

## ارائه روشی سریع در بهینه یابی سطح لغزش شیروانیهای خاکی به کمک الگوریتم ژنتیک

محمدحسین باقری پور\*، احسان شاسوندی\*\* و سید مرتضی مرندی\*

گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

مهندسین مشاوره ایمن سازان

(دریافت مقاله: ۸۳/۳/۴ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۸/۱۳)

**چکیده** - در این مقاله روشی دقیق، کارا، مطمئن و سریع برای بهینه یابی سطح لغزش شیروانیهای خاکی ارائه می‌شود. با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک (یا اختصاراً GA) که یکی از روشهای مدرن و غیر کلاسیک در بهینه‌یابی است و تلفیق آن با روش بیشاپ که از روشهای معروف و کاربردی است در تحلیل پایداری شیروانیهای خاکی و یافتن کمترین ضریب اطمینان، پایداری در آنها استفاده شده است. تحقیقات و بررسیها نشان داده است که انتخاب متغیرهای مناسب برای تعریف و حل مسئله با روش الگوریتم ژنتیک و همچنین تعیین محدوده مناسب برای این متغیرها نقش به‌سزایی در سرعت همگرایی به جواب بهینه داشته و لذا متغیرهای مسئله در این تحقیق به نحوی تعریف و در نظر گرفته شده‌اند که در مقایسه با روشهای دیگر و معروف بهینه یابی، کاهش میزان تکرارها تا نیل به همگرایی تا بیش از ۵۰٪ قابل مشاهده است که صرفه جویی قابل ملاحظه‌ای در زمان و حافظه کامپیوتر خواهد بود. دقت روش پیشنهادی فوق ابتدا با مثالهایی از بهینه یابی سطح لغزش شیروانی همگن، نا همگن و همچنین شیروانی سد خاکی و مقایسه نتایج با دیگر روشهای بهینه یابی نشان داده شده است. به‌عنوان کاربرد این روش در مسائل نوین مهندسی ژئو تکنیک، شیروانی تسلیح شده‌ای مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و سطح لغزش بحرانی شیروانی مسلح به روش الگوریتم ژنتیک بهینه سازی شده است.

**واژگان کلیدی:** بهینه یابی، شیروانیهای خاکی، سطح لغزش بحرانی دایره‌ای، الگوریتم ژنتیک.

# A Rapid Optimization Method for Slip Surface in Earth Slopes Using Genetic Algorithm

M. H. Bagheripour, E. Shasavandi, and S. M. Marandi

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman  
Imensazan, Building Safety Consulting Engineers

**Abstract:** This paper introduces an accurate, fast, and applicable method for optimization of slip surfaces in earth slopes. Using Genetic Algorithm (GA), which is one of the modern and non-classic optimization methods, in conjunction with the well-known Bishop applied method, the optimum slip surface in an earth slope is investigated and its corresponding lowest safety factor is determined. Investigations have shown that selection of appropriate variables to define and to solve the problem and determination of a good range for these variables have a profound effect on the speed of convergence in the problem. In the present study, appropriate variables have been defined for solving the problem in a way that the number of repetitions required to reach convergence are considerably reduced by up to 50% compared with other approaches. This has led to a drastic reduction in time and the memory required. The accuracy of the method is shown first by solving examples related to search for optimum failure surfaces of some homogenous, non-homogenous, and earth dam slopes and then by comparison of the results with those of other optimization techniques. In order to show the application of the present method in modern geotechnical engineering, a reinforced earth slope is studied and its failure surface is finally optimized.

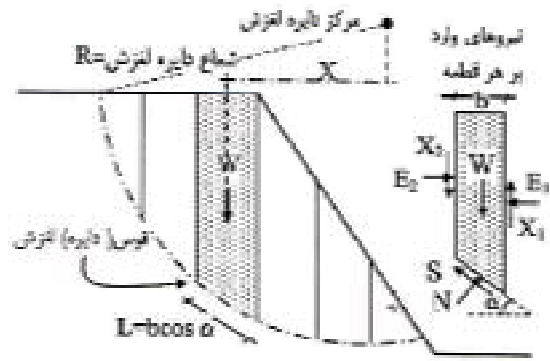
**Keywords:** Optimization, Critical slip surface, Earth slopes, Genetic algorithm.

## ۱- مقدمه

پیشینه تحلیل پایداری شیروانیها و تعیین محتملترین فرایند گسیختگی و یا به عبارتی کمترین ضریب اطمینان به بیش از ۷۰ سال قبل برمیگردد. بهینه سازی سطح لغزش، زیر مجموعه‌ای از مسائل بهینه سازی نامقید است. روشهای بهینه سازی نامقید را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم بندی کرد که عبارت‌اند از: الف) روشهای جستجوی مستقیم و ب) روشهای نزولی. روشهای جستجوی مستقیم برای مسائل ساده‌ای که دارای تعداد نسبتاً کمی متغیرند مناسب‌اند و عموماً کارایی این روشها کمتر از روشهای نزولی است. از جمله روشهای نزولی می‌توان به روشهای گرادیان مزدوج، متریک متغیر، بیشترین کاهش، و روش نیوتن اشاره کرد. آرای و تاگی‌یو [۱]، با استفاده از روش گرادیان مزدوج سطح لغزش بحرانی در شیروانیها را تعیین کرده‌اند. شن و سائو [۲] برای بهینه سازی سطح لغزش، روش متریک متغیر به کار برده‌اند. نگوین [۳] نیز از روش سیمپلکس برای یافتن سطح گسیختگی استفاده کرده است. در سالهای اخیر مالکاو و همکاران [۴] برای بهینه‌یابی سطح لغزش از روش مونت کارلو استفاده کرده‌اند. از مزایای مهم روش الگوریتم

ژنتیک (GA) نسبت به روشهای بهینه سازی فوق این است که احتمال درگیر شدن در بهینه محلی به شدت کاهش می‌یابد و با احتمال بیشتری نسبت به بسیاری از روشهای بهینه‌یابی می‌توان جواب بهینه سراسری را یافت. از مزایای دیگر این روش، مکانیزم آسان آن برای شبیه سازی مسئله برای استفاده از رایانه و توانایی تلفیق با سایر روشهای بهینه سازی است. مک کومی و ویلکینسون [۵] از روش الگوریتم ژنتیک برای بهینه سازی سطح لغزش شیروانیهای خاکی استفاده کرده‌اند. با وجود این در تحلیل خود شعاع دایره را به‌عنوان متغیر انتخابی در جمعیت نسل اول به کار برده‌اند که این انتخاب باعث کندی نسبی همگرایی و افزایش تعداد سعی و خطاها در مراحل اولیه الگوریتم شده است. علاوه بر این به‌علت اینکه انتخاب محدوده مناسب پارامترهای الگوریتم ژنتیک بر سرعت تحلیل انجام شده تاثیر به‌سزایی دارند، لذا یک تحلیل حساسیت برای انتخاب مناسب متغیرها نیز مورد لزوم است که در تحقیقات نامبردگان مورد چشمپوشی قرار گرفته است. نوبخت و کیلی [۶] نیز با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک و تعریف سطح لغزش غیر دایره‌ای به بهینه سازی

شده است، از روش بیشاب ساده شده و بر مبنای روش الگوریتم ژنتیک برای یافتن بحرانی ترین سطح لغزش و کمترین ضریب اطمینان بهره می‌جوید. در ادامه با حل چند مثال عددی مقادیر ضریب اطمینان به دست آمده از روش پیشنهادی به همراه تحلیل حساسیت با نتایج به دست آمده توسط سایر محققان مقایسه شده است. همچنین نشان داده می‌شود که نتایج به دست آمده از برنامه فوق دقت قابل قبول و سرعت همگرایی بالایی دارد. کاربرد روش پیشنهادی در مسائل نوین مهندسی ژئوتکنیک با تحلیل بهینه یابی لغزش شیروانیهای مسلح نشان داده شده است.



شکل ۱- سطح لغزش دایره‌ای آزمایشی در یک شیروانی در روش بیشاب

## ۲- روشهای کلاسیک و قطعی تحلیل پایداری شیب

### ۱-۲- روش بیشاب

در این تحقیق، برای محاسبه ضریب اطمینان سطوح لغزش فرضی، از روش بیشاب ساده شده استفاده شده است. فرمولبندی آشنای این روش برای محاسبه ضریب اطمینان بر مبنای قطعه بندی در توده لغزش در زیر خلاصه شده است:

$$F_s = \frac{\sum_{n=1}^{n=p} (C \cdot b_n + W_n \cdot \tan \phi)}{\sum_{n=1}^{n=p} W_n \cdot \sin \alpha_n} \frac{1}{m\alpha(n)} \quad (1)$$

$$m\alpha(n) = \cos \alpha_n + \frac{\tan \phi \cdot \sin \alpha_n}{F_s} \quad (2)$$

در معادلات (۱) و (۲)،  $C$  ضریب چسبندگی خاک،  $\phi$  زاویه اصطکاک داخلی خاک،  $W_n$  وزن هر قطعه،  $b_n$  عرض هر قطعه و  $\alpha_n$  زاویه بین قاعده هر قطعه با افق است، شکل (۱). صورتی مثبت است که شیب قاعده قطعه هم جهت با شیب شیروانی باشد در غیر این صورت این زاویه منفی است. روش بیشاب ساده شده، پر استفاده ترین روش برای تحلیل پایداری شیبهاست، که با دقت رضایتبخشی برای اغلب حالات عملی قابل حصول است

از مشکلات اساسی استفاده از بعضی روشهای کلی تعادل حدی و مخصوصا روشهای غیر دایره‌ای این است که مقبولیت این روشها وابسته به این است که کاربر بتواند قابلیت اعتماد و

سطح لغزش پرداخته است. در روش به کار رفته توسط آنها از انتخاب نخه گرا که باعث همگرایی صد در صد تابع هدف می‌شود استفاده نشده است. روش الگوریتم ژنتیک برای بهینه یابی سطح لغزش غیر دایره‌ای و سپس دایره‌ای توسط گاه [۷] و [۸] نیز مورد استفاده قرار گرفته است. با وجود این، روش غیر دایره‌ای دارای اشکالاتی بوده که در باره مزایای روش دایره‌ای نسبت به روش غیر دایره‌ای در بخشهای دیگر مقاله اشاره خواهد شد. روش دایره‌ای مورد استفاده توسط گاه [۸] نیز برغم مناسب بودن روش کلی، به علت انتخاب متغیرهای نامناسب قابلیت کاربرد محدود داشته و علاوه بر این جوابهای ارائه شده به علت عدم مقایسه با دیگر روشهای بهینه یابی به حد کافی قابل اطمینان نیستند.

