

## توسعه یک فرمولبندی با عملکرد برتر برای تسخیر موج ضربه‌ای ایستاده در جریان با گستره کامل رژیم سرعت

مسعود دربندی\*، وهاب مکاریزاده\*\* و احسان روحی\*\*\*

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

پژوهشکده انرژی و محیط زیست، پژوهشگاه نیرو

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۲/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۳/۲۸)

**چکیده** - هدف از ارائه این مقاله کاربرد یک روش خطی‌سازی نوین برای گستره سازی عبارتهای جابه جایی معادلات اویلر شبه یک بعدی روی شبکه جابه جا نشده<sup>۱</sup> است. استفاده از شبکه جابه جا نشده در روش حجم محدود منجر به ایجاد میدان فشاری نوسانی<sup>۲</sup> غیر فیزیکی شده که برای رفع آن استفاده از شبکه یگانه و سرعت دوگانه پیشنهاد شده است. در این روش دو مولفه سرعت به نام سرعتهای جابه جا کننده (یا جرمی) و جابه جا شونده (یا ممتمی) بر روی سطوح سلول تعریف می‌شوند. از آنجا که مولفه سرعت جابه جا کننده در این تحقیق از تلفیق مناسب معادلات پیوستگی و ممتم به دست می‌آید استفاده از این مولفه سبب همبستگی قوی بین معادلات حاکم بر جریان می‌شود. در کار حاضر، برای خطی‌سازی جملات غیر خطی از روش خطی‌سازی مفهومی نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. در این خطی‌سازی عبارتهای جابه جایی معادلات حاکم اویلر با رعایت مفاهیم فیزیکی دو مولفه سرعت تعریف شده خطی‌سازی می‌شوند به گونه‌ای که هم نقش میدان سرعت و هم نقش میدان چگالی را در خود ملحوظ می‌دارند و بنابراین به راحتی قابلیت کاربرد در جریان با گستره کاملی از رژیمهای سرعت<sup>۳</sup> را دارا هستند. در نهایت عملکرد خطی‌سازی توسعه داده شده حاضر برای تحلیل جریان در شیپوره همگرا-واگرا به کار گرفته می‌شود. نتایج به دست آمده حاکی از عملکرد به مراتب برتر روش حاضر در حل معادلات شبه یک بعدی اویلر بوده به طوری که قابلیت تسخیر موج ضربه‌ای ایستاده در جریان با ماهیت تمام رژیم سرعت را به راحتی داراست.

**واژگان کلیدی:** معادلات اویلر، جریان با تمام رژیم سرعت، شیپوره همگرا-واگرا، شبکه جابه جا نشده، خطی‌سازی نیوتن-رافسون

# Developing a Shock-Capturing Formulation with Higher Performance to Capture Normal Standing Shock in All-Speed Regime

M. Darbandi, V. Mokarizadeh, and E. Roohi

Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology  
Energy & Environmental Research Center, Niroo Research Institute

**Abstract:** *The main objective of the present study is to utilize a novel linearization strategy to linearize the convection terms of the quasi-one-dimensional Euler governing equations on collocated grids and to examine its shock-capturing capabilities. To avoid a pressure checkerboard problem on the collocated grids, it is necessary to utilize two velocity definitions at each cell face. Similarly, we define two velocity expressions at cell faces known as convecting and convected velocities. We derive them from the proper combinations of continuity and momentum equations which, in turn, provide a strong coupling among the Euler discretized equations. To achieve this, we utilize an advanced linearization strategy known as Newton-Raphson to linearize the nonlinear convection terms. The key point in this linearization is to preserve the original physics behind the two velocities in the linearization procedure. The performance of the new formulation is then investigated in a converging-diverging nozzle flow. The results show great improvement in both the performance of the original formulation and in capturing shocks. The results also indicate that the new extended formulation is robust enough to be used as an all-speed flow solver.*

**Keywords:** *Euler flow equations, All speed flow regime, Convergent-divergent nozzle, Collocated grid, Newton-Raphson linearization*

## ۱- مقدمه

یکی از پر کاربردترین روشها در میان روشهای عددی متداول برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر جریان همانا روش حجم محدود است. مزیت اصلی روش حجم محدود در این است که بقای کامل کمیت‌هایی همچون جرم، ممنتوم و انرژی را برای هر یک از حجمهای معیار درون میدان حل و در مجموع برای کل حوزه محاسباتی تضمین می‌کند. یکی از پیچیدگیهای استفاده از روش عددی برای حل معادلات ناویر-استوکس مجهول بودن میدان فشار و عدم وجود معادله حاکم مناسب برای محاسبه مستقیم آن است. مشکل مربوط به محاسبه میدان فشاری منجر به ابداع روشهای جنبی شده است که در آنها فشار را از معادلات حاکم به‌طور مناسب حذف می‌کنند. یک نمونه از این روشها، استفاده از فرمول مبتنی بر تابع جریان-گردابه<sup>۱</sup> است که متاسفانه دارای مشکلات جدی در اعمال شرایط مرزی و تعمیم میدان جریان دو بعدی به سه بعدی است. پتینکار و اسپالدینگ [۱] الگوریتم سیمپل<sup>۲</sup> که به‌طور مناسب فشار را در معادله پیوستگی ارضا می‌کند ارائه کردند. لیکن استفاده از روش حجم محدود به صورت فوق معمولاً

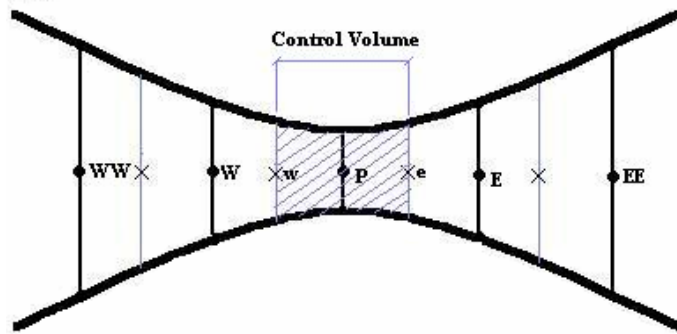
باعث مستقل شدن معادلات پیوستگی و ممنتوم شده و تولید میدان فشاری نوسانی غیر فیزیکی می‌کند. به عنوان یک راه حل برای رهایی از این میدان فشاری نوسانی غیر واقعی، آرایش شبکه جابه‌جا شده<sup>۳</sup> در الگوریتم سیمپل و ویرایشهای بعدی آن مورد استفاده قرار گرفته است. اگر مشکل میدان نوسانی غیر واقعی فشار روی شبکه جابه‌جا نشده رفع می‌شد دستاورد بزرگی در امکان حل معادلات بر روی شبکه‌های ساده‌تر به‌دست می‌آمد. استفاده از شبکه جابه‌جا نشده در مقایسه با آرایش شبکه جابه‌جا شده دارای مزایای زیادی است که از آن جمله می‌توان مواردی را در اینجا برشمرد. اول اینکه یکی از نقاط ضعف مهم شبکه جابه‌جا شده مسئله متفاوت بودن حجمهای کنترل مربوط به سرعت با حجمهای کنترل متغیرهای اسکالر<sup>۴</sup> است. این در حالی است که در شبکه جابه‌جا نشده تمام معادلات تنها روی یک نوع حجم معیار گسسته و ابقا می‌شوند. دوم اینکه اعمال شرایط مرزی روی شبکه جابه‌جا شده بسیار آسانتر است. سوم اینکه گسسته سازی روی شبکه جابه‌جا نشده در مقایسه با شبکه جابه‌جا شده به حافظه رایانه‌ای کمتری نیاز دارد.

در آرایش شبکه جابه جا نشده روشهای گوناگونی برای جلوگیری از به وجود آمدن میدان نوسانی سرعت و فشار پیشنهاد شده است. یکی از این روشها (که در تحقیق حاضر نیز از آن استفاده شده است) استفاده از یک شبکه با سرعت دوگانه روی سطوح سلول است. در این خصوص ری و چو [۲] دو نوع مولفه سرعت به نامهای سرعت جرمی یا جابه جاکننده<sup>۸</sup> و سرعت ممتمی یا جابه جا شونده<sup>۹</sup> را معرفی کردند که سرعت اول در معادله پیوستگی و سرعت دوم در معادله ممتم اعمال می شود. میلر و اشمیت [۳] نشان دادند که روش پیشنهاد شده توسط ری و چو در شرایطی که تغییرات موضعی فشار از حالت خطی خارج شود می تواند منجر به سرعتهای غیر واقعی در سطوح حجم کنترل شود. رحمان و همکاران [۴] ایده ری و چو را با افزودن یک جمله چشمه غیر فشاری در تقریب روی حجم کنترل اصلاح کردند. مستقل از اصل ایده پیشنهادی برای گریز از میدانهای حل نوسانی، باید توجه داشت که معادلات اوایلر معادلات پاره ای غیرخطی بوده که نیاز به خطی سازی مناسب نیز دارند. از طرفی، روشهای پیشنهادی برای خطی سازی معادله ممتم منجر به ظاهر شدن مقادیر سرعت مربوط به تکرار قبل در این معادله می شود که باید به شیوه مناسب توسط مقادیر قابل دسترس جاگذاری گردند.

