

تحلیل جریان از بدنه سدهای سنگریزه‌ای با روش اجزای محدود در شبکه ثابت

سید محمود حسینی* و اسفندیار صنمی**

گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

دریافت مقاله ۷۹/۷/۲۶ - دریافت نسخه نهایی ۸۱/۱۱/۷

چکیده - در این مقاله، از معادله فورشهایمر به عنوان معادله ساختاری حاکم بر جریان غیر خطی در محیط سنگریزه استفاده شده است و با یک روش جدید معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان آزاد که یک معادله دو بعدی غیر خطی است، با استفاده از روش اجزای محدود و در قالب شبکه ثابت رابطه سازی و حل شده است. همچنین، برای بررسی فرایند محاسباتی مدل و عملکرد برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده مثالهای مناسبی ارائه شده است. مثال اول، که یک بعدی فرض شده است و دارای راه حل تحلیلی است، نشان می‌دهد که پیوند بین اجزا و زیر برنامه‌های مدل و برنامه صحیح است. مثالهای دیگر نشان می‌دهند که مدل قادر است شرایط فیزیکی را حداقل در سطح آزمایشگاهی شبیه سازی کند. این مثالها دو بعدی بوده و جریان آزاد آب از درون سنگریزه را بررسی می‌کند. مدل، عملکرد مناسبی در این رابطه نشان می‌دهد. به عنوان نمونه، در محاسبه فشار در کف سازه، قدر مطلق تفاوت نسبی بین نتایج مدلسازی و مقادیر مشاهده شده در حدود ۲/۳ درصد است. با استفاده از مدل، جریان روگذر از روی هسته سدهای سنگریزه‌ای، که دارای هسته رسی‌اند، نیز تحلیل می‌شود. این گونه هسته‌ها به عنوان سرریز درونی عمل می‌کنند و با تحلیل جریان از روی آنها عملکرد مدل در این رابطه بحث می‌شود.

واژگان کلیدی: جریان غیرخطی، جریان غیر دارسی، روش اجزای محدود، سد سنگریزه‌ای، شبکه ثابت

Seepage Analysis through Rockfill Dams by Finite Element Method in a Fixed Grid

S.M. Hosseini and E. Sonei

Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract: In this paper, Forchheimer equation is used as the constitutive equation for flow through rockfill, and the non-linear two-dimensional governing equation with free surface is solved by a new finite element method in a fixed grid. The model is verified by applying it to different flow conditions. The first scenario, which is assumed to be one-dimensional with analytical solution available for it, is used to verify the developed code. Other scenarios, which are two-dimensional free surface tests on a laboratory rockfill, are used to verify the model. The model shows satisfactory performance in this regard. For example, on average, a mean absolute relative error of about 2.3%, in terms of pressure head was found to exist between modelling results and observed values. Further capabilities of the model are discussed by simulating overflow through self-spillway rockfill dams.

Keywords: Finite element, Method, Fixed grid, Non-Darcy flow, Non-linear flow, Rock fill dam

** کارشناسی ارشد

* استادیار

ضرب جمله اول در رابطه فورشهیمر	a	شماره آزمون	k
سطح مقطع جریان	A(x)	هدایت هیدرولیکی	K
ضرب جمله دوم در رابطه فورشهیمر	b	هدایت هیدرولیکی معادل	K_e
معیار همگرایی بر مبنای ارتفاع هیدرولیکی در گره‌ها	E_1	اجزای ماتریس اصلاحی برای جزء	$K_{c_{i,j}}^e$
معیار همگرایی بر مبنای سرعت در مرکز اجزا	E_2	اجزای ماتریس هدایت هیدرولیکی برای جزء	$K_{s_{i,j}}^e$
بردار جریان	{f}	ماتریس هدایت هیدرولیکی	[K]
ارتفاع هیدرولیکی	h	ماتریس هدایت هیدرولیکی اصلاحی	$[K_c]$
مقدار ارتفاع هیدرولیکی در گره i	h_i	ماتریس هدایت هیدرولیکی در اولین آزمون	$[K_s]$
بردار ارتفاع هیدرولیکی	{h}	تعداد اجزای واقع بر وجه بالادست سد	m
ارتفاع هیدرولیکی در پایین دست	\bar{h}_d	تعداد کل گره‌ها	N
ارتفاع هیدرولیکی در بالا دست	\bar{h}_u	تعداد کل گره‌های جزء	Ne
گرادین هیدرولیکی	i	تعداد کل اجزا	NE
مؤلفه گرادیان هیدرولیکی در راستای x	i_x	فشار	P
مؤلفه گرادیان هیدرولیکی در راستای y	i_y	دبی عبوری	Q
دبی در واحد عرض	q	محور قائم	y
بردار جریان اصلاحی	{ Q_c }	فاصله مکانی بین دو گره در راستای y	Δy
سرعت جریان	V	وزن مخصوص	γ
سرعت جریان در مرکز جزء n	V_n	تابع شکل در گره i	ψ_i
مؤلفه سرعت جریان در راستای x	V_x	تابع شکل در گره iام از جزء	ψ_i^e
مؤلفه سرعت جریان در راستای y	V_y	مساحت سطح جزء	Ω_e
فاصله مکانی بین دو گره در راستای x	Δx		

۱- مقدمه

قانون داری معمولاً به عنوان معادله ساختاری^۱ حاکم بر جریان سیال در محیط متخلخل شناخته می‌شود. معادله تجربی داری ارتباط بین سرعت^۲ و گرادیان هیدرولیکی در راستای اصلی جریان را به صورت زیر بیان می‌دارد:

$$V = -Ki \quad (1)$$

قانون خطی داری تا هنگامی اعتبار دارد که نیروهای لزجت بر نیروهای اینرسی غلبه دارند و اثرات آشفتگی در جریان ظاهر نمی‌شود.

آزمایشات انجام شده بر روی محیطهای سنگریزه‌ای نشان می‌دهد که در این محیطها تحت سرعت و گرادیان هیدرولیکی بالا، منحنی سرعت-گرادیان، $(i - V)$ ، از حالت خطی انحراف می‌یابد که این امر بیانگر حضور نیروهای اینرسی و تأثیرات آشفتگی است [۱و۲]. این نوع جریانها به جریانهای غیرخطی^۳ یا غیر داری مشهورند. در این راستا، مدل‌های غیر خطی متعددی چون معادله فورشهیمر^۴ و رابطه توانی ارائه شده‌اند. مطالعات نظری و آزمایشگاهی در سالهای اخیر نشان می‌دهد که معادله

فورشه‌ایمر بر معادلات دیگر برتری دارد [۳و۴]. معادله فورشه‌ایمر به صورت ریاضی زیر قابل بیان است:

$$i = aV + bV^2 \quad (2)$$

در معادله (۲)، ضرایب a و b به عنوان ضرایب اصطکاک در معادله فورشه‌ایمر نامیده می‌شوند. a و b بیانگر خواص فیزیکی و هندسی محیط نظیر اندازه مصالح و تخلخل محیط‌اند و a به طور مشخص از خواص سیال نظیر لزجت دینامیکی نیز تأثیر می‌پذیرد.

از مواردی که استفاده از روابط غیر خطی را ضروری می‌کند می‌توان جریان از محیط‌های درز دار و شکسته [۵]، جریان در حوالی چاه‌ها و جریان از طریق سازه‌های هیدرولیکی سنگریزه‌ای [۶] را نام برد.

مسئله تراوش در سدهای سنگریزه‌ای دارای دو مشخصه مهم است. اول اینکه با توجه به ابعاد مصالح مورد استفاده در این سازه‌ها، جریان آب در محیط از قانون داریسی پیروی نمی‌کند و در نتیجه نیاز به استفاده از یک رابطه ساختاری غیر خطی است که معادلات دیفرانسیل حاکم را غیر خطی می‌نماید. دوم اینکه با توجه به طبیعت پدیده، جریان دارای سطح آزاد^۵ و جبهه تراوش^۶ است که موقعیت این مرزها از قبل نامعین‌اند. مشخصه دوم، خود نیز نوعی پدیده غیر خطی است. در این مقاله یک روش جدید در تحلیل تراوش از سدهای سنگریزه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود و در قالب شبکه ثابت ارائه می‌شود. درحقیقت، روش ارائه شده، روش‌های مؤثری را که محققان در زمینه‌های مختلف تحلیل جریانهای خطی در محیط متخلخل پیشنهاد کرده‌اند، ترکیب می‌کند و در یک مجموعه هماهنگ این روش‌های مؤثر را به جریانهای غیر خطی تعمیم می‌دهد.

در ادامه، به منظور شناسایی جایگاه روش ارائه شده در این تحقیق، ابتدا کلیاتی در مورد مبانی جریانهای غیر خطی ارائه می‌شود و با توجه به این کلیات، مروری بر تحقیقات گذشته انجام می‌شود. سپس، جزئیات روش ارائه شده، با تأکید بر جنبه‌های برجسته و مهم آن، بیان می‌شوند. در نهایت، عملکرد، صحت و دقت مدل بررسی می‌شود.

