنگام طراحی، با در نظر گرفتن زمان نشست مطلوب سیستم، می‌توان پارامتر  $\alpha$  را به کمک جدول (۱) محاسبه کرد و آن گاه با استفاده از معادله (۳)، بردار حالت میانجی را به دست آورد. نکته مهم دیگر در خصوص قضیه اخیر آن است که به کمک تعریف بردار میانجی و معادله (۳۴) عملاً

جدول ۲- مقادیر تابع دو متغیره B به ازای مقادیر مختلف n و i

n = ۲	B(۱,۱)	B(۱,۲)									
	۱	۱									
n = ۳	B(۲,۱)	B(۲,۲)	B(۲,۳)								
	۱	۰/۷۳۵۸	۱/۲۷۰۷								
n = ۴	B(۳,۱)	B(۳,۲)	B(۳,۳)	B(۳,۴)							
	۱	۰/۵۴۱۳	۰/۶۲	۱/۴۶۰۱							
n = ۵	B(۴,۱)	B(۴,۲)	B(۴,۳)	B(۴,۴)	B(۴,۵)						
	۱	۰/۳۷۵۱	۰/۴۴۸۱	۰/۵۵۹۷	۱/۶۰۹۶						
n = ۶	B(۵,۱)	B(۵,۲)	B(۵,۳)	B(۵,۴)	B(۵,۵)	B(۵,۶)					
	۱	۰/۲۶۹۷	۰/۲۹۳۴	۰/۳۹۰۷	۰/۵۲۱۰	۱/۷۳۴۰					
n = ۷	B(۶,۱)	B(۶,۲)	B(۶,۳)	B(۶,۴)	B(۶,۵)	B(۶,۶)	B(۶,۷)				
	۱	۰/۱۸۷۷	۰/۲۱۰۷	۰/۲۴۳۳	۰/۳۵۰۹	۰/۴۹۲۸	۱/۸۴۱۲				
n = ۸	B(۷,۱)	B(۷,۲)	B(۷,۳)	B(۷,۴)	B(۷,۵)	B(۷,۶)	B(۷,۷)	B(۷,۸)			
	۱	۰/۱۳۴۵	۰/۱۴۳۴	۰/۱۷۲۴	۰/۲۱۱۰	۰/۳۲۱۲	۰/۴۷۱۰	۱/۹۳۶۲			
n = ۹	B(۸,۱)	B(۸,۲)	B(۸,۳)	B(۸,۴)	B(۸,۵)	B(۸,۶)	B(۸,۷)	B(۸,۸)	B(۸,۹)		
	۱	۰/۰۹۴۶	۰/۱۰۲۲	۰/۱۱۴۶	۰/۱۴۶۷	۰/۱۸۶۷	۰/۲۹۸۰	۱/۴۳۵	۲/۰۲۰۹		
n = ۱۰	B(۹,۱)	B(۹,۲)	B(۹,۳)	B(۹,۴)	B(۹,۵)	B(۹,۶)	B(۹,۷)	B(۹,۸)	B(۹,۹)	B(۹,۱۰)	
	۱	۰/۰۶۷۲	۰/۰۷۰۷	۰/۰۸۱۱	۰/۰۹۴۸	۰/۱۲۷۳	۰/۱۶۸۱	۰/۲۷۹۲	۰/۴۳۸۸	۲/۱۷۱	

$\lambda$  و  $B(n-1, i+1)$  برای درجه معینی از سیستم ثابت‌اند، لذا با کاهش مقدار  $\phi$  (شعاع همسایگی حول رویه لغزشی)، مقدار دامنه وزوز نیز کاهش می‌یابد.

برای بررسی فرکانس پدیده وزوز، دیگر بار رابطه  $\dot{S}$  را می‌نویسیم

$$\dot{S} = f(x) + b(x)u - x_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \ddot{x}(i+1)$$

اگر  $f$  و  $b$  توابعی پیوسته باشند به راحتی می‌توان دریافت که  $\ddot{x}, \dots, \ddot{x}^{(n-1)}$  نیز پیوسته خواهند بود زیرا اگر  $\ddot{x}^{(n-1)}$  بخواند