در این مقاله روشی سریع، کارا، مطمئن و دقیق برای بهینه سازی سطح لغزش دایره‌ای شیروانیهای خاکی به کمک الگوریتم ژنتیک ارائه می‌شود. بررسی و تحقیقات نویسندگان نشان داده است که می‌توان با انتخاب مناسبتر متغیرهای انتخابی به الگوریتم ژنتیک شتاب بخشید. لذا در این تحقیق متغیرهای مرکز دایره و نقاط شروع سطح لغزش به عنوان متغیر جایگزین انتخاب شده است. انتخاب این متغیر مناسب باعث می‌شود که از تولید دواير لغزش اضافی که قاطع سطح شیروانی نیستند جلوگیری شده و در نتیجه به همگرایی سریعتر الگوریتم منجر شود.

برنامه GASLOPE که به زبان فترن در این تحقیق نوشته

مقبولیت ضرایب اطمینان محاسبه شده را اثبات کند و پیچیدگیهای اضافی این روشها مانع از آن می شود که بتوان آن را برای روشهای توسعه یافته تر که در آن جستجوی اتوماتیک برای سطح لغزش بحرانی صورت می گیرد، به کار برد. در مقابل روش ساده شده بیشاپ ضرایب اطمینان مورد لزوم را به سرعت و با دقت کافی محاسبه می کند. بایستی متذکر شد که در بدترین حالات مقادیر ضریب اطمینان روش دایره ای بیشاپ ساده شده حداکثر ۵٪ با جوابهای حاصل از روشهای دیگر تفاوت خواهد داشت. لذا روش اصلاح شده بیشاپ برای تحلیل مسائل عملی مهندسی قویا توصیه می شود [۹]. از طرفی مکانیزم ناپایداری در شیبهای خاکی مخصوصا خاکهای با چسبندگی بالا و یا چسبنده و با زاویه اصطکاک داخلی کم به صورت چرخش توده حول یک نقطه است و فرض این گونه مکانیزم ناپایداری سطح لغزش برای شیبهای خاکی به صورت دایره ای و یا قوسی از دایره به صورت گسترده ای در مهندسی سازه های خاکی به کار می رود و مشاهدات عینی نیز تطابق این فرض را با واقعیت نشان می دهد [۱۰]. لذا برای تحلیل ناپایداری شیبهای خاکی که دارای شکل دلخواه و ترکیب مصالح و لایه ای متنوع اند. به رغم روشهای متفاوتی که ابداع شده است اکثر محققان فرض سطح گسیختگی دایره ای را مبنا قرار می دهند [۱۱].

## ۲-۲- شيروانی تسليح شده

استفاده از خاک مسلح در طراحی شالوده ها و سازه های خاکی، روشی است که در سالهای اخیر متداول شده است. تسليح عبارت است از تقویت کردن خاک به وسیله عناصر کششی نظیر میلگرد، تسمه و یا ژئو تکستایل که در نهایت موجب افزایش مقاومت کششی و برشی خاک خواهند شد.

## ۲-۲-۱- تحلیل پایداری شيروانی تسليح شده

به طور کلی شيروانیهای مسلح شده با استفاده از روش

متداول تعادل قطعات و همانند شیبهای غیر مسلح تحلیل می شوند. سطح لغزش را می توان دایره ای و یا غیر دایره ای فرض کرد و با نوشتن معادلات بین نیروهای مقاوم و محرک پایداری شيروانی تسليح شده را بررسی و ضریب اطمینان را محاسبه کرد. در این حالت المانهای مسلح کننده که سطح لغزش را قطع می کنند باعث افزایش نیروهای مقاوم و در نتیجه فاکتور اطمینان پایداری شیب می شود.

مودهای گسیختگی شيروانی تسليح شده را می توان به سه دسته کلی تقسیم بندی کرد. (الف) داخلی (ب) خارجی (ج) ترکیبی. مود گسیختگی داخلی زمانی رخ می دهد که سطح گسیختگی المان تسليح کننده را قطع کند. مود گسیختگی خارجی به سطوح لغزشی اطلاق می شود که هیچ کدام از المانهای تسليح را قطع نکند. همچنین مود گسیختگی ترکیبی در حالتی اتفاق می افتد که سطح لغزش از پشت و از وسط المانهای تسليح عبور کند. یکی از مراحل طراحی مسلح کننده ها تعیین نیروی لازم در المان تسليح است که این نیرو را می توان به روش تعادل قطعات مانند روش بیشاپ محاسبه کرد. زمانی که سطح لغزش المان تسليح را قطع می کند آن گاه یک لنگر مقاوم به معادلات تعادل افزوده می شود، شکل (۲).

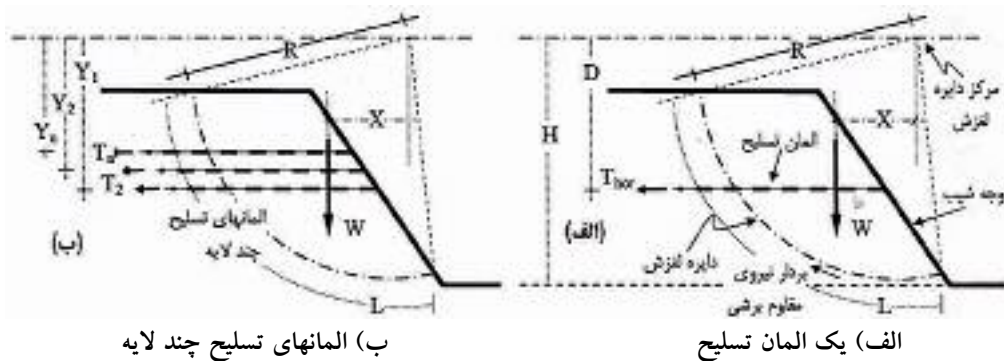
مطابق شکل (۲) ضریب اطمینان شيروانی مسلح از معادله زیر محاسبه می شود:

$$M_R = C \times L \times R \quad M_D = W \times X$$

$$FS = \frac{M_R + M_G}{M_D} = \frac{M_R + (T_{hor} \times D)}{M_D} \quad (3)$$

که در آن  $M_R$  ممان مقاوم،  $M_D$  ممان محرک و  $M_G$  ممان مقاوم المان تسليح است.  $C$  چسبندگی خاک،  $L$  طول سطح لغزش،  $R$  شعاع دایره و  $T_{hor}$ ، نیروی کششی در المان تسليح است. برای اطمینان از تغییر شکل المان تسليح صرف نظر می شود. مطابق شکل (۲) در صورتی که از چند المان مسلح در شيروانی استفاده شود، در این صورت ممان مقاوم المانهای مسلح از معادله زیر محاسبه می شود.

$$M_G = \sum_{i=1}^{i=n} T_i \times Y_i \quad (4)$$



شکل ۲- سطح لغزش دایره‌ای در یک شیروانی مسلح :

دانشجویانش در دانشگاه میشیگان ارائه شد. گلدبرگ [۱۳]، الگوریتم وراثتی هلند را با عنوان الگوریتم وراثتی ساده معرفی می‌کند. در الگوریتم وراثتی، مجموعه‌ای از متغیرهای طراحی توسط رشته‌هایی با طول ثابت یا متغیر، کدگذاری می‌کنند که در سیستم‌های بیولوژیکی آنها را کروموزوم یا فرد می‌نامند.

الگوریتم‌های وراثتی، جستجوی اصلی را در فضای پاسخ به اجرا می‌گذارند. این الگوریتم‌ها با تولید نسل آغاز می‌شوند که وظیفه ایجاد مجموعه‌ای از رشته‌ها (جمعیتی از پاسخهای بالقوه) به نام جمعیت اولیه را به عهده دارند و به طور انتخابی یا تصادفی تعیین می‌شوند. آن گاه افراد این جمعیت برای بقا و ایجاد پاسخهای جدید و بهتر با هم رقابت می‌کنند. برای ایجاد یک نسل از نسل قبل، ابتدا هر رشته رمزگشایی شده و مقادیر عددی پارامترهای مربوطه به دست می‌آیند.

با رمزگشایی رشته‌ها مقدار تابع هدف محاسبه شده، آن گاه با توجه به مقدار تابع هدف، یک عدد برازندگی به هر رشته نسبت داده می‌شود. سپس با به کار بردن عملگرهای وراثتی شامل انتخاب، پیوند، جهش، برگردانی تسلط و دیگر عملگرهای احتمالی، جمعیت جدید جایگزین جمعیت پیشین می‌شود و این چرخه ادامه می‌یابد. معمولاً جمعیت جدید برازندگی بیشتری دارد. این بدان معناست که از نسلی به نسل دیگر مشخصات جمعیت در بهینه سازی ضریب اطمینان سطوح لغزش بهبود می‌یابد. هنگامی جستجو نتیجه بخش خواهد بود که به بیشینه نسل مورد نظر رسیده باشیم، یا همگرایی حاصل شده باشد، و یا معیارهای توقف برآورده شده باشند.

که در آن  $T_i$  نیروی کششی در المان مسلح و  $Y_i$  فاصله هر المان از سطح لغزش است.

با توجه به فرض فوق و با عنایت به اینکه عموماً تسلیح لایه‌های خاک به صورت افقی اجرا می‌شود، می‌توان نیروی کششی مقاوم به وجود آمده در المانهای تسلیح را افقی فرض کرد و برابند نیروهای کششی را در راستای افق قرارداد در این وضعیت با توجه به مکانیزم چرخشی توده در همگام ناپایداری و فرض یک مرکز چرخش برای توده (در حقیقت مرکز دایره) می‌توان همانند شکل (۲) بازوی لنگرهای مقاوم اضافی ناشی از این نیروهای کششی (D) را محاسبه و در نتیجه خود لنگرها را نیز تعیین کرد. نهایتاً ذکر این نکته ضروری است که طول مهار هر کدام از لایه‌های تسلیح که خارج از سطح گسیختگی بحرانی واقع می‌شوند به اندازه کافی باشد تا نیروی مقاوم کافی در مقابل بیرون کشیدگی ایجاد کند.

مطالب فوق بخش موسوم به محاسبات قطعی از محاسبه ضریب اطمینان پایداری شیب مسلح خاکی را به طور خلاصه تشریح می‌کند. نکته قابل توجه اینکه در بحث بهینه یابی مسئله و الگوریتم ژنتیک معرفی شده در ابتدای مسئله تعداد زیادی دوایر تصادفی سطح لغزش (جمعیت اولیه) ایجاد می‌شود که ممکن است تعدادی از المانهای تسلیح عبور کرد و تعدادی نیز عبور نکرده باشند.

### ۳- خلاصه‌ای از روش الگوریتم ژنتیک

اصول اولیه الگوریتم ژنتیک توسط هلند [۱۲]، همکاران و

سازی را دارند.

د) در گیر بودن با خود تابع هدف و نه با مشتقات مرتبه بالاتر آن، به طوری که مقادیر تابع هدف مورد یک جستجوی موثر قرار می گیرند.

ذ) این الگوریتم دارای مکانیزم آسانی برای شبیه سازی مسئله برای استفاده از رایانه است.