الگوریتم سیمپل و ویرایشهای تعمیم یافته آن که در ابتدا فقط برای جریان تراکم ناپذیر کاربرد داشت توسط عده ای محقق نظیر ون دورمال و همکاران [۵] برای حل جریان تراکم پذیر تعمیم داده شد. مرجع اخیر روش نیوتن-رافسون را برای خطی سازی عبارت شار جرمی در معادله پیوستگی به کار بسته است. این خطی سازی نقش فعالی هم برای مولفه چگالی و هم برای مولفه های سرعت در نظر می گیرد به طوری که امکان حل در تمام رژیمهای سرعت را فراهم می سازد. به طور مشابه، روش خطی سازی فوق را می توان برای عبارتهای غیرخطی جابه جایی در معادلات ممتم نیز به کار برد. این روش امکان افزایش کارایی یک فرمولبندی تراکم پذیر برای کاربرد حل جریان روی

گستره کاملی از رژیمهای سرعت را فراهم می کند. از آنجا که نقش دوگانه مولفه های سرعت در خطی سازی این عبارتها ظاهر می شود بهتر است خطی سازی مذکور براساس در نظر گرفتن نقش هر دو مولفه سرعت و با حفظ مفاهیم پایه آنها صورت گیرد.

یکی دیگر از مباحث تحقیقاتی مهم روز در حل عددی معادلات حاکم بر جریان، موضوع ارائه الگوریتمهای عددی توانمند برای حل جریان از رژیمهای مادون صوت تا رژیمهای مافوق صوت و همین طور رژیمهای سرعت نزدیک به صفر است. در بیشتر روشهایی که برای حل جریان تراکم پذیر مورد استفاده قرار می گیرد چگالی از معادله پیوستگی به دست آمده و فشار (متغیر غیر اصلی) از معادله حالت به دست می آید. با توجه به اینکه تغییرات چگالی در رژیمهای صوتی بسیار پایین، بسیار ناچیز و قابل اغماض است و با توجه به اینکه تغییرات فشار در تمام سرعتها حتی سرعتهای نزدیک به صفر مهم و قابل ملاحظه است، یک ایده مناسب برای حل جریان با تمام رژیمهای سرعت استفاده از الگوریتمهای فشار مبناست. اصولاً استفاده از آرایش شبکه جابه جا نشده در حل میدان جریان برای تمام گستره سرعتها توسط محققان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در یک فرمولبندی دوبعدی، دربندی و اشنایدر [۶] برای اولین بار ایده استفاده از متغیرهای شار ممتم به جای متغیرهای سرعت را به عنوان متغیر مجهول در کنار متغیر فشار برای کاربرد در یک الگوریتم تمام-سرعت<sup>۳</sup> مطرح کردند. آنها از شبکه جابه جا نشده با تعریف دو مولفه شار ممتم در سطوح حجم معیار و روش خطی سازی کاملاً ساده و پایه برای خطی سازی عبارتهای غیرخطی معادلات بقای ممتم استفاده کردند. این نوع خطی سازی تفاوت نقش مولفه های سرعت جابه جا شونده و جابه جا کننده را در معادلات خطی شده لحاظ نمی نمود. دربندی و مکاری زاده [۷] روش خطی سازی پایه مرجع [۶] را به خطی سازی نیوتن-رافسون تعمیم دادند به طوری که در این خطی سازی مفاهیم مولفه های سرعت جابه جا شونده و جابه جا کننده



شکل ۱- شبکه بندی میدان جریان درون شیپوره

می‌توان معادلات بقای جرم، ممتم و انرژی را به کمک کمیت‌های بقایی  $\Phi$  و  $\Psi$  به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = S \quad (۱-الف)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho e_t A \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \rho u A \\ \rho u^2 A \\ \rho h_t u A \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱-ب)$$

$$e_t = e + \frac{u^2}{2} = c_v T + \frac{u^2}{2}, \quad h_t = e + \frac{p}{\rho} \quad (۱-ج)$$

که در آنها  $A$  مساحت سطح سلول،  $C_p$  و  $C_v$  ضرایب گرمای ویژه،  $e$  یا  $E$  انرژی داخلی،  $h$  آنتالپی،  $p$  فشار،  $T$  دما،  $u$  سرعت،  $\rho$  چگالی و  $\tau$  زمان هستند. برای حل دستگاه معادلات فوق نیاز به انتخاب متغیرهای حل است. در تحقیق حاضر متغیرهای حل شار ممتم  $f = \rho u$ ، فشار  $P$  و دما  $T$  انتخاب می‌شوند. با داشتن ثابت گاز  $R$  و به کمک معادله حالت  $P = \rho R T$ ، امکان حل دستگاه معادلات فوق به صورت کاملاً ضمنی فراهم می‌شود. بنابراین روش حاضر روش فشار مینا بوده و الگوریتم آن متفاوت از الگوریتم روشهای چگالی میناست.

### ۳- شبکه بندی میدان جریان شبه یک بعدی

میدان جریان با شبکه جابه جا نشده به مجموعه‌ای از احجام محدود شکسته می‌شود. شکل (۱) شبکه بندی ناشی از توزیع یکنواخت احجام محدود در راستای افقی در درون یک مجرای شبه یک بعدی را نشان می‌دهد. در این شکل مراکز سلولها با علامت ستاره مشخص شده‌اند. زیرنویسهای  $E$  و  $W$  برای بیان

مربوط به تکرار قبل نیز در معادلات خطی‌سازی شده دخیل می‌شدند. بررسی مرجع [۷] به معادلات اویلر یک بعدی و حل میدان جریان ناپایا در لوله مولد موج ضربه‌ای<sup>۱</sup> محدود می‌شد. نتایج حاصل معرف عملکرد بهتر خطی‌سازی جدید عبارت جابه جایی معادله ممتم نسبت به خطی‌سازی پایه بود. در تحقیق حاضر، قابلیت این روش خطی‌سازی در حل جریان پایا از درون مجرا با سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا معادلات شبه یک بعدی اویلر مورد هدف قرار گرفته و روش خطی‌سازی تعمیم یافته برای این دسته از معادلات نیز مورد تعمیم و آزمایش قرار می‌گیرد. اصولاً دو ویژگی اصلی جریان درون شیپوره همگرا-واگرا (یعنی دامنه گسترده تغییرات عدد ماخ و امکان وجود موج ضربه‌ای ایستاده) مسئله شیپوره را به عنوان یک آزمون دشوار برای بررسی صحت الگوریتمهای عددی تسخیر موج ضربه‌ای معرفی می‌کند. ما نیز برای اثبات عملکرد روش خطی‌سازی فوق در حل معادلات شبه یک بعدی، شیپوره همگرا-واگرا را مورد آزمایش و حل قرار می‌دهیم. مقایسه نتایج حاضر با نتایج حاصل از دیگر روشهای خطی‌سازی که در آنها مفاهیم دو سرعت لحاظ نشده است نشان می‌دهد که نتایج حاضر دارای عملکرد بسیار برتری نسبت به مابقی است.

### ۲- معادلات حاکم

با صرف نظر کردن از اثرات اصطکاک (لزجت) در جریان درون مجرای شبه یک بعدی و فرض آدیاباتیک بودن جریان

$$\rho = \bar{\rho} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p}(P - \bar{P}) + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}(T - \bar{T}) \quad (5)$$

برای محاسبه عبارتهای مشتق چگالی، از معادله (۴) به طور مناسب مشتق می‌گیریم به طوری که:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p} = \frac{1}{RT} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T} = -\frac{\bar{P}}{RT^2} \quad (6)$$

این شیوه خطی‌سازی نقش و حضور بسیار فعالی به متغیر دما برای حضور در معادله پیوستگی می‌دهد. با توجه به اینکه دما نماینده واقعی معادله انرژی است با این شیوه خطی‌سازی همبستگی معادلات حاکم با یکدیگر به مراتب افزایش می‌یابد.