۲- مبانی نظری در تحلیل جریانهای غیر خطی و پیشینه پژوهش

در این بخش در جهت شناسایی رفتار جریانهای غیر خطی در محیط متخلخل مواردی چون مفهوم هدایت هیدرولیکی معادل، معادله دیفرانسیل دو بعدی حاکم بر جریان در محیط متخلخل درشت دانه (سنگریزه)، شرایط مرزی جریان و نیز روشهای تحلیل جریانهای با سطح آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲-۱- هدایت هیدرولیکی معادل (K_e)

معادله فورشه‌ایمر معادله مناسبی است که می‌تواند به عنوان معادله ساختاری در تحلیل جریانهای غیر خطی به کار رود. از مقایسه معادله فورشه‌ایمر با معادله داریسی می‌توان نتایج مفیدی به منظور تحلیل جریانهای غیر خطی به دست آورد. می‌توان نوشت:

$$i = aV + bV^2 \quad (2)$$

با در نظر گرفتن علائم جبری هماهنگ با معادله داریسی:

$$V = -\frac{1}{a + b|V|} i \quad (3)$$

و یا:

$$V = -\left[\frac{-a}{2b|i|} + \sqrt{\left(\frac{a}{2bi}\right)^2 + \frac{1}{b|i|}} \right] i \quad (4)$$

معادلات (۳) و (۴) بیانگر این نکته‌اند که می‌توان برای جریانهای غیر خطی یک ضریب هدایت هیدرولیکی معادل به صورت‌های زیر تعریف کرد:

$$K_e = \frac{1}{a + b|V|} \quad (5)$$

$$K_e = \frac{-a}{2b|i|} + \sqrt{\left(\frac{a}{2bi}\right)^2 + \frac{1}{b|i|}} \quad (6)$$

با تمرکز بر روی معادلات (۵) و (۶) و مفهوم هدایت هیدرولیکی معادل دو نتیجه به دست می‌آید. اولین نتیجه این است که هدایت هیدرولیکی معادل علاوه بر وابستگی به خصوصیات

$$h = \frac{p}{\gamma} + y \quad (8)$$

در رابطه (8) از ارتفاع معادل سرعت $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ ، به دلیل کوچکی آن صرف نظر شده است. در جریان دو بعدی در محیط همروند، مشتقات جزئی h نسبت به x و y مؤلفه‌های گرادیان هیدرولیکی در جهات x و y را مشخص می‌کنند.

در صورتی که توده متخلخل نشان داده شده در شکل (1) سد سنگریزه‌ای باشد و جریان در آن از یک معادله غیر خطی نظیر فورشهایمر تبعیت کند، در جهت تحلیل جریان می‌توان معادله (7) را به صورت زیر تعمیم داد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0 \quad (9)$$

که در آن، $K = K_e$ است و با توجه به معادلات (5) و (6):

$$K_e = f(|V|) \quad (10)$$

و یا:

$$K_e = g(|i|) \quad (11)$$

نظر به وابستگی i و V به h ، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که خاصیت اصلی مصالح (ضریب K) در معادله (9) به متغیر اصلی جریان، h ، بستگی دارد. این امر باعث می‌شود که معادله (9) از یک ماهیت غیر خطی برخوردار باشد.

۲-۳- شرایط مرزی جریان آزاد در محیط سنگریزه

شرایط مرزی حاکم بر جریان آزاد آب از یک توده متخلخل، در حالت دائمی و در شرایطی که فقط ناحیه اشباع جریان در نظر گرفته شود شکل (1) مطابق معادلات زیر قابل بیان است:

$$h = \bar{h}_d \quad \text{B1 بر روی الف (۱۲-الف)}$$

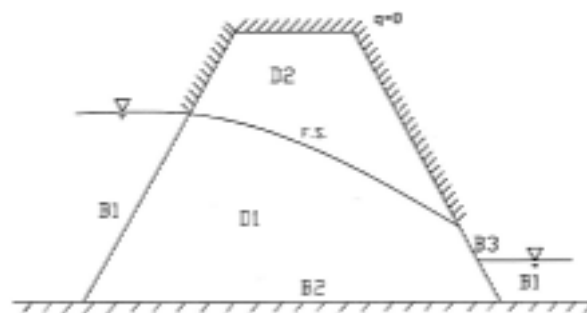
$$h = \bar{h}_u \quad \text{B1 بر روی ب (۱۲-ب)}$$

$$q = 0 \quad \text{B2 بر روی ج (۱۲-ج) (شار عمود بر مرز)}$$

$$h = y \quad \text{B3 بر روی د (۱۲-د)}$$

و بر روی سطح آزاد آب (F.S.) شرایط دینامیکی و جنبشی زیر برقرارند.

$$h = y \quad \text{(۱۲-ه)}$$



شکل ۱- نمایش سطح آزاد آب به همراه شرایط مرزی در بدنه یک سد سنگریزه‌ای

فیزیکی محیط و سیال، تابع خصوصیت اصلی جریان یعنی سرعت نیز هست. دومین نتیجه این است که در یک محیط همگن (a و b ثابت) هدایت هیدرولیکی معادل از نقطه‌ای به نقطه دیگر در تغییر است. در حقیقت وابستگی K_e به سرعت دیکته می‌کند که در صورتی که در تحلیل جریانهای غیر خطی از دیدگاه معادلسازی جریان با جریان خطی (دارسی) استفاده شود، عملاً باید مقدار K_e در یک فرایند آزمون یا تکرار در مقدار واقعی خود تثبیت شود.

۲-۲- معادله دیفرانسیل حاکم بر جریانهای غیر خطی در محیط متخلخل

شکل (1)، به صورت شماتیک، جریان آب در یک توده متخلخل نظیر یک سد خاکی و یا سنگریزه‌ای را نشان می‌دهد. در صورتی که قانون دارسی بر جریان حاکم باشد، معادله دیفرانسیل حاکم بر این جریان دو بعدی، تحت شرایط دائمی^۷ و در یک محیط ناهمگن^۸ و همروند^۹ با معادله کلی زیر بیان می‌شود [V]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0 \quad (V)$$

رابطه (V) در یک محیط همگن به معادله معروف لاپلاس تبدیل می‌شود. h ، ارتفاع هیدرولیکی در هر نقطه از جریان از جمع ارتفاع معادل فشار $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ و ارتفاع پتانسیل (y) به دست می‌آید، به عبارت دیگر:

$q = 0$ (شار عمود بر مرز) = مشخص نبودن موقعیت سطح آزاد آب (F.S.) و جبهه تراوش (مرز B3) از مواردی هستند که تحلیل جریان را مشکل می‌سازند. این امر، حتی در صورتی که معادله داری بر جریان حاکم باشد، استفاده از فرایند تکرار در تثبیت موقعیت سطح آزاد آب را لازم می‌نماید.

در یک دیدگاه متفاوت با آنچه گفته شد، در صورتی که جریان آب در تمام پهنه سد در یک مجموعه متشکل از جریان اشباع - غیر اشباع تحلیل گردد، سطح آزاد آب به عنوان مکان هندسی نقاطی که بر روی آن فشار صفر است مد نظر قرار می‌گیرد. در این صورت مرزهای قرار گرفته در ناحیه غیر اشباع از نوع شرایط مرزی غیر قابل نفوذند، معادله (۱۲-ج). دلیل این موضوع این است که با توجه به منفی بودن فشار آب در ناحیه غیر اشباع، امکان خروج آب از این ناحیه به فضای آزاد وجود ندارد [۷]. این دیدگاه در بخش (۲-۴) تشریح می‌شود.

۲-۴- تعیین موقعیت سطح آزاد آب و جبهه تراوش

با توجه به مشخص نبودن موقعیت سطح آزاد آب و جبهه تراوش، در هنگام استفاده از روشهای عددی به منظور تحلیل جریان آب از توده متخلخل نشان داده شده در شکل (۱)، سه دیدگاه متفاوت به کار می‌رود. در روش اول ناحیه اشباع جریان (D1) در تحلیل در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا موقعیتی برای سطح آزاد آب در نظر گرفته می‌شود، ناحیه مورد نظر شبکه بندی می‌شود و سپس با اعمال یکی از شرایط مرزی (ترجیحاً ۱۲-و) بر روی سطح آزاد آب مسئله تحلیل می‌شود. در صورتی که جوابهای حاصل شرط مرزی دیگر (۱۲-ه) را ارضا کند، موقعیت سطح آزاد آب پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت باید در یک فرایند تکرار، موقعیت سطح آزاد آب (شبکه بندی) را تغییر داد تا دو شرط مرزی (۱۲-ه) و (۱۲-و) به طور همزمان ارضا شوند. این دیدگاه، دیدگاه کلاسیک سطح آزاد آب^{۱۰} و یا روش شبکه متغیر^{۱۱} نامیده می‌شود. این روش دارای اشکالاتی از جمله تغییر ابعاد شبکه

جریان یا حذف احتمالی بعضی از اجزا در ضمن محاسبات است که انعطاف مدل را کاهش می‌دهد. نحوه کاربرد این روش را می‌توان در مراجع [۸ و ۹] یافت.

در دیدگاه دوم هر دو ناحیه اشباع و غیر اشباع (D1 و D2) در شکل (۱) در تحلیل جریان مد نظر قرار می‌گیرند و سطح آزاد آب به عنوان مکان هندسی نقاط با فشار صفر از محاسبات استخراج می‌شود. باید توجه داشت که در این دیدگاه موقعیت ناحیه غیر اشباع مشخص نیست و لذا تثبیت موقعیت ناحیه غیر اشباع نیاز به استفاده از فرایند تکرار دارد. در این روش تمام بدنه سد شبکه بندی می‌شود که از نظر محاسباتی ساده تر از روش کلاسیک است. عیب عمده این روش استفاده از منحنی مشخصه هدایت هیدرولیکی - فشار، (P - K)، در ناحیه غیر اشباع است که به صورت معمول در اختیار مهندسان نیست. قابلیت عمده این روش در جریانهایی غیر دائمی روشن می‌شود [۱۰] که توسعه مجدد سطح آزاد آب تابع خصوصیات جریان در ناحیه غیر اشباع است.