این ویژگیها الگوریتمهای وراثتی را نسبت به دیگر روشهای جستجو، روش مناسبتری جلوه می دهند.

### ۳-۱- استفاده از روش الگوریتم ژنتیک در یافتن سطح

#### لغزش بحرانی دایره ای شیروانیها

در این مقاله از روش پیشاب و متد الگوریتم ژنتیک (GA) برای یافتن سطح لغزش بحرانی دایره ای شیروانیهای خاکی استفاده شده است. برخلاف روشهای معمول، مثال مرجع [۵]، برای حصول و تسریع دسترسی به جواب بهینه از متغیر شعاع دایره استفاده نشده است و به جای آن از متغیر مناسب مرکز دایره و نقطه شروع سطح لغزش معرفی شده اند. بدین منظور برنامه رایانه ای GASLOPE به زبان فرترن تهیه شده است. مراحل اجرای این برنامه به صورت مختصر به دنبال تشریح می شود.

در مرحله یک، هندسه شیروانی خاکی، سطح پیژومتریک آب، ضریب چسبندگی خاک (c)، زاویه اصطکاک داخلی خاک ( $\Phi$ ) و وزن مخصوص خاک ( $\gamma$ ) تعریف می شوند. برای ساده تر شدن محاسبات هندسه شیروانی باید طوری تعریف شود که در ناحیه اول مختصات قرار گیرد. سیستم آحاد ترجیحا سیستم SI است. در مرحله دوم، پارامترهای الگوریتم ژنتیک که شامل Pm (احتمال جهش)، Pc (احتمال پیوند)، Npop (تعداد جمعیت اولیه) و MaxGEN (ماکزیمم تعداد نسلها) هستند تعیین می شوند.

در سومین مرحله، ابتدا محدوده تغییرات مراکز سطوح لغزش ( $X_{min}, Y_{min} - X_{max}, Y_{max}$ ) مشخص می شوند، سپس این محدوده ها به  $2^{Lx}$  و  $2^{Ly}$  نقطه با فواصل مساوی، به ترتیب در راستای X, Y تقسیم می شوند. در مرحله چهارم،



شکل ۳- نمودار جریان الگوریتم ژنتیک

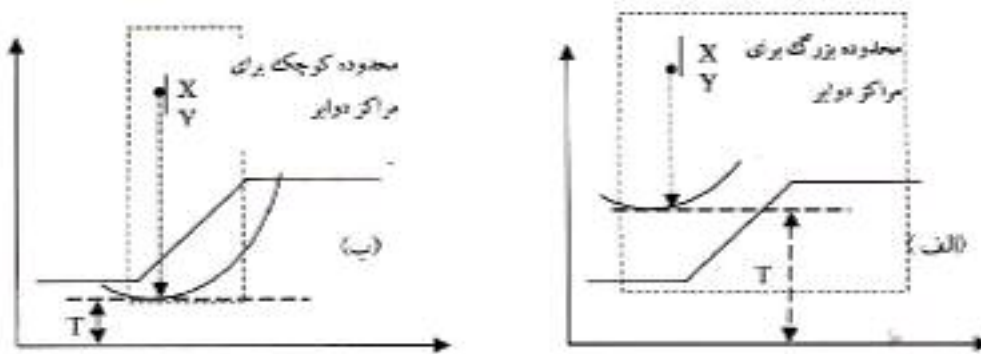
شکل (۳) عملکرد الگوریتم ژنتیک را به صورت یک نمودار جریانی نشان می دهد. در این شکل Pm احتمال جهش، Pc احتمال پیوند، Npop تعداد جمعیت اولیه و MaxGEN ماکزیمم تعداد نسلها هستند.

با توجه به مطالب فوق ویژگیهای مهم الگوریتمهای وراثتی به شرح زیر خلاصه می شود:

الف) استفاده از متغیرهای کد بندی شده به جای متغیرهای اصلی که این ویژگی مناسب متغیرهای گسسته است.

ب) جستجوی متقارب چند نقطه (به جای یک نقطه ای در روشهای دیگر) که احتمال درگیر شدن در بهینه محلی به شدت کاهش می یابد و از طرف دیگر احتمال دستیابی به بهینه کلی افزایش خواهد یافت.

ج) الگوریتمهای وراثتی توانایی تلفیق با دیگر روشهای بهینه



شکل ۴- مدل ارائه شده توسط A.Goh [8] جهت شیب خاکی و همچنین تعریف متغیر تصادفی اولیه

افقی که به فاصله تصادفی  $T$  از کف مدل قرار گرفته است به عنوان دایره قاطع شیب تلقی شده و به عنوان سطح لغزش دایره‌ای بالقوه تلقی و عضوی از جمعیت اولیه در نسل اول از الگوریتم را تشکیل خواهد داد. شکل (۴-الف) به خوبی یکی از دایره‌ها را نشان می‌دهد که شرط مماس بودن بر خط افقی به فاصله تصادفی  $T$  از کف مدل را دارد اما قاطع سطح شیب نیست!! مگر اینکه برای فرار از این معضل محدوده تغییرات مراکز دایره را محدود ساخت و این محدوده را به محلی هر چه نزدیکتر به وجه مایل شیب تعریف کرد شکل (۴-ب) در حالی که به علت مکانیزم چرخشی توده خاک در آستانه ناپایداری بسیاری از دایره لغزش بالقوه و بحرانی ممکن است دارای مراکز در فواصل نسبتاً قابل توجه از وجه مایل شیب باشند [۹ و ۱۰]. مدل نامبرده فقط می‌تواند این مراکز را در محدوده‌ای بسیار کوچکتر که در حقیقت تصویر وجه مایل شیب بر روی افق است بپذیرد. تحقیقات حاضر نشان داده است که تعیین نقطه شروع سطح لغزش بر روی شیب خاکی بهترین گزینه و جایگزین برای تعریف متغیر لازم است که در این تحقیق با تاکید مورد توجه قرار گرفته است.

برنامه GASLOPE با توجه به هندسه شیروانی مقادیر  $Y_r$  متناظر با  $X_r$  نقاط را محاسبه می‌کند، شکل (۵). تعیین محدوده مرکز دایره لغزش یک محدود انتخابی است که می‌تواند بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک انتخاب شود به بیان دیگر مقادیر  $X_{min}$  و  $X_{max}$  و همچنین  $Y_{min}$  و  $Y_{max}$  می‌توانند بازه (سطح) بسیار بزرگ

محدوده تغییرات نقاط شروع سطح لغزش ( $X_r \min, X_r \max$ ) بر روی سطح شیروانی تعریف می‌شود. اگر مانند محققان دیگر همچون مک کومبی و ویلکینسون [۵]، به جای تعریف نقاط شروع سطح لغزش روی سطح شیروانی از تغییرات شعاع دایره استفاده شود، در این صورت تعداد زیادی از سطوح دایره‌ای که به طور تصادفی انتخاب شده اند، شیروانی را قطع نمی‌کنند. لذا با روش حاضر می‌توان گفت که تمامی سطوح لغزش جمعیت نسل اول با احتمال صد درصد سطح شیروانی را قطع می‌کنند

این مسئله در حقیقت یکی از مزایای مهم روش برگرفته در این مقاله نسبت به روشهای معمول است. در واقع در سالهای اخیر گاه [۸] با هدفی مشابه (عدم استفاده از شعاع دایره به صورت مستقیم) تلاشی را برای بهبود الگوریتم ژنتیک برای حل این مسئله آغاز کرده است. متأسفانه نامبرده به علت استفاده از یک پارامتر واسط ( $T$ ) که اصطلاحاً فاصله مرکز دایره تا خطی افقی و مماس در پائین دایره لغزش است مدلی را ارائه کرده است که ناخواسته محدودیتها و نواقص زیادی را به روش ایشان تحمیل کرده است. مطابق شکل (۴) و به اذعان نامبرده اگر تغییرات پارامتر  $T$  در محدوده بین کف تابالای شیب تعریف شود، در آن صورت تمامی دایره تصادفی ایجاد شده قاطع شیب خواهند بود و دایره اضافی به وجود نیامده و نیازی به کنترل اینکه دایره تصادفی ایجاد شده قاطع سطح شیب‌اند، ندارد. به عبارت دیگر هر دایره‌ای که مماس بر خط





### جدول ۱- رمزگشایی رشته‌های دودویی سه بیتی به مقادیر متغیرهای طراحی

مقادیر رمزگشایی شده زیر رشته	زیر رشته دودویی	نقاط شروع سطح لغزش	مختصات لایه‌ها دایره	مختصات مرکز دایره
۰	۰۰۰	۱	۱۰	۴
۱	۰۰۱	۲	۱۱	۹
۲	۰۱۰	۳	۱۲	۱۰
۳	۰۱۱	۴	۱۳	۱۱
۴	۱۰۰	۵	۱۴	۱۲
۵	۱۰۱	۶	۱۵	۱۳
۶	۱۱۰	۷	۱۶	۱۴
۷	۱۱۱	۸	۱۷	۱۵

### ۳-۳- بررسی کیفیت و برازندگی رشته‌ها

تابع برازندگی دارای اهمیت خاصی در الگوریتم ژنتیک است انتخاب نوع تابع برازندگی بایستی با دقت و با توجه به مسئله مورد بررسی در حقیقت تابع هدف صورت پذیرد تابع برازندگی هر رشته جواب را با یک مقدار عددی ارزیابی می‌کند که هر چه کیفیت رشته جواب بهتر باشد مقدار تابع برازندگی بیشتر خواهد بود و احتمال مشارکت رشته جواب برای تولید رشته جوابهای بعدی (نسل بعد از دیدگاه الگوریتم ژنتیک) بیشتر خواهد بود.