به طور مشابه به کمک انتگرال‌گیری روی یک سلول دلخواه و استفاده از قضیه دیورژانس، فرم انتگرالی معادله ممتنم در قالب شبه یک بعدی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\iint_A \frac{(\rho u A)}{\partial \tau} dA + \int_S (\rho u^2 A) dS = -\iint_A \left( \frac{\partial(pA)}{\partial x} - p \frac{\partial A}{\partial x} \right) dA \quad (7)$$

با در نظر داشتن فرضیات ارائه شده در خصوص معادله پیوستگی، شکل گسسته شده معادله ممتنم نیز به طور مشابه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} [(\rho U)_p - (\rho U)_e] + (\rho u^2 j)_e - (\rho u^2 j)_w + (p j)_e - (p j)_w + P_p(j_e - j_w) = 0 \quad (8)$$

و لیکن عبارتهای غیرخطی در بخش جابه جایی باید به صورت مناسبی خطی‌سازی شوند. به کارگیری خطی‌سازی ساده به دست می‌دهد:

$$\rho u u \approx \bar{u}(\rho u) \quad (9)$$

در کنار این خطی‌سازی ساده، خطی‌سازی کاملتری نیز وجود دارد که در برگیرنده متغیرهای فعال بیشتری است. این خطی‌سازی به نام خطی‌سازی نیوتن-رافسون معروف بوده به طوری که نقش فعال را برای هر دو متغیر سرعت و چگالی فراهم می‌کند [۸]:

$$\rho u u \approx \bar{u}(\rho u) + (\bar{\rho} u) u - \bar{\rho} u u \quad (10)$$

اگر به طور مشابه خطی‌سازی فوق برای  $u = (\rho u / \rho)$  نوشته شود و نتیجه در عبارت دوم سمت راست معادله (۱۰) جاگذاری شود، خواهیم داشت:

$$\rho u u \approx 2 \bar{u}(\rho u) - \bar{u}^2 \rho \quad (11)$$

مراکز سلولهای قرار گرفته به ترتیب در شرق و غرب سلول P به کار گرفته شده است و به طور مشابه زیرنویسهای e و w برای بیان سطوح شرقی و غربی سلول در برگیرنده گره P به کار گرفته می‌شود. در این تحقیق حروف انگلیسی بزرگ به مفهوم اطلاق مقادیر برای مراکز سلول و حروف انگلیسی کوچک برای اطلاق مقادیر پارامترها در سطوح سلول به کار گرفته می‌شوند.

#### ۴- گسسته سازی معادلات حاکم

انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی بر روی یک حجم محدود دلخواه و استفاده از قضیه دیورژانس برای عبارت شار جرمی نتیجه می‌دهد:

$$\iint_A \frac{\partial(\rho A)}{\partial \tau} dA + \int_S (\rho u A) ds = 0 \quad (2)$$

همان گونه که در بخش (۲) متذکر شدیم روش حاضر یک روش کاملاً ضمنی می‌باشد به طوری که تمام عبارتها به جز عبارت گذرا در زمان حال محاسبه می‌شوند و عبارت گذرا با تقریب جرم انباشته<sup>۱۱</sup> تخمین زده می‌شود. با این استدلال، معادله (۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} (\rho_p - \rho_p^o) + (\rho u)_e j_e - (\rho u)_w j_w = 0 \quad (3)$$

بالانویس  $^o$  به مفهوم تقریب از زمان گذشته می‌باشد. پارامترهای  $j_e$  و  $j_w$  به ترتیب بیانگر نسبت سطح مقطع مرز شرقی و مرز غربی به مساحت کل در گره P اند. با توجه به اینکه چگالی یک متغیر اصلی نیست نیاز به اعمال عملیات خطی‌سازی مناسب برای عبارت گذرا در معادله (۳) است. یک روش خطی‌سازی ساده عبارت است از:

$$\rho = \rho(p) = \frac{P}{RT} \quad (4)$$

که در این خطی‌سازی نقش فعال چگالی مستقیماً به فشار تفویض می‌شود. در معادله فوق مقدار دما از تکرار قبل جاگذاری می‌شود. خط تیره بالای  $\bar{T}$  به مفهوم تکرار قبل می‌باشد. یک روش کاملتر برای خطی‌سازی این است که به متغیرهای فشار و دما وزنه‌های مساوی در خطی‌سازی داده شود. به طور مثال:

می توان یک معادله کلی به جای دو معادله (۹) و (۱۱) به صورت زیر بیان داشت:

$$\rho u u \approx 2 k_1 \bar{u}(\rho u) - k_2 \bar{u}^2 \rho \quad (12)$$

که  $k_1$  و  $k_2$  دو ثابت‌اند. در صورتی که  $k_1 = k_2 = 1$  باشد خطی سازی نیوتن-رافسون یعنی معادله (۱۱) نتیجه می شود و اگر  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 0$  باشد خطی سازی ساده یعنی رابطه (۹) را نتیجه می دهد. بحث کاملتر در مورد خطی سازی معادله ممنتم در بخش (۵-۲) ارایه شده است.

مشابه معادلات پیوستگی و ممنتم، معادله بقای انرژی به شکل انتگرالی به صورت زیر در می آید:

$$\iint_A \frac{\partial(\rho e A)}{\partial \tau} dA + \int_S [(up + \rho u e)A] dS = 0 \quad (13)$$

با انجام انتگرال گیری روی یک سلول اختیاری با سطوح غربی و شرقی  $w$  و  $e$ ، شکل گسسته معادله انرژی به دست می آید:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} [(\rho E)_P - (\rho E)_P^\circ] + (\rho u e)_e j_e - (\rho u e)_w j_w + (up)_e j_e - (up)_w j_w = 0 \quad (14)$$

در معادله فوق  $\rho e$  می تواند به کمک روش نیوتن-رافسون نسبت به هر دوی  $\rho$  و  $e$  خطی سازی شود. از طرفی خود  $e$  و  $E$  نیز به صورت زیر خطی سازی می شوند:

$$E = c_v T + \frac{\bar{U}}{2\rho} F, \quad e = c_v t + \frac{\bar{u}}{2\rho} f \quad (15)$$

عبارت گذرا در معادله (۱۴) با استفاده از معادله (۱۵) به صورت زیر خطی سازی می شود:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} [(\rho E)_P - (\rho E)_P^\circ] = \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \left[ \frac{\bar{U}}{2} (\rho U) + \frac{\bar{E}}{RT} P + (\bar{\rho} c_v - \frac{\bar{\rho} \bar{E}}{T}) T - (\rho E)^\circ \right] \quad (16)$$

از طرفی، عبارتهای جابه جایی  $\rho u e$  در معادله (۱۴) نخست با روش نیوتن-رافسون نسبت به  $e$  و  $\rho u$  خطی سازی می شوند:

$$\rho u e \approx (\bar{\rho} u) e + \bar{e}(\rho u) - \bar{\rho} u e \quad (17)$$

و سپس متغیر  $e$  از معادله (۱۵) در آن جایگزین می شود:

$$\rho u e \approx (\bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2}) f + (c_v \bar{f}) t - \bar{e} f \quad (18)$$

عبارت  $up$  در معادله (۱۴) نیز با استفاده از معادله حالت به  $Rtf$  تبدیل و سپس نسبت به  $f$  و  $t$  با روش نیوتن-رافسون

خطی سازی می شود:

$$up = Rtf \approx R(f\bar{t} + \bar{f}t - \bar{f}\bar{t}) = (c_p - c_v)(f\bar{t} - \bar{f}t) - R\bar{f}\bar{t} \quad (19)$$

که در نتیجه به دست می آید:

$$\rho u e + up = (c_p \bar{t} + \bar{u}^2) f + (c_p \bar{f}) t - (\bar{e} + R\bar{f}) \bar{f} \quad (20)$$

## ۵- محاسبه مقادیر متغیرهای وابسته بر روی سطوح

### حجم معیار

#### ۵-۱- محاسبه متغیرهای ممنتم، فشار و دما بر روی

#### سطوح حجم معیار

برای تکمیل فرایند گسسته سازی معادلات دیفرانسیل حاکم و به دست آوردن معادلاتی که تنها برحسب مجهولات روی گره‌ها باشند لازم است که متغیرهای وابسته در سطوح حجم کنترل به وسیله عباراتی بر حسب متغیرهای اصلی بر روی گره‌ها جایگزین شوند. در این تحقیق از مفاهیم بنیانی روشی موسوم به روش تاثیر فیزیکی<sup>۱۲</sup> که توسط اشنایدر و رآو [۹] برای حل جریان تراکم ناپذیر به کمک متغیرهای سرعت پایه ریزی و توسط دربندی و اشنایدر [۱۰] برای حل جریان تراکم پذیر یک بعدی به کمک متغیرهای ممنتم توسعه داده شده است استفاده می کنیم. این روش در مقایسه با روشهای دیگر از جمله هایبرید<sup>۱۳</sup> و کوئیک<sup>۱۴</sup> دارای مزایای بیشماری است. در حقیقت در روش حاضر رابطه متغیرها بر روی سطوح حجم معیار با استفاده از معادلات حاکم به دست می آید.