در دیدگاه سوم که به روش شبکه ثابت^{۱۲} [۱۱ و ۱۲] موسوم است از قابلیت‌های مثبت دو روش قبل استفاده می‌شود. بدین ترتیب که تمام پهنه سد شبکه بندی می‌شود و برای جریان در ناحیه غیر اشباع نیز یک هدایت هیدرولیکی صفر یا نزدیک به صفر (حالت استاتیک) در نظر گرفته می‌شود. در این روش نیز نیاز به استفاده از فرایند تکرار در تثبیت موقعیت سطح آزاد آب وجود دارد، ولی در این روش، تکرار بر روی موقعیت شبکه به تکرار بر روی جنس مصالح (هدایت هیدرولیکی) تبدیل می‌شود که از نظر محاسباتی ساده تر است. در این روش تعداد تکرارهای لازم نیز نسبت به روش شبکه متغیر کاهش می‌یابد.

۲-۵- تحقیقات گذشته در ارتباط با تحلیل تراوش با استفاده

از روش اجزای محدود

روش اجزای محدود، نسبت به سایر روشهای عددی نظیر تفاوتهای محدود، به صورت گسترده‌تری در تحلیل جریان در محیطهای متخلخل به کار رفته است. دلایل این امر را

می‌توان سیستماتیک بودن این روش، انعطاف آن و قابلیت آن در پوشش دادن پهنه‌های با هندسه نامنظم دانست.

بررسی جریان غیر خطی از درون سدهای سنگریزه‌ای به روش اجزای محدود توسط محققان متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. وکر^{۱۳} [۱۳] با در نظر گرفتن معادله فورشه‌ایمر به عنوان معادله ساختاری در جریان غیر خطی، با استفاده از دیدگاه کلاسیک سطح آزاد آب و اجزای سه گرهی، مسئله تراوش را تحلیل کرده است. همچنین مکورکادل^{۱۴} [۱۴] به طور مشابه، با استفاده از روش اجزای محدود و نظریه کلاسیک سطح آزاد، جریانهای غیرخطی دائمی و غیر دائمی را تحلیل کرده است. گرچه کارهای وکر و مکورکادل، کارهای اولیه و اساسی در این زمینه بوده‌اند، ولی استفاده از روش کلاسیک سطح آزاد و در نتیجه عدم انعطاف کامل مدل‌های ارائه شده را می‌توان مهمترین محدودیت آنها دانست.

گرینلی^{۱۵} و جوی^{۱۶} [۱۵] بر اساس مدل یک بعدی اجزای محدود و با استفاده از مفهوم هدایت هیدرولیکی معادل، روشی برای تحلیل یک بعدی جریانهای غیر داری از درون یک توده سنگریزه‌ای مستطیل شکل ارائه کرده‌اند. کار نسبتاً جدید گرینلی و جوی مفهوم هدایت هیدرولیکی را به خدمت می‌گیرد ولی یک بعدی فرض کردن جریان، که بر پایه فرض توزیع هیدرواستاتیک فشار در صفحه قائم جریان بنا شده است، عیب عمده روش است. عدم پذیرش شیبی غیر از شیب قائم در جوه بالا دست و پایین دست سد، محدودیت دیگر روش است.

کلس^{۱۷} [۶] برای تحلیل جریان دو بعدی از درون و بالای توری سنگها، تلاش کرد که مفهوم هدایت هیدرولیکی معادل را در یک برنامه تجارتي با نام PC - SEEP، که برای جریانهای داری کاربرد دارد، وارد کند. در حقیقت این محقق به عنوان یک مطالعه موردی، جریان از درون سنگریزه را با جریان متغیر مکانی بر روی توری سنگ، ترکیب کرده است.

۳- جزئیات روش به کار گرفته شده در این تحقیق

با توجه به مشخصات پدیده جریان آب در سدهای سنگریزه‌ای، در این مقاله، به منظور تحلیل تراوش دو بعدی از بدنه سدهای سنگریزه‌ای، از روش اجزای محدود با شبکه ثابت استفاده شده است. شیوه محاسباتی به گونه‌ای است که ماتریس هدایت هیدرولیکی یعنی ماتریس ضرایب در حل دستگاه معادلات خطی اجزا محدود در طی تکرارهای مختلف ثابت باقی می‌ماند و اثرات اصلاحی به صورت یک بردار تصحیحی در طرف دوم معادلات ظاهر می‌شود. در نتیجه، می‌توان از روش چولسکی اصلاح شده که در حل معادلات مختلف، با ماتریس ضرایب ثابت و بردارهای متفاوت کاربرد دارد، استفاده کرد. این روش هم از نظر محاسباتی ساده است و هم از میزان محاسبات لازم می‌کاهد. سرعت همگرایی روش نیز قابل توجه است. کلیات روش شبکه ثابت در مورد جریانهای تابع قانون داری اولین بار توسط لی^{۱۸} و دسای^{۱۹} مطرح شده است [۱۲]. در این تحقیق، ضمن استفاده از معادله فورشه‌ایمر به عنوان معادله ساختاری، این روش به جریانهای غیر خطی نیز تعمیم داده می‌شود و جزئیاتی از روش، مربوط به این گونه جریانها، به شرحی که می‌آید، روشن می‌شود.

۳-۱- فرایند محاسباتی روش

در مدل ارائه شده در این تحقیق، کل بدنه سد می‌تواند به اجزای ایزوپارامتریک سه گرهی و چهار گرهی و یا ترکیبی از این دو تجزیه شود [۱۷]. در صورتی که متغیر اصلی میدان یعنی ارتفاع هیدرولیکی در معادله (۷) بر حسب توابع شکل اجزای محدود و مقادیر تقریبی گرهی بسط داده شود، می‌توان نوشت:

$$h = \sum_{i=1}^N h_i \psi_i \quad (13)$$

با توجه به شکل بسط داده شده، استفاده از روشهای حساب تغییرات و طی مراحل مدون اجزای محدود، دستگاه معادلات خطی زیر قابل استخراج است:

تغییر نمی‌کنند و مقادیر تصحیح در ماتریس اصلاحی $[K_c]$ ظاهر می‌شوند.

اعضای ماتریس $[K_c]$ از معادله زیر تعیین می‌شوند:

$$K_{c_{i,j}}^e = \iint_{\Omega_e} \left[K_c + K_c \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + K_c \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right] d\Omega_e$$

$$i, j = 1, \dots, Ne \quad (17)$$

مقادیر K_c در معادله (17) در نواحی اشباع و غیر اشباع به ترتیب زیر تعیین می‌شوند:

$$K_c = \frac{1}{a} \quad (18-الف) \quad \text{ناحیه غیر اشباع}$$

(18-ب) ناحیه اشباع

$$K_c = \frac{1}{a} - \left[\frac{-a}{2b|i|} + \sqrt{\left(\frac{a}{2bi}\right)^2 + \frac{1}{b|i|}} \right]$$

پس از تعیین ماتریس $[K_c]_1$ در اولین تکرار، به منظور تعیین

$\{h\}$ در دومین تکرار می‌توان نوشت:

$$[K_s]\{h\}_2 - [K_c]_1\{h\}_1 = \{0\}$$

و یا

$$[K_s]\{h\}_2 = [K_c]_1\{h\}_1 = \{Q_c\}_1 \quad (19)$$

در معادله (19)، زیر نویسهای (1) و (2) اشاره به شماره تکرار دارند و $\{Q_c\}_1$ بردار تصحیح جریان در اولین تکرار است. پس از تعیین $\{h\}_2$ وضعیت بهتری از سطح آزاد آب مشخص می‌شود و با ادامه این روند در تکرارهای بعد می‌توان نوشت:

$$[K_s]\{h\}_k = [K_c]_{k-1}\{h\}_{k-1} = \{Q_c\}_{k-1} \quad (20)$$

فرایند تکرار را می‌توان تا تثبیت موقعیت سطح آزاد آب و نیز تثبیت مقدار سرعت بر روی اجزا (تثبیت K_c) ادامه داد. با توجه به متأثر بودن مسئله از دو پدیده غیر خطی، یکی مربوط به وابستگی خواص مصالح به سرعت و دیگری مربوط به وجود سطح آزاد آب، معیارهای همگرایی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\frac{|(h_i)_k - (h_i)_{k-1}|}{|(h_i)_k|} \leq E_1 \quad i = 1, \dots, N \quad (21-الف)$$

$$[K]\{h\} = \{f\} \quad (14)$$

در صورتی که معادله (14) برای معادله حاکم بر جریان غیر خطی، معادله (9)، نیز مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت ماتریس هدایت هیدرولیکی ثابت نیست و تابعی از سرعت جریان بر روی هر جزء و نیز موقعیت سطح آزاد آب (از نقطه نظر اشباع و یا غیر اشباع بودن) است. برای تحلیل کامل مسئله، به منظور تعیین موقعیت سطح آزاد آب و مقادیر صحیح هدایت هیدرولیکی معادل، فرایند تکرار به نحوی که تشریح می‌شود، انجام می‌پذیرد. در اولین تکرار فرض می‌شود که تمام ناحیه جریان اشباع باشد و در نتیجه معادله (14) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[K_s]\{h\} = 0 \quad (15)$$