میانجی مشخص می‌شود. تابع دو متغیره B در حالت تحلیلی محاسبه پذیر نیست اما می‌توان آن را به کمک روش مناسبی از طریق رایانه محاسبه کرد [۱۶] که نتیجه آن برای مقادیر مختلف n و i در جدول (۲) آمده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود برای nهای مختلف، با افزایش  $\lambda$  مقدار انتگرال نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این با کاهش مخرج کسر سمت راست نامعادله (۳۶) با افزایش i (برای  $\lambda > 1$ ) ملاحظه می‌شود دامنه وزوز برای  $\ddot{x}(t)$  (یا در واقع  $x(t)$  که همان خروجی است) از همه کمتر است و برای مشتقات بالاتر، این دامنه افزایش می‌یابد و با توجه به اینکه مقادیر

مقادیر شروط اولیه، ورودی و عدم قطعیت داشته باشد). در نتیجه در حالتی که رله، غیر ایده‌ال است، قطعاً فاصله بین دو سویچینگ متوالی رله (و نیز فاصله بین دو پرش متوالی  $\dot{S}$ ) از  $|\dot{S}|_{Max}$  بیشتر خواهد بود لذا زمان بالا و پایین رفتن  $S$  نیز از  $2\phi/|\dot{S}|_{Max}$  بیشتر خواهد بود. حال اگر معکوس این حداقل زمان را به عنوان فرکانس وزوز تعریف کنیم (که مطابق است با فرکانس وزوز خطای  $(\tilde{x}(n-1))$ ، خواهیم داشت

$$\text{فرکانس وزوز در حالت غیر ایده‌التیرین رله} \leq \frac{|\dot{S}|_{Max}}{2\phi} \quad (37)$$

بدیهی است اگر رله غیر ایده‌ال به سمت حالت ایده‌ال میل کند،  $S$  به سمت صفر ولی فرکانس وزوز به سمت بینهایت میل خواهد کرد و هر چه رله از حالت ایده‌ال دورتر شود دامنه وزوز (متناسب با  $|S|$ )، افزایش می‌یابد ولی از فرکانس آن کاسته می‌شود.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که بین دامنه وزوز (که متناسب با  $\phi$  است) و فرکانس وزوز (که متناسب با عکس  $\phi$  است)، رقابتی حاکم است که به دست آوردن یکی به بهای از دست دادن دیگری میسر است. شایان ذکر است که افزایش دامنه وزوز سبب زیاد شدن خطای تعقیب و افزایش فرکانس آن موجب تحریک رفتار با فرکانس زیاد دستگاه (دینامیک مدل نشده سیستم) است.

## ۸- مثال طراحی

اجسام پرنده به دلیل تغییر شرایط فیزیکی محیط پروازیشان دارای معادله‌هایی توأم با عدم قطعیت‌اند، در نمونه‌ای از موشک‌های بالستیکی معادله دینامیکی حاکم بر یکی از کانالهای حرکتی، مطابق

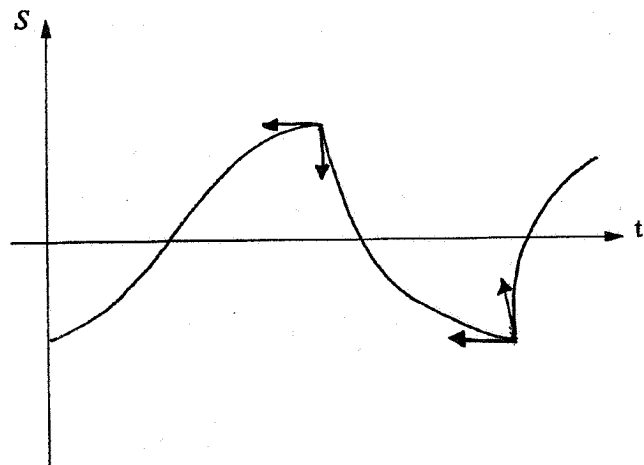
$$\frac{d^3 \tilde{x}(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} + a_2 \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \quad [16]$$

$$u(t) + a_3 \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{x}(t) \dot{\tilde{x}}(t) d(t)$$

که  $[a_i \in [-2, 2], i = 1, 2, 3]$  ضریب همراه با عدم قطعیت دستگاه است و ملاحظه می‌شود امکان ناپایدار شدن سیستم نیز وجود دارد. ضمناً شروط اولیه سیستم نیز دارای عدم قطعیتی به شرح ذیل است

$$|\tilde{x}(0)| \leq 20; \quad |\dot{\tilde{x}}(0)| \leq 10; \quad |\ddot{\tilde{x}}(0)| \leq 15$$

$d(t)$  نیز سیگنال اغتشاش پله واحد است.