در این راستا، برای به دست آوردن یک رابطه مناسب برای مولفه ممنتم  $f = \rho u$  بر روی سطوح حجم کنترل از شکل ساده شده معادله ممنتم در معادله (۱) که جملات مربوط به معادله پیوستگی از آن حذف شده‌اند بهره جویی می شود:

$$A \frac{\partial f}{\partial \tau} + u \frac{\partial(fA)}{\partial x} + fA \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

در معادله (۲۱) عبارت زمانی به صورت تفاضل پسرو،

$$\rho c_v \frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \bar{\rho}_e c_v \frac{t_e - t_e^\circ}{\Delta \tau} \quad (28)$$

$$\rho u c_v \frac{\partial t}{\partial x} \approx \bar{f}_e c_v \frac{t_e - T_p}{\Delta x / 2} \quad (29)$$

$$P \frac{\partial u}{\partial x} \approx p_e \frac{U_E - U_P}{\Delta x} \quad (30)$$

$$p u \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \approx \bar{p}_e u_e \left( \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \right)_e \quad (31)$$

با توجه به تقریبهای در نظر گرفته شده برای عبارتهای معادله (۲۷) و جایگزینی آنها در این معادله، مقدار دما در سطح سلول برحسب مقادیر متغیرهای مجهول بر روی مراکز سلول مجاور به دست می آید:

$$t_e = \frac{t_e^\circ}{1 + 2C_e} + \frac{2C_e}{1 + 2C_e} T_p + \frac{C_e \bar{P}_e}{\bar{\rho}_e \bar{u}_e C_v (1 + 2C_e)} \left( \frac{F_p}{\bar{P}_p} - \frac{F_E}{\bar{P}_E} \right) - \frac{C_e \bar{P}_e}{\bar{\rho}_e c_v (1 + 2C_e)} \Delta x \left( \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \right)_e \quad (32)$$

برای محاسبه مقدار دما مربوط به تکرار قبل که در بعضی محاسبات از جمله معادله (۲۰) مورد نیاز است یا از معادله فوق و یا از تقریب ساده بالادست استفاده می شود. هم چنین برای محاسبه چگالی مربوط به تکرار قبل، از تقریب بالادست ( $\rho_e = \rho_p$ ) و یا از خطی سازی نیوتن-رافسون، معادله (۵)، به کمک متغیرهای به دست آمده از تکرار قبلی می توان استفاده کرد. برای محاسبه مجهول فشار بر روی سطوح سلول با متوسط گیری معمولی آن را به مراکز سلول همسایه مرتبط می کنیم:

$$p_e \approx (P_p + P_E) / 2 \quad (33)$$

## ۵-۲- حل مشکل میدان نوسانی فشاری و محاسبه

### سرعت جابه جا کننده در روی سطوح حجم معیار

اگر مقادیر شار جرمی محاسبه شده در معادله (۲۶) هم در معادله ممتن یعنی معادله (۸) و هم در معادله پیوستگی یعنی معادله (۳) قرار گیرد به علت عدم استفاده از شبکه جابه جا شده موضوع رخداد میدان فشاری مواج که در قسمت مقدمه به تفصیل توضیح داده شد به شدت موضوعیت پیدا می کند. همان

عبارتهای جابه جایی به صورت بالادست و عبارت فشار به صورت اختلاف مرکزی بر روی سطح سلول (به طور مثال سطح شرقی  $e$ ) تقریب زده می شوند:

$$A \frac{\partial f}{\partial \tau} \approx A_e \frac{f_e - f_e^\circ}{\Delta \tau} \quad (22)$$

$$u \frac{\partial(fA)}{\partial x} \approx \bar{u}_e \frac{(A_e f_e) - (A_p F_p)}{\Delta x / 2} \quad (23)$$

$$fA \frac{\partial u}{\partial x} \approx \bar{f}_e A_e \frac{(f_e / \bar{\rho}_e) - (F_p / \bar{\rho}_p)}{\Delta x / 2} \quad (24)$$

$$A \frac{\partial P}{\partial x} \approx A_e \frac{P_E - P_p}{\Delta x} \quad (25)$$

با جاگذاری گسسته سازیهای ذکر شده در معادله (۲۱) و کمی ساده سازی، از این معادله مقدار شار جرمی یا متغیر ممتن روی سطح سلول  $e$  برحسب مقادیر مجهولات اصلی که روی مرکز سلولهای حاضر و همسایه اند به دست می آید:

$$f_e = \frac{2C_e \left( \frac{A_p}{A_e} + \frac{\bar{P}_e}{\bar{\rho}_p} \right)}{1 + 4C_e} F_p + \frac{C_e}{u_e (1 + 4C_e)} (P_p - P_E) + \frac{f_e^\circ}{1 + 4C_e} \quad (26)$$

که در آن  $C$  معرف عدد بدون بعد کورانت است. معادله فوق نشان می دهد که استفاده از روش تاثیر فیزیکی باعث ایجاد همبستگی قوی بین مقادیر در سطوح مرزی و مقادیر در مراکز سلول می شود. جاگذاری این معادله در معادله ممتن قطعاً یک همبستگی قوی بین میدانهای فشار و ممتن ایجاد می کند.

برای تقریب دما روی سطوح سلول نیز از شکل ساده شده معادله انرژی در معادله (۱) که فاقد جملات معادله های پیوستگی و ممتن باشد استفاده می شود:

$$\rho c_v \frac{\partial t}{\partial \tau} + \rho u c_v \frac{\partial t}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} + p u \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

مشابه عملیاتی که در مورد معادله ممتن انجام شد عبارت زمانی معادله (۲۷) به صورت تفاضل پسرو، عبارت جابه جایی به صورت تقریب بالادست، عبارت فشار به صورت اختلاف مرکزی و جمله آخر به صورت مقدار معلوم در سطح سلول تقریب زده می شود:

این عبارت را می‌توان مستقیماً در معادله پیوستگی یعنی معادله (۳) به کار گرفت.

### ۵-۳- اصلاح و بهبود عبارت جابه‌جایی در معادله ممتم

با در نظر گرفتن نقش دو گانه سرعت در معادلات پیوستگی و ممتم، این دو معادله در حالت دایمی به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(uA(\rho u))}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

در این دو معادله دو عبارت  $u$  و  $\hat{u}$  هر یک دارای مفاهیم خاص خود هستند. مولفه سرعتی که در جریان جرمی ظاهر می‌شود سرعت جابه‌جا کننده یا سرعت بقای جرم نامیده می‌شود و مولفه‌ای که در عبارت جابه‌جایی معادله ممتم وجود دارد سرعت جابه‌جا شونده نام دارد که شار جرمی را از سطوح حجم معیار جابه‌جا می‌کند. برای متمایز کردن این دو سرعت، سرعت جابه‌جا کننده با علامت  $\hat{\phantom{u}}$  متمایز شده است. بدون اینکه در مفهوم این دو سرعت تغییری ایجاد شود می‌توان چگالی را در عبارت جابه‌جایی معادله ممتم به جای  $u$  با  $\hat{u}$  کوپل کرد و از معادل بیان جرمی آنها یعنی  $f$  و  $\hat{f}$  استفاده کرد:

$$\frac{\partial(\hat{f} A)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(u(\hat{f} A))}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

در بررسی حاضر، به‌طور کلی دو نوع خطی‌سازی برای خطی کردن معادله ممتم پیشنهاد داده می‌شود. یک روش خطی‌سازی که به سرعت جابه‌جا شونده نقش فعال می‌دهد به نام خطی‌سازی ساده است که به صورت زیر است:

$$\hat{u} f \approx \hat{u} \hat{f} \quad (41)$$

دومین نوع خطی‌سازی که مبتنی بر روش نیوتن-رافسون است به هر دو عامل موجود در عبارت غیرخطی نقش فعالی می‌دهد:

$$\hat{u} f \approx \hat{u} \hat{f} + \hat{f} \hat{u} - \hat{u} \hat{f} \quad (42)$$

گونه که توضیح داده شد برای گریز از این رخداد لازم است از مقادیر سرعت‌های دوگانه بر روی سطوح حجم معیار استفاده کرد [۲]. با این هدف مقدار ثانویه شار جرمی بایستی به طریقی محاسبه شود که همانند معادله (۲۶) فیزیک بیان شده توسط جریان را تامین کند. با این هدف شار جرمی ثانویه از تلفیق گسسته‌سازی دو معادله پیوستگی و ممتم پیشنهاد می‌شود. این پیشنهاد توسط دربندی و بستان‌دوست [۱۱] برای جریان اویلر تراکم‌ناپذیر به شکل خام زیر مطرح شده است:

$$[(\text{Momentum Eq. Error}) - u (\text{Continuity Eq. Error})] = 0 \quad (34)$$