تابع برازندگی معمولاً با تبدیلی مناسب بر روی تابع هدف به دست می‌آید و ضرورتاً مقادیر مثبت‌اند و همچنین نوع تابع تبدیل نیز طوری انتخاب شود که دقت اعداد در طی سیکلهای مختلف از بین نرفته‌اند و گاهی از پرسه زدن جواب جلوگیری شود. چنانچه در تحلیل پایداری شیروانیها هدف بیشترین مقدار ضریب اطمینان باشد در آن صورت تابع برازندگی می‌تواند به صورت مستقیم با تابع هدف مرتبط شود به طوری که افزایش در مقدار هدف (درحقیقت نزدیک شدن به جواب نهایی) به رشته‌های با کیفیت بالاتر و عدد برازندگی بیشتر متناظر می‌شود. اما به هر حال در مسئله حاضر که در آن هدف نهایی یافتن کمترین ضریب اطمینان پایداری شیب است تابع برازندگی به‌طور معکوس با ضریب اطمینان مورد جستجو در ارتباط است لذا بایستی تابعی تعریف شود که هرچه ضریب اطمینان کمتر شود تابع برازندگی افزایش یابد. تبدیلهای مختلفی می‌تواند

دودویی سه بیتی به مقادیر صحیح بدون علامت رمزگشایی می‌شوند و مقدار متغیر طراحی با توجه به مقادیر صحیح به دست می‌آیند. با توجه به اینکه مقادیر  $Lx, Ly, Lxr$  مساوی ۳ تعریف شده‌اند، بنابراین هرکدام از متغیرها را می‌توان بایک کد باینری ۳ بیتی نمایش داد. بنابراین مطابق معادله (۶) هر رشته  $St$  که نمایانگر یک سطح لغزش دایره‌ای است از ۹ بیت تشکیل می‌شود.

$$St = \frac{X}{010} \frac{Y}{001} \frac{Xr}{100} \quad (7)$$

می‌توان دید که در رشته  $St$ ، ۳ بیت اول نمایانگر  $X$ ، ۳ بیت دوم نمایانگر  $Y$  و ۳ بیت سوم نمایانگر  $Xr$  نقطه شروع سطح لغزش است. مطابق جدول (۱)، مقادیر  $X, Y$  مرکز دایره به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۱ هستند. مقدار  $Xr$  نیز برابر ۵ است. با توجه به سطح شیروانی مقدار  $Yr$  متناظر با این نقطه ۹ است که این مقدار را برنامه حساب می‌کند. طول شعاع دایره از معادله (۸) محاسبه می‌شود.

$$R = \sqrt{(Xr - X)^2 + (Yr - Y)^2} \quad (8)$$

سطح لغزش دایره‌ای متناظر با رشته  $St$  در شکل (۵) نشان داده شده است که مقدار شعاع دایره مطابق معادله (۸) مساوی ۵/۳۸ می‌شود. در ششمین مرحله، مقدار تابع هدف که همان محاسبه ضریب اطمینان به روش بیشاب است تعیین می‌شود. از آنجا که  $Npop$  رشته وجود دارد و هر رشته نمایانگر یک سطح لغزش دایره‌ای است در هر نسل به تعداد  $Npop$  ضریب اطمینان محاسبه می‌شود.

در این مرحله مورد توجه قرار گیرد که از آن جمله در مرجع [۸]:

$$g_{(i)} = \frac{1}{F_{s(i)}} \quad \text{or} \quad h_{(i)} = \frac{1}{(F_{s(i)})^2} \quad (9)$$

آمده است. در معادلات فوق  $F_{s(i)}$  ضریب اطمینان محاسبه شده، در سیکل  $i$  ام و  $g_{(i)}$  و  $h_{(i)}$  توابع برازندگی اند. معادله  $h_{(i)}$  در حقیقت توسط عده‌ای از محققان [۸] در بررسی الگوریتم ژنتیک و جستجوی ضریب اطمینان پایداری شبیها به کار رفته است اما نقص عمده انتخاب چنین توابعی را می‌توان در فرایند گرد شدن اعداد و معرفی تعداد محدود ارقام اعشاری برای ضریب اطمینان مشاهده کرد. مقادیر ضریب اطمینان به عنوان مقادیر نهایی برای مقایسه پیشرفت الگوریتم با تعداد محدود ارقام اعشاری در نظر گرفته می‌شوند. در حالی که برای مقادیر نظیر توابع برازندگی محدودیت ارقام اعشاری ممکن است تعریف و دیکته نشود. برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه می‌شود:

اگر در مرحله (سیکل  $i$  ام) مقدار ضریب اطمینان یکی از سطوح لغزش  $F_{si}=1.204$  به دست آمده باشد در آن صورت بر اساس معادلات (۹) داریم:

$$g_{(i)} = \frac{1}{1.204} = 0.83056 = 0.831 \quad \text{and} \quad (10)$$

$$h_{(i)} = \frac{1}{(1.204)^2} = 0.68983 = 0.690$$

در صورتی که پس از سیکل  $i$  ام پس از اعمال عملگرهای ترکیبی ژنتیک (عملگرهای پیوند جهش) مقدار ضریب اطمینان تغییر نیابد در این صورت در طی مراحل لازم معکوس شدن  $g_{(i)}$  داریم

$$F_{s(i)} = \frac{1}{g_{(i)}} = \frac{1}{0.831} = 1.203 \quad (11)$$

در مورد مثال بالا می‌توان مشاهده کرد که علی‌رغم تغییر نیافتن ظاهری ضریب اطمینان، مشاهده می‌شود که مقادیر  $F_{si}$  تغییر کرده‌اند و این حالت بعضاً به پرسه زدن جواب موسوم می‌شود. برای جلوگیری از دست رفتن دقت اعداد و پرسه زدن جواب در این تحقیق تمامی ضریب اطمینانهای محاسبه شده که مقدار عددی آن بالای ۱۰۰ هستند را مساوی با یکصد (۱۰۰) قرار

داده سپس تابع برازندگی از کم کردن یک عدد ثابت بزرگ از تابع هدف اصلاح شده طبق معادله زیر به دست می‌آید:

$$g_{(i)} = C_{\max} - F_{s(i)} \quad (12)$$

در این تحقیق مقدار ثابت  $C_{\max}$  مساوی ۱۰۰ است. دقت اعشاری برای مقدار ثابت  $C_{\max}$  و همچنین  $F_{si}$  یکسان تعریف شده و لذا برای مثال فوق و با تابع تعریف شده در معادله (۱۲):

$$g_{(i)} = 100.000 - 1.204 \quad , \quad (13)$$

$$g_{(i)} = 100.000 - F_{s(i)} = 98.796$$

و سپس با استخراج مجدد ضریب اطمینان در برگشت و ادامه پروسه الگوریتم ژنتیک داریم:

$$F_{s(i)} = C_{\max} - g_{(i)} \rightarrow F_{s(i)} \quad (14)$$

$$= 100.000 - 98.796 = 1.204$$

و مشاهده می‌شود که عدد ضریب اطمینان تغییر نیافته است و بر خلاف تابع به کار رفته توسط دیگر محققان، مثال [۸]، در طی روند رفت و برگشت در الگوریتم ژنتیک دقت اعداد از بین نرفته و ضمن کاهش خطا، از پرسه زدن جواب پرهیز و در نهایت حجم عملیات کاهش می‌یابد. لذا در این تحقیق تابع برازندگی انتخاب شده مؤثرتر از دیگر توابع ممکن عمل می‌کند.

در مرحله هفتم، شرایط توقف برنامه کنترل می‌شود. در برنامه، زمانی که در ۱۰ نسل متوالی ضریب اطمینان تغییر نیابد، برنامه متوقف می‌شود. در مرحله هشت، به رتبه بندی افراد جمعیت پرداخته می‌شود. ابتدا یک تابع برازندگی نسبی به صورت زیر تعریف کرده:

$$Fi' = (Ri - Npop)^2 \quad (15)$$

در این رابطه،  $Npop$  تعداد جمعیت اولیه،  $Ri$  مرتبه هر رشته و  $Fi'$  تابع برازندگی نسبی است. رتبه بندی رشته‌ها به ترتیب برازندگی واقعی آنها انجام می‌پذیرد، به طوری که برای رشته دارای بیشترین مقدار برازندگی،  $Ri=1$  می‌شود. آن‌گاه از روش انتخاب متناسب برای انتخاب رشته‌ها استفاده می‌شود. هر فرد با برازندگی  $Fi'$  به طور متوسط  $Fi'/f$  نفر از افراد نسل بعد را به خود تخصیص می‌دهد ( $f$  میانگین برازندگی افراد جمعیت است). در مرحله نهم،

جدول ۲- نمایش چگونگی عملگرهای مختلف پیوند در الگوریتم ژنتیک

محل (k)	رشته ۳۲ بیتی (کروموزوم دارای ۳۲ ژن)	نوع عملگر
K=5	10000000000010100001010110000000	رشته والدین ۱
	110111111011101100101100000000	رشته والدین ۲
	10000111110111011100101100000000	رشته فرزند ۱
	11011000000010100001010110000000	رشته فرزند ۲
K1=5, K2=25	10000000100101000010101100111100	رشته والدین ۱
	11011101110111111100101101000000	رشته والدین ۲
	10000101110111111100101100111100	رشته فرزند ۱
	11011000100101000010101101000000	رشته فرزند ۲
	10000000100101000010101100111100	رشته والدین ۱
	0010000000010000000001011010110110	مبدل (Mask)
	11011101110111111100101101000000	رشته والدین ۲
	11011101110111111100101101110100	رشته فرزند ۱
	10000000100101000010101100001000	رشته فرزند ۲

به طول ۳۲ نشان داده شده‌اند عدد  $k$  اختیاریاً ۵ در نظر گرفته شده است و این بدان معناست که ژنها (بیتها) بین بیت ۶ و ۳۲ در سمت راست پنجمین بیت جابه جا خواهند شد. رشته‌های (کروموزومها) نتیجه شده در موقعیت مربوط به ۲ فرزند (رشته جدید) هستند و همان طور که در جدول فوق دیده می‌شود بقیه ژنهای (بیتها) جابه‌جا شده باعلامت پررنگ مشخص شده‌اند از آنجایی که عملگر پیوند به طریق احتمالات درپیشرفت فرایند الگوریتم ژنتیک کمک می‌کند لذا جابجایی ژنها (بیتها) بین دو والدین ممکن است به تولید رشته (فرزند) با کیفیت بهتر بیانجامد و این در حقیقت به معنی تولید جوابهای (عضوها) جدید و نزدیکتر به جواب بهینه‌اند.

عمل پیوند در الگوریتم همیشه روی دو رشته انتخابی انجام نمی‌شود بلکه در حقیقت با احتمالی کمتر یا مساوی یک صورت می‌پذیرد این خصوصیت باعث می‌شود که برخی رشته‌ها بخت انتقال بدون تغییر به نسل بعدی را داشته باشند. یک تعمیم بدیهی از روش پیوند تک نقطه‌ای افزایش تعداد نقاط برش در رشته‌ها و جابه‌جا کردن یک در میان زیررشته‌های حاصل بین والدین است. این تعمیم پیوند چند نقطه‌ای نامیده می‌شود.

در نهایت پیوند یکنواخت تعمیمی دیگر است که در آن به جای زیررشته‌های دو رشته، بیتهای آنها در مقایسه با مبدل

تعدادی از افراد نخبه (سطح لغزش دارای کمترین ضریب اطمینان) هر نسل به نسل بعد منتقل می‌شوند و بقیه جمعیت به کمک عملگرهای وراثتی نظیر انتخاب، پیوند و جهش تولید می‌شوند. این عمل انتخاب نخبه گرا نامیده می‌شود. ویژگی مهم انتخاب نخبه گرا این است که با استفاده از آن، الگوریتم وراثتی با احتمال صد در صد به بهینه کلی تابع هدف همگرا می‌شود. در دهمین مرحله،  $PC$  درصد از رشته‌های جمعیت به طور تصادفی انتخاب شده و تحت عمل پیوند قرار می‌گیرند.