شکل ۲- تغییرات تابع  $S$  نسبت به زمان

پرش  $24$  داشته باشد لزوماً باید مشتق آن (یعنی  $\tilde{x}(n)$ ) شامل ضربه  $25$  باشد، اما در معادله سیستم، معادله (۱)، نه سیگنال  $u$  و نه هیچ یک از عناصر بردار  $x$  شامل ضربه نیستند، لذا  $\tilde{x}(n)$  نمی‌تواند شامل ضربه باشد و لذا به تناقض بر می‌خوریم، بنابراین باید تمامی حالت‌های دستگاه پیوسته باشند. از سویی چون  $u$  به شکل سیگنال رله‌ای است،  $\dot{S}$  شامل پرشهایی است و در نتیجه  $S$  پیوسته اما نمودار آن به صورت زیگزاگ  $26$  است، شکل (۲)، به تعبیر دیگر تابع  $S$  در نقاط اکسترم خود دارای نقاطی زاویه دار است، بدین ترتیب با توجه به معادله

$$S = \tilde{x}^{(n-1)} + \lambda(n-1)\tilde{x}^{(n-2)} + \dots + \lambda^{(n-1)}\tilde{x}$$

لازم می‌شود  $\tilde{x}^{(n-1)}$  نیز رفتاری زیگزاگی داشته باشد، اما  $\tilde{x}^{(n-2)}$  تا  $\tilde{x}$  نمی‌توانند چنین باشند (چرا که در این صورت با پیوستگی  $S$  متناقض خواهد بود) بنابراین ملاحظه می‌شود  $\tilde{x}^{(n-1)}$  بیشترین ناهموازی را داراست و به ترتیب  $\tilde{x}^{(n-2)}$  تا  $\tilde{x}$ ، هموار و هموارتر می‌شود. به تعبیر دیگر مؤلفه‌های فرکانسی  $\tilde{x}^{(n-1)}$  از بقیه حالتها بیشتر است و مؤلفه‌های فرکانسی  $\tilde{x}^{(n-2)}$ ،  $\tilde{x}^{(n-3)}$ ، ... و  $\tilde{x}$  به ترتیب کاهش می‌یابد. اما مطابق قضیه (۱)، فاصله زمانی بین دو سویچینگ متوالی رله نمی‌تواند از  $\frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}}$  بیشتر باشد. لذا حداقل فاصله حقیقی زمان بین دو پرش متوالی  $S$ ، یقیناً از  $\frac{\phi}{|\dot{S}|_{Max}}$  بیشتر است (منظور از حداقل فاصله زمانی حقیقی، حالتی است که رله، غیر ایده‌ال و فاصله بین دو سویچینگ متوالی آن،  $T_1$  باشد که  $T_1$  حداکثر مقدار ممکن را برای نگه داشتن  $|S| < \phi$  به ازای تمام

نکته شایان توجه اینکه چنین پرتابه‌ای از نوع HPS است و شیر سوخت رسان آن به صورت رله‌ای (باز - بسته) عمل می‌کند. مسئله آن است که خود رهنمای<sup>۲۷</sup> رله‌ای چنان طرح شود که سیستم به ورودی فرمان پله‌ای با دامنه  $x_d \in [-10, 10]$  پاسخی با زمان نشست حداکثر ۴ ثانیه و بیشینه فراجهدش ۱۰٪ داشته باشد و البته اثر اغتشاش را نیز کاملاً مستهلک کند. حل - هدف از یافتن کنترلگر رله‌ای، یافتن بهره و زمان سوییچینگ آن است. با توجه به اینکه سیستم از مرتبه سوم است رویه لغزشی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$S(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^2 [x(t) - x_d(t)]$$

که  $x = [x \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T$  بردار حالت سیستم است، حالت میانجی نیز از معادله زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^2 x_d(t) = \alpha^2 x_{d1} \\ x_d(0) = x(0), \dot{x}_d(0) = \dot{x}(0), \ddot{x}_d(0) = \ddot{x}(0) \end{cases}$$