این فرمول‌بندی پیشنهادی اثر خطای هر دو معادله پیوستگی و ممتم را در سطوح حجم کنترل برای به‌دست آوردن سرعت‌های جابه‌جا کننده لحاظ می‌کند. اگر معادلات پیوستگی و ممتم در معادله (۳۴) جاگذاری شوند به‌دست می‌آید:

$$\left( A \frac{\partial f}{\partial \tau} + u \frac{\partial(fA)}{\partial x} + fA \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x} - u \left( \frac{\partial(\rho A)}{\partial \tau} + \frac{\partial(fA)}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (35)$$

با استفاده از این معادله، معادله‌ای برای ممتم به‌دست می‌آید که آن را ممتم جابه‌جا کننده می‌نامیم. برای گسسته‌سازی معادله (۳۵) به این صورت عمل می‌شود که عبارت‌های داخل پرانتز اول مشابه با معادلات (۲۲) تا (۲۵) تقریب زده می‌شوند، عبارت اول پرانتز دوم به صورت مقدار معلوم در سطح سلول و عبارت دوم در پرانتز دوم به روش بالادست تقریب زده می‌شود:

$$uA \frac{\partial p}{\partial \tau} \approx \bar{u}_e A_e \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} \right)_e \quad (36)$$

$$u \frac{\partial(fA)}{\partial x} \approx \bar{u}_e \frac{(fA)_e - (FA)_p}{\Delta x / 2} \quad (37)$$

با جاگذاری معادلات (۲۲) تا (۲۵)، (۳۶) و (۳۷) در معادله (۳۵)، معادله‌ای برای ممتم به‌دست می‌آید که آن را ممتم جابه‌جا کننده می‌نامیم. این ممتم با علامت  $\hat{\phantom{u}}$  از ممتم جابه‌جا شونده در معادله (۲۶) متمایز می‌شود:

$$\hat{f}_e = \frac{2C_e}{1+2C_e} \frac{\bar{p}_e}{\bar{\rho}_p} F_p + \frac{C_e}{1+2C_e} (P_p - P_E) + \frac{f_e^\circ}{1+2C_e} + \frac{C_e \Delta x}{1+2C_e} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} \right)_e \quad (38)$$



## ۶- نتایج

فرمول توسعه یافته در این تحقیق قابلیت حل جریان در تمامی رژیمهای سرعت را داراست. با توجه به این دانسته، بخش نتایج ابتدا معطوف به ارائه توانایی فرمولبندی حاضر برای حل جریان در گستره کامل سرعت می‌شود. آن‌گاه عملکرد دو روش خطی‌سازی توسعه یافته INRL و ساده SNRL در حل جریان با گستره وسیعی از رژیمهای متفاوت مورد بررسی قرار داده می‌شود. مقایسه عملکرد خطی‌سازی بهبود یافته با خطی‌سازی ساده می‌تواند با بررسی موضوعهای زیر به شیوه بهتری انجام پذیرد. موضوع اول مقایسه دقت دو روش در حل یک مسئله خاص است. پر واضح است که هرچقدر دقت جوابهای عددی به دست آمده از یک روش بیشتر باشد نشان دهنده مزیت آن روش است. موضوع دوم مقایسه سرعت همگرایی دو روش است. در این راستا از فاکتوری به نام تعداد تکرار متوسط استفاده می‌کنیم. موضوع سوم محدوده کاربرد روش است. همان‌گونه که می‌دانیم از پارامترهایی که می‌توان توسط آن سرعت رسیدن به جواب دائم در مسایلی که مجبور به استفاده از پیشروی زمانی هستیم را افزایش داد گام زمانی است. هر چقدر بتوانیم گام زمانی را افزایش دهیم زمان رسیدن به جواب حالت دائم کوتاهتر می‌شود. پس امکان همگرایی با اندازه گام زمانی بزرگتر خود یک مزیت مهم محسوب می‌شود.

در بخش نتایج نیازمند آن هستیم که با انتخاب یک آزمون مناسب اقدام به بررسی سه موضوع اشاره شده در پاراگراف قبلی کنیم. یکی از بهترین آزمون‌های پیشنهادی برای حالت جریان در تمامی رژیمهای سرعت آزمون جریان درون شیپوره همگرا - واگراست که دارای حل تحلیلی نیز هست. در شیپوره گستره وسیعی از سرعتها به همراه یک ناپیوستگی شدید ایستاده وجود دارد. البته روش عددی ارائه شده در این تحقیق محدود به حل جریان در شیپوره نمی‌شود. در اینجا تنها از هندسه شیپوره برای بررسی عملکرد روش عددی در حل جریان با

اگر خطی‌سازی نیوتن-رافسون را مجدداً برای  $\hat{u} = \frac{\rho \hat{u}}{\rho}$  به کار بندیم خواهیم داشت:

$$\hat{u} = \frac{\rho \hat{u}}{\rho} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} (\rho \hat{u}) - \frac{\hat{u}}{\bar{\rho}} \rho + \hat{u} \quad (43)$$

با قرار دادن معادله فوق در معادله (۴۱) و پس از ساده‌سازی داریم:

$$\hat{u} f \approx \hat{u} \bar{f} + \bar{u} \hat{f} - (\hat{u} \bar{u}) \rho \quad (44)$$

این خطی‌سازی که نقشی فعال برای هر یک از سرعتهای جابه‌جا شونده و جابه‌جا کننده در نظر می‌گیرد را خطی‌سازی نیوتن-رافسون اصلاح‌شده (INRL) می‌نامیم. مقدار چگالی نیز از تکرار قبلی جاگذاری می‌شود. با در نظر گرفتن این تقریب و تعریف مولفه ممنتم، یک معادله کلی که در برگرنده دو خطی‌سازی ساده و نیوتن-رافسون است به دست می‌آید. شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

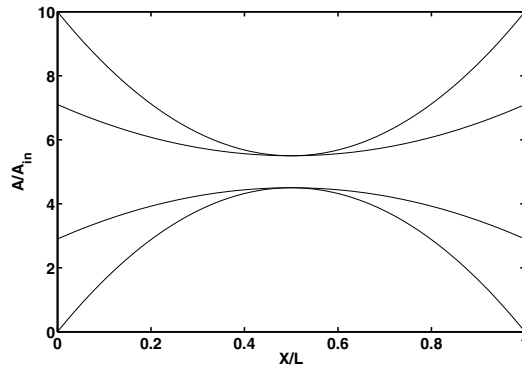
$$\hat{u} f \approx \hat{u} \bar{f} + k(\bar{u} \hat{f} - \hat{u} \bar{f}) \quad (45)$$

که اگر  $k=0$  باشد خطی‌سازی ساده، یعنی معادله (۴۱) و اگر  $k=1$  باشد، خطی‌سازی نیوتن-رافسون معادله (۴۴)، نتیجه می‌شود. اگر مفاهیم سرعتهای جابه‌جا شونده و جابه‌جا کننده در هم آمیخته شود نوعی دیگر از خطی‌سازی به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\rho \hat{u} \hat{u} \approx 2k_1 \bar{u} \hat{f} - k_2 \rho \hat{u}^2 \quad (46)$$

که  $k_1$  و  $k_2$  مقادیر ثابتی‌اند. و مشابه با معادله (۱۲)، اگر  $k_1=0/5$  و  $k_2=0$  باشد آن‌گاه خطی‌سازی ساده (SNRL) نتیجه می‌شود.

در این تحقیق عملکرد روش خطی‌سازی موسوم به نیوتن-رافسون اصلاح‌شده (INRL) یعنی معادله (۴۴)، و عملکرد خطی‌سازی موسوم به نیوتن-رافسون ساده (SNRL) یعنی معادله (۴۶)، با فرض  $k_1=k_2=1$  برای حل معادلات شبه یک بعدی اوپلر در شیپوره همگرا-واگرا مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به دست آمده با هم مقایسه و تفسیر می‌شوند.



شکل ۲- هندسه شیپوره های ۱ (پروفیل داخلی) و ۲ (پروفیل خارجی)

می‌شوند. برای حل جریان با موج ضربه‌ای ایستاده در شیپوره، مقادیر فشار، سرعت و دما در ورودی و مقدار فشار در خروجی مشخص می‌شوند. مقادیر سرعت و دما در خروجی با درونیابی از داخل میدان جریان به دست می‌آیند. در حل عددی، معیار همگرایی در هر گام زمانی به کمک معیار حد همگرایی  $\varepsilon$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{MAX} \left( \left| \frac{P_i - \bar{P}_i}{P_i} \right|, \left| \frac{T_i - \bar{T}_i}{T_i} \right| \right) < \varepsilon \quad (48)$$

هم‌چنین معیار رسیدن به جواب حالت پایا به این صورت در نظر گرفته شده که جوابها با افزایش گام زمانی تغییر نکنند.