### ۳-۴- عملگر پیوند در الگوریتم ژنتیک

پیوند بر روی رشته‌ها (رشته=کروموزوم) به صورتهای مختلفی در الگوریتم ژنتیک صورت می‌پذیرد. به عنوان مثال در پیوند موسوم به یک نقطه‌ای دو رشته (دوکروموزوم) مربوط به والدین همان طور که در جدول (۲) دیده می‌شود از یک نقطه معین بریده می‌شوند و به دو بخش چپ و راست تقسیم می‌شوند. محل پیوند (یا همان محل قطع رشته) به طور تصادفی در طول رشته بین یک و عددی معادل یک واحد کمتر از طول رشته ( $l_0-1$ ) انتخاب و این محل با عدد تصادفی  $k$  نشان داده می‌شود. مبادله بیت‌ها (ژنها) بین موقعیت  $l_0+1$  و دو رشته جدید را به وجود می‌آید. در مثال جدول (۲) که رشته والدین

پیوند و یا اصطلاحاً ماسک جابه‌جا می‌شوند. به‌عنوان مثال در جدول (۲) بر روی همان رشته ۳۲ بیتی این پیوند نشان داده شده است. اگر بیت مبدل پیوند صفر باشد بیت نظیر آن از والدین ۱ به فرزند اول منتقل شده و اگر بیت مبدل پیوند یک باشد بیت نظیر والدین ۲ به فرزند اول منتقل می‌شود فرایند فوق با جابه‌جایی رشته مربوط به والدین برای تولید رشته‌های جدید (فرزندان) تکرار می‌شود.

از آنجایی که پایه و اساس الگوریتم ژنتیک از طبیعت جاندار اقتباس شده است لذا عملگرهایی که در این سیستم استفاده می‌شوند هر چقدر نشان‌دهنده شرایط طبیعت جاندار باشند نتایج بهتر و دقیقتر از الگوریتم ارائه خواهد شد. در همین طبیعت جاندار، علاوه بر اینکه فرزندان خصوصیات و ژنهای پدر و مادر را به ارث می‌برند بلکه بعضاً خصوصیات سایر نسلها نیز در فرزندان ظهور می‌کند این مسئله در الگوریتم ژنتیک نیز بایستی در نظر گرفته شود به طوری که در عملگر یک نقطه‌ای و یا چند نقطه‌ای رشته‌های جدید (فرزندان) خصوصیات خود را با درصدهای متفاوت از والدین (رشته‌های اولیه) به ارث می‌برند و این مسئله در عملگر پیوند یک یا چند نقطه‌ای دیده نمی‌شود لذا این مسئله کاستی بزرگی به حساب می‌آید لذا در این تحقیق از عملگر پیوند یکنواخت استفاده شده است و با توجه به مبدل پیوند انتخاب شده رشته‌های مربوط به فرزندان دارای خصوصیات منتقل شده نه تنها از والدین بلکه از والدین نسلهای قبلی نیز خواهند بود.

در ادامه رشته‌هایی تحت عمل پیوند قرار نگرفته‌اند و فرزندان تولید شده از رشته‌هایی که تحت عمل پیوند قرار گرفته‌اند تحت عمل جهش قرار می‌گیرند. عملگر جهش در عملکرد الگوریتم‌های وراثتی نقش فرعی بازی می‌کند. اگرچه عملگرهای انتخاب و پیوند نقش موثری در الگوریتم داشته ولی گاهی باعث از بین رفتن خصوصیات مفید رشته‌های وراثتی می‌شوند. در این صورت وجود عملگر جهش برای جلوگیری از دست رفتن اطلاعات سودمند لازم است. لذا در مرحله یازدهم، Pm درصد از کل بیتها تحت عمل جهش قرار می‌گیرند. عملگر

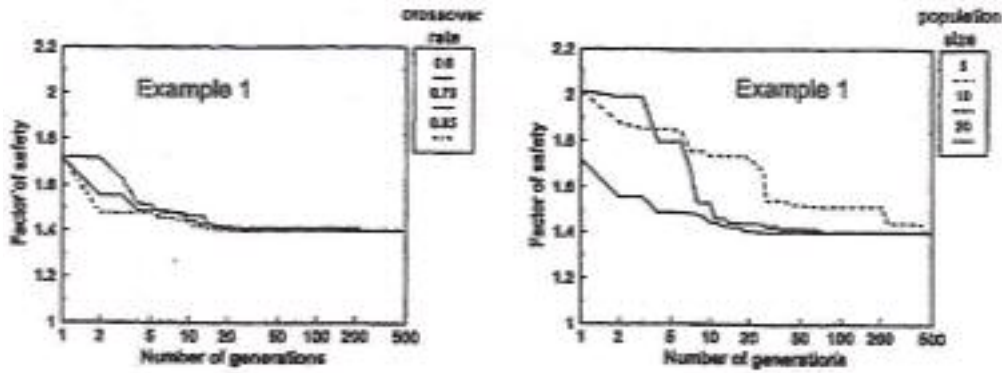
جهش نیز مانند پیوند عملگری تصادفی است. ابتدا محلی از رشته (k) بین یک و طول رشته (Lc) به طور تصادفی انتخاب می‌شود و k امین بیت رشته دودویی از ۰ به ۱ و یا برعکس، تبدیل می‌شود. به‌عنوان مثال اگر احتمال جهش ۰/۰۱ باشد ( $Pm=0/01$ ) و تعداد کل بیتها ۴۰۰ (حاصل ۵۰ رشته ۸ بیتی) باشد در این صورت  $4=400 \times 0/01$  بیت تحت عمل جهش قرار می‌گیرند.

#### ۴- بررسی و تایید اعتبار روش پیشنهادی بهینه یابی سطح لغزش شیروانیها

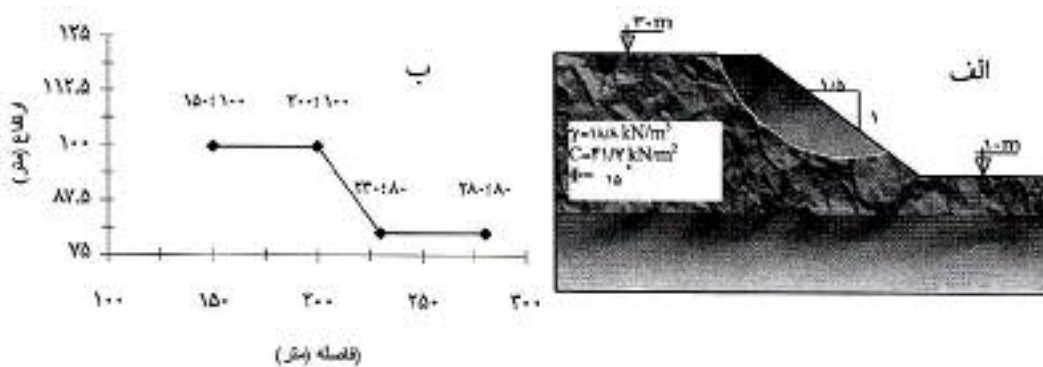
اهمیت مسیر انتخابی در تحقیق حاضر را می‌توان به شرح ذیل خلاصه کرد: الف- با توجه به عملکرد شیبهها در هنگام ناپایداری و مکانیزم غالب چرخشی برای توده خاک روش تحلیل بیشاپ به‌عنوان روش دقیقتر تحلیل پایداری بروش قطعی انتخاب می‌شود و ب- انتخاب روش GA روش مناسب و پیشرفته در تحلیل بهینه یابی شیروانیهای خاکی و ج- انتخاب متغیرهای مناسب برای گریز از محاسبات اضافی در روش GA و د- انتخاب محدوده مناسب برای متغیرهای انتخابی از طریق تحلیل حساسیت و ه- مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج روشهای دیگر بهینه یابی و تایید اعتبار آنها.

#### ۴-۱- تحلیل حساسیت در روش حاضر

از آنجا که پارامترهای الگوریتم ژنتیک بر تحلیل پایداری شیروانیها تاثیر می‌گذارند، لذا بایستی ابتدا مقادیر مناسب پارامترهای GA را به‌دست آورد. برای تعیین این مقادیر لازم است که تحلیل حساسیت (تحلیل پارامتری) انجام شود. در روش تحلیل حساسیت، پس از تعیین محدوده تغییرات پارامترهای GA، هر بار یک پارامتر را به عنوان متغیر و دو پارامتر دیگر ثابت فرض می‌شوند. با داشتن مقادیر مناسب این پارامترها می‌توان در تحلیلهای جدید، بدون تحلیل حساسیت و با انتخاب مناسب این پارامترها به تحلیل مسئله اقدام کرد. محدوده اولیه تغییرات هر یک از پارامترهای الگوریتم ژنتیک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:



شکل ۶- نمودارهای مربوط به تحلیل حساسیت انجام شده در مرجع [8]



شکل ۷- الف) مشخصات مصالح و هندسه شیروانی در مثال ۱ و ب) مدل مختصاتی تعریف شده در GASLOPE

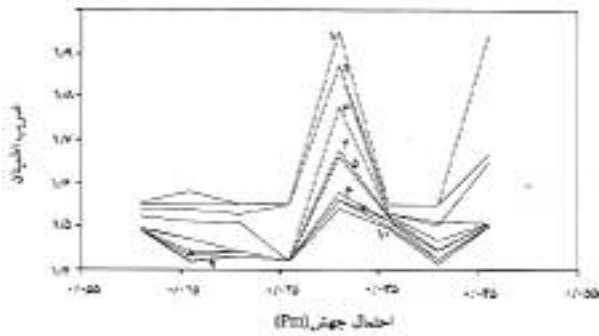
کلی روند الگوریتم را بدنبال داشته است. این مسئله به وضوح در شکل (۶) نمایش داده شده است [۸]. در تحقیق حاضر بر خلاف روش طولانی فوق، تحلیل حساسیت با روند بسیار سریعتر به انجام رسیده و نتایج دلخواه از آن حاصل شده است. به طوری که در مثالهای آتی نشان داده خواهد شد تشخیص محدوده مناسب تغییرات برای پارامترهای الگوریتم ژنتیک فقط در ۱۰ تکرار (۱۰ نسل متوالی) صورت پذیرفته است که بهبود قابل ملاحظه‌ای در کاهش حجم محاسبات و روند تسریع همگرایی کلی خواهد داشت.