با توجه به معادله‌های (۸) و (۹) داریم

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_{d1} + (A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-\alpha t} \\ \text{که:} \quad A_0 &= x(0) - x_{d1}; A_1 = \alpha A_0 + \dot{x}(0); \\ A_2 &= \frac{1}{2} [\alpha A_1 + \alpha \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)] \end{aligned}$$

با عنایت به جدول (۱)، چون  $t_s = 4 \text{ sec}$  و  $n = 3$  است، لذا  $\alpha = 1/26$  و  $\lambda = 3$  در نظر گرفته می‌شود. اینک با فرض  $|S| < 0.1$  و به کمک روابط (۱۰) تا (۱۴) داریم

$$|\ddot{x}| < 0.113; |\dot{x}| < 0.002; |x| < 0.002$$

با توجه به تعریف رویه لغزشی، می‌توان نوشت (بدون در نظر گرفتن اغتشاش در معادله)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -a_3 \ddot{x} + (9 - a_2) \dot{x} + (6 - a_1) \ddot{x} - \\ &\quad (a_3 - \alpha^2) x_d - (a_3 - \alpha^2) \dot{x}_d \\ &= -(a_2 - 3\alpha^2) \dot{x}_d - (a_1 - 3\alpha) \ddot{x}_d - \alpha^2 x_{d1} + u \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |a_3 \ddot{x}| &< 0.004; |(9 - a_2) \dot{x}| < 0.275; \\ |(6 - a_1) \ddot{x}| &< 1/117; |(a_3 - \alpha^2) \dot{x}_d| < 4 \times 23/86; \\ |(a_2 - 3\alpha^2) \dot{x}_d| &< 6/763 \times 13/6; \\ |(a_1 - 3\alpha) \ddot{x}_d| &< 5/78 \times 21/8; |(\alpha^2 x_{d1}) \dot{x}_d| < 1/26^3 \times 10 \end{aligned}$$

ضمناً برای تابع اغتشاش نیز داریم

$$D_h = D_l = 30$$

لذا با توجه به رابطه (۱۷) می‌توان نوشت

$$u - 365/55 < \dot{S} < u + 365/55$$

پس برای برآوردن شرط رسش باید داشته باشیم

$$U = -L = 365/55$$

و قانون کنترل نیز خواهد شد

$$u = \frac{1}{\gamma} [U + L - (U - L) \text{Sgn}(S)] \quad (39)$$

که  $\text{Sgn}(\cdot)$  نمایشگر تابع علامت است.

برای یافتن زمان سوییچینگ رله با عنایت به معادله (۲۵) داریم

$$|\dot{S}|_{\text{Max}} = 365/55 \times 2 = 131/1$$

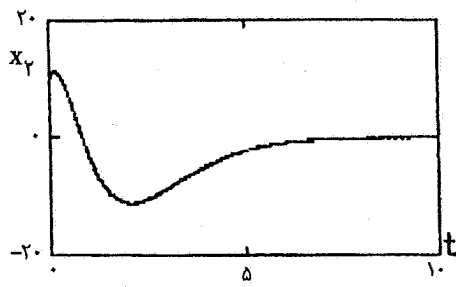
ولذا

$$T_{\text{Max}} = \frac{\phi}{|\dot{S}|_{\text{Max}}} = 1/37 \times 10^{-2} \text{Sec}$$

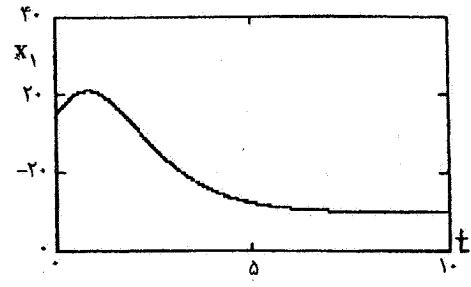
بنابراین رله کارها باید دارای بهره  $U = -L = 365/55$  و حداکثر زمان سوییچینگ  $1/37 \times 10^{-4}$  ثانیه باشد. ضمناً کمترین دامنه وزوز در این مسئله برای خروجی سیستم و برابر با  $0.11$  است و برای دو حالت  $\dot{x}$  و  $\ddot{x}$  نیز به ترتیب برابر با  $0.142$  و  $0.281$  و فرکانس وزوز نیز کمتر از  $365 \text{ Hz}$  است.