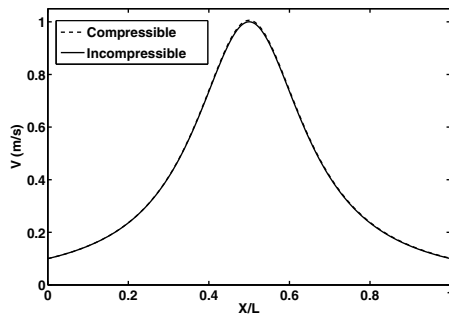
### ۶-۱- بررسی دقت فرمولبندی توسعه داده

در بررسی اول، هدف اثبات صحت روش در حل جریان تراکم پذیر و معادل تراکم ناپذیر آن است. برای بررسی قابلیت روش حاضر در حل جریان تراکم ناپذیر، جریان تراکم پذیر با تراکم پذیری بسیار ناچیز در هندسه شیپوره شماره (۲) مورد بررسی قرار گرفت. اگر سرعت جریان ورودی به این شیپوره ۰/۱ متر بر ثانیه باشد، حداکثر سرعت در گلوگاه ۱ متر بر ثانیه خواهد بود که معرف تراکم پذیری ناچیز جریان است. توزیع سرعت به دست آمده از حل جریان به صورت تراکم ناپذیر (یعنی چگالی ثابت) و تراکم پذیر ( $\rho = P/RT$ ) با استفاده از ۲۰۱ گره در شکل (۳) ارائه شده است. در شکل (۴)، یک پروفیل شیپوره متقارن دیگر، شیپوره ۳، با نسبت مساحت ورودی به گلوگاه ۲۰۰ رسم شده است. نتایج توزیع سرعت

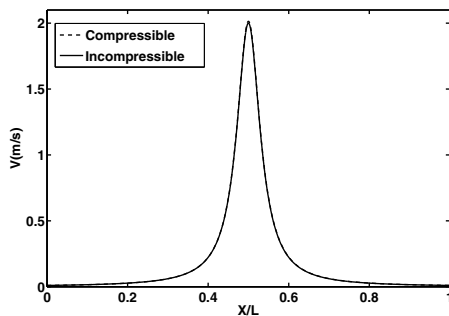
سطح مقطع متغیر در تمام رژیمهای سرعت استفاده شده است. مسلم اینکه بررسی عملکرد فرمولبندی توسعه یافته در یک هندسه که حل تحلیلی آن موجود است برای استفاده بهینه از آن در مسایل پیچیده‌تر که هیچ حل تحلیلی از آن وجود ندارد ضرورتی اجتناب ناپذیر است. پروفیل شیپوره مورد استفاده در این تحقیق از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\text{Area}(x) = 1 + m(x - 1/2)^2 \quad (47)$$

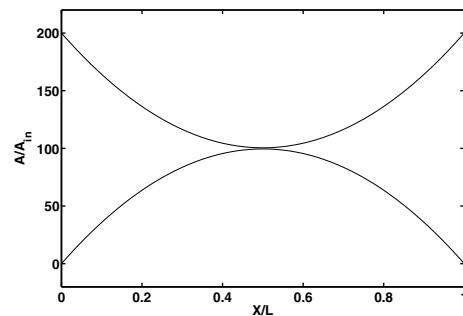
این معادله به گونه‌ای برگزیده شده که امکان پوشش گستره وسیعی از رژیمهای سرعت از ماخ تقریباً صفر تا ماخ بسیار بالا را در یک هندسه ثابت فراهم آورد. ضریب  $m$  یک عدد مثبت و ضریب  $l$  بیانگر طول شیپوره است. با تغییر این دو پارامتر، می‌توان سطح مقطع شیپوره را به طور دلخواه افزایش داد. به طور مثال، این پروفیل برای  $m=0/0142$  و  $l=30$  (پروفیل شیپوره ۱) و  $m=0/0036$  و  $l=100$  (پروفیل شیپوره ۲) در شکل (۲) رسم شده است. هر چه دهانه ورودی شیپوره بزرگتر باشد عدد ماخ ورودی ناچیزتر می‌شود. پروفیل تعریف شده نسبت به گلوگاه شیپوره متقارن است. این ویژگی الزام تقارن جوابها در سمت چپ و راست گلوگاه را در جریانهای مادون صوت فراهم می‌سازد. شرایط مرزی برای جریان به صورت تراکم ناپذیر یا تراکم پذیر مادون صوت به این صورت است که در ورودی شیپوره سرعت و دما و در خروجی آن فشار تعریف می‌شود. برای به دست آوردن فشار در ورودی، معادله پیوستگی حل می‌شود. مقادیر سرعت و دما در خروجی با درونیابی از داخل میدان جریان محاسبه



شکل ۳- توزیع سرعت در حل جریان به دو روش تراکم پذیر و تراکم ناپذیر در شیپوره ۲ با سرعت ورودی ۰/۱ متر بر ثانیه



شکل ۵- توزیع سرعت در حل جریان به دو روش تراکم پذیر و تراکم ناپذیر در شیپوره ۳ با سرعت ورودی ۰/۰۱ متر بر ثانیه

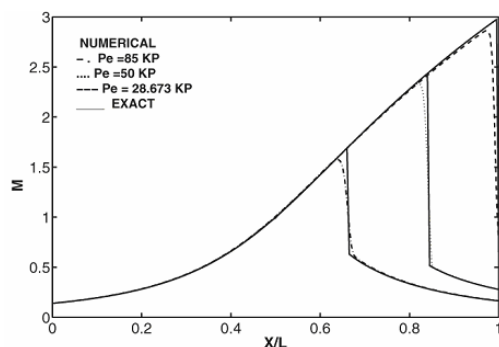


شکل ۴- پروفیل شیپوره با نسبت مساحت ۲۰۰ (شیپوره ۳)

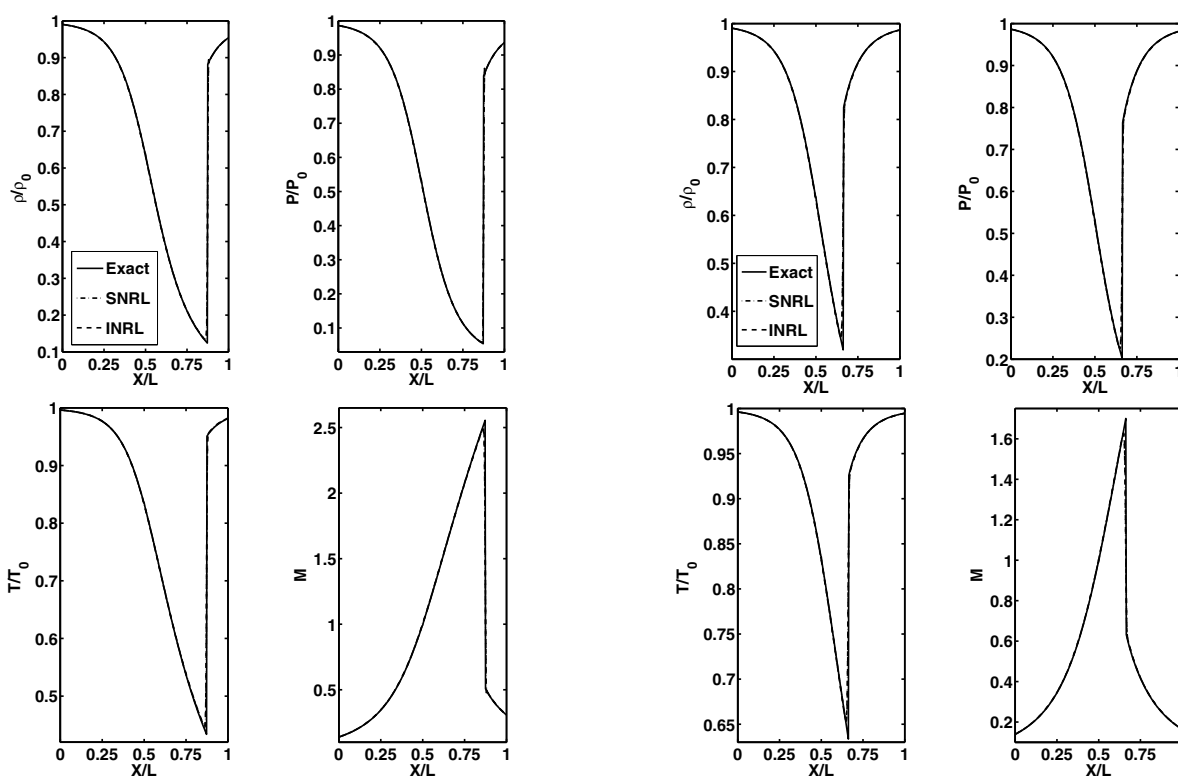
جریان مافوق صوت در ناحیه واگرای شیپوره افزایش می‌یابد و در نتیجه موج ضربه‌ای قوی‌تری در شیپوره رخ می‌دهد. الگوریتم معرفی شده در چند مقدار فشار خروجی متفاوت مورد آزمایش قرار گرفت که نتایج به دست آمده در شکل (۶) رسم شده است. این نتایج با استفاده از ۲۰۱ گره در گسسته سازی میدان حل به دست آمده است. با مقایسه جوابهای حاضر با جوابهای دقیق مشاهده می‌شود که فرمولبندی حاضر قابلیت تسخیر موج ضربه‌ای در گستره وسیعی از رژیم جریان (شامل زیر صوتی، گذر صوتی و فراصوتی) را داراست. به منظور ارزیابی بیشتر صحت جوابهای به دست آمده از دو روش خطی سازی INRL و SNRL، جریان در شیپوره (۱) برای شرایطی که فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال باشد یکبار دیگر مورد بررسی جزئی تر قرار می‌گیرد. حل عددی این مسئله با استفاده از ۴۰۱ گره و در کورانت ۰/۲ برای هر دو روش خطی سازی معرفی شده انجام شده است. با توجه به متغیر بودن