### مثال ۱

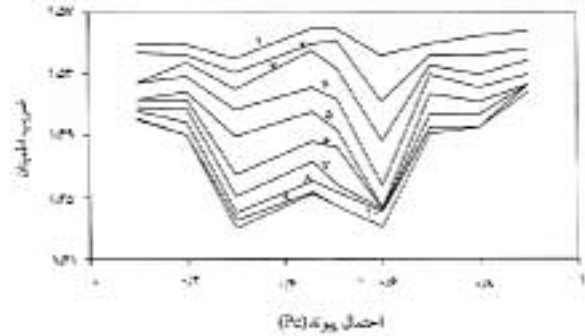
در این مثال یک شیروانی خاکی همگن با شیب ۱/۱٫۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات هندسه و مصالح شیروانی و مدل مختصاتی در شکل (۷-الف و ب) نشان داده شده است. ابتدا تحلیل حساسیت برای تغییرات محدوده احتمال پیوند از

- احتمال پیوند از  $P_c = 0.1$  تا  $P_c = 0.9$  با گام ۰/۱
- احتمال جهش از  $P_m = 0.001$  تا  $P_m = 0.046$  با گام ۰/۰۰۵
- تعداد جمعیت اولیه از  $N_{pop} = 5$  تا  $N_{pop} = 50$  با گام ۵ تایی
- تغییرات تعداد نسلاها از  $MAXGen = 1$  تا  $MAXGen = 35$  با گام یک

از آنجایی که تحلیل حساسیت خود به منزله انجام مکرر و پی در پی محاسبات مربوطه است و نتایج آن برای هر گروه از مسائل عملی مشابه در جهت تسریع محاسبات بعدی به کار می‌رود لذا تطویل انجام این تحلیلها نیز به منزله بخشی از کل محاسبات می‌تواند نقیصه‌ای کلی به حساب آید. و بالعکس تسریع انجام آن نیز به منزله تسریع روند کلیه محاسبات خواهد بود. در این زمینه گاه [۸] تحلیل بهینه یابی سطح لغزش شیروانیها را با استفاده از انجام تحلیل حساسیت به انجام رسانیده اما متاسفانه این تحلیل حساسیت با تعداد تکرار محاسبات بسار زیاد (در حد ۵۰۰ تکرار= ۵۰۰ نسل در مقوله ژنتیک) به انجام رسانیده که تطویل



شکل ۹- تغییرات ضریب اطمینان در برابر احتمال جهش برای ۱۰ بار اجرای برنامه (مثال ۱)

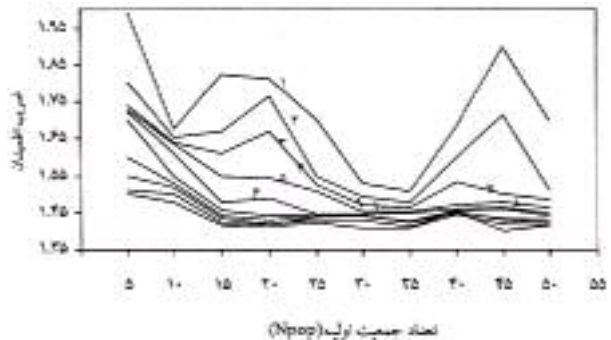


شکل ۸- تغییرات ضریب اطمینان در برابر احتمال پیوند برای ۱۰ بار اجرای برنامه (مثال ۱)

مثبت اعضای جمعیت (در اینجا دایره لغزش فرضی مطلوب) را بالا می‌برد لذا محدوده مناسب احتمالهای جهش بین ۰/۰۱ تا ۰/۰۲۵ انتخاب می‌شود.

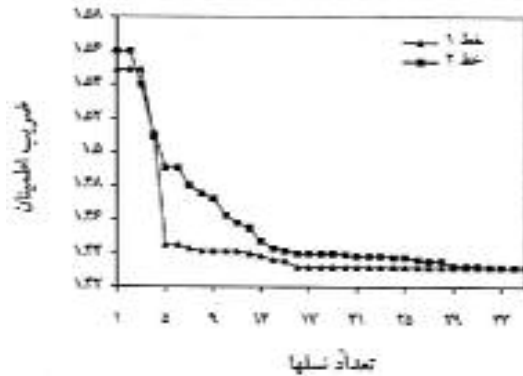
نتایج تحلیل حساسیت برای انتخاب بهترین مقادیر جمعیت اولیه در شکل (۱۰) نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که کمترین مقادیر ضرائب اطمینان با نوسان کمتر در محدوده ۲۰ الی ۴۰ است. برای مقادیر جمعیت کمتر از ۲۰ ضرائب اطمینان اولیه سطح لغزش افزایش یافته و از طرفی با افزایش جمعیت اولیه بیشتر از ۴۰ نیز زمان محاسباتی افزایش چشمگیری می‌یابد بنابراین با توجه به موارد فوق محدوده ۲۰ الی ۴۰ به عنوان محدوده انتخابی جمعیت اولیه معرفی می‌شود. شایان ذکر است که در تمامی در شکلهای (۸) الی (۱۰) شماره منحنیها در حقیقت بیانگر تعداد تکرار و یا به عبارتی تعداد نسلهای ایجاد شده برای سطوح لغزش است. با توجه به این تحلیلهای سه گانه حساسیت انجام گرفته در شکلهای (۸) تا (۱۰) می‌توان مقادیر مناسب  $Pc=0/55$ ،  $Pm=0/02$  و  $Npop=25$  را انتخاب کرد. در ادامه حل مثال حاضر و با در نظر گرفتن مقادیر فوق تغییرات ضریب اطمینان سطح لغزش مثال فوق در برابر تعداد نسلهها محاسبه و در شکل (۱۱) ارائه شده است.

برای نشان دادن تاثیر روش به کار رفته برای شتابدهی و تسریع همگرایی در این تحقیق، در همین شکل تغییرات ضریب اطمینان سطح لغزش با روشهای معمول GA نیز نشان داده شده است. به طوری که در شکل (۱۱) منحنی (۱) مربوط به تحلیل

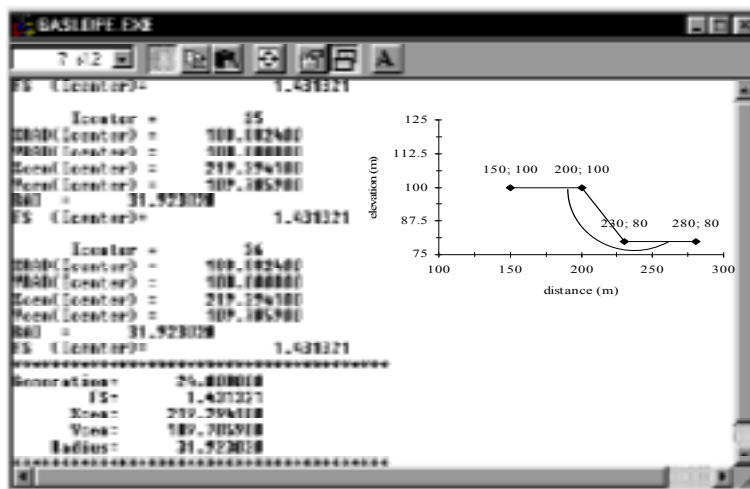


شکل ۱۰- تغییرات ضریب اطمینان در برابر تعداد جمعیت برای ۱۰ بار اجرای برنامه (مثال ۱)

۰/۱ به ۰/۹ انجام می‌شود. در این تحلیل مقادیر اولیه پارامترهای الگوریتم ژنتیک  $Pm=0/02$  و  $Npop=25$  در نظر گرفته شده است. نتایج تحلیل حساسیت در شکلهای (۸) تا (۱۰) ارائه شده است. همان طور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود، در محدوده ۰/۳ تا ۰/۶۵ کمترین مقادیر ضریب اطمینان مشاهده می‌شود. لذا این محدوده به عنوان محدوده مناسب تغییرات احتمال پیوند انتخاب می‌شود. نتایج تحلیل حساسیت برای تغییرات احتمال جهش در محدوده ۰/۰۱ تا ۰/۰۴۶ در شکل (۹) مشاهده می‌شود. در این تحلیل مقادیر ثابت اولیه پارامترهای GA،  $Pc=0/6$  و  $Npop=25$  فرض شده است. مطابق شکل (۹) کمترین ضرائب اطمینان در تحلیل محدوده‌های ۰/۰۱ - ۰/۰۲۵ و نیز ۰/۰۳۶ - ۰/۰۴ قرار دارند. با عنایت به اینکه محدوده اول بازه وسیعتری بوده و همچنین بزرگ بودن مقادیر احتمال جهش امکان از بین رفتن خصوصیات ژنتیکی



شکل ۱۱- تغییرات ضریب اطمینان در برابر تعداد نسلها



شکل ۱۲- بخشی از جزئیات حل مثال (۱) و تکرارها در مراحل نهایی توسط برنامه GASLOPE.EXE

با هندسه کلی تعریف شده در شکل (۷) مختصات مرکز و نقطه شروع سطح لغزش بحرانی به ترتیب  $X_{cen} = 219/941$  و  $Y_{RAD} = 100$  و  $X_{RAD} = 188/824$   $Y_{cen} = 109/7059$  هستند. شعاع دایره لغزش نیز مطابق شکل برابر با  $R=31/923$  هستند. به منظور نشان دادن تاثیر پارامترهای الگوریتم وراثتی در بهینه سازی سطح لغزش بحرانی، مثال (۱) دوباره با پارامترهای وراثتی مورد استفاده در تحقیق مک کومبی و ویلکینسون [۵]، تحلیل و تحلیل می شود. در مثالهای ارائه شده در تحقیق مک کومبی و ویلکینسون [۵] محدوده  $0/9 - 0/8$  و  $P_c = 0/001 - 0/002$  هستند. با انتخاب  $P_c = 0/8$  و  $P_m = 0/002$ ،  $N_{pop} = 26$  و  $MaxGen = 30$  و  $P_m = 0/002$ ، شيروانی مثال (۱) با استفاده از برنامه GASLOPE تحلیل شده است.