شکل (۳) نتایج حاصل از شبیه سازی سیستم را به ازای مقادیر

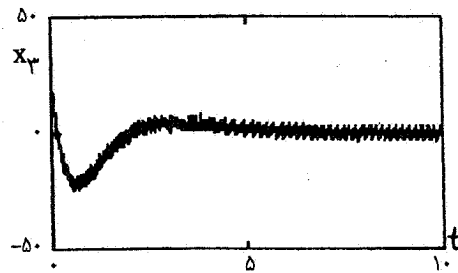
$$\dot{x}(0) = 10, x(0) = 15, a_3 = 2 \text{ و } a_1 = a_2 = -2$$



ب- رفتار حالت  $x_2$

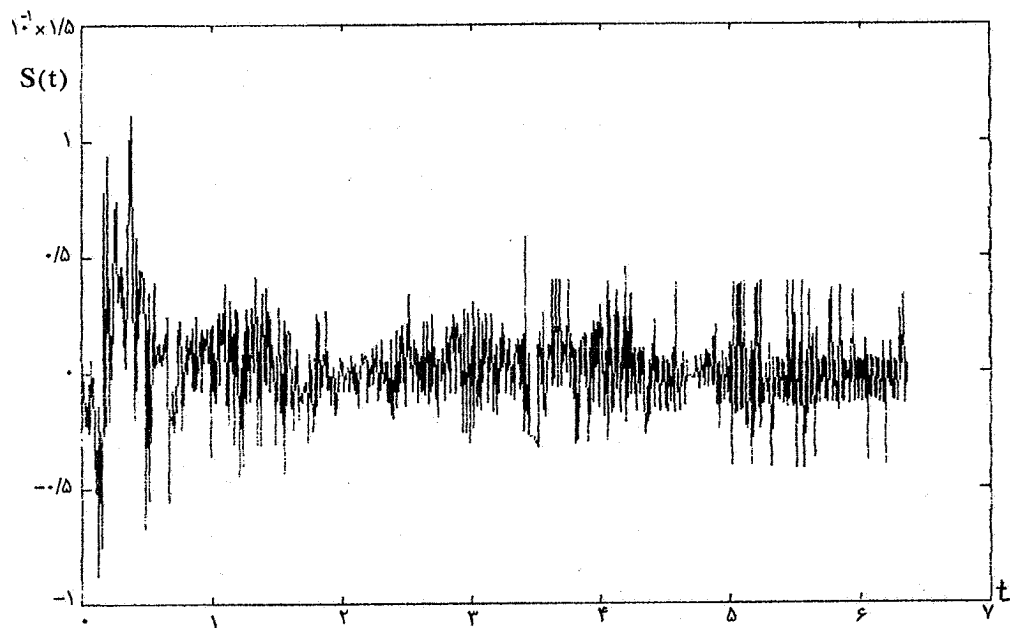


الف- خروجی سیستم ( $x$ )



ج- رفتار حالت  $x_3$

شکل ۳- نتایج حاصل از شبیه سازی موشک بالستیکی توأم با عدم قطعیت با کنترلگر رله ای



شکل ۴- رفتار زمانی رویه لغزشی

معقولی مستهک می شوند. میزان وزوز نیز در تغییرات زمانی حالت  $x_2$  کاملاً مشهود است. ضمناً رفتار زمانی تابع  $S(t)$  شکل (۴)، نیز با موارد مورد نظر در طراحی مطابقت دارد.

$\tilde{x}(0) = 20$  حالت مطلوب  $x_{d1} = 10$  با کنترلگر رله ای حاصل نشان می دهد که ملاحظه می شود تمامی ویژگیهای سیستم کنترل مطلوب برآورده شده است و ضمناً حالت های  $x_2$  و  $x_3$  نیز در زمان

د - بررسی رفتار گذرای سیستم - بررسی چگونگی پاسخ گذرای دستگاه به منظور رسیدن به حالت مطلوب از مهمترین ویژگیهای سیستم کنترل است که قضیه (۳) بیانگر این نکته است در پاسخ به پله واحد، این رفتار در حالت کلی بدون فرآهش بود، زمان نشست آن از حل معادله غیر خطی (۳۴) حاصل می شود که جدول (۱) بیانگر پاسخ این معادله برای مقادیر مختلف  $\eta$  است.