حل تراکم ناپذیر و تراکم پذیر برای این شیپوره در شرایط سرعت ورودی ۰/۰۱ متر بر ثانیه با استفاده از ۱۱۸۱ گره در شکل (۵) رسم شده است. شکلهای (۳) و (۵) بیان می‌دارند که فرمولبندی توسعه یافته در این بخش به راحتی هم در قالب جریان تراکم ناپذیر (چگالی ثابت) و هم در قالب جریان تراکم پذیر (چگالی متغیر) همگرا می‌شود و محدودیتی در کاربرد ماخ‌های بسیار پایین و حتی جریان تراکم ناپذیر ندارد. بسیاری از فرمولهای چگالی مینا از این توانمندی محروم‌اند. همان‌گونه که انتظار می‌رود جوابهای تراکم ناپذیر و تراکم پذیر در محدوده کاربردی فوق تفاوتی نشان نمی‌دهند.

در بخش دوم بررسی، اقدام به حل جریان با تراکم پذیری زیاد و وجود موج ضربه‌ای در شیپوره می‌کنیم. در این راستا، موقعیت موج ضربه‌ای ایستاده درون شیپوره با تعیین مقدار فشار خروجی تثبیت می‌شود. با کاهش فشار خروجی، موج ضربه‌ای به طرف خروجی شیپوره حرکت کرده و به عبارتی محدوده



شکل ۶- توزیع عدد ماخ؛ مقایسه جوابهای تحلیلی با عددی به دست آمده از روش خطی سازی INRL برای فشارهای خروجی متفاوت در شیپوره ۱

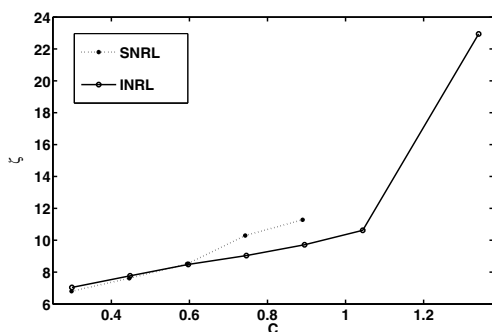


شکل ۸- مقایسه جوابهای تحلیلی با عددی به دست آمده به کمک دو روش خطی سازی SNRL و INRL در کورانت ۰/۲۰ برای شیپوره ۱ با فشار خروجی ۴۵ کیلو پاسکال

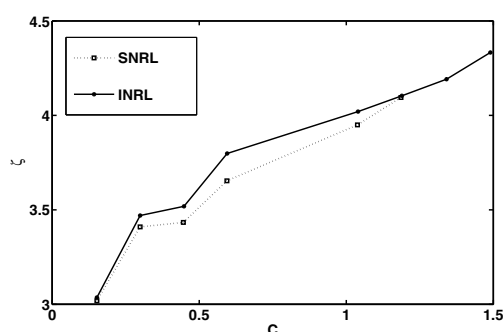
شکل ۷- مقایسه جوابهای تحلیلی با عددی به دست آمده از روش خطی سازی INRL و SNRL در کورانت ۰/۲ در شیپوره ۱ با فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال

انتظار می رود جوابهای دو روش خطی سازی با یکدیگر تفاوت ندارند و هر دو روش قادر به تعیین موقعیت موج ضربه ای با دقت یکسان اند. برای شیپوره (۱)، مجددا جریان در شرایط فشار خروجی ۴۵ کیلو پاسکال با استفاده از ۴۰۱ گره به صورت عددی حل شد که نتایج حاصل از بررسی در شکل (۸) آورده شده اند. حداکثر عدد ماخ در این آزمون حدود ۲/۵ است.

سرعت در درون شیپوره، عدد کورانت به صورت  $C = U_{\max} (\Delta\tau / \Delta x)$  تعریف و گزارش می شود. توزیع عدد ماخ، فشار، دما و چگالی (که به ترتیب نسبت به فشار سکون، دمای سکون و چگالی سکون بی بعد شده اند) برحسب طول بی بعد شده شیپوره در شکل (۷) ترسیم شده است. در این شکل جوابهای دقیقی نیز برای مقایسه رسم شده اند. همان گونه که



شکل ۱۰- مقایسه متوسط تعداد تکرارها در دو روش SNRL و INRL در فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال برای حد همگرایی  $10^{-7}$  در شیپوره ۱



شکل ۹- مقایسه متوسط تعداد تکرارها در دو روش SNRL و INRL در فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال برای حد همگرایی  $10^{-4}$  در شیپوره ۱

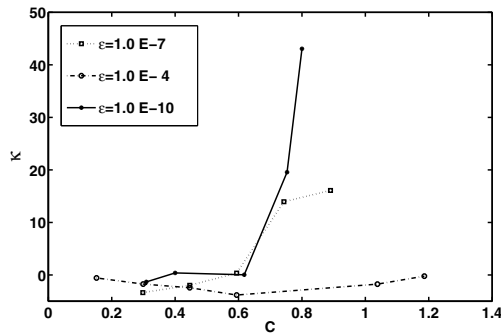
ایستاده در داخل شیپوره در طی گام‌های زمانی ابتدایی است. با بررسی شکل (۹) می‌توان نتیجه گرفت که برای حد همگرایی  $\varepsilon = 10^{-4}$  تعداد تکرار متوسط روش خطی سازی ساده SNRL از تعداد آن در روش INRL به مقدار جزئی کمتر است ولی این در حالی است که محدوده همگرایی روش SNRL تا کورانت حدود  $1/2$  و محدوده همگرایی روش INRL تا کورانت  $1/5$  است. به عبارت دیگر محدوده همگرایی روش INRL از SNRL بیشتر است. پس با روش اصلاح شده سریعتر می‌توان به جواب حالت پایدار رسید.

بررسی شکل (۱۰) نشان می‌دهد که تا محدوده کورانت  $0/55$  تعداد تکرار روش SNRL تقریباً با تعداد تکرار روش INRL یکسان است ولی برای بقیه مقادیر عدد کورانت روش خطی سازی اصلاح شده بسیار سریعتر همگرا شده است و البته این همگرایی تا کورانت  $1/32$  ادامه یافته است. این در حالی است که در روش SNRL از کورانت  $0/9$  به بعد استفاده از این روش منجر به واگرایی الگوریتم می‌شود. مشابه این رفتار ولی با شدت بیشتر را می‌توان در شکل (۱۱) مشاهده کرد. با افزایش دقت همگرایی به  $\varepsilon = 10^{-10}$  روش SNRL فقط تا محدوده کورانت  $0/83$  قابلیت همگرایی دارد در حالی که روش INRL تا عدد کورانت  $1/09$  نیز همگرا می‌شود. تفاوت تعداد تکرار متوسط در این حالت کاملاً مشهود است. در روش خطی سازی اصلاح شده افزایش تعداد تکرار متوسط به صورت

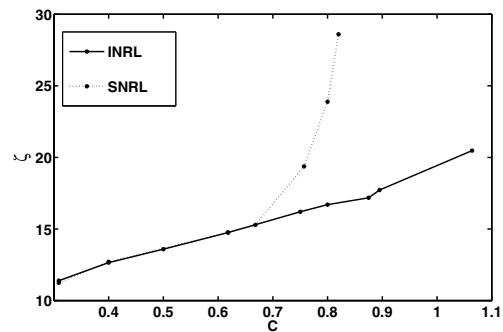
نمودارهای به دست آمده بیانگر این نکته‌اند که فرمولبندی حاضر به خوبی قابلیت تحلیل مناسب جریان در تمام رژیم‌های صوتی را داراست. مجدداً این آزمایش بیان می‌دارد که تفاوتی بین نتایج دو روش خطی سازی وجود ندارد و هر دو روش از دقت مناسبی برخوردارند. مقایسه شکل‌های (۷) و (۸) با شکل (۶) نشان می‌دهد که استفاده از  $401$  گره برای گسسته سازی میدان حل در مقایسه با استفاده از  $201$  گره جواب‌های دقیقتری به دست می‌دهد. البته لازم به ذکر است که بررسی نتایج حل عددی نشان داد که افزایش تعداد گره‌ها به بیش از  $401$  گره تأثیر مهمی در بهبود دقت حل ندارد.