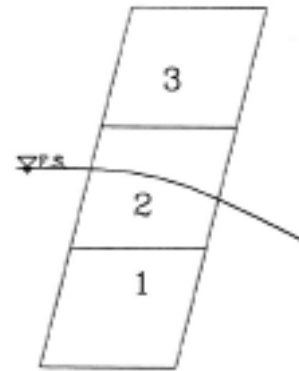
که در آن اعضای ماتریس $[K_s]$ برای هر یک از اجزا از معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_{S_{i,j}}^e = \iint_{\Omega_e} \left[K \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + K \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right] d\Omega_e$$

$$i, j = \dots, Ne \quad (16)$$

در معادله (16)، i و j اشاره به شماره گره اجزا دارند و $K = K_c$ است. به منظور تعیین اعضای ماتریس $[K_s]$ در اولین آزمون با استفاده از معادله (16) نیاز به فرض مقادیری برای K_c است. لذا در اولین تکرار K_c در مناطق اشباع و غیر اشباع یکسان در نظر گرفته می‌شود. با توجه به معادله (5) و با این فرض که اثرات سرعت بر روی K_c ناچیز باشد، این مقدار یکسان برای K_c

برابر $\frac{1}{a}$ در نظر گرفته شده و پس از حل معادله (15)، مقادیر $\{h\}$ در اولین تکرار به دست می‌آیند. پس از تحلیل فشارها، مرز تقریبی بین ناحیه اشباع (فشار مثبت) و ناحیه غیر اشباع (فشار منفی) نیز مشخص می‌شود. در ادامه روند تکرار، بایستی مقادیر هدایت هیدرولیکی بر مبنای سرعت (در ناحیه اشباع) و فشار (در ناحیه غیر اشباع) تصحیح شوند و بر ماتریس $[K_s]$ اعمال شوند. در روش محاسبه شده در این تحقیق، این تصحیح به گونه ای اعمال می‌شود که اعضای ماتریس $[K_s]$



شکل ۲- وضعیت اجزا نسبت به سطح آزاد

شکل ۲)، مقادیر هدایت هیدرولیکی مطابق با معادله (۱۸-الف) تصحیح می‌شوند. همچنین اجزایی که بخشی از آنها در ناحیه اشباع و بخشی دیگر از آنها در ناحیه غیر اشباع قرار می‌گیرند (اجزاء شماره ۲ در شکل ۲)، نمی‌توان یک مقدار ثابت برای هدایت هیدرولیکی معادل آنها در نظر گرفت. برای رفع این مشکل، با توجه به اینکه مؤلفه‌های ماتریس هدایت هیدرولیکی هر جز به روش انتگرال گیری گوس محاسبه می‌شوند، با کنترل فشار در نقاط انتگرال گیری گوس، مشخص می‌شود که چه هدایت هیدرولیکی معادلی باید برای هر نقطه خاص در نظر گرفته شود. نکته لازم به ذکر آن است که هنگام محاسبه هدایت هیدرولیکی معادل، سرعت و گرادیان هیدرولیکی در هر آزمون برای هر یک از اجزا ثابت در نظر گرفته می‌شوند.

۳-۳- تعیین جبهه تراوش

در روش ارائه شده، در هر فرایند تکرار، تعیین سطح آزاد آب و جبهه تراوش بایستی به طور همزمان صورت گیرد و این به دلیل وابستگی طول جبهه تراوش به موقعیت سطح آزاد در بدنه است. در مدل عددی، جبهه تراوش در طی سه تکرار اولیه، که به عنوان حداقل تکرار برای تمام مسائل در نظر گرفته می‌شود و بر اساس کار بر روی مثالهای متعدد انتخاب شده است، مشخص می‌شود، شکل (۳).

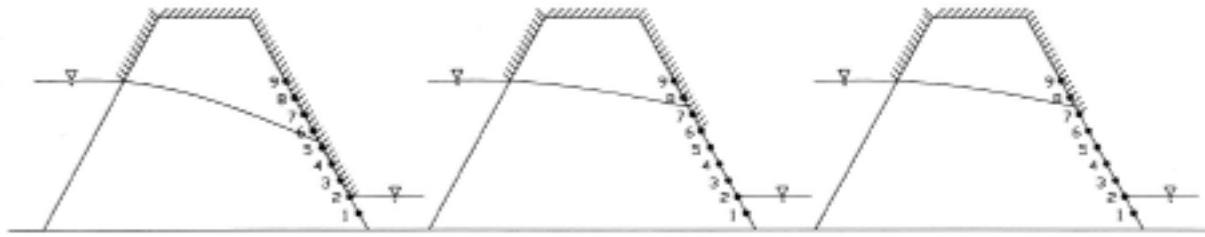
تعیین جبهه تراوش بدین صورت انجام می‌پذیرد که در اولین تکرار کلیه گره‌های واقع بر وجه پایین دست به عنوان مرز غیر قابل نفوذ معرفی می‌شوند و مسئله با این شرایط تحلیل می‌شود و در نتیجه فشار آب بر روی گره‌های ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ که احتمال تشکیل جبهه تراوش بر روی آنها می‌رود محاسبه و کنترل می‌شود. در گره‌هایی که فشار محاسبه شده مثبت باشد، تمایل به تشکیل جبهه تراوش وجود دارد. لذا، در تکرار بعدی همانگونه که هدایت هیدرولیکی در نواحی اشباع و غیر اشباع تصحیح می‌شود، فقط ۲ گره زیرین سطح آزاد آب در محل جبهه تراوش (گره‌های ۶ و ۷ در شکل ۳) به عنوان مرز غیر قابل نفوذ معرفی می‌شوند و دیگر گره‌های واقع بر جبهه تراوش با

$$\frac{|(V_n)_k - (V_n)_{k-1}|}{|(V_n)_k|} \leq E_2 \quad n = 1, \dots, NE \quad (21-b)$$

معادله (۲۱-الف) نشان می‌دهد که به منظور ارضای همگرایی، ارتفاع هیدرولیکی در تمام گره‌ها کنترل می‌شود. معادله (۲۱-ب) نیز تثبیت مقادیر سرعت را کنترل می‌کند. در معادله (۲۱-ب) سرعت در مرکز جز محاسبه می‌شود و برای آن جز ثابت در نظر گرفته شده و در فرایند تکرار کنترل می‌شود. پس از ارضای معیارهای همگرایی، سطح آزاد آب به عنوان نقطه‌ای از پهنه که شرایط فشار اتمسفر یک بر روی آن حاکم است، با میانبایی خطی بین گره‌های با فشار منفی و با فشار مثبت تعیین می‌شود.

۳-۲- تشکیل ماتریس اصلاحی $[K_c]$

ماتریس $[K_c]$ یا ماتریس اصلاحی که تصحیحات بر روی ماتریس هدایت هیدرولیکی، $[K_s]$ ، در آن اعمال شده است، برای اجزای گوناگون مقادیر متفاوتی دارد. کنترل فشار بر روی گره‌های پیرامونی اجزای شبکه، اولین گام برای محاسبه ماتریس اصلاحی به شمار می‌آید. برای اجزایی که به طور کامل در ناحیه اشباع قرار می‌گیرند یا مقادیر فشار گرهی بر روی جز مذکور مثبت باشند (اجزای شماره ۱ در شکل ۲)، مقدار هدایت هیدرولیکی بر روی جز مطابق با معادله (۱۸-ب) اصلاح می‌شود. برای اجزای قرار گرفته شده در ناحیه غیر اشباع، که فشارهای گرهی بر روی آن منفی‌اند (اجزای شماره ۳ در



شکل ۳- تعیین جبهه تراوش در ضمن تکرارهای مختلف

یک نکته اساسی در نظر گرفته شده است. در نتیجه، استفاده از روش موسوم به چولسکی اصلاح شده، که براساس ماتریس ضرایب ثابت و بردار معلوم متغیر عمل می‌کند، نسبت به سایر روشها از جمله روش چولسکی معمولی ارجحیت دارد. جزئیات مراحل محاسباتی روش چولسکی اصلاح شده در مرجع [۱۶] وجود دارد. مرجع [۱۷] نیز برنامه ریزی رایانه ای روش را ارائه می‌دهد.

۳-۵- محاسبه بردارهای گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان
در تحلیل تراوش از بدنه سدهای سنگریزه ای و در روش عددی ارائه شده در این تحقیق، هدایت هیدرولیکی معادل برای هر جز از شبکه جریان تابعی از گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان می‌باشد. این موضوع، لزوم محاسبه بردارهای گرادیان هیدرولیکی در مراکز اجزا برای تعیین مقادیر هدایت هیدرولیکی معادل برای هر جز شبکه و نیز بردارهای سرعت جریان را مشخص می‌سازد. لذا مؤلفه‌های بردار گرادیان هیدرولیکی در راستاهای x و y (\dot{I}_x, \dot{I}_y) در مراکز اجزا با توجه به مقادیر ارتفاعهای هیدرولیکی در هر تکرار قابل محاسبه‌اند. محل تلاقی میانه‌ها برای اجزای سه گرهی و محل تلاقی اقطار برای اجزای چهار گرهی، به عنوان مرکز اجزا در نظر گرفته شده‌اند. توجه مجدد به معادله زیر به منظور محاسبه گرادیانهای هیدرولیکی لازم می‌آید..

$$h = \sum_{i=1}^{Ne} h_i \psi_i \quad i = 1, \dots, Ne$$

با مشتق‌گیری از عبارت فوق در راستاهای x و y می‌توان نوشت:

فشار اتمسفریک یا شرط هندسی $h=y$ معرفی می‌شوند و با این شرایط جدید، مسئله مجدداً در تکرار دوم تحلیل شده و موقعیت بهتری از سطح آزاد آب و جبهه تراوش به دست خواهد آمد. در تکرار سوم، همانند تکرار دوم عمل می‌شود و در صورت نیاز، فقط یک گره در زیر سطح آزاد آب در محل جبهه تراوش و بر روی وجه پایین دست به عنوان مرز غیر قابل نفوذ معرفی می‌شود و مسئله با شرط مرزی $h=y$ بر روی سایر گره‌های جبهه تراوش حل می‌شود. در تکرارهای بعدی فرض بر این است که ضمن این تکرار وضعیت سطح آزاد آب در محل جبهه تراوش به جواب حقیقی نزدیک شده است و لذا با حفظ آرایش مذکور برای جبهه تراوش، تحلیل مسئله ادامه می‌یابد.