حاضر بوده که در آن متغیرهای مرکز دایره و نقاط شروع سطح لغزش به کار رفته است در حالی که منحنی (۲) مربوط به تحلیل با روشهای قبلی GA است که در آن مطابق معمول از متغیرهای مرکز دایره و شعاع دایره استفاده شده است. همان طور که در این شکل دیده می شود منحنی (۱) در مقایسه با منحنی (۲) با تعداد تکرار (نسل) کمتری به مقدار همگرایی در ضریب اطمینان  $(FS = 1/431)$  می رسد و این موضوع در کاهش زمان محاسبات و حافظه لازم رایانه موثر است. ارائه جزئیات حل مثال به علت تعداد زیاد تکرارها خارج از حوصله خوانندگان است و برای نمونه فقط بخشی از جزئیات مراحل آخر مثال در شکل (۱۲) ارائه می شود که در آن نتایج خروجی برنامه GASLOPE نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشاهده می شود، مطابق

جدول ۳- مقایسه روشهای مختلف در بهینه یابی سطح لغزش بحرانی مربوط به مثال ۱

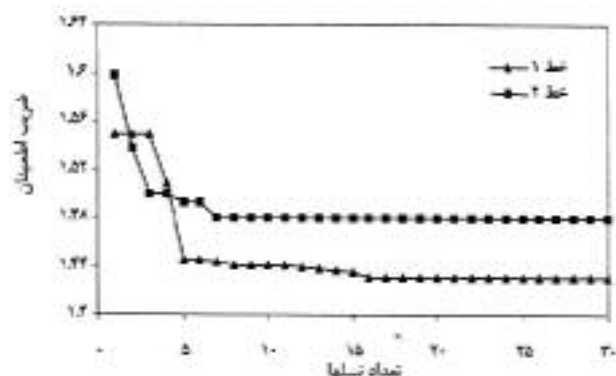
نام محقق	سطح لغزش دایره ای		سطح لغزش غیر دایره ای	
	روش مورد استفاده	ضریب اطمینان	روش مورد استفاده	ضریب اطمینان
آرای و تاگیو [۱]	گرادیان مزدوج	۱/۴۵۱	گرادیان مزدوج	۱/۳۵۷
حاجی عزیزی [۱۷]	تعادل حدی	۱/۴۴۵	تعادل حدی	۱/۳۹۶
نوبخت و کیلی [۶]	-	-	الگوریتم ژنتیک	۱/۳۶۲
باقری پور و همکاران (تحقیق حاضر)	الگوریتم ژنتیک	۱/۴۳۱	-	-

مختلف و با روشهای معمول و قبلی تحلیل شده است در جدول (۳) خلاصه شده‌اند. همان طور که از جدول ملاحظه می‌شود نتایج حاصله از روش فعلی در عین سرعت بیشتر همگرایی قابل مقایسه و مورد قبول تلقی می‌شود.

با بررسی در عملکرد روش الگوریتم ژنتیک می‌توان دریافت که در ابتدای فرایند جمعیتی اولیه از پاسخهای بالقوه در نسل اول (دوایر لغزش تصادفی) تشکیل می‌شود که سپس در طی نسلهای بعدی این جمعیت دستخوش تحولات ژنتیکی شده تا در نهایت نخبه ترین فرد (بهترین پاسخ) انتخاب شود لذا از آنجایی که جمعیت اولیه و نسل اولیه تماما پاسخهای بالقوه (نه الزاما بهترین) اند و هر کدام (در مسئله تحت بررسی) یک دایره لغزش‌اند لذا در یک مسئله اگر هندسه و ابعاد مشخص و ثابتی وجود داشته باشد محدوده تغییرات پارامترهای اصلی مسئله می‌تواند مستقل از نوع و تعداد مصالح (لایه‌ها) باشد. تفاوت نوع و تعداد مصالح (لایه‌ها) باعث تغییر مقادیر جوابهای بالقوه (مشخصات جمعیت اولیه) و بالطبع جواب نهایی ضریب اطمینان می‌شود. بنا بر این مقادیر پارامترهای الگوریتم ژنتیک (به عبارتی  $P_c$ ,  $P_m$ ,  $N_{pop}$ ) به دست آمده از طریق تحلیل حساسیت را می‌توان برای اکثر مسائلی که هندسه تقریباً مشابه و حتی دارای تنوع مصالح‌اند به کار برد

## مثال ۲

در این مثال یک شیروانی خاکی ناهمگن که از دو لایه مختلف تشکیل شده است بررسی می‌شود. هندسه و خصوصیات



شکل ۱۳- تاثیر پارامترهای روش GA بر ضریب اطمینان در برابر تعداد نسلها

در شکل (۱۳) نمودار تغییرات ضریب اطمینان در مقابل تعداد نسلها مشاهده می‌شود. در این شکل منحنی (۱) مربوط به تحلیل حاضر بوده که در آن پارامترهای وراثتی  $P_c=0/55$  و  $P_m=0/02$  انتخاب شده‌اند. منحنی (۲) مربوط به حالتی است که از پارامترهای استفاده شده در تحقیق مک کومبی و ویلکینسون [۵] به عبارتی  $P_c = 0/8$  و  $P_m = 0/002$  استفاده شده است. در هر دو حالت تعداد جمعیت اولیه  $N_{pop}=26$  و تعداد نسلها  $MaxGen = 30$  در نظر گرفته شده‌اند. همان طور که در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود عدم انتخاب مناسب پارامترهای وراثتی برای منحنی (۲)، باعث درگیر شدن الگوریتم ژنتیک در بهینه محلی و نیافتن جواب بهینه مناسب شده است (ضریب اطمینان بالاتر!).

برای تایید اعتبار بیشتر نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی در این تحقیق نتایج حل این مثال که توسط محققان

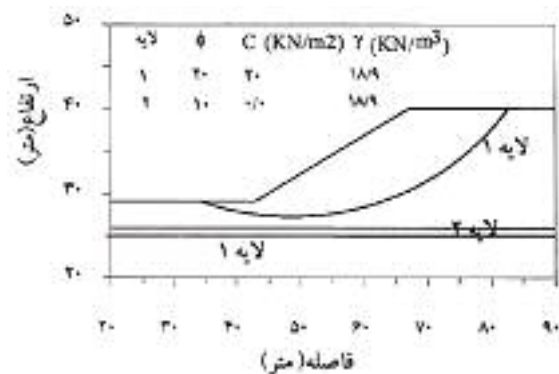


جدول ۴- مقایسه روشهای مختلف در محاسبه ضریب اطمینان مربوط به مثال ۲

نام روش	ضریب اطمینان		ضریب اطمینان	
	سطح لغزش دایره‌ای	فردلاند همکاران [۱۴]	سطح لغزش غیر دایره‌ای	Goh [۷]
فلنیوس	۱/۳۸۸	-	-	-
بیشاپ	۱/۳۷۷	-	-	-
اسپنسر	-	-	۱/۳۷۳	-
جانیر اصلاح شده	-	-	۱/۴۱۸	-
جانیر	-	-	۱/۳۳۲	-
پرایس و مرگسترن	-	-	۱/۳۷۸	-
لگوریتم ژنتیک	-	۱/۳۰۴	-	۱/۳۸۶

GA به دست آمده‌اند دال بر غیر اعتماد بودن نتایج روش دایره‌ای نیستند. مطابق توضیحات ارائه شده در بخش (۱-۲) مقاله و با توجه به دقت بالای روش بیشاپ [۹-۱۱] و همچنین وجود مقادیر ضرایب اطمینان قابل محاسبه توسط نظریه‌های حد بالا و حد پایین و قرارگرفتن مقادیر حاصل از روش بیشاپ در این محدوده مقادیر این دو نظریه معتبر [۱۰] و قابلیت اعتماد روش دایره‌ای مورد استفاده در این تحقیق بالاست.

برای تحلیل سد خاکی مثال (۳) برنامه رایانه‌ای نوشته شده، که این برنامه تمام مراحل لازم را برای تولید سطوح لغزش تصادفی دایره‌ای به روش GA را انجام می‌دهد. به علت لایه لایه بودن خاک شیروانی و همچنین تعمیم قابلیت تلفیق الگوریتم ژنتیک ارائه شده با برنامه‌های مختلف تحلیل شیب، برای به دست آوردن ضریب اطمینان هر دایره لغزش از برنامه PROKON استفاده شده است [۱۵]. بدین منظور یک برنامه رایانه‌ای مرتبط بین برنامه GASLOPE و برنامه PROKON نوشته شده است تا مراحل تحلیل به نحو پیوسته و خودکار انجام گیرد. لازم به توضیح است که برنامه PROKON یک برنامه غیر تجاری تحلیل سازه‌های خاکی است که در اینترنت قابل دسترسی و فرفروستی است. از مزایای این برنامه می‌توان به محاوره‌ای بودن با کاربر و استفاده از روشهای معروف و دقیق در تحلیل و همچنین قابلیت تحلیل شیروانیهای مسلح را نام برد.



شکل ۱۴- هندسه و سطح لغزش دایره‌ای در شیروانی مثال ۲

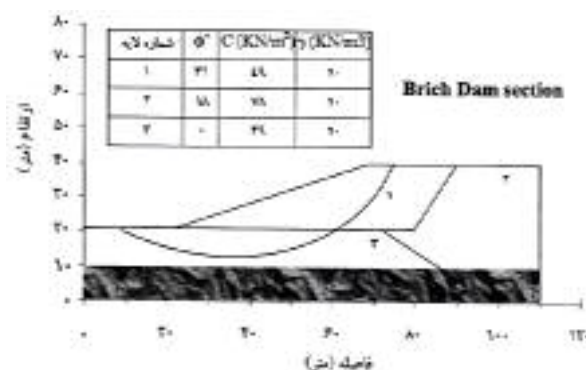
لایه‌های مختلف این شیروانی در شکل (۱۴) مشاهده می‌شود. این شیروانی با روشهای مختلفی توسط فردلاند و همکاران [۱۴] تحلیل شده است. همچنین ضریب اطمینان این شیروانی به روش GA برای سطوح لغزش غیر دایره‌ای توسط گاه [۷] به دست آمده است. که نتایج آن در جدول (۴) مشاهده می‌شود. در این جدول نتایج تحلیل پایداری شیروانی توسط روش پیشنهادی در این تحقیق و از طریق برنامه GASLOPE برای مقایسه نشان داده شده است.

لازم به یادآوری است که به دلیل فرضیات متفاوت در تحلیل شیروانی، نتایج به دست آمده از روش GA با نتایج سایر محققان، کاملاً مساوی نبوده و دارای اختلاف جزئی‌اند. از طرفی پایین بودن ضرایب اطمینان سطح لغزش غیر دایره‌ای خصوصاً آنها که با روش

جدول ۵- مقایسه روشهای مختلف در تحلیل سد Brich

ضریب اطمینان غیردایره‌ای	ضریب اطمینان دایره‌ای	مختصات بحرانی (m)			روش بهینه سازی	نام محقق
		X	Y	R		
۱/۳۱	۱/۱۲۱	۴۲/۰	۵۲/۶	۴۳/۹۰	تغییر مکان محلی	سلستینو و دانکن [۱۶]
	۱/۱۱۷	۴۱/۴۰	۵۱/۲	۴۱/۸۹	بازتاب سیمپلکس	انگوبن [۳]
	۱/۱۲۱	۴۱/۰۰	۵۰/۰	۴۰/۰	جستجوی شبکه ای	انگوبن [۳]
	۱/۰۹۳	۴۱/۱۰	۴۶/۱۰	۳۵/۴۰		دناتال [۱۸]
	۱/۰۲۸	۳۹/۸۲	۴۵/۶۹	۳۶/۷۹	مونت کارلو (حرکت تصادفی)	مالکاوی و همکاران [۴]
	۱/۰۵۰	۴۲/۲۶	۴۲/۸۳	۳۴/۰۵	مونت کارلو (پرش تصادفی)	
	۱/۰۳۷	۳۹/۹۰	۴۵/۳۰	۳۶/۸۰	مونت کارلو (حرکت و پرش تصادفی)	
۱/۰۰۴						حاجی عزیزی [۱۷]
۰/۹۲۴۵					الگوریتم ژنتیک	نوبخت و کیلی [۶]
	۱/۰۲۳	۴۲/۴۵	۴۳/۸	۳۵/۹۱	الگوریتم ژنتیک	باقری پور و همکاران (تحقیق حاضر)