## ۲-۶- مقایسه عملکرد دو روش خطی سازی

در شکل‌های (۹) تا (۱۱) تعداد تکرار متوسط در هر گام زمانی (۷) برای رسیدن به حد همگرایی  $\varepsilon = 10^{-4}$ ،  $\varepsilon = 10^{-7}$  و  $\varepsilon = 10^{-10}$  در کورانت‌های مختلف برای دو روش خطی سازی معرفی شده در شیپوره (۱) برای حالتی که فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال است رسم شده است. هدف از ارائه این شکل‌ها، مقایسه عملکرد یا سرعت همگرایی دو روش خطی سازی INRL و SNRL نسبت به یکدیگر است. تجربه نشان می‌دهد که در قدم‌های زمانی اولیه تعداد تکرار برای رسیدن به حد همگرایی بسیار بیشتر از تعداد تکرار در قدم‌های زمانی بعدی است. این به سبب شکل گرفتن اولیه موج ضربه‌ای



شکل ۱۲- درصد کاهش نسبی تعداد تکرار متوسط در فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال برای رسیدن به حدود همگرایی  $10^{-4}$ ،  $10^{-7}$  و  $10^{-10}$  برای دو روش SNRL و INRL در شیپوره ۱



شکل ۱۱- مقایسه متوسط تعداد تکرارها در دو روش SNRL و INRL در فشار خروجی ۸۵ کیلو پاسکال برای حد همگرایی  $10^{-10}$  در شیپوره ۱

برای دو روش خطی سازی در سه حد همگرایی مختلف رسم شده است. در این شکل می توان درصد نسبی اختلاف تکرار بین دو روش را با تغییر پارامترهای عدد کورانت و حد همگرایی مشاهده کرد. به طور کلی، نتایج برگرفته از شکل های (۹) تا (۱۱) به خوبی در این نمودار قابل بازتاب است. همان گونه که ملاحظه می شود تفاوت فاحشی بین عملکرد دو روش SNRL و INRL در رسیدن به معیار همگرایی کمتر از  $\varepsilon = 10^{-10}$  وجود دارد. با توجه به این شکل، حداکثر مقدار "درصد بهبود همگرایی" در فشار ۸۵ کیلو پاسکال برای رسیدن به کوچکترین معیار همگرایی، برابر با ۴۲ درصد است که بیانگر عملکرد کاملاً برتر روش INRL در تسخیر موج ضربه ای ایستاده است.

#### ۷- نتیجه گیری

در این تحقیق، یک روش حجم محدود پایه با کاربرد شبکه جابه جا نشده که نیازمند به تعریف دو سرعت موسوم به جابه جا شونده و جابه جا کننده بود مورد بررسی و توسعه عملکرد قرار گرفت. علاوه بر مزیت استفاده از شبکه جابه جانشده، از دیگر قابلیت های شاخص این روش می توان به نحوه محاسبه شارها بر روی سطوح سلول اشاره کرد که برخلاف دیگر روشها (مانند هایبرید، کوئیک، توان-پیرو) برای تخمین شارها از توابع ریاضی محض استفاده نمی کند بلکه از

خطی است در حالی که در روش خطی سازی ساده این افزایش از محدوده عدد کورانت  $0/7$  به بعد شکل غیر خطی و بلکه نمایی به خود گرفته است. این بدان مفهوم است که استفاده از این خطی سازی برای حل مسئله در محدوده کورانت فوق از نظر محاسباتی به هیچ وجه به صرفه نیست.

اگر  $C_I$  و  $C_S$  را به ترتیب حداکثر عدد کورانت در روش INRL و SNRL در نظر بگیریم می توان درصد افزایش محدوده عدد کورانت را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\eta = (C_I - C_S) / C_S \times 100 \quad (49)$$

با توجه به اطلاعات داده شده در شکل های (۹) تا (۱۱)، ملاحظه می شود که این پارامتر برای سه حد همگرایی  $\varepsilon = 10^{-4}$ ،  $\varepsilon = 10^{-7}$  و  $\varepsilon = 10^{-10}$ ، به ترتیب برابر با ۲۰، ۴۶/۶ و ۳۱/۳ درصد است. با بررسی این مقادیر به خوبی می توان تفاوت محدوده کارایی این دو روش خطی سازی را ملاحظه کرد. در ضمن، برای اینکه مقایسه تعداد تکرار بین دو روش بر حسب عدد کورانت به صورت دقیقتری انجام پذیرد پارامتر درصد بهبود همگرایی  $K$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$K = (N_S - N_I) / N_I \times 100 \quad (50)$$

که  $N_I$  و  $N_S$  به ترتیب معرف تعداد تکرار متوسط برای رسیدن به حد همگرایی تعریف شده در روش های SNRL و INRL است. در شکل (۱۲)، پارامتر  $K$  بر حسب عدد کورانت

کاربری آن را نیز به میزان قابل توجهی وسعت داد. فرمولبندی توسعه یافته برای حل جریان درون شیپوره با و بدون ناپیوستگی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که فرمول توسعه یافته حاضر بدون اینکه نیاز به افزودن مکانیزمهای توانمند اضافی دیگر نظیر لزجت مصنوعی، معادلات اصلاح کننده یا معرفی دیگر پارامترهایی که معادلات را از شکل متداول خود خارج می‌کنند داشته باشد قابلیت حل جریان در تمام گستره سرعتها (از جریان تراکم ناپذیر تا جریان تراکم پذیر و در طیف وسیع عدد ماخ از صفر تا جریان با موج ضربه‌ای ایستاده قوی) را داراست.

خود معادلات حاکم بر جریان استفاده می‌کند. این باعث می‌شود تا نه تنها نقش اصلی هر معادله به نمایندگی اصلی آن معادله تفویض شود، بلکه همبستگی معادلات با یکدیگر افزایش و عملکرد الگوریتم بهبود یابد. علاوه بر این سرعتهای جابه جا شونده و جابه جا کننده تعریف شده در اصول دارای مفاهیم فیزیکی متفاوت‌اند که رعایت این مفاهیم در خطی سازی معادلات موجب افزایش بیشتر عملکرد روش پایه می‌شود. در این راستا این مفاهیم در خطی سازی عبارتهای جابه جایی معادلات ممتنم حفظ شد. این قابلیت نه تنها موجب افزایش سرعت همگرایی خطی سازی جدید شد بلکه محدوده

## واژه نامه

- |  |                        |                               |
|--|------------------------|-------------------------------|
| 1. collocated                            | 5. SIMPLE algorithm    | 10. shock tube                |
| 2. pressure checkerboard problem         | 6. staggered           | 11. lumped-mass approach      |
| 3. all-speed                             | 7. scalar              | 12. physical influence scheme |
| 4. stream function-vorticity formulation | 8. convected velocity  | 13. Hybrid                    |
|  | 9. convecting velocity | 14. QUICK                     |

## مراجع

- Patankar, S.V., and Spalding, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass, and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp.1787-1806, Oct. 1972.
- Rhie, C.M., and Chow, W.L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.*, Vol. 21, pp.1525-1532, 1983.
- Miller T.F., and Schmidt, F.W., "Use of a Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 14, pp. 213-233, 1988.
- Rahman, M.M., Miettinen, A., and Sikonen, T., "Modified SIMPLE Formulation on a Collocated Grid with an Assessment of Simplified QUICK Scheme," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 30, pp. 291-314, 1996.
- Van Doormal, J.P., and Raithby, G.D. "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 12, No.2, pp.239-247, 1998.
- Darbandi, M., and Schneider, G.E., "Analogy-Based Method for Solving Compressible and Incompressible Flows," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 12, No.2., pp.239-247, 1998.
- Darbandi, M., and Mokarizadeh, V., "A New Modified Pressure-Based Algorithm to Solve Flow Fields with Shock and Expansion Waves," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 46, No.5, pp.497-504, 2004.
- Tannehil, J.C., Anderson, D.A., and Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd edition, Taylor and Francis, Washington, 1997.
- Schneider, G.E., and Raw, M.J., "Control Volume Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Co-located Variables -1.Computational Procedure," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 11, No. 4, pp.363-390, 1987.
- Darbandi, M., and Schneider, G.E., "Comparison of Pressure-Based Velocity & Momentum Procedure in Shock Tube Problem," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 33, pp.287-300, 1998.
- Darbandi, M., and Bostandoost S.M., "A New Formulation Toward Unifying the Velocity Role in Collocated Variable Arrangement," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 47, No. 4, pp.361-382, April 2005.