نکته لازم به ذکر آن است که چنانچه نقطه خروجی در جبهه تراوش در حد فاصل دو گره قرار گیرد، موقعیت آن دقیقاً مشخص نمی‌شود و در صورت نیاز به دقت بیشتر، ریزتر کردن شبکه اجزای محدود در این محدوده، برای تعیین دقیقتر جبهه تراوش، توصیه می‌شود.

۳-۴- حل دستگاه معادلات خطی اجزای محدود

به منظور حل دستگاه معادلات همزمان، $[K]\{h\} = \{f\}$ و تعیین مقادیر مجهول، می‌توان از روشهای مختلفی مانند روش حذفی گوس و چولسکی که از جمله شیوه‌های متداول در این زمینه‌اند، بهره جست. در مدل عددی حاضر، برای دستیابی به سطح آزاد آب در کلیه آزمونها، ثابت نگاه داشتن عبارت سمت چپ معادلات اجزای محدود یعنی، $[K_s]\{h\}$ و تغییر بردار جریان، $\{f\}$ ، در هر تکرار به عنوان

$$|\mathbf{i}| = \sqrt{i_x^2 + i_y^2} \quad (27)$$

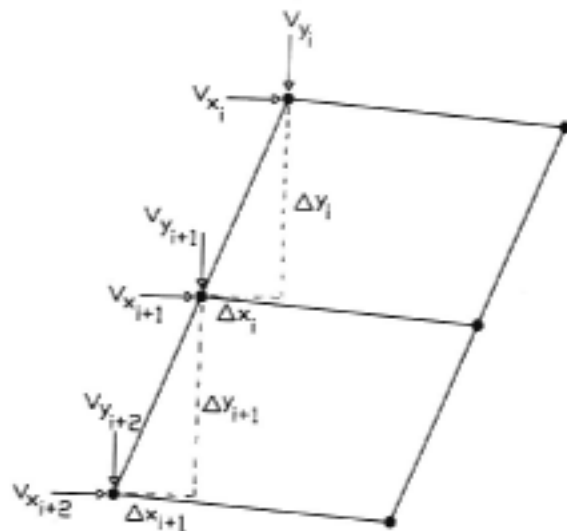
۳-۶- محاسبه دبی جریان یافته از مقطع سد

پس از تحلیل کامل مسئله، میزان تراوش و آبگذری از بدنه سد که در ناحیه اشباع صورت می‌گیرد، دیگر خصوصیت مجهول در مسئله تراوش در سدهای سنگریزه ای است که باید محاسبه شود. برای این منظور ابتدا لازم است تا بردارهای سرعت در گره‌های اجزا محاسبه شوند. با در دست داشتن مختصات و مقدار ارتفاع هیدرولیکی در هر گره از پهنای میدان و نیز با توجه به توابع شکل و مشتقات آنها در اجزای سه گرهی و چهار گرهی ایزوپارامتریک، بردارهای سرعت گرهی وابسته به هر جز قابل محاسبه‌اند. سپس محاسبه شدت جریان عبوری از واحد عرض مقطع سد در بخشی از وجه بالادست که در تماس با مخزن قرار دارد و توزیع بردارهای سرعت بر روی آن نسبت به سایر مقاطع یکنواخت تر است، صورت می‌گیرد. با این توضیح، دبی در واحد عرض مقطع سد، با استفاده از تقریب زیر قابل محاسبه است.

(28)

$$q = \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{V_{x_i} + V_{x_{i+1}}}{2} \right) \Delta y_i + \left(\frac{V_{y_i} + V_{y_{i+1}}}{2} \right) \Delta x_i \right] 1$$

در معادله (28)، زیر نویسهای i و $i+1$ ، اشاره بر گره‌های ابتدا و انتها در هر یک از اجزا که سرعت بر روی آنها محاسبه می‌شوند دارند. سایر پارامترها در شکل (4) مشاهده می‌شوند. در معادله (28) اجزای 1 تا m بر روی وجه بالا دست سد و در تماس با مخزن قرار دارند. به عبارت دیگر، به عنوان نمونه، گره‌های i ، $i+1$ و $i+2$ در شکل (4) در تماس با آب مخزن بوده و خروج آب از مخزن از سطوح بین گره‌ها صورت می‌گیرد.



شکل ۴- محاسبه دبی تراوش از دو جزء قرار گرفته در بالادست

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^{Ne} h_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad (22)$$

$$i_y = \frac{\partial h}{\partial y} = \sum_{i=1}^{Ne} h_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \quad (23)$$

جزئیات کامل در نحوه استفاده از معادلات (22) و (23) به منظور محاسبه گرادیان هیدرولیکی در مرجع [17] یافت می‌شود. پس از محاسبه مؤلفه‌های بردار گرادیان هیدرولیکی با استفاده از فرض معادل سازی جریان غیر خطی با جریان داریسی، مؤلفه‌های بردار سرعت جریان در مراکز اجزا به صورت زیر قابل محاسبه‌اند.

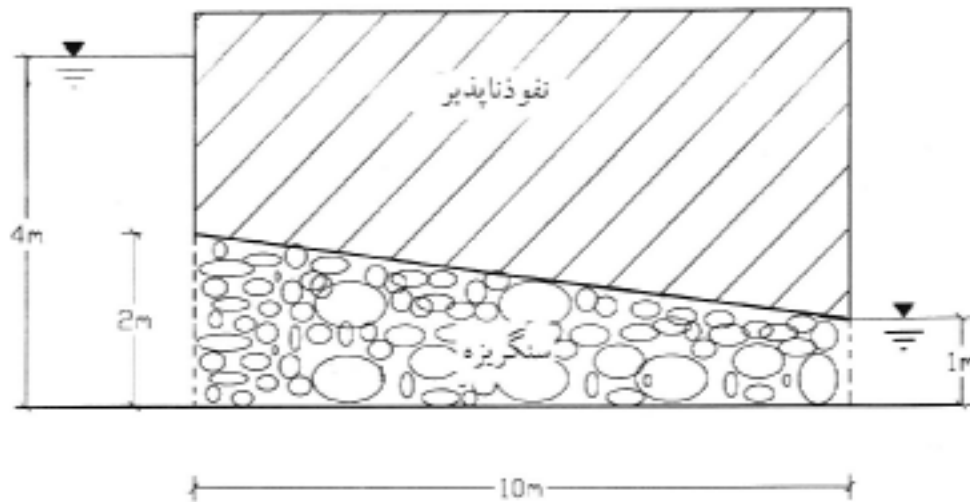
$$V_x = -K_e i_x \quad (24)$$

$$V_y = -K_e i_y \quad (25)$$

در معادلات (24) و (25)، هدایت هیدرولیکی از عبارت زیر تعیین می‌شود:

$$K_e = \left[\frac{-a}{2b|\mathbf{i}|} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b|\mathbf{i}|} \right)^2 + \frac{1}{b|\mathbf{i}|}} \right] \quad (26)$$

در معادله (26)، $|\mathbf{i}|$ ، قدر مطلق گرادیان هیدرولیکی از معادله زیر قابل محاسبه است:



شکل ۵- جریان محدود با سطح مقطع متغیر

۴- بررسی صحت و دقت مدل

بر پایه آنچه گذشت یک برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده است که می‌تواند جریان در محیط‌های همگن و ناهمگن (a و b متغیر) را مدل کند.

از آنجا که استفاده از یک مدل ریاضی هنگامی قابل قبول است که مدل از جوانب مختلف مورد ارزیابی قرار گیرد، در این قسمت ارزیابی برنامه^{۲۰} و ارزیابی مدل^{۲۱} صورت می‌گیرد. ارزیابی برنامه و ارزیابی مدل به عنوان بخشی از مراحل استفاده از مدلها، در مرجع [۱۸] آورده شده‌اند. به منظور ارزیابی برنامه، نتایج حاصل از مدل عددی بابتیج حاصل از راه حل‌های تحلیلی، که برای شرایط فیزیکی ساده استخراج شده‌اند، مقایسه می‌شوند. در صورت تطابق نتایج، مقایسه نشان می‌دهد که روابط ریاضی بکار گرفته شده در مدل و پیوند بین اجزای مختلف برنامه توسعه داده شده، صحیح است. به منظور ارزیابی برنامه، یک جریان ساده، تحت عنوان جریان محدود افقی با سطح مقطع متغیر بررسی می‌شود. در ارزیابی مدل، رفتار قویتری از مدل، یعنی توانایی مدل در شبیه‌سازی شرایط فیزیکی، حداقل در سطح آزمایشگاهی، می‌تواند مد نظر قرار گیرد. در این تحقیق، به منظور ارزیابی مدل، نتایج حاصل از مدل با اطلاعات اندازه‌گیری شده در یک توده سنگریزه‌ای در

آزمایشگاه مقایسه می‌شود. در نهایت چند تمرین مدلسازی بر روی سدهای سنگریزه‌ای با هسته درونی^{۲۲} صورت می‌گیرند. این تمرینها در ارتباط با جریان روگذر از روی هسته‌اند که تواناییها و محدودیتهای مدل را در تحلیل این جریانها نشان می‌دهند.