ه - بحث در خصوص پدیده وزوز - بررسی کیفی این پدیده در قالب دامنه و فرکانس ت موجات دو سیگنال حالت و حالت میانجی نشاندهنده آن است که طبق روابط (۳۶) و (۳۷)، تغییرات این دو شاخص در تنافر با هم تغییر می کنند به طوری که یکی متناسب با شعاع حوزه همسایگی حول رویه لغزشی و دیگری متناسب با عکس این پارامتر تغییر می کند و انتخاب مقدار مناسب این پارامتر، سهم به سزایی در تعیین دامنه و فرکانس وزوز دارد لیکن نشان داده شد که استفاده از شیوه حالت میانجی سبب می شود که میزان این ت موجات برای سیگنال خروجی کمترین مقدار را دارا باشد.

در پایان نیز اعمال نتایج حاصل از قضایا و سایر بندها در طراحی خود رهنمای موشکی بالستیکی نامطمئن به همراه کنترلگری رله ای و شبیه سازی نتایج، نشان از صحت روابط و قوت شیوه کاربردی است.

نکته قابل ذکر اینکه اگر همین مسئله را بدون در نظر گرفتن تأثیر اغتشاش حل کنیم، میزان بهره کنترلگر برابر با  $U = -L = 335/55$  و حداکثر زمان سویچینگ برابر با  $1/49 \times 10^{-2}$  ثانیه خواهد بود که نشاندهنده کاهش دامنه سیگنال کنترل و افزایش زمان قطع و وصل است که هر دو منطبق بر قضایا و نکات طرح شده در بندهای پیشین مقاله است.

## ۹- نتیجه گیری

در این مقاله با بیان شیوه های حل مسئله کنترل دو وضعیتی مقاوم، به تفکیک، پنج موضوع مهم در خصوص آن مطرح شد که خلاصه آن به شرح زیر است

الف - بررسی رله در حالت غیر ایده آل - در این حالت فرکانس قطع و وصل رله مقدار محدودی است که حداقل آن به کمک قضیه (۱) و از عکس معادله (۲۰) حاصل می شود.

ب - تأثیر اغتشاش - حضور تابع اغتشاش در معادله دینامیکی سیستم در حالت کلی سبب افزایش دامنه و کاهش زمان سویچینگ رله می شود که دو معادله (۲۴) و (۲۵) ناظر بر این مسئله اند.

ج - تأثیر نویز اندازه گیری - حضور نویز در حالت های اندازه گیری شده در حالت کلی سبب افزایش دامنه و تغییر زمان سویچینگ رله می شود که این تغییرات به کمک قضیه (۲) و معادله های (۲۸) و (۲۹) بیان می شود.

## واژه نامه

- |   |                                |                          |
|---|--------------------------------|--------------------------|
| 1. binary control                       | 10. sliding mode control (SMC) | 20. tracking error       |
| 2. uncertainty                          | 11. sliding surface            | 21. conservative         |
| 3. relay controller                     | 12. natural reaching condition | 22. percent of overshoot |
| 4. robust stability and performance     | 13. switching time             | 23. settling time        |
| 5. minimum time problem                 | 14. on-off time                | 24. jump                 |
| 6. minimum fuel problem                 | 15. chattering                 | 25. impulse              |
| 7. dead zone                            | 16. autopilot                  | 26. zigzag               |
| 8. uncertain                            | 17. ballistic missile          | 27. autopilot            |
| 9. robust binary control problem (RBCP) | 18. strategy                   |                          |
|   | 19. state trajectories         |                          |