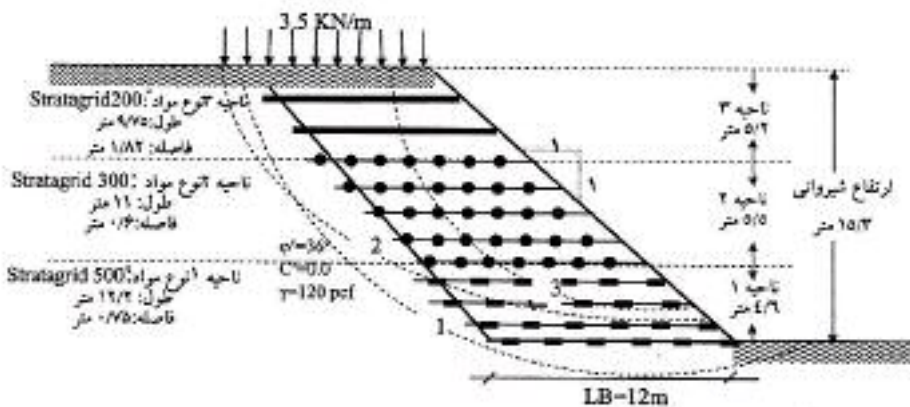
حاجی عزیزی [۱۷]، با کمک روش بیشترین شیب محلی، نوبخت و کیلی [۶]، با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک معمول برای سطوح لغزش غیر دایره‌ای و دِناتیل [۱۸]، مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حاصل از روشهای مختلف در جدول (۵) مشاهده می‌شود. با توجه به جدول فوق مجدداً مشاهده می‌شود که نتایج پیشنهادی در حد قابل قبول بوده و تاییدی مجدد بر کارایی روش پیشنهادی است. نکته قابل توجه در مثال فوق اینکه مطابق جدول (۵) این مثال توسط یکی دیگر از روشهای نسبتاً جدید بهینه یابی (مونت کارلو) بهینه یابی شده است که تعداد تکرارهای لازم به بیش از ۲۸۰۰ بار رسیده است [۴]. در این تحقیق و با توجه به روش بر گرفته شده تنها با تعداد (۱۰۴۰ ≈ ۴ × ۲۶ × Maxgen \* Npop) بار تکرار همگرایی حاصل شده است که بیش از ۵۰٪ صرفه جویی در تکرار را به همراه داشته است. بستگی به سرعت پرسور رایانه‌ها و دیگر عوامل دخیل این تعداد کاهش تکرار باعث صرفه جویی نسبی قابل توجهی در زمان و حافظه لازم رایانه خواهد شد. لازم به ذکر است که نوبخت و کیلی [۶] نیز پس از ۱۳۰۰ بار تکرار و سعی و خطا سطح لغزش بحرانی را برای شیروانی سد



شکل ۱۵- هندسه و سطح لغزش بهینه دایره‌ای در سد خاکی مثال ۳

### مثال ۳

در این مثال ضریب اطمینان سد بریچ در اوکلاه‌مای آمریکا تعیین می‌شود. مشخصات لایه‌های مختلف این سد در شکل (۱۵) آمده است. این مثال قبلاً با روشهای بهینه سازی متفاوتی تحلیل شده است. سلستینو و دانکن [۱۶] به کمک روش تغییر مکان محلی گره‌های سطح لغزش، انگوبن [۳]، با استفاده از روش بازتاب سیمپلکس و در سالهای اخیر مالکاوی و همکاران [۴] از روش مونت کارلو برای بهینه یابی سطح لغزش مثال فوق استفاده کرده‌اند. همچنین این سد خاکی توسط



شکل ۱۶- مشخصات مصالح و هندسه شیروانی و نحوه قرارگیری المانهای تسلیح در مثال ۴

برای تحلیل پایداری شیبهای خاکی موثرند: الف- انتخاب روش تحلیل پایداری شیب به روش قطعی، ب- انتخاب یک الگوریتم و روش مناسب و پیشرفته برای بهینه یابی، ج- تلفیق دو روش فوق و انتخاب متغیرهای مناسب برای تعریف هندسه مسئله، د- انتخاب محدوده مناسب برای پارامترهای روش بهینه یابی، ه- انجام تحلیل حساسیت برای بررسی تاثیر پذیری جوابهای روش بهینه یابی از متغیرها و پارامترهای مختلف، و- مقایسه و تایید نتایج اعتبار به دست آمده با دیگر روشهای بهینه یابی، ز- بررسی و مقایسه سرعت همگرایی و صرفه جویی حاصله در زمان و حافظه لازم برای حل مسئله.

در این مقاله از روش الگوریتم ژنتیک و تلفیق آن با روش معروف بیشاپ برای تحلیل پایداری شیروانیهای خاکی استفاده شده است. سطح لغزش دایره ای خاکی با دقت بالایی بهینه یابی شده و کمترین ضریب اطمینان مربوطه محاسبه شده است. در این تحقیق همچنین با انتخاب و تعریف متغیرهای مناسب و انتخاب محدوده مناسب برای آنها کارایی روش الگوریتم ژنتیک بهبود چشمگیر یافته به طوری که در مقایسه با بعضی روشهای دیگر و معروف بهینه یابی تا حتی بیش از ۵۰٪ کاهش در تکرارهای لازم برای همگرایی مشاهده شده است که به نوبه خود صرفه جویی قابل توجهی در وقت و حافظه لازم به همراه دارد. دقت روش پیشنهادی با ارائه مثالهایی از بهینه یابی سطوح لغزش شیروانیهای خاکی از انواع

مزبور و به روش غیر دایره ای بهینه یابی کرده است که در حقیقت بیش از ۳۰٪ تکرار اضافه نسبت به روش حاضر در بر داشته است..

#### مثال ۴

در این مثال ضریب اطمینان یک شیروانی تسلیح شده مطابق شکل (۱۶) تحلیل شده است. در این شیروانی برای تسلیح از ژئوگرید استفاده شده است [۱۹]. المانهای مسلح این شیروانی با ضریب اطمینان  $FS=1/5$  طراحی شده اند. این مثال توسط برنامه PROKON و با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک تحلیل شده که مقدار ضریب اطمینان  $1/542$  به دست آمده است. مقادیر پارامترهای الگوریتم ژنتیک به ترتیب  $p_c = 0/5$ ،  $p_m = 0/025$  و  $N_{pop} = 30$  انتخاب شده اند. لازم به تذکر است که در شکل (۱۶) دایر ۱ و ۲ و دایر تصادفی بوده که به طور شماتیک نشان داده شده اند. مطابق توضیحات بخش ۲-۲ این دایر در موده های مختلف از نظر برخورد به المانهای تسلیح قرار دارند که به هر حال ضرایب اطمینان هر حالت با توجه به معادلات مربوطه توسط برنامه مزبور به دست آمد و بخشی از جوابهای بالقوه را تشکیل داده اند.

#### ۵- نتیجه گیری

عوامل زیر در کارایی، سرعت و دقت یک روش بهینه یابی

مطمئن در بهینه یابی سطح لغزش دایره‌ای شیروانیهای خاکی است که می‌تواند با دقت قابل قبولی در مسائل مختلف مرتبط مورد استفاده قرار گیرد.

مختلف همگن، ناهمگن، مسلح و نیز شیروانی سد خاکی و مقایسه نتایج با روشهای دیگر بهینه یابی نشان داده شد. ملاحظه گردید که روش ارائه شده روشی کارآمد، سریع و

## مراجع

1. Arai, K., and Tagyo, K., "Determination of Noncircular Slip Surface Giving the Minimum Factor of Safety in Slope Stability Analysis," *Soils and Found.*, Tokyo, Vol. 25, No. 1, pp. 43-51, 1985.
2. Chen, Z., and Shao, C., "Evaluation of Minimum Factor of Safety in Slope Stability analysis," *Canadian Geotechnical Journal.*, Vol. 25, No.1, pp. 735-748, 1988.
3. Nguyen, V.U., "Determination of Critical Slope Failure Surfaces," *Journal of Geotechnical and Enviromental Engineering.*, Vol. 111, No. 2, pp. 238-250, 1985.
4. Husein Malkawi, A.I., Hassan W.F., and Sarma S.K., "Global Search Method for Locating General Slip Surface Using Monte Carlo Techniques," *Journal of Geotechnical and Enviromental Engineering*, Vol. 127, No. 8, pp. 688-698, 2001.
5. McCombie P., and Wilkinson P., "The Use of the Simple Genetic Algorithm in Finding the Critical Factor of Safety in Slope Stability Analysis," *Computers and Geotechnics*, Vol. 29, pp. 699-714, 2002.
6. نوبخت وکیلی، ک.، "استفاده از الگوریتم ژنتیک در یافتن سطح لغزش بحرانی شیروانیهای خاکی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، مهندسی عمران (خاک و پی)، دانشگاه تربیت مدرس - تهران، ۱۳۸۰.
7. Goh, T.C. Anthony, "Genetic Algorithm Search for Critical Slip Surface in Multiple-Wedge Stability Analysis," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 36, pp. 382-391, 1999.
8. Goh. T.C. Anthony, "Search for Critical Slip Circle Using Genetic Algorithm" *Civil & Environmental Systems*, Vol. 17, pp. 181-211, 2000.
9. Verruijt, A., *Soil Mechanics*, Delft University of technology Press., Nrtherland, 2001.
10. Atkinson, J., *The Mechanics of Soil & Foundation*, McGRAW-HILL Co. Pub., 1993.
11. Das B.M., *Principle of Geotechnical Engng.*, Sec. Ed., PWS-KENT Publishing Co., Boston, 1990.
12. Holland, J.H., *Daptation in Natural and Artificial System*, Ann Arbor University of Michigan Press, USA, 1975.
13. Goldberg, D.E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Weseley Publishing Company, 1989.
14. Fredlund, D.G., and Krahn., " Comparison of Slope Stability Methods of Analysis," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 14, pp. 429-439, 1977.
15. PROKON Software consultants (Pty Ltd). [WWW.PROKON.com](http://WWW.PROKON.com).
16. Celestino, T.B., and Duncan, J.M., "Simplified Search for Noncircular Slip Surface," In Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, Sweden, pp. 391-394, 1981.
17. حاجی عزیزی، م.، "بهینه یابی سطوح لغزش در شیروانیهای خاکی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، مهندسی عمران (خاک و پی)، دانشگاه تربیت مدرس-تهران؛ ۱۳۷۷.
18. De Natale, J.S., "Rapid Identification of Critical Slip Surface Structure." *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 10, pp. 1568-1589, 1991.
19. SRATA SYSTEMS Inc., "Reinforced Soil Slopes and Embankments," *Cumming Georgia*, USA, 2002.