۴-۱- ارزیابی برنامه

جریان محدود افقی با سطح مقطع متغیر

شکل (۵) جریان محدود فرضی از داخل یک فضای متخلخل درشت دانه با سطح مقطع غیر یکنواخت را نشان می‌دهد که شرایط در صفحه عمود بر جهت جریان یکسان است. در این مثال، قسمت بالای قرار گرفته بر روی مصالح درشت دانه کاملاً غیر قابل نفوذ در نظر گرفته می‌شود. ابعاد هندسی مقطع در شکل نمایش داده شده‌اند. جنس مصالح محیط، مصالح درشت دانه با اندازه متوسط حدوداً ۲/۷ سانتیمتر و تخلخل ۰/۴۵۹ است. a و b، ضرایب معادله فورشهایمر برای محیط مورد نظر، با استفاده از دستگاه اندازه‌گیری نفوذپذیری برای مواد درشت دانه در آزمایشگاه تعیین شده‌اند که به ترتیب ۰/۸۷ s/m و $42/4 \text{ s}^2/\text{m}^2$ هستند [۱۹]. سطوح آب در پایین دست جریان یک متر و در بالا دست آن ۴ متر در نظر

با اعمال شرط اولیه $h = 1\text{m}$ در $x = 10\text{m}$ دبی در واحد عرض مقطع به ازای a و b داده شده، به دست می‌آید:

$$q = 0.1056 \quad \text{m}^2/\text{s} \quad (33)$$

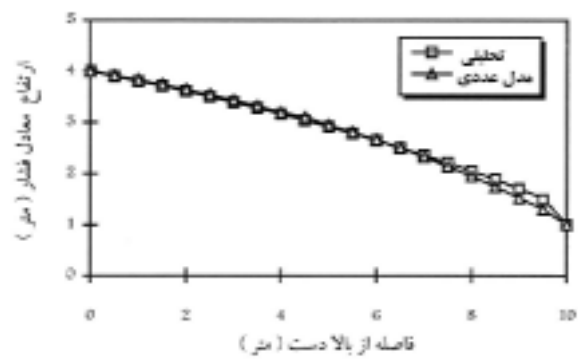
معادله (32) تغییرات فشار در کف مسیر با مقطع غیر یکنواخت را نشان می‌دهد.

برای شبیه سازی مسئله به روش اجزای محدود، از تعداد 400 جز چهار گرهی ایزوپارامتریک که در آن تعداد کل گره‌ها برابر 451 است، استفاده شده است. پس از اجراهای متعدد با مقادیر متفاوت برای E_1 و E_2 در نهایت مقدار 0.01 برای هر دو معیار مناسب تشخیص داده شد که با این انتخاب، نتایج مدل عددی پس از 13 تکرار حاصل شده است. بررسی نشان می‌دهد که معیار همگرایی E_2 بر اساس سرعت جریان (محاسبه شده در مراکز اجزا)، معیار کنترل کننده بوده است. شکل (6)، فشارهای کف به دست آمده از روش تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد. بررسی بر روی شکل (6)، نشان می‌دهد که نتایج حاصل از روش عددی قدری بیشتر از نتایج حاصل از روش تحلیلی به دست آمده است و بیشترین اختلاف در نتایج روشهای عددی و تحلیلی در انتهای جریان مشاهده می‌شود. علی‌رغم این مسئله نزدیکی مقادیر فشار محاسبه شده توسط روش عددی با مقادیر به دست آمده از روش تحلیلی قابل توجه است. همچنین مقدار دبی جریان از روش عددی $0.1065 \text{ m}^2/\text{s}$ به دست آمده است که با نتیجه تحلیلی اختلافی در حدود 0.9% درصد دارد. این اختلاف، جزئی است و حکایت از میزان دقت روش عددی ارائه شده دارد. لازم به توضیح است که راه حل تحلیلی ارائه شده خود نیز تقریبی است چرا که معادله (30) بر مبنای فرض توزیع یکنواخت سرعت در مقطع نوشته شده است که فرض دقیقی نیست.

4-2- ارزیابی مدل عددی

پس از اطمینان از برقراری پیوند منطقی بین اجزای برنامه، عملکرد اصلی مدل عددی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و میزان دقت آن در تحلیل مسائل فیزیکی شناسایی می‌شود. در این

استقلال، سال 22، شماره 1، شهریور 1382



شکل 6- مقایسه مقادیر فشار بدست آمده از روش تحلیلی و روش عددی در جریان محدود افقی با سطح مقطع متغیر

گرفته شده‌اند که بیانگر یک گرادیان هیدرولیکی کلی و ثابت برای جریان هستند. به منظور معرفی ناحیه غیر قابل نفوذ در بالای مقطع جریان به مدل مقادیر ضرایب a و b در ناحیه نفوذ ناپذیر به ترتیب 10^{10} s/m و $10^6 \text{ s}^2/\text{m}^2$ انتخاب می‌شوند که عملاً با این انتخاب، هدایت هیدرولیکی، در ناحیه مذکور صفر می‌شود. با فرض اینکه جریان به صورت یک بعدی صورت می‌پذیرد، مشخصات جریان به شیوه تحلیلی محاسبه می‌شوند. با مراجعه به شکل (5) می‌توان تابع تغییرات مقطع در واحد عرض جریان را به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = -0.1x + 2 \quad (29)$$

سرعت جریان در مقطعی به فاصله x از مبدأ عبارت است از:

$$V = \frac{Q}{A(x)} = \frac{q}{-0.1x + 2} \quad (30)$$

با جایگذاری معادله (30) در معادله ساختاری جریان غیر داری می‌داریم:

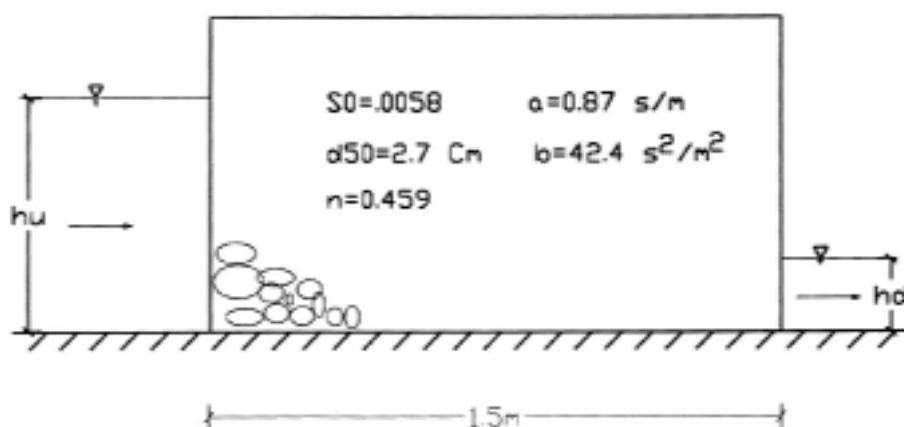
$$-\frac{dh}{dx} = a\left(\frac{q}{-0.1x + 2}\right) + b\left(\frac{q}{-0.1x + 2}\right)^2 \quad (31)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (31) بر روی مرزهای معین، ارتفاع هیدرولیکی که تابعی از دبی در واحد عرض است، نتیجه می‌شود:

$$h = 10aq \left[\ln \frac{-0.1x + 2}{2} \right] - 10bq^2 \left[\frac{1}{-0.1x + 2} - \frac{1}{2} \right] + 4 \quad (32)$$

جدول ۱- مشخصات آزمونهای ۲،۱ و ۳

مشخصات نام آزمایش	عمق آب بالادست (h_u) (m)	عمق آب پایین دست (h_d) (m)	دبی اندازه گیری شده (Q) (L/s)
آزمون ۱	۰/۱۹۱	۰/۰۸۱	۲/۹۸
آزمون ۲	۰/۲۲۵	۰/۰۸۴	۳/۸۳
آزمون ۳	۰/۳۵۳	۰/۰۹۷	۷/۶۷



شکل ۷- ابعاد فیزیکی مدل مورد استفاده

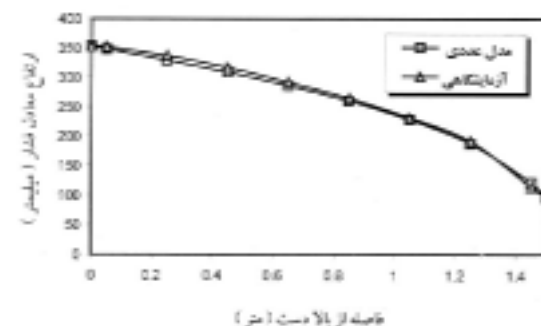
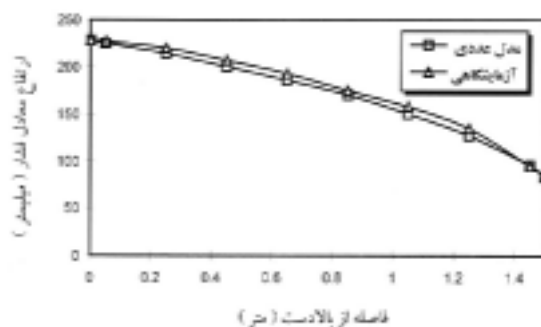
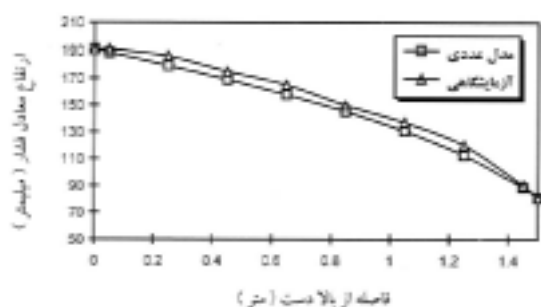
در این آزمایشها، با جایگذاری لوله‌های پیزومتریک در نقاط مختلف در امتداد کف مدل فیزیکی، فشارهای ایجاد شده در مدل فیزیکی در ابتدا و انتها به فاصله ۵ سانتی متر از لبه سازه و پس از آن در فواصل ۲۰ سانتی متری اندازه گیری شده‌اند که مجموعاً بیانگر ۸ فشاراندازه گیری شده در کف توده سنگریزه‌ای‌اند.