1. Loh, A.p., et al: "Relay Feedback of Multivariable Systems and Its Use for Auto-Tuning of Multi-Loop PI Controllers," *Proc. of the Int. Conf. on Control*, UK: pp. 1049-1054, 1994.
2. Carotenuto, et al; "On the Optimal Control For the Distributed Parameter Model of a Solar Energy System," *Large Scale System*; Vol. 6, No. 3, pp. 293-304, 1984.
3. Weinred, A., et al, "Minimum-Time Control of a Two-Link Robot," *Proc. of the 5th IFAC Workshop*, Italy, pp. 195-199, 1985.
4. Bernabei, F., et al, "Analysis of Two Level Shaping for Multiplexing of On-Off ATM Sources," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Communications*, USA, pp. 1380-1385, 1993.
5. Singh, G., et al, "Bang-Bang Control of Flexible Spacecraft Slewing Maneuvers Guaranteed Terminal Pointing Accuracy," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 13, No. 2, pp. 376-379, 1990.
6. Redmond, J., and Silverberg, L., "Fuel Consumption in Optimal Control," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No. 2, pp. 424-430, 1992.
7. Kirk, D.E., *Optimal Control theory :An Introduction*, Prentice-Hall Pub., pp. 246-248, 262, 1988.
8. Hong, H., and Zheng, Zh., "Robust Approach to Bang-Bang Control for Unmodeled Systems with Time-Delay," *8th IFAC IFORS Symp. on Ident. and Sys. Para. Est.*, China, pp. 275-279, 1988.
9. Pao, L.Y., and Franklin, G.F., "Proximate Time-Optimal Control of 3rd-Order Servomechanisms," *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. 38, No. 4, pp. 560-580, 1993.
10. Postnikov, N.N., "Stochastic Oscillations in a Nuclear Reactor with Relay Control System," *Atomnaya Energiya*, Vol. 76, No. 1, pp. 3-11, 1994.
11. Seifi, H., et al, "Adaptive Power System Stabilizer Using a Bang-Bang Pole-Placement Strategy," *Int. Journal of Control*, Vol. 51, No. 1, pp. 33-50, 1990.
12. Thorp, J.S., et al, "Feasibility of Adaptive Protection and Control," *IEEE Trans. On Power Delivery*, Vol. 8, No. 3, pp. 975-983, 1993.
۱۳. منتظر، غ.، مومنی، ح.، و صدیق، ع.، "کنترل دو وضعیتی مقاوم"، دانشور، فصلنامه علمی- پژوهشی دانشگاه شاهد، زمستان ۱۳۷۶.
۱۴. مومنی، ح.، منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "کنترل مقاوم خانواده‌ای از سیستم‌های غیر خطی نامطمئن به کمک محرک بنگ-بنگ"، کنفرانس مهندسی هوا - فضا، شاهین شهر.
۱۵. مومنی، ح.، منتظر، غ.، صدیق، ع.، "روشی نو در کنترل مقاوم روبات‌های غیر خطی همراه با عدم قطعیت به کمک کنترلگر دو وضعیتی"، ششمین کنفرانس سالانه مهندسی برق ایران، تهران.
۱۶. منتظر، غ. "طراحی کنترلگر دو وضعیتی مقاوم برای سیستم‌های نامطمئن به روش کنترل ساختار متغیر"، رساله دکتری مهندسی برق - کنترل، دانشگاه تربیت مدرس.
17. Utkin, V.I., "Variable Structure Systems with Sliding Mode," *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, Vol. AC-22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
۱۸. مومنی، ح.، منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "شیوه‌ای جدید در تعیین کران عناصر بردار خطای ردیابی برحسب شعاع همسایگی حول رویه لغزشی در کنترل ساختار متغیر"، مجله مهندسی مدرس، پاییز ۱۳۷۶.
19. Momeni, H., Montazer, Gh.A., and Sedigh, A., "A General Method for Finding Robust Relay Controller for Uncertain third Order Systems," *Int. Journal of Eng.* (to publish).
۲۰. مومنی، ح.، منتظر، غ.، و صدیق، ع.، "شیوه‌ای نوین در کنترل مقاوم فرایندهای نامطمئن همراه با شیرهای روشن - خاموش"، سومین کنگره ملی مهندسی شیمی ایران، اهواز.
21. Hung, J.Y., and Gao, W., "Variable Structure Control: A Survey," *IEEE Trans. On Indus. Elec.*, Vol. 40, No. 3, 1993.
22. Chung, W., et al, "Constructing Discontinuity Surfaces for Variable Structure Systems: A Lyapunov Approach," *Automatica*, No. 6, 1996.
23. Utkin, V.I., "Sliding Mode Control Design Principles and Application to Electric Drives," *IEEE Trans. on Indus. Elec.*, Vol. 40, No. 3, 1993.
24. Decarlo, R.A., et al, "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems, A Tutorial," *Proc. IEEE*, Vol. 76, No. 3, 1988.