برای تحلیل جریان در مدل فیزیکی مذکور با استفاده از مدل عددی، از یک شبکه بندی متشکل از ۲۴۰ جز چهار گرهی ایزوپارامتریک و ۲۷۹ گره استفاده شد. بامعرفی شرایط فیزیکی حاکم بر آزمایش با استفاده از جدول (۱) و تجویز شرایط مرزی موجود برای مدل عددی، شرایط تحلیل مدل فیزیکی تحت آزمایشهای سه گانه فراهم می‌شود. مقادیر فشاراندازه گیری شده و محاسبه شده توسط مدل عددی برای آزمایشهای یاد شده در شکل (۸) مشاهده می‌شوند.

راستا، از نتایج آزمایشاتی که به منظور بررسی تراوش دائمی جریان غیر خطی از بدنه یک مدل فیزیکی، شکل (۷)، متشکل از مواد متخلخل درشت دانه انجام شده است، استفاده می‌شود [۲۰]. آزمایشها در سه مرحله و تحت عناوین آزمون یک، آزمون دو و آزمون سه که در هر مرحله اعماق سرآب و پایاب متفاوتی بر نمونه اعمال شده‌اند، صورت گرفته است. مشخصات فیزیکی مصالح همان هستند که در جریان محدود افقی با سطح مقطع متغیر معرفی شدند. طول نمونه برابر ۱/۵ متر و ثابت است و عرض کانال آزمایشگاهی و شیب آن به ترتیب برابر ۰/۶۰۳ متر و ۰/۰۰۵۸ هستند. ابعاد کلی نمونه فیزیکی ساخته شده در آزمایشگاه مطابق شکل (۷) هستند. بر اساس مرجع [۲۰]، مشخصات اعماق در سر آب و پایاب نمونه فیزیکی به همراه دبی اندازه گیری شده برای آزمونهای مختلف در جدول (۱) درج شده است.

جدول ۲- مقایسه کمی تفاوت فشارهای محاسبه شده و اندازه گیری شده با توجه به معیارهای مختلف (برای مدل فیزیکی)

مشخصات نام آزمایش	RMSE (mm)	MAE (mm)	MARE (%)
آزمون ۱	۵/۱۴	۴/۳۳	۲/۹۳
آزمون ۲	۵/۱۳	۳/۷۲	۲/۰۱
آزمون ۳	۵/۱۶	۴/۴۳	۱/۹۷



شکل ۸- فشارهای اندازه گیری شده و محاسبه شده در کف مدل فیزیکی

از نقطه نظر عملی این اختلاف قابل صرف نظر است.

در ادامه بررسی و ارزیابی روش عددی، شدت جریان عبوری از نمونه فیزیکی بر روی وجه بالا دست نمونه، با محاسبه

استقلال، سال ۲۲، شماره ۱، شهریور ۱۳۸۲

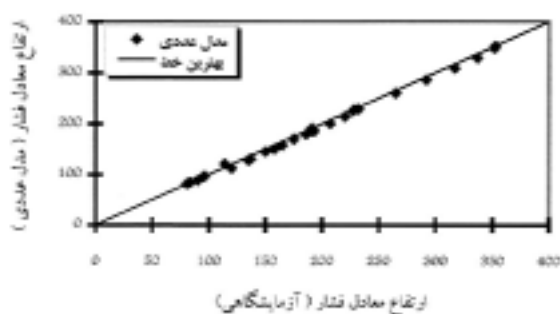
در شکل (۸)، اگر چه نزدیکی کامل بین اطلاعات آزمایشگاهی و نتایج حاصل از روش اجزای محدود کاملاً مشهود است، مقایسه باید به صورت کمی و بر مبنای معیارهایی صورت گیرد. در این راستا معیارهایی که به منظور تحلیل کمی خطای موجود بین اطلاعات آزمایشگاهی و نتایج حاصل از مدل عددی، مدنظر قرار گرفته‌اند، جذر میانگین مجذور خطاها^{۲۳} (RMSE)، میانگین قدر مطلق خطاها^{۲۴} (MAE) و میانگین قدر مطلق خطاهای نسبی^{۲۵} (MARE) هستند. معیار آخر بر حسب درصد نیز بیان می‌شود.

با توجه به اطلاعات آزمایشگاهی و محاسباتی، معیارهای یاد شده محاسبه شده و نتایج به منظور ارزیابی در جدول (۲) ارائه می‌شوند. اعداد جدول (۲) همان گونه که مشاهده می‌شوند، به نحو مشهودی کوچک بوده و حکایت از دقت مدل عددی در محاسبه پارامترهای مورد نظر در مسئله تراوش غیر داری در جریانهای دو بعدی و دارای سطح آزاد دارند.

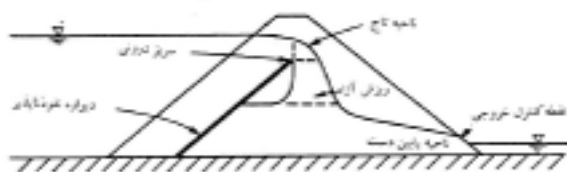
یکی دیگر از روشهای بررسی میزان انحراف اطلاعات نسبت به اطلاعات پایه ای که ارزیابی بر مبنای آنها صورت می‌گیرد، ترسیم دو گروه اطلاعات مورد نظر در یک دستگاه مختصات است. برای بررسی نتایج مدل عددی از این دیدگاه، اطلاعات آزمایشگاهی و محاسبه شده توسط روش عددی در شکل (۹) ترسیم شده‌اند به نحوی که محور افقی شامل اطلاعات آزمایشگاهی و محور عمودی بیانگر نتایج محاسباتی‌اند. شکل (۹) بیانگر این نکته است که در حالات کلی علاوه بر دقت قابل توجه مدل عددی ارائه شده در تحقیق حاضر، نتایج حاصله در مقایسه با مشاهدات آزمایشگاهی قدری کمترند ولی

جدول ۳- نتایج دبی‌های محاسبه شده و اندازه‌گیری شده در مدل فیزیکی

نام آزمایش	دبی اندازه‌گیری شده (L/S)	دبی محاسبه شده در وجه بالادست (L/S)	درصد خطا (%)
آزمون ۱	۲/۸۹	۲/۸۵	۱/۳۸
آزمون ۲	۳/۸۳۹	۳/۹۱	۱/۸۴
آزمون ۳	۷/۶۷	۸/۲۳	۷/۳



شکل ۹- مقادیر محاسبه شده در برابر مقادیر فشار مشاهده شده برای مدل فیزیکی



شکل ۱۰- نحوه شکل‌گیری جریان روگذر آب در سدهای سنگریزه‌ای با هسته درونی [۲۳]

سدها به چهار ناحیه بالا دست، تاج سرریز، ریزشی آزاد و پایین دست، مطابق شکل (۱۰)، قابل تقسیم است. برای تعیین نیمرخ سطح آزاد آب در این نواحی، روابط سرانگشتی ساده‌ای پیشنهاد شده است که برخاسته از مشاهدات آزمایشگاهی در مقیاس کوچک‌اند. مرجع [۱۷] جمع‌بندی مناسبی از این روابط و نحوه استفاده از آنها را ارائه می‌دهد.

براساس مطالعات انجام شده توسط مؤلفین، مدل ریاضی جامعی، که بتواند پارامترهای هیدرولیکی مورد نظر در تحلیل جریانهای روگذر را ارائه دهد، موجود نیست. وگر نیز در

سرعت‌های گره‌ای، تعیین می‌شود. این نتایج به همراه دبی‌های اندازه‌گیری شده برای آزمایشهای مختلف و درصد خطای مربوطه در جدول (۳) ارائه شده‌اند.

مشابه نتایج مربوط به فشارها، دبی‌های محاسبه شده توسط مدل عددی نیز دارای خطای جزئی نسبت به اطلاعات آزمایشگاهی‌اند. به عبارت دیگر، تطابق و نزدیکی قابل توجه بین نتایج یاد شده، تأییدی دیگر بر عملکرد صحیح مدل عددی است.

۳-۴- تحلیل جریان روگذر از هسته سد سنگریزه‌ای با هسته درونی

سدهای سنگریزه‌ای با هسته نفوذ ناپذیر درونی (که تحت عنوان سرریز درونی نیز شناخته می‌شود) اولین بار در استرالیا مورد توجه قرار گرفته‌اند. در واقع، ویلکینز^{۲۶} محقق است که پیشنهاد احداث این گونه سدها را مطرح کرده است [۲۱]. در شرایطی که دبی سیلاب زیاد نباشد، هسته این سد می‌تواند به عنوان سرریز درونی عمل کند و در نتیجه هزینه احداث سرریز را کاهش دهد. به علاوه، خروج آرام آب از سد، نیاز به استفاده از تأسیسات زایل‌کننده انرژی را از بین می‌برد.

به ازای یک دبی خاص، پارامترهای هیدرولیکی مهمی که در طرح این گونه سدها نقش مهمی ایفا می‌کنند، عمق آب بالا دست سرریز، موقعیت سطح آزاد جریان و ناحیه اشباع‌اند. مطالعات آزمایشگاهی گسترده‌ای درباره نحوه شکل‌گیری جریان بر روی سرریزها صورت گرفته است [۲۲ و ۲۳]. بر مبنای این مطالعات و مشاهدات، سطح آزاد آب در این گونه

مطالعات اجزای محدود باشبکه متغیر خود بر روی تحلیل جریان روگذر، ابهام در حل رامشاهده کرد [۱۳] ولی بررسی بیشتری در این مورد انجام نداد.

در این تحقیق، مدل دو بعدی ارائه شده برای سد لافینگ جک مارش^{۳۷}، که توسط ویلکینز طراحی و اجرا شده است، بکار برده شد که نتایج این تمرین مدلسازی، با ترازهای مختلف سطح آب در مرجع [۱۷] یافت می‌شود. این بررسی نشان می‌دهد که تحت شرایطی که براساس مشاهدات آزمایشگاهی ناحیه ریزش آزاد جریان بر روی سرریزی درونی شکل می‌گیرد، تحلیل عددی ناپایدار می‌شود. در این حالت، احتمالاً به علت ایجاد ناپیوستگی در نیمرخ جریان عبوری از روی سرریز، جریان مذکور از معادله دیفرانسیل حاکم پیروی نمی‌کند. این عامل سبب ایجاد ابهام در فرایند تحلیل سیستماتیک روش اجزای محدودی می‌شود که بر مبنای رابطه سازی معادله دیفرانسیل دو بعدی حاکم بر جریان غیر خطی پیوسته دائمی در ناحیه اشباع بنا شده است.

۵- نتایج و بحث

خلاصه‌ای از مسیر محاسباتی یک مدل عددی با استفاده از روش اجزای محدود و در قالب شبکه ثابت ارائه شد که قادر است همزمان دو پدیده غیر خطی یکی نامعینی موقعیت سطح آزاد آب و دیگری تغییرات هدایت هیدرولیکی معادل با سرعت را، برای یک جریان غیر خطی در محیط مختلخل درشت دانه تحلیل کند. این ارائه نشان می‌دهد که این مدل دیدگاههای مثبت و مؤثری را که تاکنون در تحلیل جریانهای خطی ظهور پیدا کرده‌اند، به خدمت گرفته است. از مثالهایی که به منظور بررسی صحت و دقت مدل تجزیه و تحلیل گردیدند، نتایج زیر استخراج می‌شود.

۱- با توجه به حداکثر خطای موجود بین نتایج حاصل از محاسبه پارامترهای هیدرولیکی جریان آزاد توسط روش عددی و نتایج حل تحلیلی یا اطلاعات آزمایشگاهی در سطح مسائل

فرضی یک بعدی و مدل فیزیکی دو بعدی، کارایی و دقت عملکرد مدل ارائه شده در تحلیل تراوش جریان غیر خطی در توده‌های سنگریزه‌ای بامصالح یکنواخت (بدون هسته) در حالت دایمی و شرایط جریان پیوسته اشباع، در حد مسائل بررسی شده، قابل قبول است.

۲- مقادیر همگرایی E_1 و E_2 که بر مبنای ارتفاع هیدرولیکی گره‌ای و سرعتهای مرکزی اجزا هستند، برای هر مسئله خاص باید تعیین شوند، ولی انتخاب این مقادیر در بازه $(0/001 - 0/01)$ برای اکثر مسائل شروع مناسبی است. در تحلیلهای مختلف مشخص شد که در مسائل یک بعدی و دو بعدی عموماً معیار همگرایی بر مبنای سرعت، تعیین کننده نتایج نهایی است. به این معنی است که ارتفاع هیدرولیکی سریعتر در مقدار نهایی خود تثبیت می‌شود.

۳- با توجه به قابلیت روش اجزای محدود در پذیرش جنس مصالح متفاوت برای هر یک از اجزا، مدل قادر است جریان در محیطهای ناهمگن رانیز تحلیل نماید. این قابلیت این امکان را ایجاد می‌کند که جریان در محیطهایی که بخشی از آنها از قانون دارسی تبعیت می‌کند و در بخشی از آنها احتمال وقوع جریان غیر خطی می‌رود را نیز بتوان تحلیل کرد. این گونه جریانها ممکن است در سدهای حاکی دارای زهکشهای دودکشی و یادر سدهای سنگریزه‌ای با هسته رسی پیش آیند. در این صورت، برای محیطهایی که در آنها جریان دارسی به وقوع می‌پیوندد، مقدار a در معادله فورشهایمر برابر معکوس هدایت هیدرولیکی محیط و b عددی نزدیک به صفر انتخاب می‌شود.

۴- ناپایداری حل عددی در تحلیل جریان روگذر از روی هسته سدهای سنگریزه‌ای با هسته درونی در شرایطی که ریزش آزاد از روی سرریز مشاهده می‌شود به عدم هماهنگی معادلات حاکمه با این نوع جریان می‌تواند مربوط باشد. گرچه این ناپایداری با ریزتر کردن شبکه اجزای محدود نیز رفع نشد، استفاده از اجزای مرتبه بالاتر به منظور حل مشکل به تحقیقات بیشتری نیاز دارد.

- | | | |
|------------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1. constitutive equation | approach | 20. code verification |
| 2. velocity or bulk velocity | 11. variable mesh method | 21. model verification |
| 3. non-linear flow | 12. fixed mesh method | 22. in-built spillway |
| 4. Forchheimer equation | 13. Volker | 23. root mean square error |
| 5. free surface | 14. McCorquodale | 24. mean absolute error |
| 6. seepage face | 15. Greenly | 25. mean absolute relative error |
| 7. steady | 16. Joy | 26. Wilkins |
| 8. heterogeneous | 17. Kells | 27. Laughing Jack Marsh |
| 9. isotropic | 18. Li | |
| 10. classical free surface | 19. Desai | |

مراجع

- Hannoura, A., and Barends, F.b.J., "Non-Darcy Flow, A state of the art," *Proc. of Euromech, Delft, the Netherlands*, pp. 37-51, 1981.
 - Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Publishing Company, NY, 1972.
 - Joy, D.M., "Non-linear Flow in a Coarse Porous Media," *Proc. of the 1991 Ann. Conf. of CSCE*, Vol. 1, Vancouver, British Columbia, pp. 106-115, 1991.
 - Hassanizadeh, S.M., and Gray, W.G., "High Velocity Flow in Porous Media," *Transp. Porous Media*, Vol. 2, pp. 521-531, 1987.
 - Zissis, T., and Terzidiz, G., "Unsteady Non-Darcy Flow in Fractured Aquifers," in *Advances in Water Resources Technology*, G. Tsukiris (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 185-194, 1991.
 - Kells, J.A., "Spatially Varied Flow Over Rockfill Embankments," *Can. J. Civ. Engrg.*, Vol. 20, pp. 820-827, 1993.
 - Freeze, R.A., and Cherry, J.A., *Groundwater*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
 - Taylor, R.L., and Brown, C.B., "Darcy Flow Solution with a Free Surface," *J. of Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 93, HY2, 1967.
 - Finn, W.D.L., "Finite Element Analysis of Seepage through Dams," *J. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 93, SM6, 1967.
 - Neuman, S.P., "Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements," *J. of Hydraulics Division, ASCE*, HY12, 1973.
 - Bathe, K.J., and Khoshgoftaar, M.R., "Finite Element Free Surface Seepage Analysis Without Mesh Iteration," *Int. J. Num. and Analy. Meth. in Geomechanics*, Vol. 3, 1979.
 - Li, G.C., and Desai, C.S., "Stress and Seepage Analysis of Earth Dams," *J. of Geotech. Engrg. Division, ASCE*, Vol. 109, No. 7, 1983.
 - Volker, R.E., "Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements," *J. of Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 95, HY6, pp. 2093-2113, 1969.
 - McCorquodale, J.A., "Variational Approach to Non-Darcy Flow," *J. of Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 96, HY11, pp. 2265-2277, 1970.
 - Greenly, B.T., Joy, D.M., "One-Dimensional Finite-Element Model for High Flow Velocities in Porous Media," *J. of Geotech. Engrg, ASCE*, Vol. 122, No.10, PP. 789-796, 1997.
 - Istok, J., "Groundwater Modeling by the Finite Element Method," *American Geophysical Union: Water Resources Monograph 13*, 1989.
- ۱۷- صنعتی، الف، «تحلیل جریان غیر خطی آب از بدنه سدهای سنگریزه‌ای به روش اجزای محدود و در قالب شبکه ثابت، پایانه نامه کارشناسی ارشد»، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، تیر ۱۳۷۹.

18. Anderson, M.P., Ward, D.S., Lappala, E.G., and Prickett, T.A., "Computer Models for Subsurface Water," in *Handbook of Hydrology*, D.R. Maidment (ed.), Chapter 23, 1993.
19. Hosseini, S.M., "Variability of Hydraulic Parameters in Coarse Porous Media," Paper accepted by *International J. of Engrg. Sciences*, 2001.
20. Hosseini, S.M., "Calibration of Parameters for Non-linear Flow through Coarse Porous Media," Presented at the *International Conference on Reliability and Uncertainty in Groundwater Modeling, Zurich, Switzerland*, 1999.
21. Wilkins, J.K., "Flow of Water through Rockfill and its Application to the Design of Dams," *Proceeding of the 2nd Australia-New Zealand Soils Conf.*, PP. 141-149, 1956.
22. Parkin, A.K., Trollope, D.H., and Lawson, J.D., "Rockfill Structures Subject to Water Flow," *J. of Soil Mech. and Foundation Division, ASCE, Vol. 92, SM6*, pp. 133-151, 1966.
23. Parkin, A.K., *Through and Overflow Rockfill Dams*, Advances in Rockfill Structures, E. Maranha das Neves (ed.), Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, pp. 571-592, 1991.